离散时间信号处理

（第2版）

DISCRETE-TIME SIGNAL PROCESSING

Second Edition



[美] A.V.奥本海姆　R.W.谢弗

J.R.巴克

刘树棠 黄建国　译

西安交通大学出版社

Discrete-Time Signal Processing

离散时间信号处理

（第 2 版）

Alan V. Oppenheim
Massachusetts Institute of Technology
Ronald W. Schafer
Georgia Institute of Technology
with
John R. Buck
University of Massachusetts Dartmouth

[美] A.V. 奥本海姆　　R.W. 谢弗
J.R. 巴克

刘树棠　黄建国　译

M436 c1

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书为美国麻省理工学院(MIT)著名教授 A.V. 奥本海姆和佐治亚理工学院(GIT)著名教授 R.W. 谢弗等人所著,系统论述了离散时间信号处理的基本理论和方法,是国际信号处理领域中的经典权威教材。1999年修订后推出了第 2 版。修订后的第 2 版更强调基础性和基本内容,全书由原来的 12 章缩为 11 章,内容更加精练,除保持了第 1 版基本概念清楚,层次安排合理,条理清晰,系统性强的特点外,还大幅度增加了例题和习题,并将习题按难度和复杂程度重新组合,同时增加了一些内容和习题答案,使本书更适合大学本科生和相关专业的研究生学习。

本书从第 1 版问世以来,一直是国际上颇受欢迎的大学本科高年级和研究生教材,相信经过修订的第 2 版更会得到我国广大读者的青睐。

本书可供从事数字信号处理工作的科技人员,高等学校有关专业的高年级学生、研究生及教师使用。

Authorized translation from the English language edition published by Prentice-Hall, Inc.
Copyright © 1999
All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from the Publisher.
Chinese Simplified language edition published by Xi'an Jiaotong University Press
Copyright © 2000

本书中文简体字版由美国 Prentice-Hall 出版公司授权西安交通大学出版社出版发行,未经出版者书面许可,不得以任何方式复制和抄袭本书的任何部分。

版权所有,翻印必究。

图书在版编目(CIP)数据

离散时间信号处理:第 2 版/(美)奥本海姆(Oppenheim, A. V.),(美)谢弗(Schafer, R. W.),(美)巴克(Buck, J. R.)著;刘树棠,黄建国译 .—西安:西安交通大学出版社,2001.9
书名原文:Discrete-Time Signal Processing
ISBN 7-5605-1465-0

Ⅰ. 离… Ⅱ. ①奥… ②谢… ③巴… ④刘… ⑤黄… Ⅲ. 离散信号:时间信号-信号处理-高等学校-教材 Ⅳ. TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 063531 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)
陕西省轻工印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:787 mm×1 092 mm 1/16 印张:45.25 字数:1 092 千字
2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷
印数:0 001—5 000 定价:78.00 元
陕版出图字:25—2000—071 号

发行科电话:(029)2668357,2667874

译者的话

随着数字信号处理学科理论和方法的日臻完善，处理手段和技术的日益先进，以及所涉及的应用领域愈来愈广泛，有必要将20多年来陆续在各大学开设的“数字信号处理”课程完全定位在大学本科生的层面上。这是译者认为作者在该书第1版(1989年)出版10年后推出第2版的最主要初衷。这本教材的第一代是作者于1975年写的《Digital Signal Processing》一书。当时这门课只在少数几所大学，而且毫无例外地都在研究生的层次上开设。到了1989年，作者推出了第二代的《Discrete-Time Signal Processing》，这时这门课已在大多数大学开设，其对象是研究生和大学本科高年级学生。该书的体系和内容较前已做了大幅度的调整。进入20世纪90年代，这门课几乎毫无例外地在各大学本科生中开设，而且所涵盖的学生的专业领域也大为拓宽。这一状况基本上与我国情况相符。这一过程既反映出学科发展、技术进步和应用广泛的进程，也伴随着在教材内容和组织上的演变过程。

针对以本科生为主的教材，又面临着发展如此迅速，内容如此丰富和涉及应用领域如此广泛的这样一本教材，应该首先考虑的是什么问题？作者认为对于这样一类教材应该首先考虑的是：不是要企图去“涵盖”学科发展中的方方面面，而应该努力去“揭开”它的最基础和最核心的东西，并要让广大学生和工程师们易于接受。正因为如此，才使作者已写就的几本书普遍受到欢迎，广泛被采用，并经久不变，视为经典著作，享有很高的声誉。基于此，本书在第1版的基础之上作了如下处理：

(1)由于在过采样的A/D,D/A转换和数字滤波器实现中，多采样率信号处理理论和方法的重要性，而大大扩充了这方面的内容；由于在数据压缩标准中所起的核心作用而增加了余弦变换。

(2)由于倒谱概念及其同态变换方法从本科生的层面上看并不是一个最基本的内容而在正文中被剔除，放在习题中作为扩充内容，或者拟放在研究生的专题课中去讨论。

(3)大大加大习题(由原371道题扩大到588道题)和例题(由原113道题扩大

到 137 道题)的数量,并将每一例题都冠以标题,以突出它的作用。

(4)重组习题。将习题分为 3 个档次(基本题、深入题和扩充题)和 4 种类型,并对第 1 类基本题给出答案。

除此以外,我们认为第 1 版和第 2 版就基本上属于大同小异了。该书第 1 版中译本自 1998 年出版以来,已获得较好反响。我们再次联手及时将第 2 版中译本奉献给读者,盼望能为读者所接受,并诚恳接受来自各方面的批评和指正。

本书前言和前 6 章由刘树棠译,后 5 章及附录由黄建国译。黄建国的研究生刘科伟和孙毅参与部分翻译和译稿的整理工作。西北工业大学张群飞副教授在整个工作过程中给予了很大的支持。译者对此均表示诚挚地感谢。感谢西安交通大学出版社总编杨鸿森教授、白居宪编审和总编办主任赵丽萍副编审在组织出版和编辑工作中所给予的支持。最后,对我们的家人孙澍和郑家梅同志,在她们自己繁忙的工作之余所给予的帮助和支持,特别是在近几年来持续不断的翻译工作中所给予的鼓励和忍耐精神表示深深地愧疚和衷心地感谢。

刘树棠于西安交通大学
黄建国于西北工业大学

前　言

这本书是我们于1975年出版的《Digital Signal Processing》一书第二代的继续。在当时，数字信号处理的技术领域虽处于它的初期，但是已经显露出的一些基本原理而可以将它们组织成一个完整而有关联的整体。尽管当时在几所学校已经有了这样一些课，但是几乎全都是属于研究生的课程。最初的教科书就是专门为这类课程写就的。

到了1985年，研究的步伐和集成电路技术都表明，数字信号处理该实现它在70年代就已显露出的巨大潜力了。数字信号处理(DSP)所萌发出的重要性清楚地表明对原书进行修订和更新内容是势在必行的了。然而，在筹划那个修订本时，由于已经出现的很多变化，很显然最合适的是在原书的基础之上重写一本新书，而同时又让原书仍然可以出售。我们将那本新书定名为《Discrete-Time Signal Processing》以强调该书所讨论的大部分理论和设计方法一般都是面向离散时间系统应用的。

到了1989年，《Discrete-Time Signal Processing》这本书出版时，DSP的基本原理已经普遍在大学本科阶段讲授了；有时甚至作为在有关线性系统第一门课中的一部分内容，或者在第3和第4学年稍微高深一些的档次上讲授，或者作为最初的研究生专题课中讲授。因此，认为在像线性系统、采样、多采样率信号处理、应用以及谱分析等方面的内容处置上大为扩展一些是合适的。另外，还用更多的例题来强调和说明一些重要概念。同时，我们还将那些业已表明对离散时间信号处理的理解不是最基本的一些内容进行了删除和浓缩。我们始终把精心构造的例题和家庭作业放在重要的地位，所以这本新书包括了400多个习题。

在这10年内，或者说自从《Discrete-Time Signal Processing》出版以来，一些重要的新概念已经建立，数字集成电路的容量成指数增长，以及涌现出日益扩大的应用领域；然而所包含的基本原理和基础性的内容仍然基本上是相差不多的，尽管在突出的重点上，理解上和教学方法上作了一些垂炼。因此，作为在今天强调DSP基本原理的一本教科书，我们来看一看对于《Discrete-Time Signal Processing》一书为使其仍具有当代水平而需要什么的时候，发现所需要的变化是远远少于先前的。在构思现在这本修订本时，我们的主导原则是：一本基础性教科书的主要目的是要揭示一个学科而不是要包罗一个学科。为此，现在这个修订本的目的就是要让离散时间信号处理这一学科甚至对大学生和实际工程师们都更加以可理解和接受，而不用在基本内容范围上作出过多考虑。为了这个目的，由于多速率信号处理在过采样的模数(AD)/数模(D/A)转换和数字滤波器实现中的重要性，我们大大扩展了在这方面的内容。由于余弦变换在数据压缩标准中起着核心的作用，也增添了余弦变换的讨论。同时，还删除了我们认为在现在的讨论范围内不太重要的一些内容，或者是放在更为深入一些教科书和高年级研究生课程中更为合适些的内容。有一些从正文中删除的概念(如有关倒谱的基本结果)已经放在新的课外习题中了。

这一修订本强调的一个主要部分是面向家庭作业和例题上。我们已经显著地增大了例题

的数量，这些例题在说明和理解基本概念上是很重要的。我们也增加了家庭作业的习题数量，并将这些习题按它们的难度和复杂程度进行了重新组织，再从中挑选了一部分题给出了答案。供讲授本书用的教师参考手册可从出版商处获得，其中包括了本书全部习题的最新题解；这些题解是由 MIT 的 Li Lee 和 Maya Said 以及 GIT 的 Jordan Rosenthal 和 Greg Slabaugh 准备的。这本手册还包括了我们在 MIT，GIT 和 University of Massachusetts Dartmouth 教这门课时所用的一些考试题。

和早先的教科书一样，本书是假定读者已具备高等微积分的背景，并在复数和复变函数基础方面有较好的掌握。另外，为了使讨论对更为广泛的读者可接受，我们删除了使用复数围线积分。包括拉普拉斯变换和傅里叶变换在内的对连续时间信号的线性系统理论有些了解仍然是一个基本的前提，而这些在大多数电气和机械工程系大学本科的课程安排中都是会有的。有了这些背景之后，这本书就自成体系了；尤其是，不要求预先在离散时间信号、z 变换、离散傅里叶变换等这些方面的知识。在有些章的稍后部分，会涉及一些像量化噪声这样的内容，这就要求有随机信号方面的基础知识。在第 2 章和附录 A 中都将对此作简单介绍。

在很多信号处理课中要包括一些在计算机上完成的作业已是习以为常的了。本书的很多习题都可以很容易地转变成用计算机来解的练习题。和本书的第 1 版相同，我们都有意地没有给出用以实现本书所述算法的特定软件。这样做有许多理由，其中最主要的是：在众多的个人电脑和工作站上都有可资利用的各种各样廉价的信号处理软件包，可用于演示和实现信号处理。这些软件包都有详细地注释，良好的技术支持以及方便的用户界面，便于学生使用。再者，这些软件本身都处在一个不断完善的过程中，我们极力主张，在课堂上用的软件应该是经过不断考验和更新的版本。现在越来越多的学生都比较早地学习了 MATLAB，我们对这份热情也予以首肯。然而，我们在推崇利用计算工具(如 MATLAB)的强大功能来创建应用本书的理论和基本原理的例题和例证的某一陈述时，不要让编程语法和软件环境的功能分散了应突出的概念和所采用的途径。我们坚信，亲身经历的东西有很大的价值。的确是这样，像 MATLAB 这样的软件工具能让学生在自己的个人电脑上实现很复杂的信号处理系统，而且我们感到一旦学生在基本理论上是很自信的话会对这种实现有很大的好处；他就能够区分出是概念上的错误还是编程上的错误。为此，教师手册中还包括了一节，建议在两本廉价的书中，即《Computer-Based Exercises for Signal Processing Using MATLAB 5》by McClellan, et al.，和《Computer Explorations in Signals and Systems-Using MATLAB》by Buck, Daniel and Singer，安排这方面的作业。这两本书都能从 Prentice-Hall, Inc. 得到。建议将这些计算机练习书中的作业与在本书中某些特定的节、例题和习题联系起来。这将允许教师来安排计算机作业以便与课堂上所讲的内容和例题联系在一起，并可以将这些计算机作业与常规的书面作业联系起来以增强在题中所表明的基本概念。

本书在材料的组织上为大学本科生和研究生的使用都提供了相当大的灵活性。典型的供大学本科生一学期用的选修课可以覆盖第 2 章 2.0～2.9 节；第 3 章；第 4 章 4.0～4.6 节；第 5 章 5.0～5.3 节；第 6 章 6.0～6.5 节；第 7 章 7.0～7.3 节以及 7.4～7.5 节的简单介绍。如果学生在一般的信号与系统课程中已学过离散时间信号与系统，则可以很快地掠过第 2、第 3 和第 4 章，而留出富裕的时间来学习第 8 章。作为一年级研究生的课程，除了上述内容外，还可以包括第 5 章余下的部分，4.7 节有关多采样率信号处理的讨论，4.8 节有关量化问题的简单介绍，以及或许还可以包括在 4.9 节讨论的有关在 A/D 和 D/A 转换器中噪声形成的介绍。

一年级的研究生课还应该包括在6.6～6.9节所讨论的量化问题，7.4节和7.5节最优FIR滤波器的讨论，以及第8章全部离散傅里叶变换和第9章利用FFT的离散傅里叶变换的计算等内容。在第10章的很多例子能有效地加强对DFT的讨论。在两学期的研究生课中，除了应包括本书的全部内容外，还可以包括一些另外的更为先进的一些专题。

第2章介绍了离散时间信号与系统的基本类型，并定义了系统的基本性质，诸如线性、时不变性、稳定性和因果性等。本书的主要着眼点是放在线性时不变系统上，这是因为有许多成熟的方法可以用于这类系统的分析与设计。尤其是在这一章中通过卷积和建立了线性时不变系统的时域表示法，并引入了由线性常系数差分方程所描述的一类线性时不变系统。在第6章还将对该类系统做更详细地讨论。在第2章还通过傅里叶变换引入了信号与系统的频域表示法。第2章重点放在利用傅里叶变换来表示序列，也就是把序列表示为一组复指数的线性组合，以及建立傅里叶变换的基本性质上。

在第3章，作为傅里叶变换的推广建立了z变换。这一章重点放在z变换的基本定理和性质上，以及对逆变换运算的部分分式展开法上。第5章将广泛深入地讨论如何利用在第3和第4章所得到的结果来表示和分析线性时不变系统。

在离散时间信号是通过对连续时间信号周期采样而得到的情况下，第4章详细讨论了这两类信号之间的关系，其中包括奈奎斯特采样定理。另外，还讨论了离散时间信号增采样和减采样，这些在多采样率信号处理系统和采样率转换中都会用到。这一章以在从连续时间到离散时间转换中所遇到的某些实际问题的讨论作为结束，其中包括为避免混叠而采用的预滤波，当离散时间信号用数字表示时幅度量化效应的建模，以及在简化模数(A/D)和数模(D/A)转换过程中利用过采样的问题等。

第5章利用在前面各章中建立的概念详细地研究线性时不变系统的各种性质。我们定义了一类理想频率选择性滤波器，并对由线性常系数差分方程所描述的系统建立了系统函数和零极点表示法，而该类系统的实现将在第6章详细讨论。同时，在第5章还定义并讨论了群延迟、相位响应和相位失真，以及系统的幅度响应和相位响应之间的关系，其中包括对最小相位、全通和广义线性相位系统等的讨论。

第6章集中讨论由线性常系数差分方程描述的系统，并用方框图和线性信号流图表示这类系统。本章的大部分内容是建立各种重要的系统结构，并比较它们之间的一些性质。这些讨论和各种滤波器结构的重要性都基于这样一个事实：在离散时间系统的具体实现中，系数的不准确性和运算误差的影响都与所采用的具体结构密切有关。无论在具体实现中所用的技术是数字的还是离散时间模拟的，这些基本问题都是类似的。本章是在数字实现的范畴内，通过对数字滤波器的系数量化和运算舍入噪声影响的讨论来阐明这些问题的。

第6章主要关注的是线性常系数差分方程的表示和实现，而第7章则讨论为了逼近某一期望的系统响应而获得这类差分方程系数的步骤，其设计方法分为无限脉冲响应(IIR)滤波器设计和有限脉冲响应(FIR)滤波器设计两大类。

在连续时间线性系统理论中，傅里叶变换主要是作为表示信号与系统的一种分析工具。与此对照，在离散时间情况下，很多信号处理系统和算法则涉及到要直接计算傅里叶变换。尽管傅里叶变换本身是不能计算的，但它的采样形式，即离散傅里叶变换(DFT)却是可以计算出来的，并且对有限长信号来说，其DFT就是该信号的完全傅里叶表示。第8章详细讨论离散傅里叶变换及其性质，以及它与离散时间傅里叶变换的关系。这一章还将介绍离散余弦变换，

这一变换在包括音频和视频压缩的许多应用中正在起着越来越重要的作用。第 9 章将介绍并讨论许多重要的用于计算或产生离散傅里叶变换的各种算法，其中包括 Goertzel 算法、快速傅里叶变换(FFT)算法，以及线性调频(鸟声)变换算法等。

有了前面这几章，特别是第 2,3,5 和 8 章的背景，第 10 章集中讨论如何利用离散傅里叶变换对信号进行傅里叶分析。如果没有对前面所涉及到的问题，以及对 DFT 与傅里叶变换之间的关系有一个透彻的理解，那么利用 DFT 对一个实际信号进行分析时往往会导致混淆和曲解。在第 10 章将会提到许多这样的问题。关于利用依时傅里叶变换对具有时变特性的信号由进行傅里叶分析的问题也将作适当的讨论。

第 11 章介绍离散希尔伯特(Hilbert)变换。这种变换出现在各种不同的实际应用中，其中包括逆滤波、实带通信号的复数表示、单边带调制技术以及许多其它的方面。

在这一版中，我们感谢并欢迎 John Buck 教授的加盟。当他在 MIT 还是一名学生以及最近作为 University of Massachusetts Dartmouth 的一名成员时，通过他对这门课的讲授，一直长期对本书作出了贡献。在这一版中，整个的修订工作，家庭作业的重新组织，以及许多例题的补充他都承担着主要的责任。对于本书第 2 版的问世，他对这项工作所表现出的深刻理解和献身精神是毫无疑问的。

Alan V. Oppenheim
Ronald W. Schafer

致　谢

在准备这本书的两个版本的过程中，我们一直有幸得到许多同事、学生和朋友们的宝贵帮助、建议和支持。多年来，我们的很多同事在 MIT 和 Georgia Tech 与我们一起使用这本教科书进行教学，并从他们的看法和反馈中得益匪浅。这些同事包括 MIT 的 Arthur Baggeroer，Sidney Burrus，Meir Feder，Jae Lim，Bruce Musicus，Hamid Nawab，Gregory Wornell 和 Victor Zue 等教授，以及在 Geogia Tech 的 Tom Barnwell，Mark Clements，Monty Hayes，Jim McClellan，Russ Mersereau，David Schwartz，Mark Smith，Vijay Madisetti，Doug Williams 和 Tong Zhou 等教授。

在我们学术生涯的大部分时间里，MIT 和 Geogia Tech 始终为我们的研究和教学工作提供了一个激励的环境，并对这一任务提供了积极有效的鼓励和支持。另外，RWS 要对 W. Kelley Mosley 的友谊和支持，以及 John and Mary Franklin Foundation 通过 John and Marilu McCarty Chair 多年来所给予的支持表示特别地感谢。AVO 要对 Mr. Ray Stata 和 Analog Devices，Inc.，以及 Ford Foundation 在 MIT 的信号处理领域所给予慷慨而持续地支持表示深深的谢意，其中包括在电气工程方面的 Distinguished Professor Chair 基金项目和在工程方面的 Ford Chair 基金项目。

我们特别感到幸运的是与 Prentice Hall 的共事与合作。我们与 Prentice Hall 的关系已经有了多年的经历，并有多个写作项目。来自 Prentice Hall 的 Eileen Clark，Marcia Horton，Tom Robbins，Amy Rosen 和 Sharyn Vitrano 对当前这一版本所给予的鼓励和支持为我们写出和完成这一任务增加了乐趣。

在第 2 版的出版过程中，非常荣幸地得到很多同事、学生和朋友们的帮助，非常感谢他们费去了大量的宝贵时间帮助我们完成这项工作。特别要对如下诸位表示我们的谢意：

MIT 的 Li Lee 和 Maya Said 和 Georgia Tech 的 Jordan Rosenthal 和 Greg Slabaugh 为本书做了习题的题解，University of Massachusetts Dartmouth 的 Hu Dou 为基本题做了答案。

Wade Torres，Akmal Butt 和 Faramarz Fekri 帮助更新了参考文献。

Vivian Berman 帮助设计了新的封面。

Drala Chupp，Stacy Schultz 和 Kay Gilstrap 为这个修订本的准备所给予的帮助，并对我们的教学活动提供持续地支持。

Matthew Secor 和 Giovanni Aliberti 在手稿准备过程中有关很多计算机方面的工作所给予的帮助。

以及以下各位帮助仔细校对了清样：

Susan Alderman　　Jon Arrowood
Joe Arrowood　　Chalee Asavathiratham
Halük Aydinoğlu　　Ali Behboodian

Albert Chan
Yonina Eldar
Chris Lanciani
Li Lee
Fernando Mujica
Ara Wefian
Andrew Rusell
Trevor Trinkaus

Matthew Cobb
Christoforos Hadjicostis
Nicholas Laneman
Michael Lopez
Burhan Necioğlu
Eric Reed
Mayay Said

例 题 总 汇

例 2.1　基本序列的组合
例 2.2　周期和非周期离散时间正弦序列
例 2.3　理想延迟系统
例 2.4　滑动平均
例 2.5　一个无记忆系统
例 2.6　累加器系统
例 2.7　一个非线性系统
例 2.8　作为一个时不变系统的累加器
例 2.9　压缩器系统
例 2.10　前向和后向差分系统
例 2.11　稳定或不稳定性测试
例 2.12　卷积和的计算
例 2.13　卷积和的解析计算
例 2.14　累加器的差分方程表示
例 2.15　滑动平均系统的差分方程表示
例 2.16　差分方程的递推计算
例 2.17　理想延迟系统的频率响应
例 2.18　LTI 系统的正弦响应
例 2.19　理想频率选择性滤波器
例 2.20　滑动平均系统的频率响应
例 2.21　突然加上一个指数信号的绝对可加性
例 2.22　理想低通滤波器的平方可加性
例 2.23　常数的傅里叶变换
例 2.24　复指数序列的傅里叶变换
例 2.25　对称性质的举例说明
例 2.26　利用表 2.2 和表 2.3 求傅里叶系数
例 2.27　利用表 2.2 和表 2.3 求傅里叶反变换
例 2.28　由频率响应求单位脉冲响应
例 2.29　由差分方程求单位脉冲响应
例 2.30　白噪声
例 3.1　右边指数序列
例 3.2　左边指数序列

例 3.3　两个指数序列的和
例 3.4　再论两个指数序列的和
例 3.5　双边指数序列
例 3.6　有限长序列
例 3.7　稳定性、因果性和 ROC
例 3.8　二阶 z 变换
例 3.9　用部分分式展开法求 z 反变换
例 3.10　有限长序列
例 3.11　用幂级数展开求反变换
例 3.12　用长除法进行幂级数展开
例 3.13　左边序列的幂级数展开
例 3.14　移位指数序列
例 3.15　指数相乘
例 3.16　非有理 z 变换的反变换
例 3.17　二阶极点
例 3.18　时间倒置指数序列
例 3.19　用 z 变换求卷积
例 4.1　一个正弦信号的采样与重建
例 4.2　在欠采样正弦信号重建中的混叠
例 4.3　第二个混叠的例子
例 4.4　利用离散时间低通滤波器的理想连续时间的低通滤波
例 4.5　一个理想连续时间带限微分器的离散时间实现
例 4.6　用一个正弦输入为例来说明例 4.5
例 4.7　由脉冲响应不变法求得一离散时间低通滤波器
例 4.8　脉冲响应不变法应用于具有有理系数函数的连续时间系统
例 4.9　非整数延迟
例 4.10　具有非整数延迟的滑动平均系统
例 4.11　采样率按一非整数有理因子的转换
例 4.12　一个正弦信号的量化误差
例 5.1　衰减和群延迟的效果
例 5.2　二阶系统
例 5.3　ROC 的确定
例 5.4　一阶系统的逆系统
例 5.5　在 ROC 内有一个零点的系统的逆系统
例 5.6　一阶 IIR 系统
例 5.7　一个简单的 FIT 系统
例 5.8　二阶 IIR 系统
例 5.9　二阶 FIR 系统
例 5.10　三阶 IIR 系统

例 5.11　具有相同 $C(z)$的系统
例 5.12
例 5.13　一阶和二阶全通系统
例 5.14　最小相位/全通分解
例 5.15　FIR 系统的补偿
例 5.16　具有线性相位的理想低通滤波器
例 5.17　Ⅰ类线性相位系统
例 5.18　Ⅱ类线性相位系统
例 5.19　Ⅲ类线性相位系统
例 5.20　Ⅳ类线性相位系统
例 5.21　一个线性相位系统的分解
例 6.1　一个差分方程的方框图表示
例 6.2　一个 LTI 系统的直接Ⅰ型和直接Ⅱ型实现
例 6.3　从一个流图确定系统函数
例 6.4　举例说明直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构
例 6.5　举例说明级联型结构
例 6.6　举例说明并联型结构
例 6.7　没有零点的一阶系统的转置型
例 6.8　基本二阶节的转置型
例 6.9　一阶系统的舍入噪声
例 6.10　二阶系统的舍入噪声
例 6.11　幅度加权与舍入噪声之间的相互影响
例 6.12　对于 6.7.5 节中的 FIR 系统的幅度加权考虑
例 6.13　在一阶系统中的极限环现象
例 6.14　二阶系统中的溢出振荡
例 7.1　离散时间滤波器指标的确定
例 7.2　用脉冲响应不变法设计巴特沃兹滤波器
例 7.3　用双线性变换法设计巴特沃兹滤波器
例 7.4　巴特沃兹逼近
例 7.5　切比雪夫逼近
例 7.6　椭圆逼近
例 7.7　线性相位低通滤波器
例 7.8　用 Kaiser 窗法设计低通滤波器
例 7.9　用 Kaiser 窗法设计高通滤波器
例 7.10　用 Kaiser 窗法设计微分器
例 7.11　交错点定理与多项式
例 8.1　周期脉冲串的离散傅里叶级数
例 8.2　离散傅里叶级数的对偶性
例 8.3　周期矩形脉冲串的离散傅里叶级数

例 8.4　周期卷积
例 8.5　周期脉冲串的傅里叶变换
例 8.6　傅里叶级数系数与一个周期的傅里叶变换之间的关系
例 8.7　矩形脉冲的 DFT
例 8.8　序列的循环移位
例 8.9　DFT 的对偶关系
例 8.10　与延迟脉冲序列的循环卷积
例 8.11　两个矩形脉冲的循环卷积
例 8.12　循环卷积作为带有混叠的线性卷积
例 8.13　DCT－2 中的能量压缩
例 9.1　线性调频变换的参数
例 10.1　利用 DFT 作傅里叶分析
例 10.2　DFT 值之间的联系
例 10.3　加窗对正弦信号傅里叶分析的影响
例 10.4　谱采样影响的示例
例 10.5　用与 DFT 频率一致的频率进行谱采样
例 10.6　加 Kaiser 窗时对正弦信号的 DFT 分析
例 10.7　用 32 点 Kaiser 窗和补零时的 DFT 分析
例 10.8　对于频率估计的过采样和线性内插
例 10.9　线性调频信号的依时傅里叶变换
例 10.10　语音信号依时傅里叶变换的谱图表示
例 11.1　有限长序列
例 11.2　指数序列
例 11.3　周期序列
例 11.4　用 Kaiser 窗设计希尔伯特变换器
例 A.1　理想低通滤波器的噪声功率输出
例 A.2　二阶 IIR 滤波器的噪声功率输出

目　录

译者的话
前言
致谢
例题总汇

第 1 章　绪论…… (1)

第 2 章　离散时间信号与系统…… (7)
2.0　引言 …… (7)
2.1　离散时间信号:序列…… (8)
2.1.1　基本序列和序列运算 …… (9)
2.2　离散时间系统…… (14)
2.2.1　无记忆系统…… (15)
2.2.2　线性系统…… (15)
2.2.3　时不变系统…… (16)
2.2.4　因果性…… (17)
2.2.5　稳定性…… (18)
2.3　线性时不变系统…… (18)
2.4　线性时不变系统的性质…… (23)
2.5　线性常系数差分方程…… (28)
2.6　离散时间信号与系统的频域表示…… (32)
2.6.1　线性时不变系统的特征函数…… (32)
2.6.2　突然加上复指数输入…… (36)
2.7　用傅里叶变换表示序列…… (38)
2.8　傅里叶变换的对称性质…… (44)
2.9　傅里叶变换定理…… (46)
2.9.1　傅里叶变换的线性…… (47)
2.9.2　时移和频移…… (47)
2.9.3　时间倒置…… (48)
2.9.4　频域微分…… (48)
2.9.5　帕斯瓦尔定理…… (48)
2.9.6　卷积定理…… (48)

2.9.7 调制或加窗定理 …… (49)
2.10 离散时间随机信号 …… (52)
2.11 小结 …… (56)
习题 …… (56)

第3章 z变换 …… (77)
3.0 引言 …… (77)
3.1 z变换 …… (85)
3.2 z变换收敛域的性质 …… (85)
3.3 z反变换 …… (91)
3.3.1 观察法 …… (91)
3.3.2 部分分式展开法 …… (91)
3.3.3 幂级数展开法 …… (94)
3.4 z变换的性质 …… (96)
3.4.1 线性 …… (87)
3.4.2 时移 …… (87)
3.4.3 用指数序列相乘 …… (98)
3.4.4 $X(z)$的微分 …… (99)
3.4.5 复数序列的共轭 …… (100)
3.4.6 时间倒置 …… (100)
3.4.7 序列卷积 …… (100)
3.4.8 初值定理 …… (101)
3.4.9 若干z变换性质列表 …… (102)
3.5 小结 …… (102)
习题 …… (103)

第4章 连续时间信号的采样 …… (113)
4.0 引言 …… (113)
4.1 周期采样 …… (113)
4.2 采样的频域表示 …… (115)
4.3 由样本重构带限信号 …… (120)
4.4 连续时间信号的离散时间处理 …… (123)
4.4.1 线性时不变离散时间系统 …… (125)
4.4.2 脉冲响应不变 …… (129)
4.5 离散时间信号的连续时间处理 …… (131)
4.6 利用离散时间处理改变采样率 …… (135)
4.6.1 采样率按整数因子减小 …… (135)
4.6.2 采样率按整数因子增加 …… (139)
4.6.3 采样率按非整数因子变化 …… (142)

4.7 多采样率信号处理 …… (145)
4.7.1 滤波和减采样/增采样的互换 …… (145)
4.7.2 多相分解 …… (146)
4.7.3 抽取滤波器的多相实现 …… (147)
4.7.4 内插滤波器的多相实现 …… (149)
4.8 模拟信号的数字处理 …… (150)
4.8.1 消除混叠的预滤波 …… (150)
4.8.2 模拟到数字(A/D)转换 …… (153)
4.8.3 量化误差分析 …… (157)
4.8.4 D/A 转换 …… (160)
4.9 在 A/D 和 D/A 转换中的过采样和噪声成形 …… (163)
4.9.1 用直接量化的过采样 A/D 转换 …… (163)
4.9.2 用噪声形成的过采样 A/D 转换 …… (167)
4.9.3 在 D/A 转换中的过采样和噪声成形 …… (171)
4.10 小结 …… (173)
习题 …… (173)

第 5 章 线性时不变系统的变换分析 …… (196)
5.0 引言 …… (196)
5.1 LTI 系统的频率响应 …… (197)
5.1.1 理想频率选择性滤波器 …… (197)
5.1.2 相位失真和延迟 …… (198)
5.2 用线性常系数差分方程表征系统的系统函数 …… (200)
5.2.1 稳定性和因果性 …… (201)
5.2.2 逆系统 …… (202)
5.2.3 有理系统函数的单位脉冲响应 …… (204)
5.3 有理系统函数的频率响应 …… (206)
5.3.1 单个零点或极点的频率响应 …… (208)
5.3.2 多个零极点的例子 …… (215)
5.4 幅度和相位之间的关系 …… (219)
5.5 全通系统 …… (222)
5.6 最小相位系统 …… (227)
5.6.1 最小相位和全通分解 …… (227)
5.6.2 频率响应的补偿 …… (229)
5.6.3 最小相位系统的性质 …… (233)
5.7 广义线性相位的线性系统 …… (236)
5.7.1 线性相位系统 …… (237)
5.7.2 广义线性相位 …… (240)
5.7.3 因果广义线性相位系统 …… (241)

5.7.4 FIR 线性相位系统与最小相位系统的关系 …… (249)
5.8 小结 …… (252)
习题 …… (253)

第 6 章 离散时间系统结构 …… (275)
6.0 引言 …… (275)
6.1 线性常系数差分方程的方框图表示 …… (276)
6.2 线性常系数差分方程的信号流图表示 …… (281)
6.3 IIR 系统的基本结构 …… (284)
6.3.1 直接型 …… (285)
6.3.2 级联型 …… (286)
6.3.3 并联型 …… (288)
6.3.4 IIR 系统中的反馈 …… (290)
6.4 转置形式 …… (291)
6.5 FIR 系统的基本网络结构 …… (294)
6.5.1 直接型 …… (294)
6.5.2 级联型 …… (294)
6.5.3 线性相位 FIR 系统的结构 …… (295)
6.6 有限精度数值效应概述 …… (297)
6.6.1 数的表示法 …… (297)
6.6.2 在系统实现中的量化 …… (300)
6.7 系数量化效应 …… (302)
6.7.1 IIR 系统系数量化效应 …… (302)
6.7.2 一个椭圆滤波器系数量化的例子 …… (303)
6.7.3 量化的二阶节的极点 …… (306)
6.7.4 FIR 系统系数量化效应 …… (308)
6.7.5 一个最优 FIR 滤波器量化的例子 …… (309)
6.7.6 线性相位特性的保持 …… (313)
6.8 数字滤波器中舍入噪声效应 …… (313)
6.8.1 直接型 IIR 结构分析 …… (314)
6.8.2 IIR 系统定点实现中的幅度加权 …… (320)
6.8.3 一个级联 IIR 结构的分析例子 …… (322)
6.8.4 直接型 FIR 系统分析 …… (328)
6.8.5 离散时间系统的浮点实现 …… (330)
6.9 IIR 数字滤波器定点实现中的零输入极限环 …… (331)
6.9.1 由于舍入和截尾引起的极限环 …… (331)
6.9.2 由于溢出而出现的极限环 …… (333)
6.9.3 消除极限环 …… (334)
6.10 小结 …… (334)

习题 …… (335)

第7章 滤波器设计方法 …… (352)
7.0 引言 …… (352)
7.1 由连续时间滤波器设计离散时间 IIR 滤波器 …… (354)
7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法 …… (355)
7.1.2 双线性变换法 …… (360)
7.1.3 双线性变换法设计举例 …… (364)
7.2 用窗函数法设计 FIR 滤波器 …… (373)
7.2.1 常用窗函数的性质 …… (375)
7.2.2 广义线性相位的合并 …… (378)
7.2.3 Kaiser 窗滤波器设计法 …… (380)
7.2.4 Kaiser 窗与其它窗之间的关系 …… (383)
7.3 Kaiser 窗法设计 FIR 滤波器举例 …… (384)
7.3.1 高通滤波器 …… (384)
7.3.2 离散时间微分器 …… (387)
7.4 FIR 滤波器的最佳逼近 …… (390)
7.4.1 最佳Ⅰ型低通滤波器 …… (394)
7.4.2 最佳Ⅱ型低通滤波器 …… (399)
7.4.3 Parks-McClellan 算法 …… (400)
7.4.4 最佳 FIR 滤波器的特性 …… (402)
7.5 FIR 等波纹逼近举例 …… (404)
7.5.1 低通滤波器 …… (404)
7.5.2 零阶保持器的补偿 …… (407)
7.5.3 带通滤波器 …… (409)
7.6 IIR 和 FIR 数字滤波器的评价 …… (410)
7.7 小结 …… (411)
习题 …… (412)

第8章 离散傅里叶变换 …… (436)
8.0 引言 …… (436)
8.1 周期序列的表示:离散傅里叶级数 …… (437)
8.2 离散傅里叶级数的性质 …… (439)
8.2.1 线性 …… (440)
8.2.2 序列的移位 …… (440)
8.2.3 对偶性 …… (440)
8.2.4 对称性 …… (441)
8.2.5 周期卷积 …… (441)
8.2.6 周期序列 DFS 表示的性质汇总 …… (443)

8.3 周期信号的傅里叶变换 …… (444)
8.4 对傅里叶变换采样 …… (447)
8.5 有限长序列的傅里叶表示:离散傅里叶变换 …… (450)
8.6 离散傅里叶变换的性质 …… (454)
8.6.1 线性 …… (454)
8.6.2 序列的循环移位 …… (454)
8.6.3 对偶性 …… (456)
8.6.4 对称性 …… (458)
8.6.5 循环卷积 …… (460)
8.6.6 离散傅里叶变换的性质汇总 …… (463)
8.7 用离散傅里叶变换实现线性卷积 …… (464)
8.7.1 两个有限长序列的线性卷积 …… (465)
8.7.2 循环卷积作为带有混叠的线性卷积 …… (466)
8.7.3 用 DFT 实现线性时不变系统 …… (471)
8.8 离散余弦变换(DCT) …… (474)
8.8.1 DCT 的定义 …… (475)
8.8.2 DCT－1 和 DCT－2 的定义 …… (476)
8.8.3 DFT 和 DCT－1 的关系 …… (478)
8.8.4 DFT 和 DCT－2 的关系 …… (479)
8.8.5 DCT－2 的能量压缩性质 …… (480)
8.8.6 DCT 的应用 …… (482)
8.9 小结 …… (483)
习题 …… (483)

第 9 章 离散傅里叶变换的计算 …… (507)
9.0 引言 …… (507)
9.1 离散傅里叶变换的高效计算 …… (508)
9.2 Goertzel 算法 …… (510)
9.3 按时间抽取的 FFT 算法 …… (512)
9.3.1 同址计算 …… (516)
9.3.2 其它形式 …… (518)
9.4 按频率抽取的 FFT 算法 …… (520)
9.4.1 同址计算 …… (523)
9.4.2 其它形式 …… (523)
9.5 实现问题考虑 …… (525)
9.5.1 标号排列 …… (526)
9.5.2 系数 …… (527)
9.5.3 更一般 N 值时的算法 …… (527)
9.6 用卷积实现 DFT …… (528)

9.6.1 Winograd 傅里叶变换算法概述 …… (528)
9.6.2 线性调频变换算法 …… (528)
9.7 有限寄存器长度的影响 …… (532)
9.8 小结 …… (538)
习题 …… (539)

第 10 章 利用离散傅里叶变换的信号傅里叶分析 …… (558)
10.0 引言 …… (558)
10.1 用 DFT 的信号傅里叶分析 …… (559)
10.2 正弦信号的 DFT 分析 …… (562)
10.2.1 加窗的影响 …… (562)
10.2.2 谱采样的影响 …… (566)
10.3 依时傅里叶变换 …… (575)
10.3.1 窗的影响 …… (578)
10.3.2 时间采样和频率采样 …… (579)
10.4 利用依时傅里叶变换的块卷积 …… (582)
10.5 非平稳信号的傅里叶分析 …… (583)
10.5.1 语音信号的依时傅里叶分析 …… (583)
10.5.2 雷达信号的依时傅里叶分析 …… (586)
10.6 平稳随机信号的傅里叶分析:周期图 …… (588)
10.6.1 周期图 …… (588)
10.6.2 周期图的性质 …… (589)
10.6.3 周期图的平均 …… (593)
10.6.4 用 DFT 计算平均周期图 …… (594)
10.6.5 周期图分析举例 …… (595)
10.7 利用自相关序列估计的随机信号谱分析 …… (598)
10.7.1 利用 DFT 计算相关函数和功率谱估计 …… (600)
10.7.2 以自相关序列的估计为基础的功率谱估计举例 …… (602)
10.8 小结 …… (608)
习题 …… (609)

第 11 章 离散希尔伯特(Hilbert)变换 …… (625)
11.0 引言 …… (625)
11.1 因果序列傅里叶变换实部和虚部的充分性 …… (626)
11.2 有限长序列的充分性定理 …… (631)
11.3 幅度与相位间的关系 …… (635)
11.4 复序列的希尔伯特变换关系 …… (636)
11.4.1 希尔伯特变换器的设计 …… (639)
11.4.2 带通信号的表示 …… (642)

11.4.3 带通采样 …… (645)
11.5 小结 …… (647)
习题 …… (647)

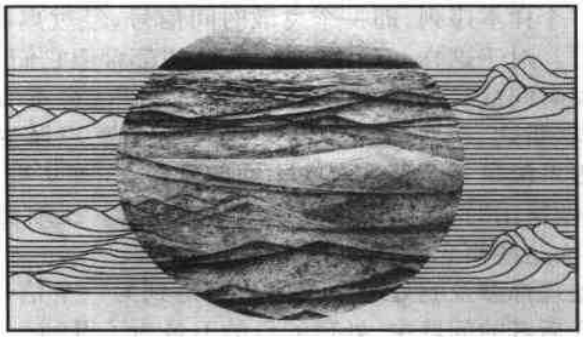
附录 A 随机信号 …… (655)
A.1 离散时间随机过程 …… (655)
A.2 平均 …… (656)
A.2.1 定义 …… (656)
A.2.2 时间平均 …… (658)
A.3 相关序列和协方差序列的性质 …… (659)
A.4 随机信号的傅里叶变换表示 …… (661)
A.5 利用 z 变换计算平均功率 …… (662)

附录 B 连续时间滤波器 …… (665)
B.1 巴特沃兹低通滤波器 …… (665)
B.2 切比雪夫滤波器 …… (666)
B.3 椭圆滤波器 …… (668)

附录 C 精选基本题答案 …… (669)

参考文献 …… (691)

第1章 绪 论



信号处理有一段悠久而丰富的历史。这是一门横跨多门学科的技术，其中包括娱乐业、通信、空间探索、医学和考古学等等不胜枚举。高级信号处理算法和硬件广泛见于各种系统，从专用的军事系统到各式各样廉价大宗的日用电子产品的工业应用都是如此。虽然我们把家庭娱乐系统，如电视和高保真度音响系统等的性能都认为是理所当然的，其实这些系统的好坏都强列地依赖于当今信号处理的发展水平。更有甚者，当今更为先进的电视和多媒体娱乐设备，以及信息系统都与此有关。再者，随着通信系统日益无线化、移动式和多功能性，在这些系统中高级信号处理手段的重要性在继续不断地增长着。总的说来，当我们注视未来时，清楚信号在我们社会中的作用正在日益加速地增强。这部分原因是由于既在民用领域，又在先进的工业和政府部门的应用中，通信、计算机和信号处理都融为一体的缘故。

信号处理这一领域总是得益于它的理论、应用与实现信号处理系统的技术之间的紧密结合。日渐增长的应用范围和对日益增长地高级算法的需求总是与实现信号处理系统的器件技术的快速发展齐头并进。有人预测，在下一个 10 年内，信号处理的微处理器的处理能力可能要增加 200 倍或者更多。在许多方面似乎都清楚地表明，信号处理的重要性和地位都在迅速提高和扩大。

信号处理关注的是信号及其所包含信息的表示、变换和运算。例如，我们可能希望分开两个或多个多少有些混在一起的信号，或者想增强某些信号分量或一个信号模型中的某些参量。在通信系统中，信号在一条信道上传输之前一般要做一些像调制、信号调节和压缩等这样的预

处理，然后在接收端进行后处理。早在20世纪60年代之前，信号处理手段几乎无一例外地都是连续时间的模拟技术。[①] 数字计算机和微处理器的飞速发展，连同像快速傅里叶变换(FFT)等这样一些重要理论成果一起产生了向数字技术方面的转移，从而导致了数字信号处理领域的出现。数字信号处理的一个基本点是基本样本序列的处理，数字信号处理技术的离散时间属性也是其它一些信号处理技术的特性，如声表面波(SAW)器件、电荷耦合器件(CCD)、电荷转移器件(CTD)和开关电容技术等等。在数字信号处理中，信号是用有限精度的数的序列来表示的，而用数字运算来实现处理。更为一般的术语**离散时间信号处理**既包括了作为一种特殊情况的数字信号处理，也包括了用其它一些离散时间技术处理样本序列(采样数据)的可能。离散时间信号处理和数字信号处理这两个术语之间的区别往往不是很重要的，因为两者关心的都是离散时间信号。虽然有很多例子其中要处理的信号本身就是序列，但是大多数的应用还是涉及到要用离散时间技术来处理连续时间信号。在这种情况下，一个连续时间信号先要把它转换成一个样本序列，即一个离散时间信号，经过离散时间处理后，再把输出序列转换成连续时间信号。对于这样一些系统来说，往往都希望它们能实时工作，这就意味着离散时间系统要以对连续时间信号采样的同一速率来完成输出样本的计算。连续时间信号的离散时间处理在通信系统、雷达、声纳、语音和视频编码与增晰，以及生物医学工程等方面都是司空见惯的了。压缩磁盘系统是一个稍许有些不同的例子，在那里要处理的输入形式是存入一个压缩磁盘上的，当需要输出时，以实时来完成最后的处理。压缩磁盘录制和回放系统依赖于许多信号处理的概念，而这些概念就是本书要讨论的。

大多数传统的信号处理都涉及到处理一个信号而得到另一个信号，而另一类重要的信号处理问题是**信号解释**。在后者的问题中，处理的目的不是为了得到一个输出信号，而是要得到输入信号的某一特征。例如，在语音识别和理解系统中，其目的是为了解释输入信号，或者从输入信号中提取信息。一般说来，这种系统起着一种数字预处理(滤波、参量估计等)的作用，在其之后紧跟着一个模式识别系统，以产生某种符号表示，例如语音的音位符号表示。这种符号输出可以依次作为一个能提供最终信号解释的符号处理系统(例如基于某一规则的专家系统)的输入。还有另一类比较新的信号处理方法，它涉及到信号处理表达式的符号运算。这种处理形式在信号处理工作站和对信号处理系统的计算机辅助设计都是特别有用的。在这类处理中，信号与系统都是用抽象的数据对象来表示和运算的。面向对象的程序设计语言对于处理信号、系统和信号处理表达式提供了方便的环境，而不用明确对数据序列进行求值，并为这类处理提供了基础。设计用来对信号表达式进行处理的系统的复杂程度直接受所包含的基本信号处理概念、定理和性质(如组成本书基础的那些内容)的影响。例如，一种信号处理环境具有在时域卷积就相当于频域相乘这样的性质，就可以用来研究各种不同滤波结构的组合，其中包括涉及直接利用离散傅里叶变换和快速傅里叶变换算法。类似地，结合采样率和混叠之间关系的环境，就能够在滤波器实现中有效地利用抽取和内插的手段。有关在网络环境下实现信号处理的类似想法近来正在进行探索。在这种类型的环境中，可以用一种高级的处理描述来完成对数据给予潜在地标示，而详细地实现则能动态地依据网上所能利用的资源来完成。

对于计算机辅助系统设计和对于在动态变化的网上的信号处理有关的面向对象环境的建立现在仍处于它的初期阶段，有关这一问题的详细讨论已超出本书的范围。然而，重要的是要

① 一般说来，我们把"时间"当作独立变量，即使在某些特定场合，独立变量可能取其它任何可能的量纲。这样，连续时间和离散时间都应分别看作是连续和离散独立变量的通用术语。

认识到，不应将作为本书主题的一些基本概念仅看作是理论上的东西，它们很可能要成为计算机辅助信号处理环境、工作站和网络的一个不可缺少的组成部分。

现在，在本书中所讨论的很多概念和设计方法都吸收进了像 Matlab 这样一些先进的软件系统。在许多情况下，离散时间信号都是在计算机中获得并存储起来的，这些工具就允许由一些基本函数构成极为复杂的信号处理运算。在这样的情况下，一般并不需要知道实现某一运算的算法细节(如 FFT)，但是，要明白计算的是什么，以及应该如何来解释计算出的结果，这才是主要的。换句话说，对本书所讨论的概念有很好的理解，对于巧妙地利用现有广泛可资利用的信号处理软件工具来说仍是最基本的。

信号处理问题自然不仅仅局限于一维信号。虽然在理论上一维与多维信号处理之间存在着一些基本的差别，但是本书所讨论的大部分内容在多维系统中都有其直接的对应关系。有关多维数字信号处理理论在 Dudgeon and Mersereau(1984)，Lim(1989)和 Bracewell(1986)[①]等所著的书中均有详细的论述。许多图像处理的应用问题需要用到二维信号处理技术，如视频编码、医学图像、航空照片的增晰与分析、卫星气象照片的分析、以及从月球和深层空间探测来的视频传输信号的增晰等等就属于这一类情况。多维数字信号处理在图像处理方面的应用在 Andrews and Hunt (1977)，Macovski(1983)，Pratt(1991)，Castleman(1996)，Jain(1989)和 Chellappa 等(1998)等人的著作中都有专门的论述。像在石油勘探、地震检测和核试验监测等书中所要求的地震数据分析都要利用多维信号处理技术。有关在地震学方面的应用在 Robinson and Treitel(1980)和 Robinson and Durrani(1985)的著作中均有论述。

多维信号处理仅仅是众多的近代和专门论题中的一个，这些论题所依赖的基础均在本书的覆盖范围之内。基于利用离散傅里叶变换和信号建模的谱分析又是信号处理另一个丰富而重要的方面。我们介绍了该方面的很多内容，大都集中在与离散傅里叶变换应用有关的一些基本概念和技术上。除了这些技术以外，各种谱分析方法都以某种方式依赖于特定的信号模型。例如，称之为最大熵法(MEM 谱分析)的高分辨率谱分析方法，就是根据把要分析的信号先表示成一个离散时间线性时不变滤波器对单位脉冲或白噪声的响应，然后估计出该系统的参数(例如差分方程的系数)，再求出该滤波器模型频率响应的幅度平方来完成谱分析的。对于信号建模和谱分析的这一方法的有关论题和技术的全面而详尽的论述都是以本书的基本原理为基础的。有关这些方面的详细讨论可以在 Kay(1988)，Marple(1987)和 Hayes(1996)等人的著作中找到。信号建模在数据压缩和编码中也起着重要的作用，并且差分方程的基本原理再次为理解这些技术的很多方面奠定了基础。例如，一种称为线性预测编码(LPC)的信号编码技术就是利用这样一个概念：如果一个信号是某个离散时间滤波器的响应，那么在任意时刻的信号值就是先前那些值的线性函数(因此可以由先前信号值而线性预测出当前信号值)。这样，通过估计出这些预测参数，并与预测误差一起来表示信号，就可以得到有效的信号表示。若需要时，该信号也可以利用模型参数重新产生。这类信号编码技术在语音编码中一直是特别有效的，这些在 Jayant and Noll(1984)，Markel and Gray(1976)，Rabiner and Schager(1978)以及 Deller 等(1993)等人的著作中均有非常详细的论述。

另一个非常重要的近代论题是自适应信号处理。自适应系统代表着一类特殊的时变且在某种意义上是非线性的系统。这类系统具有广泛的应用，而且对它们的分析与设计已建立了

① 全书中作者的姓名和所注年代均用来指明本书末尾所列参考文献中书目和论文。

一套很有效的方法。同样，这些方法的很多方面也都是以本书所讨论的离散时间信号处理的基本原理为基础的。有关自适应信号处理的详细论述可见 Haykin(1996)及 Windows and Stearns(1985)的著作。

这些仅仅代表了由本书包括的那些内容中延伸出来的众多近代论题中的几个方面，其它的还包括一些近代的和专门的滤波器设计方法，计算傅里叶变换的各种专门算法，特定的一些滤波器结构，以及包括滤波器柜和小波变换在内的各种近代多采样率信号处理技术等等。

人们常常都认为，一本基础性教科书的目的应该是揭示而不是包罗某一学科。我们一直遵循着这一宗旨来精选本书的内容及其深度。前面有关近代论题的简单讨论和书末所附的参考文献就是想尽力展现出这些基本原理所揭示的丰富多彩的各个方面。

历史的回顾

离散时间信号处理以不寻常的步伐走过了很长一段历史时期，回顾一下这个领域的发展会提供给我们一个很有价值的有关对该领域在现在以及在较长时间内仍然是一些核心基础内容东西的看法。自 17 世纪发明微积分以来，科学家和工程师们就已经利用连续变量函数和微分方程来表示物理现象建立了各种模型。为了求解这些方程，当解析解不可能得到时就已经使用了数值解法。的确，牛顿使用过的有限差分法就是本书将要介绍的某些离散时间系统的特殊情况。18 世纪的数学家，像 Euler，Bernouli 和 Lagrange 等已经建立了一个连续变量函数的数值积分和内插的方法。由 Heideman，Johnson and Burrus(1984)所作的很有趣的历史研究表明：早在 1805 年，高斯就发现了快速傅里叶变换(在第 9 章讨论)的基本窍理，而这时傅里叶关于函数的谐波级数表示法的论文尚未发表！

直到 50 年代初，信号处理还是用模拟系统来完成的，实现这些模拟系统多是用电子线路，甚至还有用机械装置的。即使数字计算机已逐渐在商业场合和科学实验室获得应用，但其价格却异常昂贵，能力也相当有限。在那个时期，某些应用领域对更为复杂的信号处理的需求激发了人们对离散时间信号处理的极大兴趣。数字计算机在数字信号处理方面最初获得应用的一个领域就是石油勘探，这里可以将地震数据用磁带记录下来，以供事后处理。这类信号处理一般来说是不能实时完成的，几秒钟的数据往往要耗去几分钟，甚至几个小时的计算时间。即便如此，由于数字计算机的灵活性和潜在的回报能力使得这种方法也颇受欢迎。

同样还是在 50 年代，数字计算机在信号处理方面的应用正以另外一些不同的方式出现。由于数字计算机的灵活性，在用模拟硬件实现某一信号处理系统之前，在数字计算机上先对该系统进行仿真往往是很有用的。在这种方式下，一种新的信号处理算法或系统在经济和工程资源上投入实施之前，均可在一种很灵活的实验环境中加以研究。这类仿真的典型例子就是由林肯实验室和贝尔实验室所研究成的声码器的仿真。例如，在一个模拟信道声码器的实现中，滤波器的特性会影响已编码语音信号可理解程度的质量，而对这种质量又很难客观地进行定量研究。通过计算机仿真可以调节这些滤波器特性，从而对语音编码系统可理解程度的质量能在模拟装置构成之前就能给予评估。

在所有这些利用数字计算机进行信号处理的例子中，计算机在灵活性方面表现出了极大的优越性。但是，这些处理未必总是能实时完成。因此，盛行一时地仅是将数字计算机用作逼近或仿真某一模拟信号处理系统。与此相仿，早期的数字滤波就非常热衷于这样一些方式：把

一个滤波器在数字计算机上编成程序，这样就可以将信号先做模数转换，然后进行数字滤波，再接着做数模转换，以使整个系统近似成为一个好的模拟滤波器。在语音通信、雷达信号处理或任何其它应用中，数字系统可能真正实现实时信号处理的想法在当时似乎认为是最值得尝试和最为乐观的时候。当然，处理速度、成本和体积大小都曾是人们偏向于应用模拟元件的三个重要因素。

在数字计算机上实现信号处理的同吮，研究人员自然有一种愿望要试试日益增长的一些复杂的信号处理算法。其中一些算法就是由于数字计算机的灵活性而生长起来的，而用模拟设备是无法实现的。因此，很多这些算法都曾被看作是一些有趣的，但多少有些不切实际的想法。这样一些信号处理算法的发展使得用全数字化来实现信号处理系统的想法更具诱惑力。最初在数字声码器、数字频谱分析仪以及其它全数字化系统的研究上开始了积极有效的工作，希望这样一些系统最终会变成可以实际应用的系统。

Cooley and Tukey(1965)发现的一种计算傅里叶变换的高效算法进一步加速了迈向离散时间信号处理的进程。这种算法就是现在称为快速傅里叶变换或 FFT 算法。以下几个原因充分说明 FFT 是很有意义的。当时用数字计算机实现的许多信号处理算法所要求的处理时间要比实时处理大几个数量级。这常常是由于谱分析是信号处理中的一个重要组成部分，而在当时却没有一种高效的算法来实现它。而快速傅里叶变换算法将傅里叶变换的计算时间减少了几个数量级，使得一些复杂的信号处理算法的实现在其处理时间内允许与系统之间可以在线交互试验。再者，快速傅里叶变换算法事实上可以用专用数字硬件来实现，这样从前出现的很多曾认为是不切实际的信号处理算法开始显露出具体实现的可能。

快速傅里叶变换算法的另一个重要的内涵就是它本身属于离散时间范畴。它可以直接计算离散时间信号或序列的傅里叶变换，并且它所涉及到的许多性质和数学方法完全都属于离散时域的范畴；这就是说，它不只是一个对连续时间傅里叶变换的近似。由此激发了人们用离散时间数学方法来重新形成很多信号处理的概念和算法，之后这些技术建立了完整的离散时间域内的各种关系。这样就改变了把在数字计算机上进行信号处理只是单纯地看作是对模拟信号处理技术的某种近似的看法，而产生了把离散时间信号处理作为一门单独的重要研究领域的浓厚兴趣。

离散时间信号处理发展史上另一个主要进展出现在微电子学领域。微处理器的发明及其在数量上的激增为离散时间信号处理的廉价实现铺平了道路。尽管第一台微处理器因速度太慢而不能实时地实现大部分离散时间系统。但是到了 80 年代中期，集成电路技术已经发展到了一个新的水平，能够制造出在结构上专门为实现离散时间信号处理算法而设计的高速定点和浮点微型计算机。由此展现出离散时间处理技术获得广泛应用的灿烂前景。

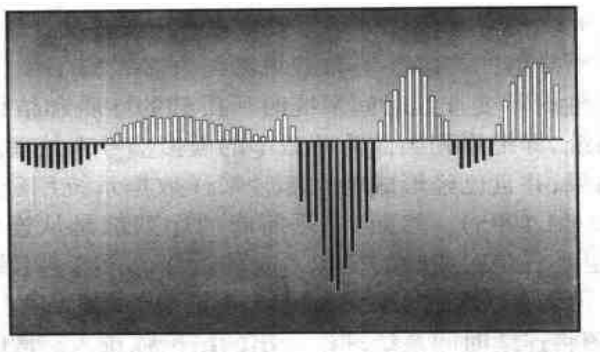
未来的展望

微电子学的工程师们仍在继续为提高电路的集成度和产量而奋斗着，因此微电子学系统的复杂性和先进程度也在不断地稳步提高。的确，自 80 年代初以来，DSP 芯片的复杂性和容量一直成指数地增长着，并且没有任何放慢的迹象。随着整片集成技术的迅速发展，价廉、超微型和低功耗的很复杂的离散时间处理系统也将会实现。因此，离散时间信号处理的重要性无疑仍会与日俱增，而且未来这一领域的发展很可能比我们刚刚描述的发展进程更富戏剧性。

当前，离散时间信号处理技术在某些应用领域已经引起了革命性的变化。电信领域就是一个明显的例子，在该领域中离散时间信号处理技术、微电子技术和光纤传输技术的结合，正以一种真正革命方式改变着通信系统的面貌。可以预见，类似的冲击也将会波及到许多其它的技术领域。

虽然离散时间信号处理是一个不断更新和飞速发展的领域，但是它的基础已经日臻完善。本书的目的就是为了在离散时间线性系统、滤波、采样以及离散时间傅里叶分析等理论方面能给出一种条理清晰的论述。所论述的这些内容应该为读者理解离散时间信号处理的广泛应用提供必要的知识，并为他们对这一令人振奋的技术领域的未来发展做出贡献奠定坚实的基础。

第2章 离散时间信号与系统



2.0 引　　言

术语**信号**通常用于代表携带信息的某些东西。信号一般总是携带着某一物理系统有关状态或行为特征的信息，并且常常是为了人与人之间、或人与机器之间交换信息目的而组成。虽然信号可以用很多方法来表示，但是在所有的情况下，信息总是包含在某种变化的模式中。在数学上信号可以表示为一个或多个独立变量的函数。例如，一个语音信号数学上可以表示为时间的函数，而一幅摄影图像就可以表示为二个空间变量的亮度函数。按照惯例，我们把一个信号的数学表达式中的独立变量看作时间，本书也将遵循这一约定，尽管在某些具体的例子中，独立变量事实上并不代表时间。

在信号的数学表示式中，独立变量可以是连续的，也可以是离散的。**连续时间信号**是定义在一个连续时间域上，因此可以用一个连续独立变量来表示。连续时间信号常常又称作**模拟信号**。**离散时间信号**是定义在离散时刻点上，这样独立变量便具有离散值；也就是说，离散时间信号表示成数值的序列。语音和图像信号既可以用连续变量表示，也可以用离散变量表示，如果某些条件成立的话，这两种表示是完全等效的。除了独立变量可以是连续的或离散的之外，信号幅度也可以是连续的或者是离散的。**数字信号**在时间上和幅度上都是离散的信号。

信号处理系统也能像信号一样来分类。这就是说连续时间系统是指其输入输出都是连续时间信号的系统；离散时间系统就是其输入输出都是离散时间信号的系统。与此类似，一个数

字系统其输入输出都是数字信号。因此，数字信号处理就是处理在幅度和时间上都是离散的那些信号的变换。本书的重点是放在离散时间（而不是数字）信号与系统上。然而，离散时间信号与系统理论对于数字信号与系统也是非常有用的，特别是如果信号幅度是精细被量化的话。有关信号幅度的量化效应将在4.8，6.7～6.9和9.7节考虑。

离散时间信号可以用采样一个连续时间信号来得到，或者也可以直接由某一个离散时间过程产生。无论离散时间信号是怎么来的，离散时间信号处理系统具有许多诱人的特点。它们可以很灵活地用诸如电荷转移器件、声表面波器件、通用数字计算机或高速微处理器等各种各样的技术手段来实现。整个的信号处理系统也能用VLSI技术来实现。离散时间系统可以用来对模拟系统进行仿真，或者更重要地是实现那些用连续时间硬件无法实现的信号变换。因此，当需要用到一些高级的和灵活的信号处理时，信号的离散时间表示往往就是所期望的了。

本章讨论一维离散时间信号和信号处理系统的基本概念，重点是线性时不变离散时间系统。本章及后续几章中所导得的许多性质和结果都与许多教科书中（例如，见Oppenheim and Willsky，1997）在讨论线性时不变连续时间系统时所得到的性质和结果类似。事实上，有可能这样来讨论离散时间系统，即把序列当作为冲激串的模拟信号来处理。如果细心地处理，这条途径也能得出正确的结果，并且已经形成为大部分采样数据系统用经典方法进行讨论的基础（例如，见Phillps and Nagle，1995）。然而，不是所有的序列都是从连续时间信号的采样得到的，很多离散时间系统也不只是对相应的模拟系统的近似。再者，离散时间系统也不只是对相应的模拟系统的近似。再者，离散时间系统与连续时间系统之间还存在着某些重要的和基本的差别。因此，不是企图将连续时间系统理论得出的结论强拉入离散时间的框架内，而是用适合于离散时间系统的概念，在一种框架内着手导出并行的结果。只有在把离散时间信号与连续时间信号关联起来是必须而且是有益时，我们才这样做。

2.1 离散时间信号：序列

离散时间信号在数学上表示成数的序列。一个数的序列 x，其中序列的第 n 个数记作 $x[n]$[①]，正规地可写作

$$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < \infty \tag{2.1}$$

式中 n 为整数。实际上，这样的序列往往可以通过周期采样一个模拟信号来得到，这样一来，序列中第 n 个数的数值就等于模拟信号 $x_a(t)$ 在时刻 nT 处的值，即

$$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty \tag{2.2}$$

T 称为**采样周期**，其倒数就是**采样频率**。尽管序列不总是由采样模拟波形来获得的，但是把 $x[n]$ 称为序列的“第 n 个样本”还是方便的。同时，虽然严格说来 $x[n]$ 指的是序列中的第 n 个数，但是(2.1)式的记号往往不必那么繁琐。当我们意指整个序列时，称“序列 $x[n]$”既方便，又明确，就像称呼“模拟信号 $x_a(t)$”一样。离散时间信号（也就是序列）常常又可用如图2.1那样的图形来表示。图中横坐标虽然画的是一条连续线，但重要的是要知道 $x[n]$ 仅仅在

① 一个序列就是定义在整数域上的一个函数。注意，我们用[]来括出这种函数的独立变量，而用()来括出连续变量函数的独立变量。

n 为整数值时才有定义，认为 $x[n]$ 在 n 不为整数时就是零是不正确的；$x[n]$ 在 n 为非整数时只是无定义。

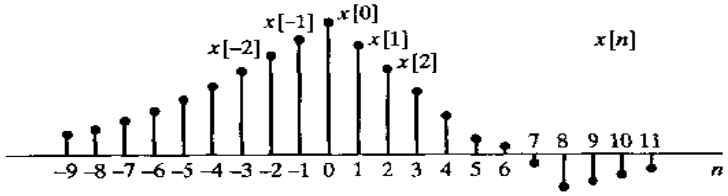


图 2.1　离散时间信号的图解表示

作为一个例子，图 2.2(a)表示的是一段语音信号，它相应于声压随时间变化的函数。图 2.2(b)则是该语音信号的样本序列。虽然原始信号是在全部时间 t 上定义的，但这个序列所包含的只是该原始信号在离散时刻点上的信息。由第 4 章讨论的采样定理可知，只要样本取得足够密，原始信号就能从一个相应的样本序列中准确无误地恢复出来。

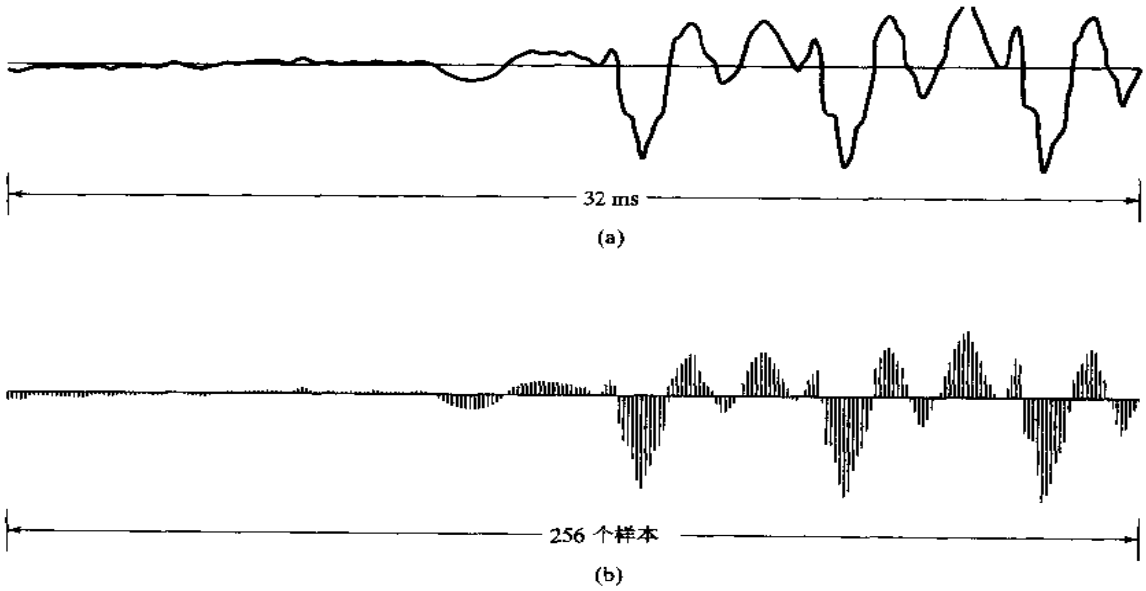


图 2.2　(a)一段连续时间语音信号；
(b)用 $T=125\ \mu s$ 从图(a)获得的样本序列

2.1.1　基本序列和序列运算

在离散时间信号处理系统的分析中，对序列进行运算有几种基本的方式。两个序列 $x[n]$ 和 $y[n]$ 的积与和分别定义为对应样本间的积与和。一个序列 $x[n]$ 乘以数 α 定义为序列中每一个样本值都乘以 α。如果 $y[n]$ 有

$$y[n] = x[n - n_0] \tag{2.3}$$

则称 $y[n]$为序列 $x[n]$的延迟或移位,这里 n_0 为某一整数。

在讨论离散时间信号与系统理论时,有几个基本序列是特别重要的。这些序列如图 2.3 所示,并在下面给予讨论。

单位样本序列 $\delta[n]$(图 2.3(a))定义为

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

我们将会看到,在离散时间信号与系统中单位样本序列所起的作用就如同单位冲激函数 $\delta(t)$在连续时间信号与系统中所起的作用。为了方便起见,单位样本序列也常称为**离散时间脉冲**,或就称为**脉冲**。重要的是要注意,一个离散时间脉冲并没有遇到那么多像连续时间冲激所带来的数学处理上的麻烦,它的定义既简单又明确。

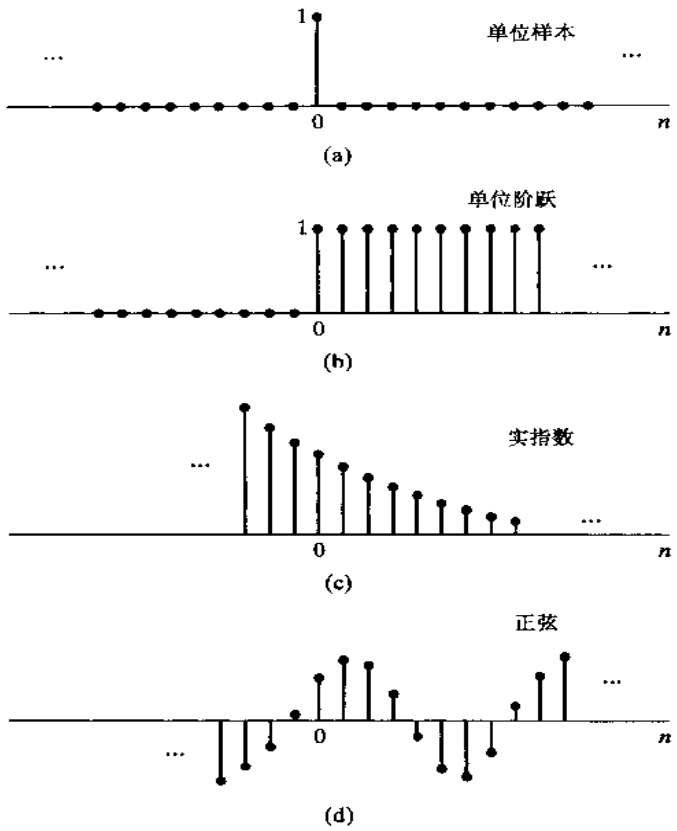


图 2.3 几个基本序列。这些序列在离散时间信号与系统的分析与表示中起着重要的作用

在线性系统讨论中将会看到,单位样本序列的一个重要作用就是任何序列都可以用一组幅度加权和延迟的单位样本序列的和来表示。例如,在图 2.4 中的序列 $p[n]$可以表示为

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7] \tag{2.5}$$

更一般地说,任何序列均可表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{2.6}$$

在离散时间线性系统表示的讨论中将专门使用(2.6)式。

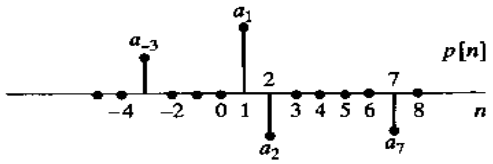


图 2.4 序列表示为一组幅度加权和延迟单位样本序列之和的例子

单位阶跃序列 $u[n]$(图 2.3(b))定义为

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

单位阶跃序列与单位样本序列的关系是

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{2.8}$$

即单位阶跃序列在 n 时刻点的值就等于在 n 点及该点以前全部的单位样本序列值的累加和。利用单位样本序列表示单位阶跃的另一种形式是将图 2.3(b)的单位阶跃看作是一组延迟的单位样本序列之和，这时，非零值全都是 1，所以有

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots \tag{2.9a}$$

或者

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \tag{2.9b}$$

反之，单位样本序列也能表示成单位阶跃序列的一阶后向差分，即

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{2.10}$$

指数序列在表示和分析线性时不变离散时间系统中是极为重要的。一个指数序列的一般形式是

$$x[n] = A\alpha^n \tag{2.11}$$

如果 A 和 α 都是实数，则序列为实序列。如果 $0<\alpha<1$，A 为正值，那么序列值为正，且随 n 增加而减小，如图 2.3(c)所示。对于 $-1<\alpha<0$，则序列值正负交替变化，但在幅度上仍随 n 增加而减小。如果 $|\alpha|>1$，那么序列在幅度上就会随 n 增加而增长。

例 2.1　基本序列的组合

常常用基本序列的组合来形成其它序列的简明表示形式，譬如想要一个指数序列在 $n<0$ 时是零，就可以将这个序列写成如下稍许繁琐一点的表示式：

$$x[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

一种更为简单的表示式是 $x[n]=A\alpha^n u[n]$。

正弦序列也是很重要的。正弦序列的一般形式为

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi)，\text{对全部 } n \tag{2.13}$$

其中 A 和 ϕ 为实数，如图 2.3(d)所示。

α 为复数的指数序列 $A\alpha^n$ 其实部和虚部都是指数加权的正弦序列。具体地说，如果 $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$，$A = |A|e^{j\phi}$，则序列 $A\alpha^n$ 就可以表示为

$$\begin{aligned} x[n] = A\alpha^n &= |A|e^{j\phi}|\alpha|^n e^{j\omega_0 n} \\ &= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)} \\ &= |A||\alpha|^n\cos(\omega_0 n+\phi) + j|A||\alpha|^n\sin(\omega_0 n+\phi) \end{aligned} \tag{2.14}$$

若 $|\alpha|>1$，则该序列振荡的包络按指数增长；若 $|\alpha|<1$，则包络按指数衰减。（作为一个简单的例子可考虑 $\omega_0=\pi$ 的情况。）

当 $|\alpha|=1$ 时，该序列称为**复指数序列**，且有

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n+\phi)} = |A|\cos(\omega_0 n+\phi) + j|A|\sin(\omega_0+\phi) \tag{2.15}$$

也就是说，$e^{j\omega_0 n}$ 的实部和虚部都随 n 作正弦变化。按照与连续时间情况相类比，量 ω_0 也称作复正弦或复指数的**频率**，ϕ 称作**相位**。然而值得注意的是：n 是一个无量纲的整数，由此 ω_0 的量纲必须是弧度。倘若我们希望与连续时间的情况保持一种更为相近的对照，可以把 ω_0 的单位标成为 rad/样本，而 n 的单位就是样本。

(2.15)式中的 n 总是一个整数这一事实就导致了离散时间复指数和正弦序列与连续时

间复指数和正弦信号之间的一些重大差别。当考虑一个频率为$(\omega_0+2\pi)$的序列时，就能发现连续时间和离散时间复正弦之间的一个重要差别。这时有

$$\begin{aligned} x[n] &= Ae^{j(\omega_0 n+2\pi)n} \\ &= Ae^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = Ae^{j\omega_0 n} \end{aligned} \tag{2.16}$$

更为一般地说，可以容易看出，频率为$(\omega_0+2\pi r)$的复指数序列(其中 r 为任意整数)相互间是无法区分的。这一点对正弦序列也成立，由下式可以很容易证明

$$\begin{aligned} x[n] &= A\cos[(\omega_0+2\pi r)n+\phi] \\ &= A\cos(\omega_0 n+\phi) \end{aligned} \tag{2.17}$$

对于由采样正弦信号和其它信号得到的序列来说，这一性质的内涵将在第 4 章讨论。到目前为止，我们只是得出：当讨论具有 $x[n]=Ae^{j\omega_0 n}$的复指数信号或具有 $x[n]=A\cos(\omega_n+\phi)$的实正弦信号时，只需要考虑范围为 2π 的一般频率区间就够了，譬如 $-\pi<\omega_0\leqslant\pi$ 或 $0\leqslant\omega_0<2\pi$。

连续时间和离散时间的复指数与正弦信号之间的另一重要差别是关于它们的周期性问题。在连续时间情况下，正弦信号和复指数信号都是周期的，且周期等于 2π 除以频率。在离散时间情况下，一个周期序列应满足

$$x[n]=x[n+N],\quad \text{对全部 } n \tag{2.18}$$

式中周期 N 必须是整数。如果用这个条件来检验离散时间正弦序列的周期性，则有

$$A\cos(\omega_0 n+\phi)=A\cos(\omega_0 n+\omega_0 N+\phi) \tag{2.19}$$

这要求

$$\omega_0 N=2\pi k \tag{2.20}$$

式中 k 为整数。对于复指数序列 $Ce^{j\omega_0 n}$也同样，即周期为 N 的周期性要求

$$e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n} \tag{2.21}$$

和(2.20)式一样，仅当 $\omega_0 N=2\pi k$ 时，上式才成立。这样，复指数和正弦序列对 n 来说并不一定都是周期为$(2\pi/\omega_0)$的周期序列，而要取决于 ω_0 的值，有可能它们根本就不是周期的。

例 2.2　周期和非周期离散时间正弦序列

现在考虑信号 $x_1[n]=\cos(\pi n/4)$，这个信号有一个周期 $N=8$。为了证明这一点，只要注意到 $x_1[n+8]=\cos(\pi(n+8)/4)=\cos(\pi n/4+2\pi)=\cos(\pi n/4)=x_1[n]$，它满足离散时间周期信号的定义。与我们在连续时间正弦信号所得出的直观认识相反，一个离散时间正弦信号频率的增加并不一定就减小了信号的周期。为此，考虑另一个离散时间正弦信号 $x_2[n]=\cos(3\pi n/8)$，它的频率比 $x_1[n]$的高。然而，$x_2[n]$的周期不是 8，因为 $x_2[n+8]=\cos(3\pi(n+8)/8)=\cos(3\pi n/8+3\pi)=-x_2[n]$。利用在对 $x_1[n]$的周期性所做的类似的证明，可以得出 $x_2[n]$是周期的，周期为 $N=16$。据此，频率从 $\omega_0=2\pi/8$ 增加到 $\omega_0=3\pi/8$，而信号的周期也增大了！发生这种情况的原因就是由于离散时间信号是仅能定义在整数 n 值所致。

在 n 上受到的整数限制就会引起某些正弦信号根本就不是周期的。例如，没有任何整数 N 能使信号$x_3[n]=\cos(n)$对全部 n 满足 $x_3[n+N]=x_3[n]$。这些以及其它一些与连续时间情况相反的离散时间正弦信号的性质都是由于对离散时间信号与系统而言，其时间变量 n 仅限制为整数的缘故。

当将(2.20)式的条件与先前得到的有关 ω_0 和$(\omega_0+2\pi r)$是不可区分的频率的结果结合在一起时，就很清楚，这里存在着 N 个可区分开的频率，对应这些频率的序列都是周期的，且周期为 N。这些频率中的一组就是 $\omega_k=2\pi k/N$，$k=0,1,\cdots,N-1$。复指数和正弦序列的这些性质在离散时间傅里叶分析计算算法的理论和设计中都是最基本的，这些将在第 8 章和第

9 章中详细讨论。

有关上面的讨论都说明了这样一点，就是对于连续时间和离散时间正弦和复指数信号的高、低频率的解释稍许有些不同。对于连续时间正弦信号 $x(t)=A\cos(\Omega_0 t+\phi)$，随着 Ω_0 的增加，$x(t)$振荡得愈来愈快；而对离散时间正弦信号 $x[n]=A\cos(\omega_0 n+\phi)$而言，当 ω_0 从 0 增加到 π 时，$x[n]$振荡愈来愈快，当 ω_0 从 π 增加到 2π 时，振荡反而变慢，这就如图 2.5 所示。事实上，由于正弦和复指数序列在 ω_0 上的周期性，$\omega_0=2\pi$ 与 $\omega_0=0$ 是无法区分的。更一般地说，在 $\omega_0=2\pi$ 周围的频率与 $\omega_0=0$ 周围的频率是不能区分的。结果，对于正弦和复指数序列，位于 $\omega_0=2\pi k$（k 为任意整数）邻近的 ω_0 值就属于低频范围（相对慢的振荡），而 ω_0 在 ω_0

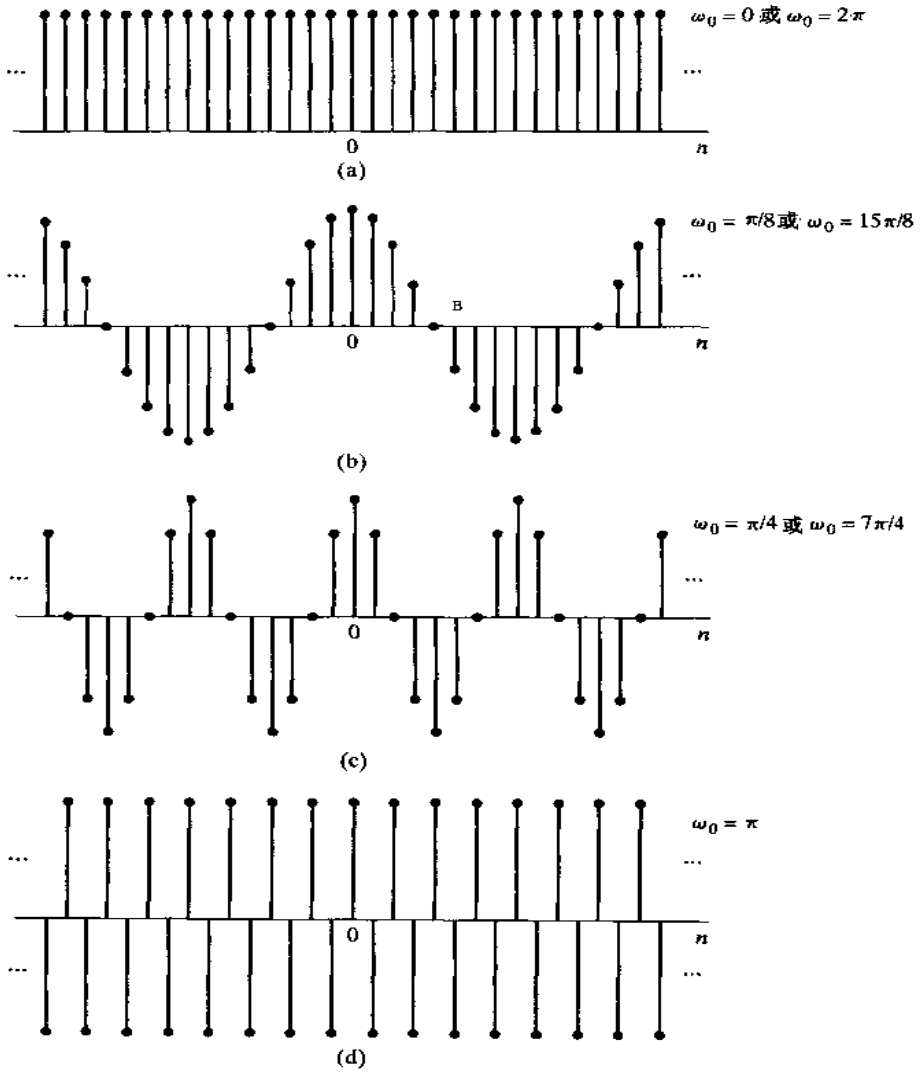


图 2.5　对于几个不同 ω_0 值时的 $\cos\omega_0 n$。随着 ω_0 从零增加到 π[(a)～(d)]，序列振荡加快；随着 ω_0 从 π 增加到 2π[(d)～(a)]，振荡变慢

$=(2\pi k+\pi)$附近就是高频区域(相对快的振荡)。

2.2 离散时间系统

在数学上,一个离散时间系统可以定义为一种变换或算子,它把值为 $x[n]$的输入序列映射为值为 $y[n]$的输出序列,可以记作

$$y[n]=T[x[n]] \tag{2.22}$$

并用图可表示为图 2.6。(2.22)式代表了由输入序列值计算输出序列值的某种规则或公式。应该强调的是,输出序列在每一个 n 点的值都可以是全部 n 点 $x[n]$值的函数。下面用一些例子来说明某些简单而有用的系统。

例 2.3 理想延迟系统

理想延迟系统由下列方程定义:

$$y[n]=x[n-n_d],\quad -\infty<n<\infty \tag{2.23}$$

式中 n_d 是一个固定的正整数,称为系统的延迟。换句话说,理想延迟系统就是把输入序列右移 n_d 个样本以形成输出序列。在(2.23)式中,若 n_d 是一个固定的负整数,那么系统就将输入左移 $|n_d|$ 个样本,这相应于时间超前。

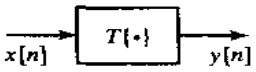


图 2.6 离散时间系统的表示,即将输入序列 $x[n]$映射为单一输出序列 $y[n]$的变换

例 2.3 中在确定某一个输出样本时只涉及到输入序列中的一个样本,下面的例子就不属于这种情况了。

例 2.4 滑动平均

一般的滑动平均系统由下列方程定义:

$$\begin{aligned}y[n]&=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x[n-k]\\&=\frac{1}{M_1+M_2+1}\{x[n+M_1]+x[n+M_1-1]+\cdots+x[n]+\\&\quad x[n-1]+\cdots+x[n-M_2]\}\end{aligned} \tag{2.24}$$

该系统计算输出序列的第 n 个样本时是将其作为输入序列第 n 个样本前后的(M_1+M_2+1)个样本的平均来求得的。图 2.7 表示出,输入序列可画成哑元变量 k 的函数,以及当 $n=7$,$M_1=0$ 和 $M_2=5$ 时,对计算输出样本 $y[n]$所用到的输入样本。输出样本 $y[7]$就等于两垂直虚线间全部样本之和

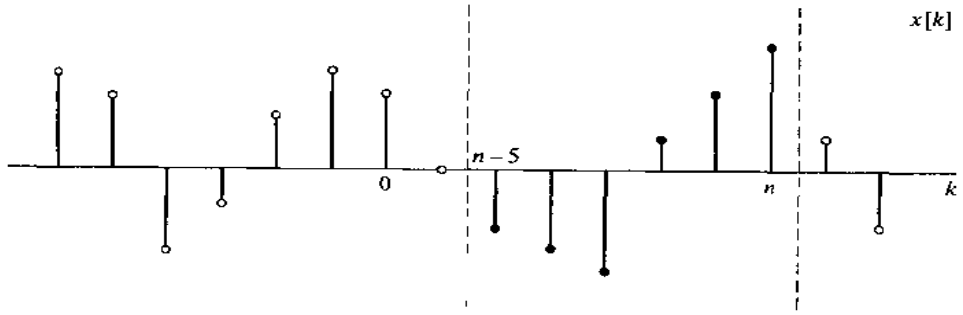


图 2.7 计算一个因果滑动平均所用到的序列值

的 1/6。若求 $y[8]$，则把两垂直虚线右移一个样本即可。

系统的分类可以通过加在变换 $T\{\cdot\}$ 的性质上的限制来定义。我们将会看到，这样做往往可以得出很一般的数学表达式。在下面 2.2.1～2.2.5 节所讨论的是其中特别重要的一些系统性质和限制。

2.2.1 无记忆系统

如果在每一个 n 值上的输出 $y[n]$ 只决定于同一 n 值的输入 $x[n]$，那么就说该系统是无记忆的。

例 2.5 一个无记忆系统

$x[n]$ 和 $y[n]$ 若由如下方程所关联，就属于无记忆系统的一个例子：

$$y[n] = (x[n])^2, \quad \text{对每个 } n \text{ 值} \tag{2.25}$$

除非 $n_d=0$，否则例 2.3 的系统就不是无记忆的。特别是，无论 n_d 是正(时间延迟)或是负(时间超前)，系统都称为是有"记忆"的。例 2.4 的系统不是无记忆系统，除非 $M_1=M_2=0$。

2.2.2 线性系统

线性系统由叠加原理来定义。如果 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 分别是输入为 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 时某一系统的响应，那么当且仅当下式成立时，该系统就是线性的：

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_2[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n] \tag{2.26a}$$

和

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n] \tag{2.26b}$$

式中 a 为任意常数。上述第一个性质称为**可加性**，第二个性质称为**齐次性或比例性**。这两个性质结合在一起就或为叠加原理，写成

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \tag{2.27}$$

(2.27)式对任意常数 a 和 b 都成立。该式还可推广到多个输入的叠加。具体地说，如果

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \tag{2.28a}$$

那么一个线性系统的输出就一定是

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] \tag{2.28b}$$

式中 $y_k[n]$ 就是系统对输入 $x_k[n]$ 的响应。

利用叠加原理的定义，可以容易证明例 2.3 和例 2.4 的系统都是线性系统(见习题 2.23)。例 2.5 是非线性系统的一个例子。

例 2.6 累加器系统

输入-输出由下列方程定义的系统就称为**累加器**系统，

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{2.29}$$

因为在时刻 n 的输出就等于该时刻及其之前全部输入样本的累加和。累加器系统是一个线性系统。为了证明这点，必须要能证明系统对所有输入都满足叠加原理，而不只是对某一组特定的输入。现在定义两个任意输入 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$，它们相应的输出是

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \tag{2.30}$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] \tag{2.31}$$

当输入是 $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$ 时，叠加原理要求对任何可选取的 a 和 b 都有输出为 $y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$。我们可以由(2.29)式出发来证明：

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[k] \tag{2.32}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) \tag{2.33}$$

$$= a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k] \tag{2.34}$$

$$= ay_1[n] + by_2[n] \tag{2.35}$$

由此，(2.29)式的累加器系统对所有输入都满足叠加原理，因此是线性的。

一般来说，证明一个系统不是线性的(如果它不是线性的)要比证明一个系统是线性的(如果它是线性的)简单些，这时只需要找到一个输入或一组输入系统不满足线性的条件就可以了。

例 2.7　一个非线性系统

考虑由下式定义的系统：

$$w[n] = \log_{10}(|x[n]|) \tag{2.36}$$

该系统不是线性的。为了证明这一点，只需要找到一个反例，也就是说找一组输入和输出能说明系统违反(2.27)式的叠加原理就可以了。输入 $x_1[n] = 1$ 和 $x_2[n] = 10$ 就是一个反例。对第一个信号的输出是 $w_1[n] = 0$，而对第二个信号的输出是 $w_2[n] = 1$。线性系统的齐次性要求：因为 $x_2[n] = 10x_1[n]$，如果系统是线性的，就必须有 $w_2[n] = 10w_1[n]$ 才对。因为情况不是这样，所以该系统不是线性的。

2.2.3　时不变系统

时不变(又称位移不变)系统是这样一种系统，输入序列的移位或延迟将引起输出序列相应的移位或延迟。具体地说，假设一个系统将值为 $x[n]$ 的输入序列变换成值为 $y[n]$ 的输出序列，这个系统如果说是时不变的，则对所有 n_0，值为 $x_1[n] = x[n - n_0]$ 的输入序列将产生值为 $y_1[n] = y[n - n_0]$ 的输出序列。

和线性性质的情况相同，要证明一个系统是时不变的，就得做一般性的证明，而不能在输入信号方面作任何特别的假设。例 2.3～2.7 的系统都是时不变的。时不变性的证明方式在例 2.8 和例 2.9 中说明。

例 2.8　作为一个时不变系统的累加器

现考虑例 2.6 中的累加器。定义 $x_1[n] = x[n - n_0]$。为了证明时不变性，要解出 $y[n - n_0]$ 和 $y_1[n]$，并比较它们看看是否相等。首先，

$$y[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \tag{2.37}$$

接下来求

$$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k] \tag{2.38}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k-n_0] \tag{2.39}$$

用变量 $k_1=k-n_0$ 置换到求和中得

$$y_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x[k_1]=y[n-n_0] \tag{2.40}$$

据此，累加器是一个时不变系统。

下面的例子用来说明系统不是时不变的。

例 2.9　压缩器系统

由下列关系定义的系统称之为**压缩器**：

$$y[n]=x[Mn],\qquad -\infty<n<\infty \tag{2.41}$$

式中 M 是一个正整数。具体地说，就是从 M 个样本中抛弃$(M-1)$个，也即输出序列是由输入序列中每隔 M 个样本选出一个样本来构成的。这个系统不是时不变的。只要考虑对输入 $x_1[n]=x[n-n_0]$的响应，$y_1[n]$就能证明它不是时不变的。若系统是时不变的，当输入为 $x_1[n]$时，系统的输出就必须等于 $y[n-n_0]$。由 $x_1[n]$得到的系统输出 $y_1[n]$可以直接由(2.41)式计算出为

$$y_1[n]=x_1[Mn]=x[Mn-n_0] \tag{2.42}$$

而输出 $y[n]$延迟 n_0 个样本应是

$$y[n-n_0]=x[M(n-n_0)] \tag{2.43}$$

比较这两个输出可见对全部 M 和 n_0，$y[n-n_0]$不等于 $y_1[n]$，因此该系统不是时不变的。

也有可能通过找一个反例，它违反了时不变性质来证明一个系统不是时不变的。例如，对该压缩器系统，当取 $M=2$，$x[n]=\delta[n]$和 $x_1[n]=\delta[n-1]$时就是一个反例。对于这种输入和 M 的选取，$y[n]=\delta[n]$，而 $y_1[n]=0$，很清楚对该系统 $y_1[n]\neq y[n-1]$。

2.2.4　因果性

如果对每一个选取的 n_0，输出序列在 $n=n_0$ 的值仅仅取决于输入序列在 $n\leqslant n_0$ 的值，则该系统就是因果的。这意味着，如果 $x_1[n]=x_2[n]$，$n\leqslant n_0$，则有 $y_1[n]=y_2[n]$，$n\leqslant n_0$；也就是说，该系统是不可预知的。例 2.3 的系统对于 $n_d\geqslant 0$ 是因果的；而对 $n_d<0$，则是非因果的。例 2.4 的系统，如果 $-M_1\geqslant 0$ 和 $M_2\geqslant 0$，则是因果的；否则就是非因果的。例 2.5 的系统是因果的，例 2.6 的累加器和例 2.7 的非线性系统都是因果的。然而，例 2.9 的系统若 $M>1$ 就不是因果的，因为 $y[1]=x[M]$。下面给出另一个非因果系统的例子。

例 2.10　前向和后向差分系统

考虑由下面关系定义的**前向差分系统**：

$$y[n]=x[n+1]-x[n] \tag{2.44}$$

因为输出的当前值与输入的一个将来值有关，所以这个系统不是因果的。违反因果性也可以考虑用 $x_1[n]=\delta[n-1]$和 $x_2[n]=0$ 这两个输入及其它们对应的输出 $y_1[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$和 $y_2[n]=0$ 来说明。注意到，对于 $n\leqslant 0$，有 $x_1[n]=x_2[n]$，那么根据因果性的定义就要求 $y_1[n]=y_2[n]$，$n\leqslant 0$。很清楚，对于 $n=0$ 这一点就不是这样。因此，由这个反例就已证明系统不是因果的。

后向差分系统由下式定义

$$y[n]=x[n]-x[n-1] \tag{2.45}$$

其输出仅决定于输入的现在值和过去的值。对某一个特定的时刻的输出 $y[n_0]$ 来说，不可能将 $n>n_0$ 的输入值吸收进来，所以系统是因果的。

2.2.5 稳定性

当且仅当每一个有界的输入序列都产生一个有界的输出序列时，则称该系统在有界输入有界输出(BIBO)意义下是稳定的。如果存在某个固定的有限正数 B_x，使下式成立：

$$|x[n]| \leqslant B_x < \infty, \quad \text{对全部 } n \tag{2.46}$$

则输入 $x[n]$ 就是有界的。稳定性要求对每一个有界的输入，都存在一个固定的有限正数 B_y 使下式成立：

$$|y[n]| \leqslant B_y < \infty, \quad \text{对全部 } n \tag{2.47}$$

值得特别强调的是，本节已经定义的这些性质是系统的性质，而不是输入对某个系统的性质。这就是说，我们有可能找到一些输入，对这些输入这些性质成立；但是，对某些输入存在着某个性质，并不意味着系统就具有这一性质。具有这一性质的系统必须对所有输入都成立。例如，一个不稳定的系统有可能对某些有界的输入，其输出是有界的；但是具有稳定性质的系统必须是对所有有界的输入，其输出都是有界的。如果我们恰恰能够找到一种输入使该系统性质不成立，那么就能证明系统不具有这个性质。下面的例子对前面已经定义的几个系统说明一下稳定性测试。

例 2.11 稳定或不稳定性测试

例 2.5 的系统是稳定的。为了能看出这一点，假设输入 $x[n]$ 是有界的为 $|x[n]| \leqslant B_x$，对全部 n，那么 $|y[n]| = |x[n]|^2 \leqslant B_x^2$。这样就能选取 $B_y = B_x^2$，从而证明 $y[n]$ 是有界的。

同样道理，能看出例 2.7 中定义的系统是不稳定的，因为对任何具有 $x[n]=0$ 的时刻 n 都有 $y[n] = \log_{10}(|x[n]|) = -\infty$，即便对于任何不等于零的输入样本，其输出都是有界的。

在例 2.6 中由(2.29)式定义的累加器也是不稳定的。譬如，考虑当 $x[n]=u[n]$ 时，这时显然是有界的，且为 $B_x=1$。对这个输入，累加器的输出是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] \tag{2.48}$$

$$= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ (n+1), & n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.49}$$

对全部 n 来说，不存在一个有界的 B_y，使得有 $(n+1) \leqslant B_y < \infty$，因此系统是不稳定的。

利用类似的证法，可以证明在例 2.3，例 2.4，例 2.9 和例 2.10 中的系统都是稳定的。

2.3 线性时不变系统

一类特别重要的系统是由具有线性时不变性组成的系统。这两个性质结合在一起就可得出对这类系统特别方便的表示方法。最为重要的是，这类系统在信号处理中特别有用。在(2.27)式中，线性系统是用叠加原理来定义的。如果线性性质与将一个序列表示成如(2.6)式所示的一组延迟单位样本序列的线性组合结合起来，那么一个线性系统就可以完全用它的单位脉冲响应来表征。令 $h_k[n]$ 是系统对发生在 $n=k$ 的单位样本序列 $\delta[n-k]$ 的响应，那么(2.6)式有

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} \tag{2.50}$$

根据(2.27)式的叠加原理，可以写出

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \tag{2.51}$$

按照(2.51)式，系统对任何输入的响应就可以用系统对 $\delta[n-k]$ 的响应来表示。但是，如果系统仅仅具有线性性质，$h_k[n]$ 还将与 n 和 k 都有关。在这种情况下，(2.51)式计算的有效性就会受到限制。如果再把时不变这个条件加在系统上，就能得到一个更为有用的结果。

时不变性意味着，如果 $h[n]$ 是系统对 $\delta[n]$ 的响应，那么系统对 $\delta[n-k]$ 的响应就是 $h[n-k]$。利用这一附加限制，(2.51)式就变成

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.52}$$

(2.52)式的结果表明，如果已知 $h[n]$，就有可能利用(2.52)式求出对任何输入 $x[n]$ 的输出 $y[n]$。正是在这个意义上，我们说一个线性时不变系统(有时缩写为 LTI)可以完全由它的单位脉冲响应 $h[n]$ 来表征。

(2.52)式一般就称为**卷积和**。如果 $y[n]$ 是一个序列，其值是按(2.52)式的关系与序列 $h[n]$ 和 $x[n]$ 的值联系在一起的，就称 $y[n]$ 是 $x[n]$ 与 $h[n]$ 的卷积，并用下述符号表示：

$$y[n] = x[n] * h[n] \tag{2.53}$$

离散时间卷积的运算是取两个序列 $x[n]$ 和 $h[n]$，并产生第三个序列 $y[n]$。(2.52)式把输出序列的每一个样本用输入和单位脉冲响应序列的全部样本来表示。

(2.52)式的推导给出了这样一种解释：在 $n=k$ 的输入样本 $x[n]\delta[n-k]$，由系统变换成输出序列 $x[n]h[n-k]$，$-\infty<n<\infty$，并且对每一个 k，这些序列相叠加以产生整个输出序列。这种解释可用图 2.8 来说明。图中分别示出了一个单位脉冲响应、一个只有 3 个非零样本的简单输入序列、对每一个样本的单个输出以及由于在输入序列中全部样本产生的总输出。更具体一点就是 $x[n]$ 可以分解成 3 个序列 $x[-2]\delta[n+2]$，$x[0]\delta[0]$ 与 $x[3]\delta[n-3]$ 之和，它们分别代表输入序列 $x[n]$ 中的 3 个非零值。序列 $x[-2]h[n+2]$，$x[0]\delta[n]$ 以及 $x[3]\delta[n-3]$ 就分别是系统对 $x[-2]\delta[n+2]$，$x[0]\delta[n]$ 和 $x[3]\delta[n-3]$ 的响应。最后，对 $x[n]$ 的响应就是这 3 个单个响应的和。

虽然卷积和的表示式与连续时间线性理论中卷积积分的表示式是很相像的，但是不应该把卷积和看成是卷积积分的一种近似。在连续时间线性理论中卷积积分主要起着一种理论上的作用，而我们将会看到，卷积和除了它在理论上的重要作用之外，还往往用作一个离散时间线性系统一种明确的实现。因此，在实际计算时重要的是要对卷积和的性质有一个深透的理解。

以上关于(2.52)式的解释强调了卷积和就是线性和时不变性的一个直接结果。然而，对(2.52)式的另一种稍许不同的看法会得出一种在计算上特别有用的解释。当作为公式来计算输出序列的某单个值时，(2.52)式指出：$y[n]$(也就是输出中的第 n 个值)是由输入序列(表示成 k 的函数)乘以某值为 $h[n-k]$ 的序列，$-\infty<k<\infty$，然后对任意一个固定的 n 值，将全部乘积 $x[k]h[n-k]$ 加起来而得到的，这里 k 是一个在求和过程中计数的标号。这样，两个序列的卷积运算就涉及到对全部 n 值做这种计算，从而得到整个输出序列 $y[n]$，$-\infty<n<\infty$。为了求得 $y[n]$，完成计算(2.52)式的关键是如何对全部所关心的 n 值构成序列

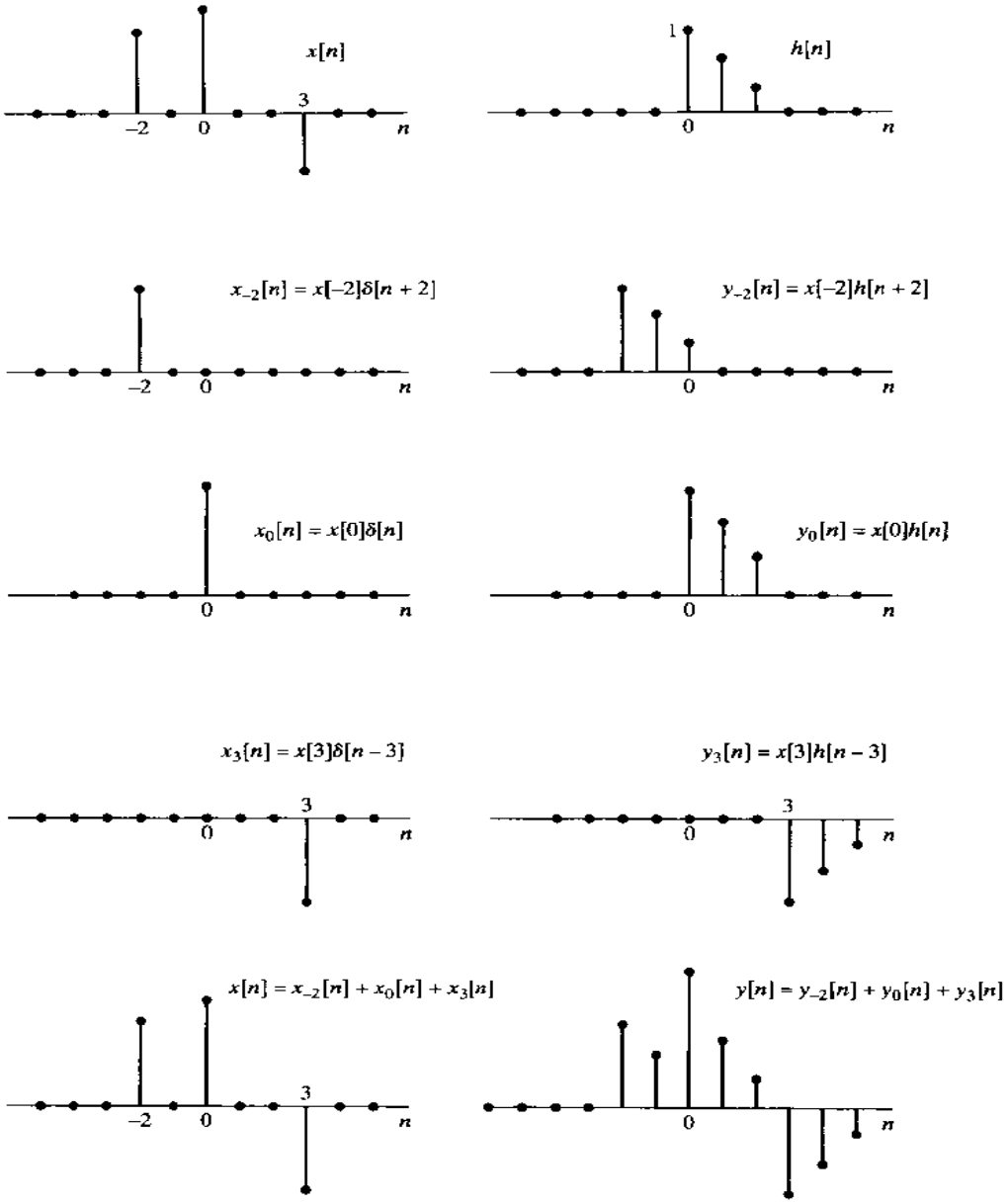


图 2.8　一个线性时不变系统的输出可以表示为对单个输入样本响应的叠加

$h[n-k]$，$-\infty<k<\infty$。为此，我们注意下面(2.54)式会是很有用的，

$$h[n-k]=h[-(k-n)] \tag{2.54}$$

(2.54)式最好用例子给予说明。

例 2.12　卷积和的计算

假设 $h[k]$是如图 2.9(a)所示的序列，而要想求得如下 $h[n-k]=h[-(k-n)]$的序列。先定义 $h_1[k]=h[-k]$如图 2.9(b)所示。再定义 $h_2[k]$是 $h_1[k]$在 k 坐标轴上延迟 n 个样本，即 $h_2[k]=h_1[k-n]$。图 2.9(c)表明的就是在图 2.9(b)中的序列延时 n 个样本的结果。利用 $h_1[k]$和 $h[k]$之间的关系就能证明 $h_2[k]=h_1[k-n]=h[-(k-n)]$，因此该图最底部的(c)图就是所欲求的信号。总之，由 $h[k]$求出 $h[n-k]$首先是将 $h[k]$关于 $k=0$ 反转，然后将该反转后的信号延迟 n 个样本。

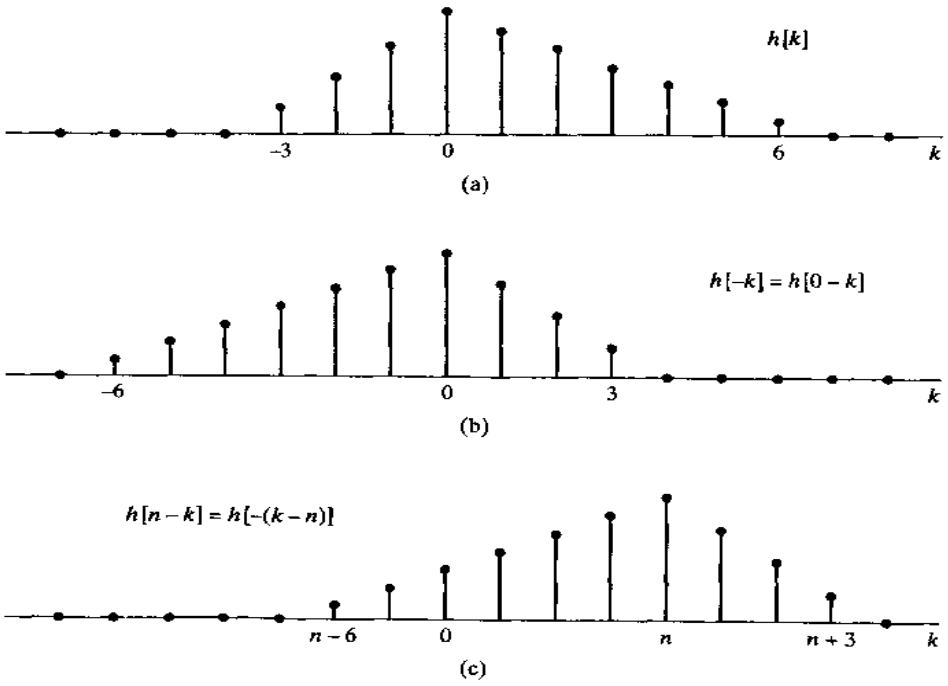


图 2.9　$h[n-k]$序列的形成

(a)作为 k 的函数的序列 $h[k]$；(b)序列 $h[-k]$作为 k 的函数；

(c)当 $n=4$ 时，序列 $h[n-k]$作为 k 的函数

根据例 2.3 应该清楚，一般来说，序列 $h[n-k]$，$-\infty<n<\infty$，可以这样得到：

1. 将 $h[k]$关于原点反转求得 $h[-k]$；

2. 将反转序列的原点移至 $k=n$。

为了实现离散时间卷积，把两个序列 $x[k]$和 $h[-n-k]$($-\infty<k<\infty$)相乘，再将其乘积相加，就能计算出输出样本 $y[n]$。为了求出另一个输出样本，序列 $h[-k]$的原点就要移到这个新的样本位置上，并重复上述过程。这一计算步骤既能用于采样数据的数值计算，也能用于其样本值是用一个简单公式表示的序列的解析计算。下面的例子说明在后一种情况下离散时间卷积的计算。

例 2.13　卷积和的解析计算

有一系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = u[n] - u[n-N]$$
$$= \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

输入是

$$x[n] = a^n u[n]$$

为了求在某一个特定点 n 的输出，必须形成在全部 k 上乘积 $x[k]h[-n-k]$ 的和。在现在这个例子的情况下，对于几组不同的 n 值，可以求出计算 $y[n]$ 的公式。例如，图 2.10(a)表示为当 n 为某一负整数时，所画出的序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$。很清楚，对于全部负的 n 值都得出一种相类似的图形；即序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 的非零部分不重叠，所以

$$y[n] = 0, \qquad n < 0$$

图 2.10(b)画出了当 $0 \leqslant n$ 和 $n-N+1 \leqslant 0$ 时这两个序列的图形。这两个条件可以合并为一个条件

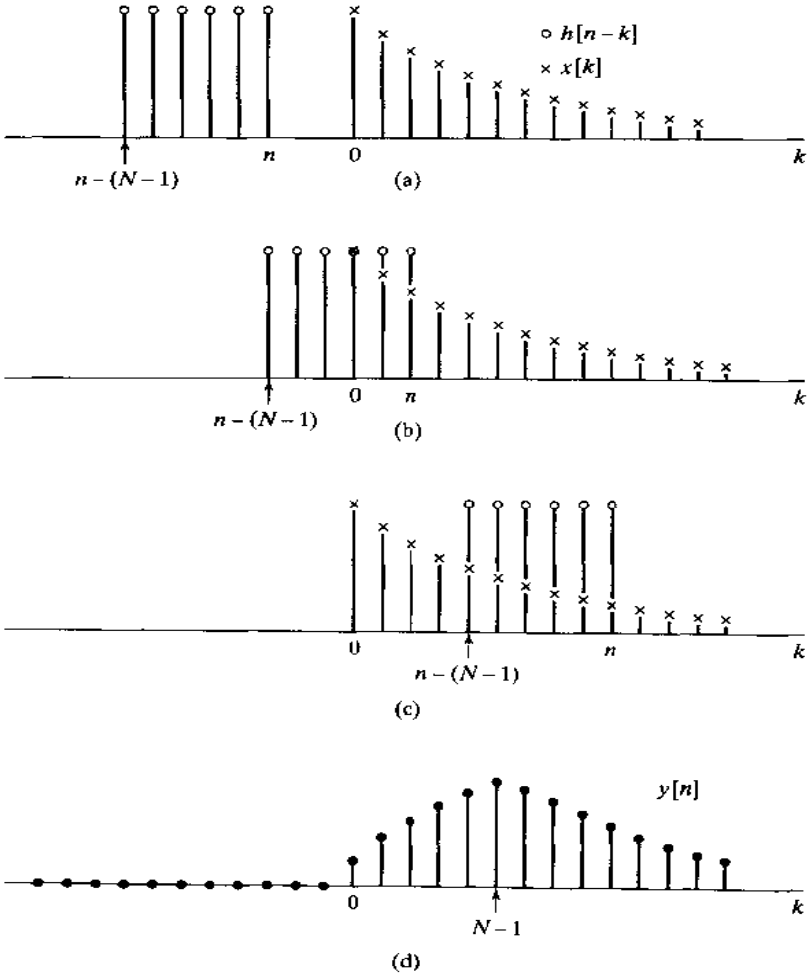


图 2.10　与计算一个离散卷积有关的序列

(a)～(c)对不同的 n 值，序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 作为 k 的函数(仅表示出非零的样本值)；(d)作为 n 函数的输出序列

$0 \leqslant n \leqslant N-1$。从图 2.10(b)可以看出，因为

$$x[k]h[n-k] = a^k$$

则

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{2.55}$$

这个和式的极限可直接由图 2.10(b)确定。(2.55)式表明 $y[n]$是一个$(n+1)$项和的几何级数，级数的公比是 a。利用一般的有限项求和公式可以用闭式表示为

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}, \qquad N_2 \geqslant N_1 \tag{2.56}$$

将这个结果应用到(2.55)式，可得

$$y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{2.57}$$

最后，图 2.10(c)表示当 $0 < n-N+1$，或者 $N-1 < n$ 时，这两个序列的情况。如前所述

$$x[k]h[n-k] = a^k, \qquad n-N+1 < k \leqslant n$$

但是现在求和的下限是 $n-N+1$，如图 2.10(c)所示。由此

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k, \qquad N-1 < n \tag{2.58}$$

利用(2.56)式可得

$$y[n] = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a}$$

或者

$$y[n] = a^{n-N+1}\left(\frac{1-a^N}{1-a}\right) \tag{2.59}$$

由于输入和单位脉冲响应均具有分段指数性质，我们就能够得到下面将 $y[n]$作为 n 的函数的闭式表示式

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ a^{n-N+1}\left(\dfrac{1-a^n}{1-a}\right), & N-1 < n \end{cases} \tag{2.60}$$

这个序列如图 2.10(d)所示。

例 2.13 说明，当输入和单位脉冲响应都是由简单式子给出时，如何解析地计算出这个卷积和。在这样的情况下，利用几何级数的求和公式或其它的闭式公式①，可以将和式求得一个很紧凑的形式。当不存在简单公式时，只要和是有限的，卷积和也能利用例 2.13 的办法用数值方法求出。如果输入序列或单位脉冲响应序列其中之一是有限长的，也就是具有有限个非零样本值，那么和是有限的，就属于这种情况。

2.4 线性时不变系统的性质

因为所有的线性时不变系统都是由(2.52)式的卷积和来描述的，所以这类系统的性质就能用离散时间卷积的性质来定义。因此，单位脉冲响应就是某一特定线性时不变系统性质的

① 例如在 Grossman(1992)的书中讨论了这样一些结果。

完全表征。

这类线性时不变系统的某些一般性质可以由卷积运算的性质得出。例如，卷积运算是可以交换的，那

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n] \tag{2.61}$$

这可以通过对(2.52)式作变量置换来证明。具体讲，以 $m=n-k$ 替换，可得

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-m]h[m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]x[n-m]=h[n]*x[n] \tag{2.62}$$

所以在求和中，$x[n]$和 $h[n]$的作用是可以交换的。也就是说，在卷积中两个序列的先后次序是无关紧要的。因此如果输入和单位脉冲响应的作用颠倒的话，系统的输出是一样的。一个线性时不变系统在输入为 $x[n]$和单位脉冲响应为 $h[n]$时与输入为$h[n]$和单位脉冲响应为 $x[n]$时将有同样的输出。卷积运算在相加上也满足分配律，即

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n])=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

该式可直接由(2.52)式导出，并且它就是卷积的线性和可交换性的一个直接结果。

在系统的**级联联接**中，第一个系统的输出是第二个系统的输入，第二个系统的输出是第三个系统的输出，依此类推。最后一个系统的输出就是总的输出。两个线性时不变系统的级联相应于一个单位脉冲响应为这两个系统单位脉冲响应卷积的线性时不变系统，这可用图 2.11 来说明。在该图最上面的方框图中，如果 $x[n]=\delta[n]$，则第一个系统的输出就是 $h_1[n]$，由此第二个系统的输出(按定义也就是总的系统单位脉冲响应)为

$$h[n]=h_1[n]*h_2[n] \tag{2.63}$$

由于卷积的可交换性，因此线性时不变系统级联后的单位脉冲响应与级联次序无关。这一结果归纳在图 2.11 中，图中的 3 种系统具有同一个单位脉冲响应。

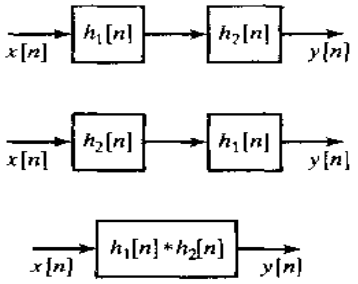


图 2.11　具有同一个单位脉冲响应的三个线性时不变系统

在**并联联结中**，各系统有相同的输入，且将各系统的输出相加就得到总的输出。由卷积的分配律特性，两个线性时不变系统并联联接等效于一个单一的系统，该系统的单位脉冲响应是各系统单位脉冲响应之和，即

$$h[n]=h_1[n]+h_2[n] \tag{2.64}$$

如图 2.12 所示。

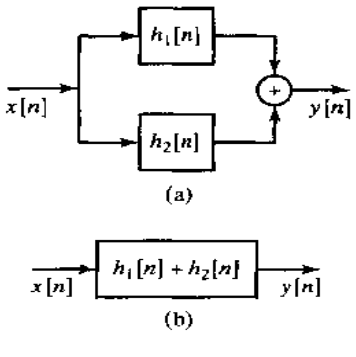


图 2.12　(a)线性时不变系统的并联联接；(b)等效系统

由线性和时不变的限制条件定义了一类具有很特别性质的系统。稳定性和因果性则代表了另外一些性质，而且知道一个线性时不变系统是否是稳定的和因果的往往很重要。回忆一下 2.2.5 节的讨论，认为一个稳定系统就是每个有界输入均产生一个有界输出的系统。当且仅当单位脉冲响应是绝对可加时，则线性时不变系统才是稳定的，即

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|<\infty \tag{2.65}$$

该式可证明如下。由(2.62)式，

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| \tag{2.66}$$

如果 $x[n]$是有界的

$$|x[n]| \leqslant B_x$$

那么用 B_x 替换$|x[n-k]|$只能强化(2.66)式的不等式，所以有

$$|y[n]| \leqslant B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \tag{2.67}$$

据此，如果(2.65)式成立，则 $y[n]$就是有界的；也就是说(2.65)式是稳定性的充分条件。为了证明它也是一个必要条件，就必须证明如果 $S=\infty$，那么能找一个有界的输入使系统产生无界的输出。这个输入就是其值为下式的序列：

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{h^*[-n]}{|h[-n]|}, & h[n] \neq 0 \\ 0, & h[n] = 0 \end{cases} \tag{2.68}$$

式中 $h^*[n]$是 $h[n]$的复共轭。显然序列 $x[n]$为有界，其界为 1。然而在 $n=0$ 时，输出值是

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = S \tag{2.69}$$

因此，如果 $S=\infty$，就可能由一个有界的输入序列产生一个无界的输出序列。

在 2.2.4 节中所定义的因果系统就是其输出 $y[n_0]$仅仅与 $n \leqslant n_0$ 时的输入样本有关的系统。由(2.52)式或(2.62)式可以得出，这个定义就意味着对线性时不变系统的因果性，下述条件成立(见习题 2.62)：

$$h[n] = 0, \quad n < 0 \tag{2.70}$$

正是由于这个原因，有时也将 $n<0$ 时其值为零的序列称为**因果序列**，它也说明因果序列可以作为因果系统的单位脉冲响应。

为了说明线性时不变系统的性质是如何在它们单位脉冲响应中得到反映的，让我们重新考虑一下例 2.3～2.10 中所定义过的某些系统。首先注意到，仅有例 2.3，2.4，2.6 和 2.10 的这些系统是线性的和时不变的。虽然非线性或时变系统的单位脉冲响应也能求出，但是由于卷积的公式以及表示稳定性和因果性的(2.65)式和(2.70)式都不能用于这样一类系统，所以一般来说人们对它并不十分感兴趣。

首先我们求出例 2.3，2.4，2.6 和 2.10 等系统的单位脉冲响应，也就是利用系统给出的关系式计算出每个系统对 $\delta[n]$的响应。所求出的各单位脉冲响应如下：

理想延迟(例 2.3)

$$h[n] = \delta[n-n_d], \quad n_d \text{ 为某一固定正整数} \tag{2.71}$$

滑动平均(例 2.4)

$$h[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leqslant n \leqslant M_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{2.72}$$

累加器(例 2.6)

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}=u[n] \tag{2.73}$$

前向差分(例 2.10)

$$h[n]=\delta[n+1]-\delta[n] \tag{2.74}$$

后向差分(例 2.10)

$$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1] \tag{2.75}$$

已知这些基本系统的单位脉冲响应[(2.71)式～(2.75)式],就能通过计算单位脉冲响应的绝对值之和

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$$

来检查每个系统的稳定性。对于理想延迟、滑动平均、前向差分和后向差分等例子,显然 $S<\infty$,因为这些单位脉冲响应都只有有限个非零样本。这样的系统称为**有限脉冲响应**(FIR)系统。很显然,只要单位脉冲响应的每一个值在幅度上都是有限的,FIR 系统总是稳定的。然而,累加器是不稳定的系统,因为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}u[n]=\infty$$

在 2.2.5 节中通过一个有界的输入(单位阶跃),得到一个无界的输出例子也说明过累加器的不稳定性。

累加器的单位脉冲是无限长的,这就是一类称之为**无限脉冲响应**(IIR)系统的一个例子。单位脉冲响应 $h[n]=a^nu[n]$,$|a|<1$ 的系统就是 IIR 系统中为稳定系统的一个例子。这时,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n \tag{2.76}$$

如果 $|a|<1$,由无限项几何级数求和公式给出

$$S=\frac{1}{1-|a|}<\infty \tag{2.77}$$

另一方面,如果 $|a|\geqslant 1$,求和极限是无限的,则系统不稳定。

为了检验例 2.3,2.4,2.6 和 2.10 等线性时不变系统的因果性,只须校验一下,当 $n<0$ 时,是否有 $h[n]=0$。正如在 2.2.4 节所讨论过的,理想延迟[(2.23)式中 $n_d\geqslant 0$]是因果的。如果 $n_d<0$,则系统是非因果的。对于滑动平均来说,因果性要求 $-M_1\geqslant 0$ 和 $M_2\geqslant 0$。累加器和后向差分系统是因果的,而前向差分系统是非因果的。

作为两个序列之间运算的卷积概念会导致涉及很多系统问题的简化,理想延迟系统就代表了一种特别有用的结果。因为延迟系统的输出是 $y[n]=x[n-n_d]$,而且又因为延迟系统的单位脉冲响应是 $h[n]=\delta[n-n_d]$,这样就有

$$x[n]*\delta[n-n_d]=\delta[n-n_d]*x[n]=x[n-n_d] \tag{2.78}$$

这就是说,一个移位单位样本序列与任何信号 $x[n]$ 的卷积是很容易求出的:只是将 $x[n]$ 作

相同的移位。

因为延迟在线性系统实现中是一项最基本的运算，所以上述结果在线性时不变系统互联的分析和简化中常常也是很有用的。作为一个例子，考虑图 2.13(a)的系统。该系统由一个前向差分与一个理想延迟(延迟一个样本)级联而成。根据卷积的可交换性，只要系统是线性的和时不变的，则系统在级联中的次序是没有关系的。因此，当我们计算一个序列的前向差分并延迟这个结果(图 2.13(a))，和先延迟这个序列再计算前向差分(图 2.13(b))，两者应得到同样结果。同时，由(2.63)式可得每个级联系统总的单位脉冲响应是单个系统单位脉冲响应的卷积，因此有

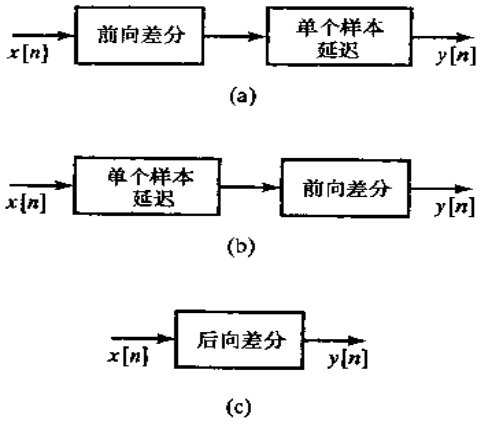


图 2.13 利用卷积的可交换性求等效系统

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] \\ &= \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n]) \\ &= \delta[n] - \delta[n-1] \end{aligned} \tag{2.79}$$

这样，$h[n]$与后向差分系统的单位脉冲响应是一致的，也就是说图 2.13(a)和图 2.13(b)的级联系统都能被一个等效的后向差分系统所代替，如图 2.13(c)所示。

应该注意到，在图 2.13(a)和(b)中的非因果前向差分系统通过级联一个延迟系统就能把它转换成因果系统。一般来说，任何非因果的 FIR 系统都能够成为因果的，只要与它级联一个足够长的延迟系统就行了。

级联系统的另一个例子是引入了逆系统的概念，考虑一下图 2.14 中系统的级联，该级联系统的单位脉冲响应是

$$\begin{aligned} h[n] &= u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned} \tag{2.80}$$

这就是说，一个累加器紧跟着一个后向差分(反之亦然)的级联联接就产生一个系统，该系统的单位脉冲响应是一个单位样本。因为 $x[n] * \delta[n] = x[n]$，所以该级联系统的输出总是等于它的输入。在这种情况下，后向差分系统完全补偿(或反演)了累加器的效果，即后向差分系统是累加器的逆系统。根据卷积的可交换性，累加器也同样是后向差分系统的逆系统。应该注意到，这个例子给出了(2.8)式和(2.10)式的一个系统解释。一般来说，如果一个线性时不变系统的单位脉冲响应为 $h[n]$，那么它的逆系统(如果存在)的单位脉冲响应 $h_i[n]$就应满足如下关系：

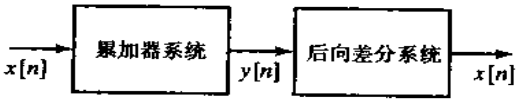


图 2.14 累加器与一个后向差分系统的级联。因为后向差分是该累加器的逆系统，所以级联后就等效为一个恒等系统

$$h[n] * h_i[n] = h_i[n] * h[n] = \delta[n] \tag{2.81}$$

在需要补偿一个线性系统某些效果的场合，逆系统是很有用的。通常给定 $h[n]$时直接

由(2.81)式解出 $h_i[n]$是困难的。然而,在第3章将会看到,z变换将提供求逆系统的一种直接方法。

2.5 线性常系数差分方程

线性时不变系统中的一种重要的子系统是由这样一些系统组成,这些系统的输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足 N 阶线性常系数差分方程,其形式为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{2.82}$$

在2.4节所讨论过的性质,以及所引入的某些分析方法都可以用来求出已经定义过的某些线性时不变系统的差分方程表示式。

例 2.14 累加器的差分方程表示

作为该类线性常系数差分方程的一个例子是由下式定义的累加器系统:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{2.83}$$

为了说明该系统的入和输出满足(2.82)式那样的差分方程,可将对于在$(n-1)$时的输出写成

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \tag{2.84}$$

再将 $x[n]$这一项从(2.83)式中单独分开,重写成

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] \tag{2.85}$$

将(2.84)式代入(2.85)式得到

$$y[n] = x[n] + y[n-1] \tag{2.86}$$

将(2.86)式中的输入和输出项分列在式子的两边,经整理后即得所欲求的差分方程形式如下:

$$y[n] - y[n-1] = x[n] \tag{2.87}$$

由此,我们已经说明,除了满足由(2.83)式所定义的关系外,输入和输出还满足(2.82)式那样的线性常系数差分方程,唯这时 $N=1, a_0=1, a_1=-1, M=0$ 和 $b_0=1$。

(2.86)式这种形式的差分方程表示可以给出一个对如何实现累加器系统最好的理解。按照(2.86)式,对每个 n 值,将当前的输入$x[n]$加到前一个累加和 $y[n-1]$上,就是当前的输出 $y[n]$。累加器的这种解释可用图2.15的方框图来表示。(2.86)式和图2.15的方框图称为系统的**递推表示**,因为每一个值的计算都要用到前面已计算出的值。本节稍后部分将更详细地阐明这一概念。

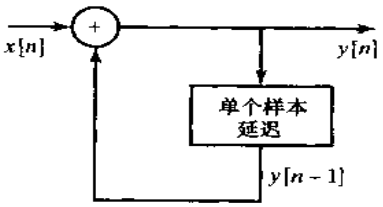


图 2.15 用递推差分方程表示一个累加器的方框图

例 2.15 滑动平均系统的差分方程表示

现考虑例2.4的滑动平均系统,取 $M_1=0$,以使系统成为因果的。这时由(2.72)式,该系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(u[n] - u[n-M_2-1]) \tag{2.88}$$

由此可得

$$y[n] = \frac{1}{(M_2+1)} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k] \tag{2.89}$$

这是(2.82)式的一种特殊情况，其中 $N=0, a_0=1, M=M_2$ 和 $b_k=1/(M_2+1), 0\leqslant k\leqslant M_2$。另外，单位脉冲响应也能表示为

$$h[n]=\frac{1}{(M_2+1)}(\delta[n]-\delta[n-M_2-1])*u[n] \tag{2.90}$$

这个式子提示我们，这个因果滑动平均系统可以表示成图2.16那样的级联系统。为了求出该方框图的差分方程表示，可以首先求 $x_1[n]$ 为

$$x_1[n]=\frac{1}{(M_2+1)}(x[n]-x[n-M_2-1]) \tag{2.91}$$

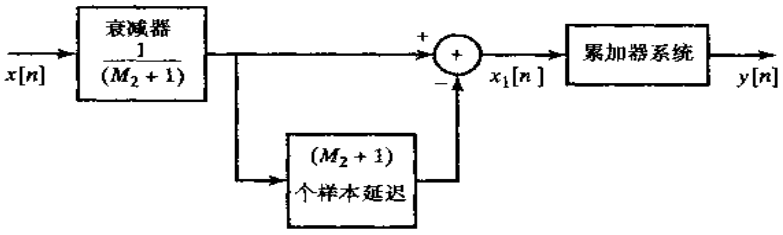


图 2.16　滑动平均系统的递推形式方框图

由例 2.14 的(2.87)式，累加器的输出满足差分方程

$$y[n]-y[n-1]=x_1[n]$$

因此可得

$$y[n]-y[n-1]=\frac{1}{(M_2+1)}(x[n]-x[n-M_2-1]) \tag{2.92}$$

我们再次得到一个形式如(2.82)式的差分方程，但这次是 $N=1, a_0=1, a_1=-1, M=M_2$ 和 $b_0=-b_{M_2+1}=1/(M_2+1)$，而其余的 $b_k=0$。

在例 2.15 中，我们看到滑动平均系统有两种不同的差分方程表示。在第 6 章将会看到，事实上可有无数个不同的差分方程来表示一个给定的线性时不变的输入/输出关系。

如同连续时间系统的线性常系数微分方程一样，离散时间系统的线性常系数差分方程若不给出附加的限制或信息，是不能给出对给定输入情况下输出的唯一表述的。具体讲，假设对某一给定的输入 $x_p[n]$，已经依据某种方法确定了输出序列 $y_p[n]$，以满足(2.82)式的方程，那么在同一输入下，同一方程也能被任何一种具有如下形式的输出所满足：

$$y[n]=y_p[n]+y_h[n] \tag{2.93}$$

式中 $y_h[n]$ 是(2.82)式当 $x[n]=0$ 时的任意解，即下列方程的解：

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y_h[n-k]=0 \tag{2.94}$$

(2.94)式称为**齐次方程**，而 $y_h[n]$ 称为**齐次解**。序列 $y_h[n]$ 事实上是如下方程的一簇解

$$y_h[n]=\sum_{m=1}^{N}A_m z_m^n \tag{2.95}$$

将(2.95)式代入(2.94)式，可以证明复数 z_m 一定是下面多项式的根：

$$\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}=0 \tag{2.96}$$

(2.95)式假设在(2.96)式中的多项式的全部 N 个根都是互不相同的。有关涉及重根项的形

式会稍许有些不同，但总是有 N 个待定的系数。含有重根的齐次解的例子将在习题 2.38 中给出。

因为 $y_h[n]$有 N 个待定的系数，因此对于某一给定的输入来说，为了能唯一描述 $y[n]$就需要一组 N 个辅助条件。这些辅助条件可以由一些特定的 n 点上的特定 $y[n]$值组成，诸如 $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$，然后解一组 N 个线性方程组来求得 N 个待定系数。

另外，如果辅助条件由 $y[n]$的一组辅助值构成，则其余的 $y[n]$值可将(2.82)式重新写成一种递推公式来一一求出，也就是

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k] \tag{2.97}$$

如果输入 $x[n]$与一组辅助值，比如 $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$都给定的话，那么 $y[0]$就可由(2.97)式求出。有了 $y[0], y[-1], \cdots, y[-N+1]$，则 $y[1]$又可以求出，依此类推下去。在这一过程中，$y[n]$是**递推地**计算出来的；也就是说，输出的计算不仅涉及到输入序列，而且也与输出序列以前的值有关。

为了产生当 $n < -N$ 时 $y[n]$的值(仍假设给出的辅助条件为 $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$值)，可将(2.82)式重新整理写成

$$y[n-N] = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_N} x[n-k] \tag{2.98}$$

由上式，$y[-N-1], y[-N-2], \cdots$，就能依次递推地计算出来。下面的例子就说明这一递推过程。

例 2.16　差分方程的递推计算

一个系统的输入和输出满足如下差分方程：

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2.99}$$

设输入 $x[n] = K\delta[n]$，这里 K 为任意数，辅助条件 $y[-1] = c$。由这个值开始，对 $n \geqslant -1$ 的输出可按下列步骤递推地计算：

$$\begin{aligned}
y[0] &= ac + K \\
y[1] &= ay[0] + 0 \\
&= a(ac + K) = a^2c + aK \\
y[2] &= a(a^2 + aK) = a^3c + a^2K \\
y[3] &= a(a^3c + a^2K) = a^4c + a^3K \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

对于这一简单情况，可见对 $n \geqslant 0$，$y[n]$

$$y[n] = a^{n+1}c + a^nK, \qquad n \geqslant 0 \tag{2.100}$$

为了确定 $n < 0$ 时的输出，把差分方程表示成

$$y[n-1] = a^{-1}(y[n] - x[n]) \tag{2.101a}$$

或

$$y[n] = a^{-1}(y[n+1] - x[n+1]) \tag{2.101b}$$

利用辅助条件 $y[-1] = c$，对 $n < -1$ 的 $y[n]$值计算如下：

$$\begin{aligned}
y[-2] &= a^{-1}(y[-1] - x[-1]) = a^{-1}c \\
y[-3] &= a^{-1}a^{-1}c = a^{-2}c \\
y[-4] &= a^{-1}a^{-2}c = a^{-3}c
\end{aligned}$$

很明显有

$$y[n] = a^{n+1}c, \qquad n \leqslant -1 \tag{2.102}$$

最后将(2.100)式与(2.102)式结合起来，就得出递推计算的结果为

$$y[n] = a^{n+1}c + Ka^n u[n], \quad \text{对全部 } n \tag{2.103}$$

在解例 2.16 中，要说明几点重要之处。首先注意到从 $n = -1$ 开始，在正、负两个方向用递推计算输出的方法实现了这个系统。显然，这个过程是非因果的。同时也注意到，当 $K = 0$ 时，输入为零，而 $y[n] = a^{n+1}c$。一个线性系统要求当全部时间内输入为零时，全部时间内的输出也均为零(见习题 2.21)。因此，这个系统不是线性的。再者，如果输入有 n_0 个样本的移位，即 $x_1[n] = K\delta[n - n_0]$，输出应为

$$y_1[n] = a^{n+1}c + Ka^{n-n_0}u[n - n_0] \tag{2.104}$$

因此，该系统也不是时不变的。

本书在总体上主要关心的是线性时不变系统，在这种情况下这些辅助条件必须要与这些附加要求相一致，在第 3 章当我们利用 z 变换讨论差分方程的解时，无疑地要结合线性和时不变的条件，正如我们在那里讨论中将会看到的，即使具有线性和时不变的附加限制，差分方程的解，为此该系统也不是唯一确定的。特别是，一般既存在因果的又存在非因果的线性时不变系统与一个给定的差分方程是一致的。

如果一个系统是由一个线性常系数差分方程所表征的，并且进一步而限定是线性、时不变和因果的，那么它的解就是唯一的。在这种情况下，辅助条件就往往说成是**初始松驰条件**，换言之，辅助信息就是：如果输入 $x[n]$ 在 n 小于某个 n_0 时为零，那么在 n 小于 n_0 时输出 $y[n]$ 就一定要限制到零，这样就为 $n \geqslant n_0$ 时利用(2.97)式递推地求出 $y[n]$ 提供了足够的初始条件。

总之，对于一个系统，其输入和输出若满足一个线性常系数差分方程的话，则

- 对于一个给定的输入，其输出不是唯一的，需要一些辅助信息或条件。
- 如果辅助信息是以 N 个顺序输出值的形式给出，则后面的值可以将差分方程重新安排成以 n 的前向运算的递推关系来求出；前面的值可以将差分方程安排成以 n 的后向运算的递推关系来求出。
- 系统的线性、时不变性和因果性将依赖于辅助条件，如果一个附加条件是使系统初始松驰的，则该系统就是线性、时不变和因果的。

按照以上的讨论，现在重新研究一下例 2.16 在初始松驰条件下的结果。取 $x[n] = K\delta[n]$，因为 $n < 0$，$x[n] = 0$，则 $y[-1] = 0$。因此由(1.103)式

$$y[n] = Ka^n u[n] \tag{2.105}$$

如果输入替换为 $K\delta[n - n_0]$，仍具有初始松驰条件，那么递推解就要利用初始条件 $y[n] = 0$，$n < n_0$ 来完成。应当注意到，对 $n_0 < 0$，初始松驰意味着 $y[-1] \neq 0$。这就是说，初始松驰不总是指 $y[-1] = \cdots = y[-N] = 0$；如果对于 $n < n_0$，$x[n] = 0$，它就意味着 $y[n_0 - 1] = \cdots = y[n_0 - N] = 0$。同时还应注意到这个例子的单位脉冲响应是 $h[n] = a^n u[n]$，即对 $n < 0$，$y[n]$ 是零。这一点与初始松驰假设所施加的因果性是一致的。

以上讨论都假设(2.82)式中 $N \geqslant 1$。如果 $N = 0$，就不需要递推而用差分方程来计算出，因此也不要求任何辅助条件，这就是

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \left(\frac{b_k}{a_0}\right) x[n - k] \tag{2.106}$$

(2.106)式是一种卷积形式，将 $x[n]=\delta[n]$，其单位脉冲响应为

$$h[n]=\sum_{k=0}^{M}\left(\frac{b_k}{a_0}\right)\delta[n-k]$$

或

$$h[n]=\begin{cases}\left(\dfrac{b_n}{a_0}\right), & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{2.107}$$

显然，这个单位脉冲响应是有限长的。的确，任何 FIR 系统的输出都能用(2.106)式的差分方程非递推地计算出来，且式中的系数就是单位脉冲响应序列的值。例 2.15 的滑动平均系统，当 $M_1=0$ 时就是因果 FIR 系统的一个例子。这种系统的一个有趣的特点是，我们也能为其输出找到一种递推方程。在第 6 章将证明利用差分方程来实现一种所要求的信号变换时存在着许多可能的方式。但是，一种方法优于另一种方法取决于一些实际的考虑，如像数值准确度，数据存储，以及计算每一个输出样本时所要求的乘法和加法的次数等。

2.6 离散时间信号与系统的频域表示

在前面的几节中已经介绍了离散时间信号与系统理论中的某些基本概念。对于线性时不变系统我们看到：将输入序列表示成一组幅度加权的延迟单位样本序列之和，就得出输出也能表示成一组幅度加权的延迟响应的和。与连续时间信号一样，离散时间信号民也可以用几种不同的方式来表示。例如，正弦和复指数序列在离散时间信号表示中就起着特别重要的作用。这是因为复指数序列是线性时不变系统的特征函数，以及该系统对正弦输入的响应还是正弦的，且具有与输入相同的频率，其幅度和相位则由系统决定。线性时不变系统的这一基本性质使得利用正弦或复指数来表示信号(即傅里叶表示)在线性系统理论中是非常有用的。

2.6.1 线性时不变系统的特征函数

为了说明复指数是离散时间系统的特征函数性质，现考虑一输入序列 $x[n]=e^{j\omega n}$，$-\infty<n<\infty$，也即一个频率为 ω 的复指数序列，由(2.62)式，单位脉冲响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统的相应输出就是

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{j\omega(n-k)}=e^{j\omega n}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\right) \tag{2.108}$$

若定义

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k} \tag{2.109}$$

(2.108)式就变成

$$y=H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \tag{2.110}$$

因此，$e^{j\omega n}$ 是该系统的特征函数，相应的特征值为 $H(e^{j\omega})$。从(2.110)式可见，$H(e^{j\omega})$ 给出了复指数在复振幅上的变化是频率 ω 的函数。特征值 $H(e^{j\omega})$ 称为系统的**频率响应**。一般 $H(e^{j\omega})$ 是复数，可用它的实部和虚部表示为

$$H(e^{j\omega})=H_R(e^{j\omega})+jH_I(e^{j\omega}) \tag{2.111}$$

或者用幅度和相位表示为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \tag{2.112}$$

例 2.17 理想延迟系统的频率响应

作为一个如何求出一个线性时不变系统的频率响应的简单例子，现考虑由下式定义的理想延迟系统：

$$y[n] = x[n - n_d] \tag{2.113}$$

式中 n_d 是固定整数。若考虑 $x[n]=e^{j\omega n}$ 作为该系统的输入，则由(2.113)式就有

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d}e^{j\omega n}$$

因此，对任意给定的 ω 值，所得到的输出就是输入乘以复常数，该复常数的值决定于 ω 和延时 n_d。因此这个理想延迟系统的频率响应就是

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega n_d} \tag{2.114}$$

作为求频率响应的另一种方法，回想一下该理想延迟系统的 $h[n]=\delta[n-n_d]$，利用(2.109)式可得

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n - n_d]e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}$$

利用欧拉关系，频率响应的实部和虚部就是

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos\omega n_d \tag{2.115a}$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin\omega n_d \tag{2.115b}$$

其幅度和相位是

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \tag{2.116a}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \tag{2.116b}$$

在 2.7 节将证明，相当广泛的一类信号都能表示成如下形式的复指数的线性组合：

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n} \tag{2.117}$$

根据叠加原理，一个线性时不变系统的相应输出就是

$$y[n] = \sum_k a_k H(e^{j\omega_k})e^{j\omega_k n} \tag{2.118}$$

据此，倘若能找到将 $x[n]$ 表示为(2.117)式的复指数序列叠加的形式，那么已知系统频率响应就能利用(2.18)式求得系统输出。下面这个简单的例子用来说明线性时不变系统的这一基本性质。

例 2.18 LTI 系统的正弦响应

因为将一个正弦序列表示为复指数的线性组合是很简单的，所以让我们考虑一个正弦输入

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n} \tag{2.119}$$

由(2.110)式，对 $x_1[n]=(A/2)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$ 的响应是

$$y_1[n] = H(e^{j\omega_0})\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} \tag{2.120a}$$

对 $x_2[n]=(A/2)(e^{-j\phi})e^{-j\omega_0 n}$ 的响应是

$$y_2[n] = H(e^{-j\omega_0})\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n} \tag{2.120a}$$

因此总的响应就是

$$y[n] = \frac{A}{2}[H(e^{j\omega_0})e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega})e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}] \tag{2.121}$$

如果 $h[n]$ 为实，就有 $H(e^{j\omega_0})=H^*(e^{j\omega_0})$(见习题 2.71)，结果

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 + \phi + \theta) \tag{2.122}$$

式中 $\theta = \angle H(e^{j\omega_0})$ 是在频率 ω_0 处系统的相位。

对于理想延迟这种简单的例子，就如同在例 2.17 中所求得的，$|H(e^{j\omega_0})| = 1$，和 $\theta = -\omega_0 n_d$。因此，

$$y[n] = A\cos(\omega_n + \phi - \omega_0 n_d) = A\cos[\omega_0(n - n_d) + \phi] \tag{2.123}$$

这与直接利用理想延迟系统的定义所得到的结果是一致的。

线性时不变系统频率响应的概念对连续时间系统和离散时间系统基本上是相同的。然而，一个重要的不同点是离散时间线性时不变系统的频率响应总是频率 ω 的周期函数，且周期为 2π。为了证明这一点，将 $\omega + 2\pi$ 代入(2.109)式可得

$$H[e^{j(\omega+2\pi)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} \tag{2.124}$$

由于 n 为整数，$e^{\pm j2\pi n} = 1$，则

$$e^{-j(\omega+2\pi n} = e^{-j\omega n}e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega n}$$

由此可见

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = H(e^{j\omega}) \tag{2.125}$$

更为一般的情况是

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \text{ 为某一整数} \tag{2.126}$$

即，$H(e^{j\omega})$是周期的，周期为 2π。这一点对理想延迟系统来说显然是符合的，因为当 n_d 为整数时，$e^{-j(\omega+2\pi)n_d} = e^{-j\omega n_d}$。

这一周期性的原理直接与我们早先所注意到的事实有关，即序列

$$\{e^{j\omega n}\}, \quad -\infty < n < \infty$$

与序列

$$\{e^{j(\omega+2\pi)n}\}, \quad -\infty < n < \infty$$

是不可区分的。因为这两个序列对所有的 n 值都是一样的，所以系统对这两个输入序列的响应也必须是一样的，这就要求(2.125)式成立。

因为 $H(e^{j\omega})$是周期的，周期为 2π，并且频率 ω 和 $\omega + 2\pi$ 又不能区分开，那我们只需要在长为 2π 的区间内，即 $0 \leqslant \omega < 2\pi$ 或 $-\pi < \omega < \pi$ 内标出 $H(e^{j\omega})$就够了。固有的周期性就确定了在这个区间以外各处的频率响应。为了简单起见并为了与连续时间情况一致，一般在区间 $-\pi < \omega \leqslant \pi$内给出 $H(e^{j\omega})$特性。相对于这一区间，“低频”就在靠近于零处的频率，而“高频”就是在靠近于 $\pm\pi$ 的频率。由于相差 2π 整数倍的那些频率是无法辨别开的，所以可将以上一般陈述为：“低频”就是靠近于 π 偶数倍的那些频率；“高频”就是靠近于 π 奇数倍的那些频率，这与早先在 2.1 节中的讨论是一致的。

例 2.19　理想频率选择性滤波器

一类重要的线性时不变系统是其频率响应在某一频率范围内是 1，而在其余的频率上都是零的系统，这些就相应于**理想频率选择性滤波器**。为了与前面的讨论一致，一个理想低通滤波器的频率响应就如图 2.17(a)所示。由于离散时间频率响应固有的周期性，在围绕 $\omega = 2\pi$ 与围绕 $\omega = 0$ 的这些频率是不能区分开的，频率响应就表示为一个多频带滤波器。然而事实上，频率响应仅仅通过低频部分而阻隔掉高频部分。因为频率响应是完全由在区间 $-\pi < \omega \leqslant \pi$ 内的特性所确定的，那么理想低通滤波器频率响应更典型地就仅在区间 $-\pi < \omega \leqslant \pi$ 内给出，如图 2.17(b)所示。理想高通、带阻和带通滤波器分别如图 2.18(a)，(b)和(c)所示。

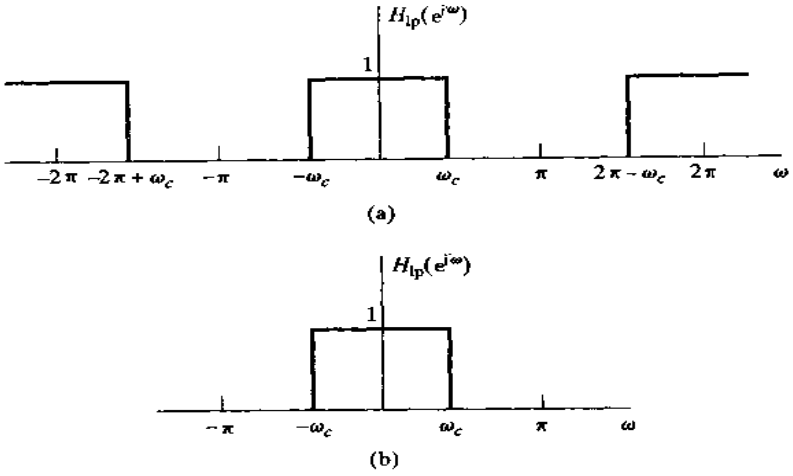


图 2.17 理想低通滤波器
(a)频率响应周期性;(b)一个周期内的频率响应

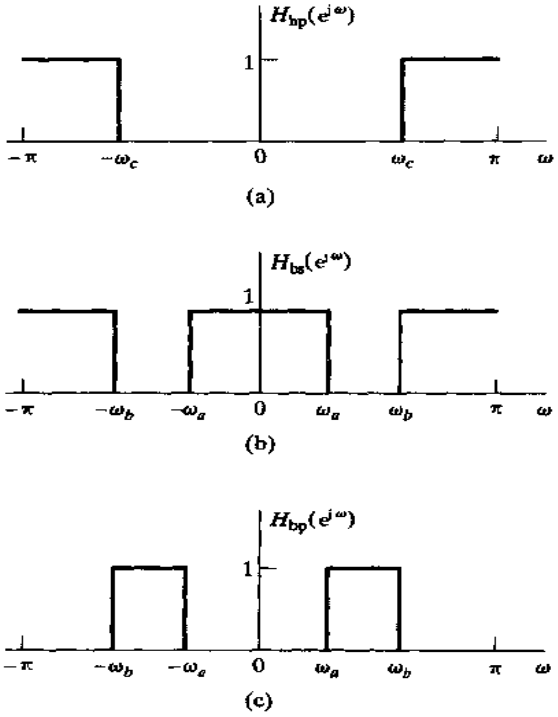


图 2.18 理想频率选择性滤波器
(a)高通滤波器;(b)带阻滤波器;(c)带通滤波器
在每种情况下,频率响应都是周期的,周期为 2π,图中仅示出一个周期

例 2.20　滑动平均系统的频率响应

例 2.4 滑动平均系统的单位脉冲响应为

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1\leqslant n\leqslant M_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因此频率响应就是

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{n=-M_1}^{M_2}e^{-j\omega n} \tag{2.127}$$

利用(2.56)式，能将(2.127)式以闭式表示为

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega})&=\frac{1}{M_1+M_2+1}\frac{e^{j\omega M_1}-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}}\\&=\frac{1}{M_1+M_2+1}e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2}\frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2}-e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1-(e^{-j\omega})}\\&=\frac{1}{M_1+M_2+1}e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}\frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2}-e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2}-e^{j\omega/2}}\\&=\frac{1}{M_1+M_2+1}e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}\frac{\sin[\omega(M_1+M_2+1)/2]}{\sin(\omega/2)}\end{aligned} \tag{2.128}$$

对于 $M_1=0, M_2=4$，$H(e^{j\omega})$的模和相位画在图 2.19 上。可以看到，正如对一个离散时间系统的频率响应所要求的那样，$H(e^{j\omega})$是周期的。同时 $|H(e^{j\omega})|$ 在"高频"跌落，而 $\angle H(e^{j\omega})$，即 $H(e^{j\omega})$的相位随 ω 线性变化。高频衰减就表示系统对输入序列中的快速变化起到平滑作用；也即它是一个低通滤波器很粗糙的近似，这一点与我们在直观上所期望的滑动平均系统的特性是一致的。

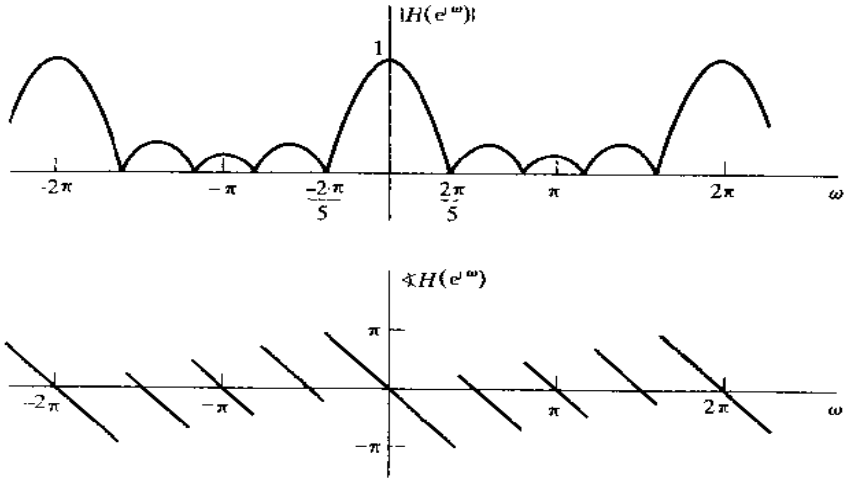


图 2.19　$M_1=0, M=4$ 时滑动平均系统频率响应的
(a)模特性；(b)相位特性

2.6.2　突然加上复指数输入

已经知道，对于线性时不变系统而言，在输入为复指数 $e^{j\omega n}$，$-\infty<n<\infty$，的形式之下，产

生的输出具有 $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$的形式。但是，在两个无穷的方向上都是非零的这样的输入看起来可能是一个不切实际的信号模型；然而，正如我们将在下一节要看到的，这类模型对于范围相当广的信号的数学表示来说却是很关键的，即便对那些仅存在于某一有限区间内的信号也是如此。即使如此，在考虑更为实际一些的输入信号形式为

$$x[n] = e^{j\omega n}u[n]$$

即在任意时刻加入的复指数输入(为方便，这里选取"任意时刻"为 $n=0$)时，还能对线性时不变系统的其它细节得到更好地理解。利用(2.62)式的卷积和，一个单位脉冲响应为 $h[n]$的因果线性时不变系统的相应输出是

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^{n} h[k(e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n}, & n \geqslant 0 \end{cases}$$

如果仅考虑 $n\geqslant 0$ 时的输出，可以写成

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \tag{2.129}$$

$$= H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right)e^{j\omega n} \tag{2.130}$$

从(2.130)式可见，输出由两项组成，即 $y[n]=y_{ss}[n]+y_t[n]$。其中第 1 项

$$y_{ss}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

称为**稳定响应**，它与当系统在全部 n 上的输入 $e^{j\omega n}$所得响应是相同的。在某种意义上，第 2 项

$$y_t[n] = -\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}$$

就是系统输出偏离于特征函数结果的量。这一部分称为**暂态响应**，因为很明显在某些情况下它可能趋近到零。为了说明存在这种情况的条件，考虑一下第 2 项的大小，它的幅度被下式界定：

$$|y_t[n]| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \tag{2.131}$$

从(2.131)式应该清楚，如果 $h[n]$是有限长的话，即 $h[n]$仅在区间 $0\leqslant n\leqslant M$ 内不为零，那么这一项对于 $n+1>M$，或 $n>M-1$，$y_t[n]=0$，这时

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}, \qquad n > M-1$$

当 $h[n]$为无限长时，暂态响应并不急剧消失；但是，如果 $h[n]$的样本随 n 增加而趋近于零，那么 $y_t[n]$必定最后趋于零。注意到(2.131)式可以写成

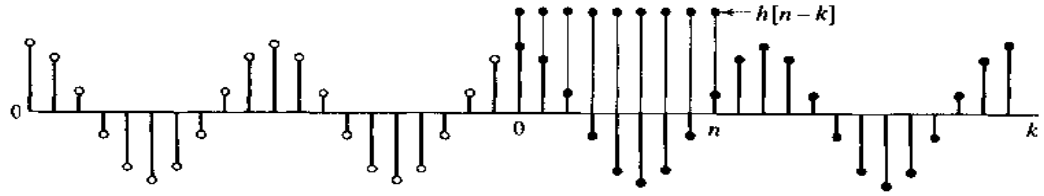
$$|y_t[n]| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}e^{j\omega n}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |h[k]| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| \tag{2.132}$$

这就是说，暂态响应由 $h[n]$全部样本的绝对值之和所界定。如果(2.132)式的右边是有界的，而有

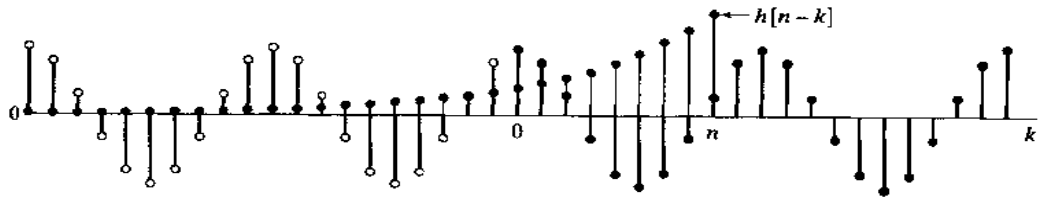
$$\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

那么该系统就是稳定的。由(2.132)可得，对于稳定系统，暂态响应一定随 $n\to\infty$而变得愈来愈小。因此，暂态响应最终消失的充分条件就是系统是稳定的。

图 2.20 画出的是频率为 $\omega=2\pi/10$ 的复指数信号的实部，图中实圆点指出突然加上的复指数 $x[k]$的样本，而空圆点是“失去的”复指数的样本，阴影圆点是作为 k 的函数，在 $n=8$ 时 $h[n-k]$的样本。在图 2.20(a)所示 $h[n]$为有限长的情况下，很清楚对于 $n\geqslant 8$ 的输出仅由稳态分量所构成；而在 $h[n]$为无限长的情况，由于 $h[n]$的衰减性质，很清楚随 n 的增加，失去的样本所带来的影响愈来愈小。



(a)



(b)

图 2.20 突然加上复指数实部的图解说明
(a)有限长 $h[n]$；(b)无限长 $h[n]$

稳定性的条件也是频率响应函数存在的充分条件。为了看出这一点，注意到在一般情况下有

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]e^{-j\omega k}| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

所以，条件

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

就保证 $H(e^{j\omega})$存在。对于频率响应存在的条件与稳态解与主导地位的条件是相同的这一点丝毫不奇怪！实际上，对于在全部 n 上存在的复指数可以看作是在 $n=-\infty$加上的复指数。复指数的特征函数性质依赖于系统的稳定性，因为在有限的 n 上，暂态响应必须变为零，以致于我们对于全部有限 n 上只能看到稳态响应 $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$。

2.7 用傅里叶变换表示序列

线性时不变系统的频率响应表示方法的优点之一就是像在例 2.20 所做的这样一些系统

特性的解释往往容易得出。这一点在第 5 章还要更为详尽地阐述。然而，眼下还是要回到这样的问题，即对一个任意输入序列如何求得(2.117)式的表示形式。

很多序列都能表示为如下傅里叶积分的形式：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{2.133}$$

式中 $X(e^{j\omega})$由下式给出

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{2.134}$$

(2.133)式和(2.134)式一起构成序列的**傅里叶表示**。(2.133)式是一个**综合公式**，称**傅里叶反变换**。也就是说它把序列 $x[n]$表示成频率在 2π 的区间范围内，由 $X(e^{j\omega})$确定每一个复正弦分量相对大小的、如下式所示的无限小复正弦的叠加：

$$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

虽然在写(2.133)式时，已经把 ω 的变化范围选定在 $-\pi$ 和 $+\pi$ 之间，但是任何 2π 间隔都是可以用的。(2.134)式是由 $x[n]$计算 $X(e^{j\omega})$的表示式，称为**傅里叶变换**①。它用来分析该序列 $x[n]$，以确定利用(2.133)式来综合 $x[n]$时，每一频率分量需要占多少份量。

一般来说，傅里叶变换是 ω 的一个复值函数。和频率响应一样，有时将 $X(e^{j\omega})$用直角坐标表示为

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \tag{2.135a}$$

或以极坐标表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|(e^{j\angle X(e^{j\omega})}) \tag{2.135b}$$

$|X(e^{j\omega})|$和$\angle X(e^{j\omega})$分别称为傅里叶变换的**幅度**和**相位**。傅里叶变换有时也称**傅里叶频谱**，或简单地称为**频谱**。同时，术语**幅度谱**有时就用来指$|X(e^{j\omega})|$，而$\angle X(e^{j\omega})$有时又称为**相位谱**。

相位$\angle X(e^{j\omega})$不是由(2.135b)式唯一给定的，因为在任意 ω 值上都可以加任何 2π 的整数倍到$\angle X(e^{j\omega})$上，而不会影响这个复指数的结果。当我们特别想要指的是主值，也即$\angle X(e^{j\omega})$仅限在 $-\pi$ 和 $+\pi$ 之间的值时，将这个主值记作 $\mathrm{ARG}[X(e^{j\omega})]$。如果我们想要指的是在 $0<\omega<\pi$ 内给出的一个 ω 的连续函数的相位函数，就特记作 $\arg[X(e^{j\omega})]$。

比较一下(2.109)式和(2.134)式可以看到，一个线性时不变系统的频率响应就是单位脉冲响应的傅里叶变换，从而单位脉冲响应能够由频率响应应用傅里叶反变换积分来求得，也即

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{2.136}$$

正如前面所讨论过的，频率响应是一个周期函数。同样，傅里叶变换也是周期的，周期为 2π。实际上，(2.134)式就是连续变量周期函数 $X(e^{j\omega})$的傅里叶级数表示形式；而利用周期函数 $X(e^{j\omega})$来表示序列 $x[n]$的(2.133)式就是用来求得该傅里叶级数系数的积分形式。我们现在集中研究利用(2.133)式和(2.134)式来表示序列 $x[n]$。然而，了解连续变量周期函数的傅里叶级数表示与离散时间序列的傅里叶变换表示之间的等效性是十分有用的，因为已熟悉的傅里叶级数的全部性质都能应用到一个序列的傅里叶变换的表示上来，只要适当地对变

① 有时更明确一些称(2.134)式为离散时间傅里叶变换，特别是当需要与连续时间傅里叶变换区别开时。

量作些说明即可。

迄今为止，我们还没有明确地证明(2.133)式和(2.134)式是互逆的，也没有考虑有多大范围的信号可以用(2.133)式来表示。为了说明(2.133)式就是(2.134)式的逆，可以用(2.134)式求出 $X(e^{j\omega})$，然后将所得结果代入(2.133)式来证明。具体一些就是考虑

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j\omega m}\right)e^{j\omega n}d\omega = \hat{x}[n] \tag{2.137}$$

式中暂时用 $\hat{x}[n]$来记作傅里叶综合的结果。如果 $X(e^{j\omega})$能用(2.134)求得的话，我们希望要证明 $\hat{x}[n]=x[n]$。应该注意求和中的"哑元变量"已经变为 m，以区别于(2.133)式中的变量 n。如果无限求和对全部 ω 一致收敛，那么就能变换积分与求和次序以得到

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-m)}d\omega\right) \tag{2.138}$$

对括号内的积分可求得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\omega(n-m)}d\omega &= \frac{\sin\pi(n-m)}{\pi(n-m)}\\ &= \begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}\\ &= \delta[n-m]\end{aligned}$$

因此

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m] = x[m]$$

这就是我们企图要证明的结果。

确定哪一类信号可以用(2.133)式来表示的问题就等效于考虑(2.134)中无限项和的收敛问题。这就是说，要关心的是在(2.134)式求和中各项必须满足什么条件，才使

$$|X(e^{j\omega})| < \infty, \qquad \text{对全部 } \omega$$

这里 $X(e^{j\omega})$是下面有限项和随 $M\to\infty$的极限

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M}x[n]e^{-j\omega n} \tag{2.139}$$

收敛的充分条件可由下式得到：

$$\begin{aligned}|X(e^{j\omega})| &= \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}\right|\\ &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]||e^{-j\omega n}|\\ &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]| < \infty\end{aligned}$$

因此，如果 $x[n]$是**绝对可加的**，那么 $X(e^{j\omega})$存在。再者，在这种情况下可以证明该级数一致收敛于一个 ω 的连续函数。

按照定义，一个稳定的序列是绝对可加的，因此全部稳定序列都有傅里叶变换，从而任何稳定系统都有一个有限且连续的频率响应。

绝对可加性是傅里叶变换表示存在的一个充分条件。在例 2.17 和例 2.20 中曾计算出序列 $\delta[n-n_d]$和$[1/(M_1+M_2+1)](u[n+M_1]-u[n-M_2-1])$的傅里叶变换。因为这些

序列在长度上是有限的，所以是绝对可加的。很显然，任何有限长序列都是绝对可加的，从而都有一个傅里叶变换表示。在线性时不变系统范围内，任何 FIR 系统都一定是稳定的，因此都有一个有限且连续的频率响应，当一个序列属无限长时，必须关心无限求和的收敛问题。下面用例子来说明这种情况。

例 2.21　突然加上一个指数信号的绝对可加性

令 $x[n]=a^n u[n]$。这个序列的傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \qquad |ae^{-j\omega}| < 1 \text{ 或 } |a| < 1$$

很明显，$|a|<1$ 就是 $x[n]$ 绝对可加的条件，即

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty, \qquad |a| < 1 \tag{2.140}$$

绝对可加性是傅里叶变换表示存在的一个充分条件，并且也保证一致收敛。某些序列不是绝对可加的而是平方可加的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \tag{2.141}$$

如果我们愿意将定义 $X(e^{j\omega})$ 的无限求和的一致收敛条件放宽的话，那么这样一些序列也能用傅里叶变换来表示。在这种情况下是均方收敛的，即

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{2.142a}$$

和

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{2.142b}$$

那么

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0 \tag{2.143}$$

换句话说，误差 $|X(e^{j\omega})-X_M(e^{j\omega})|$ 随 $M\to\infty$ 在每一个 ω 值上可能不趋近于零，但是在误差中的总“能量”趋于零，例 2.22 说明了这一情况。

例 2.22　理想低通滤波器的平方可加性

让我们来确定在例 2.19 中讨论过的理想低通滤波器的单位脉冲响应。它的频率响应是

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{2.144}$$

周期为 2π 也是不言自明的。利用傅里叶变换综合(2.133)式可以求得单位脉冲响应 $h_{lp}[n]$ 为

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi jn}[e^{j\omega n}]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jn}(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \tag{2.145}$$

$$= \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty$$

值得注意，因为对 $n<0$，$h_{lp}[n]$ 不为零，所以该理想低通滤波器是非因果的。同时，$h_{lp}[n]$ 也不是绝

对可加的。这个序列值仅以 $1/\infty$ 而趋于零。这是由于 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 在 $\omega=\omega_c$ 是不连续的。因为 $h_{lp}[n]$ 不是绝对可加的，那么

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}e^{-j\omega n}$$

对所有 ω 值就不是一致收敛的。对此为了获得一个直观上的理解，先来考虑一下作为有限项和的 $H_M(e^{j\omega})$

$$H_M(e^{j\omega})=\sum_{n=-M}^{M}\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}e^{-j\omega n} \tag{2.146}$$

可以证明 $H_M(e^{j\omega})$ 能表示为

$$H_M(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\sin[(2M+1)(\omega-\theta)/2]}{\sin[(\omega-\theta)/2]}d\theta$$

对于几个不同的 M 值，这一函数的求值如图 2.21 所示。可以看到，随着 M 的增加，在 $\omega=\omega_c$ 处振荡更为加剧(常称为吉布斯现象)，而起伏的大小并不下降。事实上，可以证明随 $M\to\infty$ 振荡的最大幅度不趋于零，而振荡位置朝着 $\omega=\omega_c$ 点收拢。因此该无限和对(2.144)式的不连续函数 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 不是一致收敛的。然而，由式(2.145)所给出的 $h_{lp}[n]$ 是平方可加的，相应的 $H_M(e^{j\omega})$ 以均方意义收敛于 $H_{lp}(e^{j\omega})$，也即

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|H_{lp}(e^{j\omega})-H_M(e^{j\omega})|^2d\omega=0$$

虽然 $\lim_{M\to\infty}H_M(e^{j\omega})$ 和 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 之间的差似乎是不重要的，因为这两个函数仅仅在 $\omega=\omega_c$ 有差别，但是在第 7 章将会看到，在离散时间系统滤波问题的设计中，有限和的特性有着重要的含意。

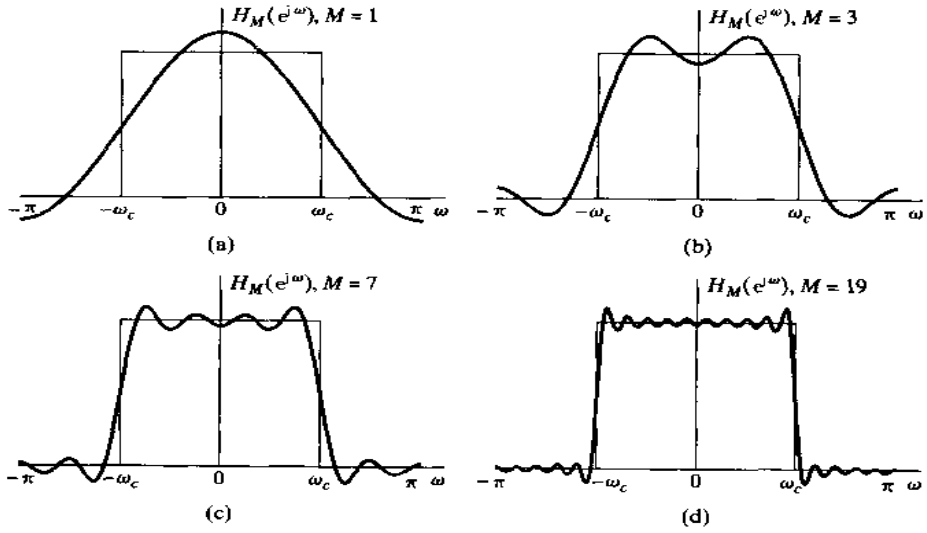


图 2.21 傅里叶变换的收敛。在 $\omega=\omega_c$ 处的振荡特性常称为吉布斯现象

对于某些既不是绝对可加的，又不是平方可加的序列，有一个傅里叶变换的表示是很有用的。用下面的例子来例举一二。

例 2.23 常数的傅里叶变换

考虑一个对全部 n 来说，$x[n]=1$ 的序列。这个序列既不是绝对可加的，也不是平方可加的，在这

一情况下，(2.134)式既不一致收敛，也不均方收敛。然而，把这个序列的傅里叶变换定义成周期冲激串是可能的①，并且是有用的，如下式所示：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \tag{2.147}$$

这时，这些冲激就是一个连续变量的函数，因此具有"无限高，零宽度和单位面积"，这与(2.134)式不收敛是一致的。用(2.147)式作为序列 $x[n]=1$ 的傅里叶表示主要地正是由于将(2.147)式代入(2.133)式可以得到一个正确结果的缘故。例 2.24 代表了该例的一般情况。

例 2.24　复指数序列的傅里叶变换

某一序列其傅里叶变换是下列周期冲激串：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \tag{2.148}$$

在这个例子中要证明该序列 $x[n]$就是复指数序列 $e^{j\omega_0 n}$。

在这个题目中可以很放心地假设 $-\pi<\omega_0<\pi$。如果所选定的 ω_0 值不满足这个要求，那么在这个区间内一定存在某一个 ω_0 的选取，它产生相同的 $X(e^{j\omega})$，因为每隔 2π 这些冲激周期地重复。因此，在(2.148)式的求和中可以将 ω_0 重新定义为位于区间 $-\pi$ 和 π 之间的冲激频率，而不会在频谱 $X(e^{j\omega})$上有任何变化。

我们可以将 $X(e^{j\omega})$代入(2.133)式的傅里叶反变换积分式中去来求得 $x[n]$。由于$X(e^{j\omega})$的积分仅在一个周期($-\pi<\omega<\pi$)内进行，所以在(2.148)式中仅需要包括 $r=0$ 这一项。结果，可以写为

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}d\omega \tag{2.149}$$

利用冲激函数的定义，于是可得

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \qquad \text{对任意 } n$$

当 $\omega_0=0$，就变成例 2.23 中讨论的序列。

很显然，例 2.24 中的 $x[n]$既不是绝对可加的，又不是平方可加的，而 $|X(e^{j\omega})|$ 对所有 ω 也不是有限的。因此这样的数学表达式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) \tag{2.150}$$

必须要用一种特殊的方式来给予说明。这种解释可由广义函数理论给出(Lighthill, 1958)。利用这一理论，傅里叶变换表示的概念可以很严格地推广到这样一类序列，这类序列可以表示成离散频率分量的和，如

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\omega_k n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{2.151}$$

从例 2.24 的结果，就有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_k 2\pi a_k\delta(\omega - \omega_k + 2\pi r) \tag{2.152}$$

这就是(2.151)式中 $x[n]$的傅里叶变换表示。

另一个既不绝对可加，又不平方可加的序列是单位阶跃序列 $u[n]$。虽然证明起来不那么直接，这个序列能用下述傅里叶变换来表示。

① 冲激函数定义为这样的"函数"，它具有如下特性：$\delta(\omega)=0, \omega\neq 0$；$X(e^{j\omega})\delta(\omega)=X(e^{j0})\delta(\omega)$；$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega=1$；以及 $\delta(\omega)*X(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})$，其中 $*$ 记作连续变量的卷积。有关冲激函数的讨论可见 Oppenheim and Willsky (1997)。

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r) \tag{2.153}$$

2.8 傅里叶变换的对称性质

在应用傅里叶变换时，序列的性质是如何体现在傅里叶变换之中，或者相反，对于这一点有一个详细的了解是有用的。在本节和 2.9 节将讨论和综述几个这样的性质。

傅里叶变换的对称性质在简化问题的解上往往是很有用的。下面的讨论介绍这些性质，而其证明将留在习题 2.72 和习题 2.73 中讨论。在介绍这些性质之前，先从一些定义开始。

一个**共轭对称序列** $x_e[n]$定义为具有 $x_e[n] = x_3^*[-n]$的序列；一个**共轭反对称序列** $x_o[n]$定义为具有 $x_o[n] = -x_o^*[-n]$的序列，这里 * 记作复数共轭。任何序列 $x[n]$都能表示成一个共轭对称序列和一个共轭反对称序列之和，即

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{2.154a}$$

式中

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = x_e^*[-n] \tag{2.154b}$$

和

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n]) = -x_o^*[-n] \tag{2.154c}$$

一个具有共轭对称的实序列 $x_e[n] = x_e[-n]$称为**偶序列**；一个具有共轭反对称的实序列 $x_o[n] = -x_o[-n]$称为**奇序列**。

一个傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$能分解为共轭对称和共轭反对称函数之和

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \tag{2.155a}$$

式中

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \tag{2.155b}$$

和

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \tag{2.155c}$$

显然，$X_e(e^{j\omega})$是共轭对称的，而 $X_o(e^{j\omega})$是共轭反对称的；也即

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \tag{2.156a}$$

和

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \tag{2.156b}$$

和序列一样，如果一个连续变量的实函数是共轭对称的，就称为**偶函数**；而一个连续变量的实共轭反对称函数就称为**奇函数**。

傅里叶变换的对称性质综合在表 2.1 中，前 6 个性质是针对一般的复指数序列 $x[n]$，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$。性质 1 和 2 放在习题 2.72 中讨论。利用两个序列和的傅里变换就是它们的傅里叶变换之和这一事实，性质 3 就直接可从性质 1 和 2 得出。具体地说，$\mathrm{Re}\{x[n]\} = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n])$的傅里叶变换就是 $X(e^{j\omega})$的共轭对称部分 $X_e(e^{j\omega})$。类似地，

$j\,\mathrm{Im}\{x[n]\}=\frac{1}{2}(x[n]-x^*[n])$的傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})$的共轭反对称分量 $X_o(e^{j\omega})$，这就是性质 4。当考虑 $x[n]$的共轭对称和共轭反对称分量 $x_e[n]$和 $x_o[n]$的傅里叶变换时，就可得到性质 5 和 6。

如果 $x[n]$是一个实序列，这些对称性质就变得特别直接和有用。对一个实序列，其傅里叶变换是共轭对称的，即 $X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$(性质 7)。将 $X(e^{j\omega})$用它的实部和虚部表示

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \tag{2.157}$$

然后，性质 8 和 9 就可得，即

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \tag{2.158a}$$

和

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}) \tag{2.158b}$$

换句话说，对一个实序列，其傅里叶变换的实部是一个偶函数，虚部是一个奇函数。类似地，将 $X(e^{j\omega})$以极坐标形式表示为

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}, \tag{2.159}$$

那么，对一个实序列，可以证明：其傅里叶变换的幅度 $|X(e^{j\omega})|$是 ω 的偶函数，而相位 $\angle|X(e^{j\omega})|$则是 ω 的奇函数(性质 10 和 11)。同样，对一个实序列，$x[n]$的偶部变换为 $X_R(e^{j\omega})$，而奇部变换为 $jX_I(e^{j\omega})$(性质 12 和 13)。

表 2.1 傅里叶变换的对称性质

序列 $x[n]$	傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$($X(e^{j\omega})$的共轭对称部分)
4. $j\,\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$($X(e^{j\omega})$的共轭反对称部分)
5. $x_e[n]$($x[n]$的共轭对称部分)	$X_R(e^{j\omega})=\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$($x[n]$的共轭反对称部分)	$jX_I(e^{j\omega})=j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$
以下性质仅适用于 $x[n]$为实序列	
7. 任意实 $x[n]$	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$(共轭对称)
8. 任意实 $x[n]$	$X_R(e^{j\omega})=X_R(e^{-j\omega})$(实部为偶函数)
9. 任意实 $x[n]$	$X_I(e^{j\omega})=-X_I(e^{-j\omega})$(虚部为奇函数)
10. 任意实 $x[n]$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert=\lvert X(e^{-j\omega})\rvert$(幅度为偶函数)
11. 任意实 $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega})=-\angle X(e^{-j\omega})$(相位为奇函数)
12. $x_e[n]$($x[n]$的偶部)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$($x[n]$的奇部)	$jX_I(e^{j\omega})$

例 2.25 对称性质的举例说明

现在让我们再回到例 2.21 的序列，那里已证明该实序列 $x[n]=a^nu[n]$的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \qquad |a|<1 \tag{2.160}$$

那么

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X^*(e^{-j\omega}), \quad \text{(性质 7)}$$

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - a\cos\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = X_R(e^{-j\omega}), \quad \text{(性质 8)}$$

$$X_I(e^{j\omega}) = \frac{-a\sin\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} = -X_I(e^{-j\omega}), \quad \text{(性质 9)}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}} = |X(e^{-j\omega})|, \quad \text{(性质 10)}$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\left(\frac{-a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right) = -\measuredangle X(e^{-j\omega}), \quad \text{(性质 11)}$$

图 2.22 画出了对 $a>0$ 时的这些函数，并以 $a=0.9$(实线)和 $a=0.5$(虚线)为序。在习题 2.43 中讨论了相应于 $a<0$ 时的这些曲线。

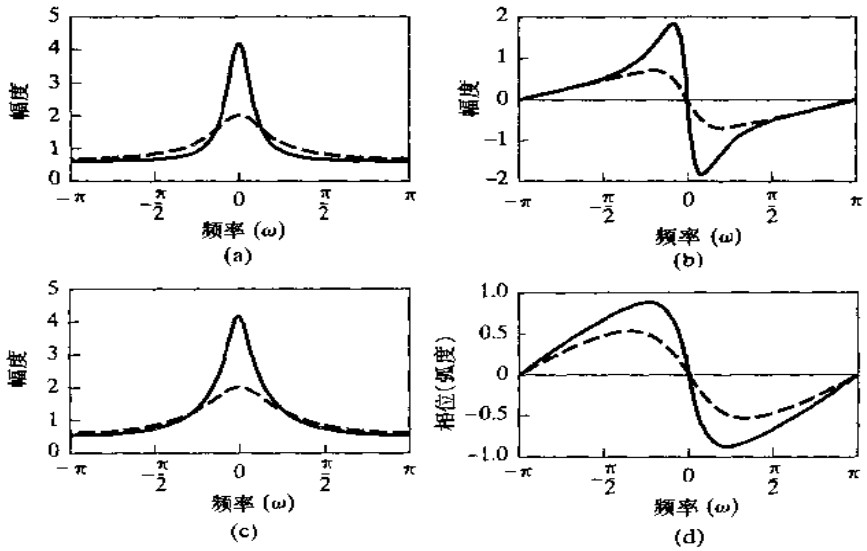


图 2.22 单位脉冲响应 $h[n]=a^nu[n]$的系统频率响应
(a)实部；(b)虚部；(c)幅度；(d)相位
$a>0$，图中实线对应 $a=0.9$；虚线对应 $a=0.5$

2.9 傅里叶变换定理

除了对称性质外，还有各种定理(在本节 2.9.1～2.9.7 中介绍)把序列的运算与傅里叶变换的运算联系起来。将会看到，这些定理与连续时间信号及其傅里叶变换的相应定理在许多情况下都是很相似的。为了方便于这些定理的陈述，将引入下面算子符号：

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

这就是说，$\mathcal{F}$ 记作“取 $x[n]$傅里叶变换”的运算，而 $\mathcal{F}^{-1}$是上述运算的逆运算。定理的大部分

只作陈述，不给予证明。这些证明一般仅涉及求和或积分的简单变量换算，故留作为练习(习题 2.74)，本节中的这些定理综合在表 2.2 中。

表 2.2　傅里叶变换定理

序列	傅里叶变换
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
1. $ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
2. $x[n-n_d]$(n_d 为整数)	$e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$
3. $e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
	$X^*(e^{j\omega})$，　$x[n]$为实数
5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
6. $x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
7. $x[n]y[n]$	$\dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
帕斯瓦尔定理	
8. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\lvert X(e^{j\omega})\rvert^2 d\omega$	
9. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x[n]y^*[n]=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$	

2.9.1　傅里叶变换的线性

若

$$x_1[n]\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X_1(e^{j\omega})$$

和

$$x_2[n]\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X_2(e^{j\omega})$$

那么，将它们直接代入离散时间傅里叶变换定义后立即可得

$$ax_1[n]+bx_2[n]\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega}) \tag{2.161}$$

2.9.2　时移和频移

若

$$x[n]\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X(e^{j\omega})$$

那么对于时移序列来说，只要在离散时间傅里叶变换的求和变量作一简单变换，就可得

$$x[n-n_d]\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega}) \tag{2.162}$$

作直接代入就能证明频移的傅里叶变换结果为

$$e^{j\omega_0 n}x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \tag{2.163}$$

2.9.3 时间倒置

若

$$x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})$$

那么，如果该序列被时间倒置，则有

$$x[-n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(e^{-j\omega}) \tag{2.164}$$

若 $x[n]$是实序列，该定理就简化为

$$x[-n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X^*(e^{j\omega}) \tag{2.165}$$

2.9.4 频域微分

若

$$x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})$$

则对离散时间傅里叶变换进行微分，可见有

$$nx[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \tag{2.166}$$

2.9.5 帕斯瓦尔定理

若

$$x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})$$

则

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{2.167}$$

函数$|X(e^{j\omega})|^2$称为**能量密度谱**，因为它决定了能量在频域中是如何分布的。能量密度谱必然是仅对能量有限信号定义的。帕斯瓦尔定理的更一般形式在习题 2.77 中给出。

2.9.6 卷积定理

若

$$x[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})$$

和

$$h[n]\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}H(e^{j\omega})$$

而且如果

$$y[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n] \tag{2.168}$$

则

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \tag{2.169}$$

因此,序列的卷积就意味着相应的傅里叶变换的乘积。前述的时移性质是卷积性质的一种特殊情况,这是因为

$$\delta[n - n_d] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n_d} \tag{2.170}$$

并且,如果 $h[n]=\delta[n-n_d]$,那么 $y[n]=x[n]*\delta[n-n_d]$。因此就有

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \text{ 和 } Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}X(e^{j\omega})$$

卷积定理的正规推导很容易按(2.168)式表示的 $y[n]$,对其进行傅里叶变换来完成。这个定理也能解释为在线性时不变系统中复指数的特征函数性质的一个直接结果。回想一下,$H(e^{j\omega})$是单位脉冲响应为 $h[n]$的线性时不变系统的频率响应,同时若

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

那么

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

这就是说,复指数是线性时不变系统的特征函数,这里 $h[n]$的傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$就是特征值。按积分的定义,傅里叶综合公式就相应于将一个序列 $x[n]$表示成无限小的复指数的叠加,也即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_k X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega$$

根据线性系统特征函数的性质和叠加原理,相应的输出就是

$$y[n] = \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_k H(e^{jk\Delta\omega})X(e^{jk\Delta\omega})e^{jk\Delta\omega n}\Delta\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

由此可得

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

这就是(2.169)式。

2.9.7 调制或加窗定理

若

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(e^{j\omega})$$

和

$$w[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} W(e^{j\omega})$$

且若

$$y[n] = x[n]w[n] \tag{2.171}$$

则

$$Y(e^{j\omega}) \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{2.172}$$

(2.172)式是一个周期卷积,也就是说它是两个周期函数的积,其积分上下限仅取一个周期。当把卷积和调制定理作一比较,就很明显地看出在大部分傅里叶变换定理中存在着这种固有的对偶性。然而,与连续时间情况相比(这时这种对偶关系是完全的),在离散时间情况下存在某些基本的差别。这是由于傅里叶变换只是一个和式,而反变换则是被积函数为周期函数的积分。对连续时间情况可以说:时域中的卷积可以由频域中的相乘来表示,反之亦然;而在离

散时间情况下，就必须作一点修改。具体来说就是，序列的离散卷积(卷积和)等效于相应的周期傅里叶变换的相乘；序列的相乘等效于相应傅里叶变换的**周期**卷积。

本节的有关定理和几个基本的傅里叶变换对都分别综合在表 2.2 和表 2.3 中。熟悉傅里叶变换定理和性质是很有用的，其中之一就是用在求傅里叶变换或反变换中。往往利用这些定理和已知的变换对，就可以借助于对那些已知变换的序列进行适当运算而表示另一个序列，以此来简化某一个困难或麻烦的问题。例 2.26～2.30 就说明这一点。

表 2.3 傅里叶变换对

序列	傅里叶变换
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty<n<\infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert<1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert<1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin\omega_p(n+1)}{\sin\omega_p}u[n] \quad (\lvert r\rvert<1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$
9. $x[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}[e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

例 2.26 利用表 2.2 和表 2.3 求傅里叶变换

设想我们希望求序列 $x[n]=a^n u[n-5]$的傅里叶变换。这个变换可利用表 2.2 中的定理 1 和 2、以及表 2.3 中的变换对 4 来完成。令 $x_1[n]=a^n u[n]$，并且从这个信号开始往下做，这是由于在表 2.3 中，这是最类似于 $x[n]$的信号。由表 2.3，可得

$$X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \tag{2.173}$$

为了由 $x_1[n]$求得 $x[n]$，首先要将 $x_1[n]$延时 5 个样本，即 $x_2[n]=x_1[n-5]$。由表 2.2 中的定理 2 给出对应的频域关系是 $X_2(e^{j\omega})=e^{-j5\omega}X_1(e^{j\omega})$，所以

$$X_2(e^{j\omega})=\frac{e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}} \tag{2.174}$$

为了从 $x_2[n]$导出所期望的 $x[n]$，仅仅需要在 $X_2[n]$上乘以 a^5，即 $x[n]=a^5x_2[n]$。由傅里叶变

换的线性性质，即表 2.2 中的定理 1，就得所期望的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \tag{2.175}$$

例 2.27　利用表 2.2 和表 2.3 求傅里叶反变换

设有

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} \tag{2.176}$$

将 $X(e^{j\omega})$直接代入(2.133)式就导致一个积分式，要用通常的积分方法对其求解是很困难的。然而，利用部分分式展开的方法(在第 3 章要作详细讨论)，可将 $X(e^{j\omega})$展开为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a/(a-b)}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{b/(a-b)}{1 - be^{-j\omega}} \tag{2.177}$$

由表 2.2 中的定理 1 和表 2.3 中的变换对 4，可得

$$x[n] = \left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u[n] - \left(\frac{b}{a-b}\right)b^n u[n] \tag{2.178}$$

例 2.28　由频率响应求单位脉冲响应

一个具有延迟的高通滤波器的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega n_d}, & \omega_c < |\omega| < \pi \\ 0, & |\omega| < \omega_c \end{cases} \tag{2.179}$$

其中周期为 2π 是不言自明的。该频率响应能表示为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}(1 - H_{lp}(e^{j\omega})) = e^{-j\omega n_d} - e^{-j\omega n_d}H_{lp}(e^{j\omega})$$

式中 $H_{lp}(e^{j\omega})$是周期的，周期为 2π，且为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

利用例 2.22 中的结果，求得 $H_{lp}(e^{j\omega})$的反变换，再结合表 2.2 中的性质 1 和性质 2，就有

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n - n_d] - r[n - n_d] \\ &= \delta[n - n_d] - \frac{\sin\omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)} \end{aligned}$$

例 2.29　对差分方程求单位脉冲响应

求一个稳定的线性时不变系统的单位脉冲响应，其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足如下线性常系数差分方程：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \tag{2.180}$$

在第 3 章将会看到用 z 变换来处理差分方程比用傅里叶变换更为有效。然而，本例将提供利用变换方法分析线性系统的一种提示。为了求单位脉冲响应，可以令 $x[n]=\delta[n]$，用 $h[n]$记作单位脉冲响应，(2.180)式变为

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1] \tag{2.181}$$

然后在式(2.181)两边进行傅里叶变换，并利用表 2.2 中的性质 1 和 2，可得

$$H(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} \tag{2.182}$$

或

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{2.183}$$

为了求得 $h[n]$，就要求求出 $H(e^{j\omega})$的反傅里叶变换。为此目的，将(2.183)式重新写成

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{2.184}$$

由表 2.3 中的变换对 4

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

将这个变换对与表 2.2 中性质 3 结合在一起，就有

$$-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{2.185}$$

再根据表 2.2 中性质 1，则得

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{2.186}$$

2.10 离散时间随机信号

前述各节都集中在离散时间信号与系统的数学表示上，以及由此而导出的一些细节。已经看到，离散时间信号与系统既有时域表示也有频域表示，每一种表示在离散时间信号处理系统的理论和设计中都有其重要的地位。直到目前为止，都假定信号是确定性的，也就是说序列的每一个值都唯一地由某一数学表达式、一组数据表列或按某种规则确定的。

在很多情况下，产生信号的过程是如此地复杂，以致于要把一个信号做精确描述，如果不是不可能的话，也是极为困难或不合需要的。在这些情况下，把信号模仿成一个随机过程分析上是有用的。作为一个例子，在第 6 章将会看到，在实现数字信号处理算法中，由于有限寄存器长度而引起的很多影响就能够用加性噪声来表示，也就是一个随机序列。很多力学系统产生的声学或振动信号(处理这些信号可以诊断出潜在的缺陷)往往能用随机信号来很好地模仿。自动识别或带宽压缩中待处理的语音信号和为提高质量而处理的音乐信号只是众多例子中的两个。

一个随机信号就是一组离散时间信号的集合，它是由一组概率密度函数来表征的。换句话说，在某一特定时刻对于某一个特殊的信号来说，该信号样本在那个时刻的大小是假定按照某种基本的概率方式确定的；也就是说，一个特殊信号的每一个单个样本 $x[n]$假定是某基本随机变量 x_n 的一个输出。全部信号由这样的随机变量的一个集合来表示，在 $-\infty < n < \infty$内每一样本时刻都有一个集合。随机变量这个集合称为一个**随机过程**，并且假定一个特殊的样本序列 $x[n]$，$-\infty < n < \infty$，已经由引起该信号的随机过程所产生。为了完全描述这个随机过程，就需要给出全部随机变量的单个和联合概率密度。

从这样的信号模型中得出有用结果的关键在于用各种平均来给予描述，而这些平均又能够从已假设的概率规律中计算出来，或者从一些特定的信号中估计出来。尽管随机信号不是

绝对可加的或平方可加的，其结果就是不能直接进行傅里叶变换，但是这些信号的很多性质（不是全部性质）都能用**自相关或自协方差序列**来概述，而对自相关或自协方差序列的傅里叶变换往往存在。正如本节将要讨论的，自协方差序列的傅里叶变换在信号能量的频率分布方面有一个很有用的解释。利用自协方差序列及其变换还具有另一个重要优点：用一个离散时间线性系统处理随机信号的效果可以方便地用该系统对自协方差序列的效果来描述。

下面的讨论假定读者熟悉随机过程的一些基本概念，如平均、相关与协方差函数及功率谱等。附录 A 为此给出了一个简单的有关概念和符号的综述。随机信号理论的更加详细的讨论可以在很多著名的教科书中找到，如 Davenport(1970)和 Papoulis(1984)等。

本节的主要目的是提供在后续章节中要用到的有关随机信号表示的一组具体结果。因此，在用线性时不变系统来处理信号的范畴内，主要集中在广义平稳随机信号及其表示上。为了讨论简单起见，虽然讨论中都假定 $x[n]$ 和 $h[n]$ 是实值的，但是这些结果能很容易地推广到复数的情况。

现在考虑一个稳定的单位脉冲响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统。令 $x[n]$ 是一个实值序列，且是一个广义平稳离散时间随机过程的一个样本序列。那么，该线性系统的输出也是一个随机过程的一个样本函数，它将输出与输入过程用如下线性变换式联系起来：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

正如已经证明过的，因为系统是稳定的，如果 $x[n]$ 是有界的话，$y[n]$ 一定也是有界的。下面将会看到，如果输入是平稳的①，那么输出也是平稳的。输入信号可以由它的均值 m_x 和它的相关函数 $\phi_{xx}[m]$ 来表征，或者也可以有一些关于一阶甚至二阶概率分布的附加信息。在表征输出随机过程 $y[n]$ 中，也希望有类似的信息，对于许多应用，用简单平均，像均值、方差和自相关等来表征输入和输出就足够了。因此，将对这些量导出输入、输出的关系。

输入和输出过程的均值是

$$m_{x_n} = \mathscr{E}\{x_n\}, \quad m_{y_n} = \mathscr{E}\{y_n\} \tag{2.187}$$

式中 $\mathscr{E}\{\cdot\}$ 记作期望值。在我们的大多数讨论中，今后对于随机变量 x_0 和 y_n 与它们的值 $x[n]$ 和 $y[n]$ 之间的差别将不必给予仔细区分，这将大大简化数学符号。例如，(2.187)式也可以写成

$$m_x[n] = \mathscr{E}\{x[n]\}, \quad m_y[n] = \mathscr{E}\{y[n]\} \tag{2.188}$$

如果 $x[n]$ 是平稳的，那么 $m_x[n]$ 就与 n 无关，也就可以写作 m_x；如果 $y[n]$ 是平稳的，以上符号对 $m_y[n]$ 也类似。

输出过程的均值是

$$m_y[n] = \mathscr{E}\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\mathscr{E}\{x[n-k]\}$$

式中已经用到和的期望值就是期望值的和这一事实。因为输入是平稳的，所以 $m_x[n-k] = m_x$，结果

$$m_y[n] = m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \tag{2.189}$$

① 本节的其余部分，都用术语“平稳”指的是“广义平稳”。

由(2.189)式可见,输出的均值也是常数。利用频率响应(2.189)式的等效表示式为

$$m_y = H(e^{j0})m_x \tag{2.190}$$

暂且假定输出是非平稳的,对于一个实数输入,输出过程的自相关函数就是

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[n, n+m] &= \mathscr{E}\{y[n]y[n+m]\} \\ &= \mathscr{E}\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[k]h[r]x[n-k]x[n+m-r]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[r]\mathscr{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}\end{aligned}$$

因为 $x[n]$已假定是平稳的,$\mathscr{E}\{x[n-k]x[n+m-r]\}$仅与时间差 $m+k-r$ 有关,因此有

$$\phi_{yy}[n, n+m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\sum_{r=-\infty}^{\infty}h[r]\phi_{xx}[m+k-r] = \phi_{yy}[m] \tag{2.191}$$

这就是说,输出自相关序列也是仅与时间差 m 有关。由此可得,一个线性时不变系统被一个广义平稳输入所激励,其输出也是广义平稳的。

作变量置换 $l = r-k$,(2.191)式可表示为

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[m] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\phi_{xx}[m-l]\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]h[l+k] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\phi_{xx}[m-l]c_{hh}[l]\end{aligned} \tag{2.192}$$

式中已定义

$$c_{hh}[l] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]h[l+k] \tag{2.193}$$

序列 $c_{hh}[l]$往往称为 $h[n]$的**确定性自相关序列**,或者简单地称为 $h[n]$的**自相关序列**。应该强调的是:$c_{hh}[l]$是一个非周期的自相关,也就是说一个能量有限的序列,并且不应该与一个无限能量随机序列的自相关相混淆。的确可以看出,$c_{hh}[l]$就是 $h[n]$与 $h[-n]$的离散卷积。那么,(2.192)式就可以说成是一个线性系统输出的自相关就是输入自相关与该系统单位脉冲响应的非周期自相关的卷积。

(2.192)式告诉我们,傅里叶变换在表征一个线性时不变系统对一个随机输入的响应上是有用的。为方便起见,假定 $m_x = 0$,也即有相关和自协方差序列是相同的。然后,分别用 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$,$\Phi_{yy}(e^{j\omega})$和 $C_{hh}(e^{j\omega})$表示 $\phi_{xx}[m]$,$\phi_{yy}[m]$和 $c_{hh}[l]$的傅里叶变换,由(2.192)式可得

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = C_{yy}(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}) \tag{2.194}$$

另外,由(2.193)式

$$\begin{aligned}C_{hh}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= |H(e^{j\omega})|^2\end{aligned}$$

所以

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{yy}(e^{j\omega}) \tag{2.195}$$

(2.195)式给出了一个有关**功率密度谱**的概念。具体地说。

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{yy}(e^{j\omega})d\omega = \text{输出总平均功率} \tag{2.196}$$

将(2.195)式代入(2.196)式,可得

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega \tag{2.197}$$

假设 $H(e^{j\omega})$是一个理想带通滤波器，如图 2.18(c)所示。$\phi_{xx}[m]$是一个偶序列，所以

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{xx}(e^{-j\omega})$$

同样，$|H(e^{j\omega})|^2$ 也是 ω 的偶函数，因此可以写成

$$\begin{aligned}\phi_{xx}[0] &= \text{输出总平均功率} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_a}^{\omega_b}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_a}^{-\omega_b}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega \end{aligned}\tag{2.198}$$

这样，在 $\omega_a \leqslant |\omega| \leqslant \omega_b$ 内，$\Phi_{xx}(e^{j\omega})$所包含的面积就能用来表示在那个频带内输入的均方值。输出功率必须保持非负，因此

$$\lim_{(\omega_b-\omega_a)\to 0}\phi_{yy}[0] \geqslant 0$$

这个结果与(2.198)式结合在一起，就意味着

$$\Phi_{xx}(\omega) \geqslant 0, \qquad \text{对全部 } \omega \tag{2.199}$$

于是可知一个实信号的功率密度谱函数是实的、偶的而且非负的。

例 2.30　白噪声

在量化误差分析中，白噪声概念是非常有用的。白噪声信号就是这样一种信号，其 $\Phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m]$。在本例中假设该信号具有零均值。白噪声信号的功率谱是一个常数，

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \quad \text{对全部 } \omega$$

因此，一个白噪声信号的平均功率是

$$\phi_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_x^2 d\omega = \sigma_x^2$$

白噪声的概念在功率谱不是常数的随机信号表示上也是有用的。例如，一个功率谱为 $\Phi_{yy}(e^{j\omega})$的随机信号 $y[n]$可以认为是在某个白噪声输入下一个线性时不变系统的输出。这就是利用(2.195)式定义一个系统，其频率响应 $H(e^{j\omega})$满足下列方程：

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\sigma_x^2$$

式中 σ_x^2 是该假设白噪声输入信号的平均功率。可以通过调整这个输入信号的平均功率以给出准确的 $y[n]$平均功率。例如，假定 $h[n] = a^n u[n]$，那么

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

这样就可以用下式来表示其功率谱具有如下形式的所有随机信号：

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \left|\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}\right|^2\sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + a^2 - 2a\cos\omega}$$

另一个重要的结果是涉及一个线性时不变系统输入和输出之间的互相关：

$$\begin{aligned}\phi_{xy}[m] &= \mathscr{E}\{x[n]y[n+m]\} \\ &= \mathscr{E}\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n+m-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]\phi_{xx}[m-k]\end{aligned}\tag{2.200}$$

这时可看到，输入和输出间的互相关是单位脉冲响应与输入自相关序列的卷积。

(2.200)式的傅里叶变换是

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xx}(e^{j\omega}) \tag{2.201}$$

当输入为白噪声时，这一结果有一种有用的应用；即 $\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m]$，将其代入(2.198)式，可得

$$\phi_{xy} = \sigma_x^2 h[m] \tag{2.202}$$

这就是说，对于一个零均值的白噪声输入，一个线性系统输入和输出之间的互相关是正比于该系统的单位脉冲响应。类似地，白噪声输入的功率谱为

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2, \qquad -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \tag{2.203}$$

由(2.201)式可得

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \sigma_x^2 H(e^{j\omega}) \tag{2.204}$$

也就是说在这种情况下，互功率谱正比于该系统的频率响应。如果有可能观察到对一个白噪声输入时系统输出的话，那么式(2.202)式和(2.204)式就可以用来作为估计一个线性时不变系统的单位脉冲响应或频率响应的基础。

2.11 小结

这一章我们讨论了有关离散时间信号与系统的几个基本定义。其中定义了几个基本序列，利用卷积和来定义和表示线性时不变系统，及其有关稳定性和因果性的含义等等。具有初始松弛条件的、其输入输出满足线性常系数差分方程的一类系统表明是线性时不变系统中一种重要的子系统。讨论了这类差分方程的递推解，并定义了 FIR 和 IIR 两类系统。

对线性时不变系统分析和表示的一种重要方法是它们的频域表示法。考虑一个系统对一个复指数输入的响应而给出了频率响应的定义。然后，把单位脉冲响应和频率响应之间的关系表示成一对傅里叶变换对。

我们把注意力放在傅里叶变换表示的很多性质上，并讨论了各种有用的傅里叶变换对。表 2.1 和表 2.2 综合了这些性质和定理，表 2.3 包括了几个有用的傅里叶变换对。

本章以对离散时间随机信号作简单介绍而结束。在后续章节中还将对这些基本概念和结果作进一步阐述和应用。

虽然本章的内容是不经直接对照连续时间信号而给出的，但是离散时间信号处理问题中一个重要的类别还是经由采样这一类信号引起的。因此，在第 4 章将考虑连续时间信号和经由周期采样而得到的序列之间的关系。

习 题

基本题(附答案)

2.1 对于下列系统，试判断系统是否是(1)稳定的，(2)因果的，(3)线性的，(4)时不变的，和(5)无记忆的。

(a) $T(x[n]) = g[n]x[n]$，$g[n]$ 已知

(b) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

(c) $T(x[n]) = \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

(d) $T(x[n]) = x[n - n_0]$

(e) $T(x[n]) = e^{x[n]}$

(f) $T(x[n]) = ax[n] + b$

(g) $T(x[n]) = x[-n]$

(h) $T(x[n]) = x[n] + 3u[n + 1]$

2.2 (a) 已知一个线性时不变系统的单位脉冲响应除去在区间 $N_0 \leqslant n \leqslant N_1$ 内均为零。已知输入 $x[n]$除去在区间 $N_2 \leqslant n \leqslant N_3$ 内均为零。其结果就是输出除去某一区间 $N_4 \leqslant n \leqslant N_5$ 内都为零。试用 N_0, N_1, N_2 和 N_3 来确定 N_4 和 N_5。

(b) 若 $x[n]$除 N 个连续点外都为零，$h[n]$除 M 个连续点外也都是零，试问对 $y[n]$不为零的最大连续点数是多少？

2.3 按卷积和直接计算，求单位脉冲响应为 $h[n]$的线性时不变系统的阶跃响应，$h[n]$给出如下：

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \qquad 0 < a < 1$$

2.4 有线性常系数差分方程如下：

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1]$$

当 $x[n] = \delta[n]$和 $y[n] = 0, n < 0$，求 $y[n], n \geqslant 0$。

2.5 一个因果线性时不变系统由下列差分方程描述：

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1]$$

(a) 求系统的齐次响应，也即在 $x[n] = 0$时，对全部 n 可能的输出。

(b) 求系统的单位脉冲响应。

(c) 求系统的阶跃响应。

2.6 (a) 一线性时不变系统，其输入输出满足如下差分方程：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

求其频率响应 $H(e^{j\omega})$。

(b) 有一系统，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

写出表征该系统的差分方程。

2.7 请判断下列各信号是否都是周期的？若是，周期是什么？

(a) $x[n] = e^{j(\pi n/6)}$

(b) $x[n] = e^{j(3\pi n/4)}$

(c) $x[n] = [\sin(\pi n/5)]/(\pi n)$

(d) $x[n] = e^{j\pi n/\sqrt{2}}$

2.8 有一 LTI 系统其 $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$，用傅里叶变换求当输入 $x[n] = (1/3)^n u[n]$时，该系统的输出。

2.9 考虑如下差分方程

$$y[n] - \frac{5}{6}[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1]$$

(a) 满足该差分方程的因果 LTI 系统的单位脉冲响应、频率响应和阶跃响应是什么？

(b) 该差分方程齐次解的一般形式是什么?

(c) 考虑有另一个系统,它满足这个差分方程,但系统既不是因果的,又不是 LTI 的,而有 $y[0]=y[1]=1$。求系统对 $x[n]=\delta[n]$的响应。

2.10 若有单位脉冲响应 $h[n]$和输入 $x[n]$如下,求一个线性时不变系统的输出:

(a) $x[n]=u[n]$, $h[n]=a^n u[-n-1]$, $a>1$

(b) $x[n]=u[n-4]$, $h[n]=2^n u[-n-1]$

(c) $x[n]=u[n]$, $h[n]=(0.5)2^n u[-n]$

(d) $h[n]=2^n u[-n-1]$, $x[n]=u[n]-u[n-10]$

在做(b)~(d)部分的题时,应该用线性和时不变性使运算量最少。

2.11 考虑一个 LTI 系统,其频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j2\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j4\omega}},\qquad -\pi<\omega\leqslant\pi$$

若输入 $x[n]$为

$$x[n]=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right),\qquad \text{对全部 } n$$

求对全部 n 的输出 $y[n]$。

2.12 有一系统输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$,且满足下列差分方程:

$$y[n]=ny[n-1]+x[n]$$

该系统是因果的且满足初始松弛条件,即若 $n<n_0$,$x[n]=0$,则有 $y[n]=0$,$n<n_0$。

(a) 若 $x[n]=\delta[n]$,求 $y[n]$(对全部 n)。

(b) 系统是线性的吗?试证明之。

(c) 系统是时不变的吗?试证明之。

2.13 指出下列离散时间信号中的哪一些是稳定、线性时不变离散时间系统的特征函数:

(a) $e^{j2\pi n/3}$

(b) 3^n

(c) $2^n u[-n-1]$

(d) $\cos(\omega_0 n)$

(e) $(1/4)^n$

(f) $(1/4)^n u[n]+r^n u[-n-1]$

2.14 已知单一输入/输出关系的 3 个系统如下:

(a) 系统 A:$x[n]=(1/3)^n$, $y[n]=2(1/3)^n$

(b) 系统 B:$x[n]=(123)^n$, $y[n]=2(1/4)^n$

(c) 系统 C:$x[n]=(2/3)^n u[n]$, $y[n]=4(2/3)^n u[n]-3(1/2)^n u[n]$

根据这一信息,从下面所列的说法中对每个系统作出最为可能的结论:

(ⅰ) 系统可能不是 LTI 的。

(ⅱ) 系统一定是 LTI 的。

(ⅲ) 系统可能是 LTI 的,而且只有一个 LTI 系统满足这个输入/输出限制。

(ⅳ) 系统可能是 LTI 的,但是由这个输入/输出限制给出的信息不能唯一确定。

如果选了(ⅲ),请给出这个 LTI 系统的单位脉冲响应 $h[n]$或频率响应 $H(e^{j\omega})$。

2.15 考虑示于图 P2.15 的系统。一个单位脉冲响应为 $h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+10]$的 LTI 系统的输出乘以单位阶跃函数 $u[n]$后得到总的系统输出,回答下列每个问题,并简要陈述你的理由:

(a) 整个系统是 LTI 的吗?

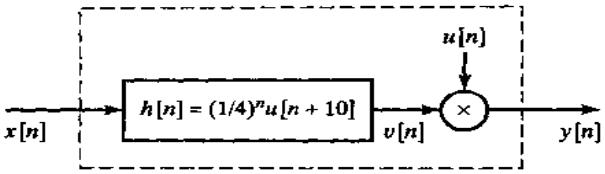


图 P2.15

(b) 整个系统是因果的吗?

(c) 在 BIBO(有界输入/有界输出)意义下,整个系统是稳定的吗?

2.16 考虑下面差分方程:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=3x[n]$$

(a) 确定这个差分方程齐次解的一般形式。

(b) 一个因果和一个反因果的 LTI 系统都由这个差分方程所表征,试求这两个系统的单位脉冲响应。

(c) 证明:这个因果的 LTI 系统是稳定的,而这个反因果的 LTI 系统是不稳定的。

(d) 当 $x[n]=(1/2)^n u[n]$ 时,求该差分方程的一个特解。

2.17 (a) 求该序列的傅里叶变换

$$r[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(b) 考虑序列 $w[n]$

$$w[n]=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi}{M}\right), & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

画出 $w[n]$ 并利用 $r[n]$ 的傅里叶变换 $R(e^{j\omega})$ 来表示 $w[n]$ 的傅里叶变换 $W(e^{j\omega})$。

(提示:先用 $r[n]$ 和复指数 $e^{j(2\pi n/M)}$ 和 $e^{-j(2\pi n/M)}$ 来表示 $w[n]$。)

(c) 画出当 $M=4$ 时,$R(e^{j\omega})$ 和 $W(e^{j\omega})$ 的幅度特性。

2.18 对于下面给出的每一个 LTI 系统的单位脉冲响应,指出该系统是否是因果的:

(a) $h[n]=(1/2)^n u[n]$　　(b) $h[n]=(1/2)^n u[n-1]$

(c) $h[n]=(1/2)^{|n|}$　　(d) $h[n]=u[n+2]-u[n-2]$

(e) $h[n]=(1/3)^n u[n]+3^n u[-n-1]$

2.19 对于下面给出的每一个 LTI 系统的单位脉冲响应,指出该系统是否是稳定的:

(a) $h[n]=4^n u[n]$　　(b) $h[n]=u[n]-u[n-10]$

(c) $h[n]=3^n[-n-1]$　　(d) $h[n]=\sin(\pi n/3)u[n]$

(e) $h[n]=(3/4)^{|n|}\cos(\pi n/4+\pi/4)u[n]$　　(f) $h[n]=2u[n+5]-u[n]-u[n-5]$

2.20 考虑下面这个代表一个因果 LTI 系统的差分方程:

$$y[n]+(1/a)y[n-1]=x[n-1]$$

(a) 求作为常数 a 的函数的系统单位脉冲响应 $h[n]$。

(b) a 值在什么范围内系统是稳定的?

基本题

2.21 有一任意线性系统,其输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$。证明:若对所有 n,$x[n]=0$,则 $y[n]$ 对所有 n 也

必须为零。

2.22 对图 P2.22 中每一对序列，利用离散卷积求单位脉冲响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统对输入 $x[n]$ 的响应。

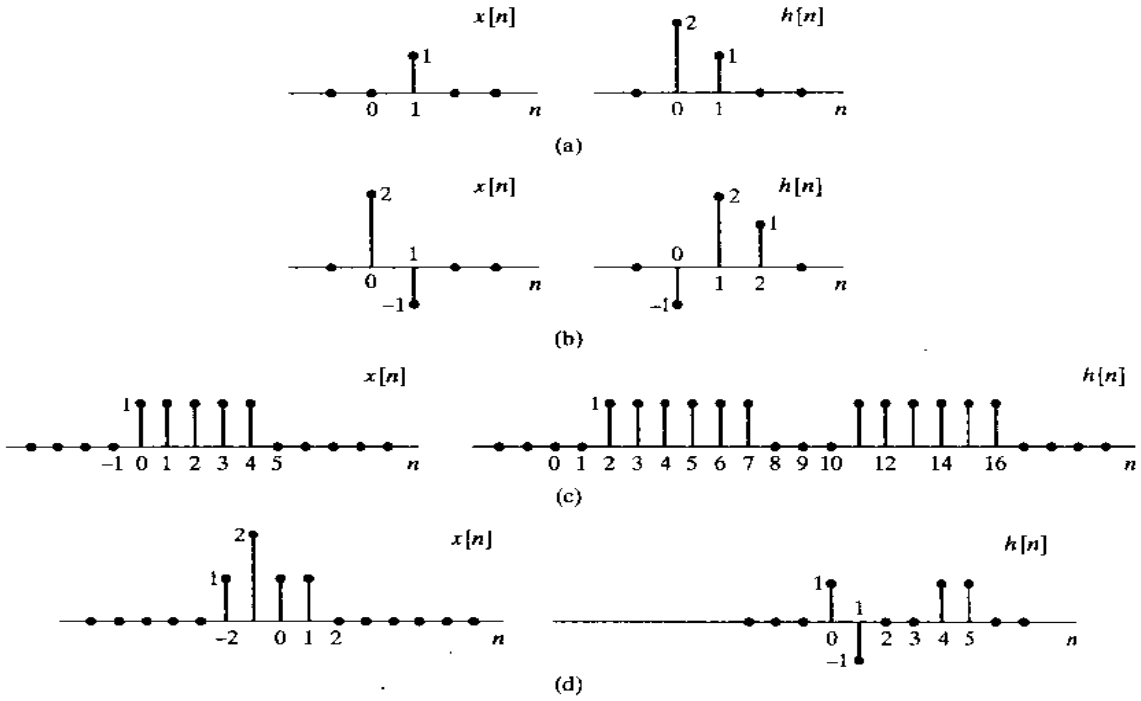


图 P2.22

2.23 利用线性的定义[(2.26a)～(2.26b)式]，证明：理想延时系统(例 2.3)和滑动平均系统(例 2.4)都是线性系统。

2.24 一个线性时不变系统的单位脉冲响应如图 P2.24 所示，求出并仔细画出该系统对输入 $x[n]=u[n-4]$ 的响应。

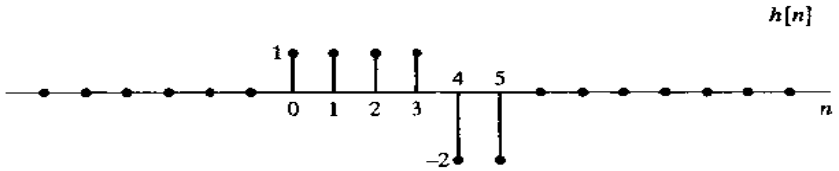


图 P2.24

2.25 一个线性时不变系统单位脉冲响应为

$$h[n]=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$
$$=u[n]$$

求该系统对输入 $x[n]$ 的响应。$x[n]$ 如图 P2.25 所示，并描述如下：

$$x[n]=\begin{cases}0, & n<0,\\ a^n, & 0\leqslant n\leqslant N_1,\\ 0, & N_1<n<N_2, 0<a<1\\ a^{n-N_2}, & N_2\leqslant n\leqslant N_2+N_1,\\ 0, & N_2+N_1<n.\end{cases}$$

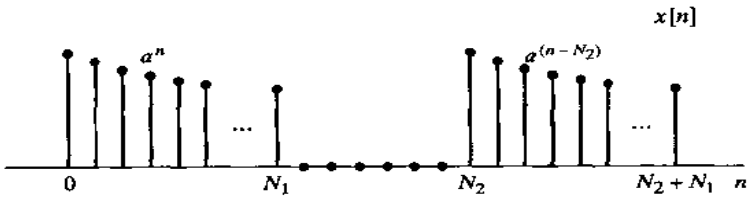


图 P2.25

2.26 下列离散时间信号中的哪些能够是任何稳定的 LTI 系统的特征函数?

(a) $5^n u[n]$ (b) $e^{j2\omega n}$

(c) $e^{j\omega n}+e^{j2\omega n}$ (d) 5^n

(e) $5^n e^{j2\omega n}$

2.27 有 3 个系统 A,B 和 C,其输入输出如图 P2.27 所示。试确定是否每一个系统都能是 LTI 的。若你的答案是是的,那么请指出是否还有另外的 LTI 系统也具有给出的输入/输出对关系。清楚地说明你的答案。

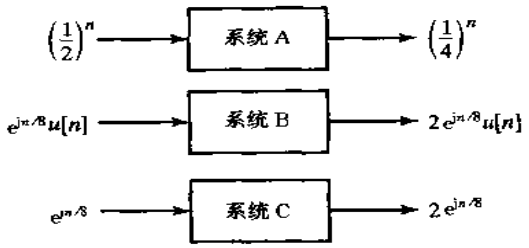


图 P2.27

2.28 试确定下列哪些信号是周期的? 若是周期的,周期是什么?

(a) $x[n]=e^{j(2\pi n/5)}$

(b) $x[n]=\sin(\pi n/19)$

(c) $x[n]=ne^{j\pi n}$

(d) $x[n]=e^{jn}$

2.29 有一离散时间信号 $x[n]$如图 P2.29 所示

画出并仔细标注下面各信号:

(a) $x[n-2]$

(b) $x[4-n]$

(c) $x[2n]$

(d) $x[n]u[2-n]$

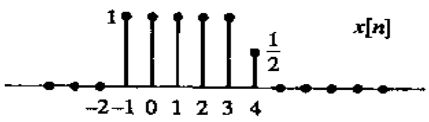


图 P2.29

(c) $x[n-1]\delta[n-3]$

2.30 对于下面所列系统，试确定是否系统是(1)稳定的；(2)因果的；(3)线性的；(4)时不变的。

(a) $T(x[n]) = (\cos\pi n)x[n]$

(b) $T(x[n]) = x[n^2]$

(c) $T(x[n]) = x[n]\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$

(d) $T(x[n]) = \sum_{k=n-1}^{\infty}x[k]$

2.31 考虑如下差分方程：

$$y[n] + \frac{1}{15}y[n-1] - \frac{2}{5}y[n-2] = x[n]$$

(a) 求该方程齐次解的一般形式。

(b) 分别有一因果和反因果的 LTI 系统都由这一方程所表征，求这两个系统的单位脉冲响应。

(c) 证明因果 LTI 系统是稳定的，反因果 LTI 系统是不稳定的。

(d) 当 $x[n]=(3/5)^n u[n]$时，求该差分方程的一个特解。

2.32 考虑一 LTI 系统，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega-\frac{\pi}{4})}\left(\frac{1 + e^{-j2\omega} + 4e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}\right), \qquad -\pi < \omega \leqslant \pi$$

若输入为

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right), \qquad \text{对全部 } n$$

求对全部 n 的输出 $y[n]$。

2.33 考虑一 LTI 系统，其 $|H(e^{j\omega})| = 1$，并令 $\arg|H(e^{j\omega})|$ 如图 P2.33 所示

若输入为

$$x[n] = \cos\left(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

求输出 $y[n]$。

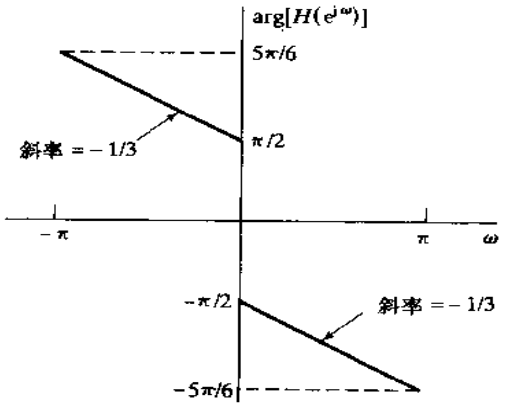


图 P2.33

2.34 有一稳定 LTI 系统，其输入/输出对如图 P2.34-1 所示

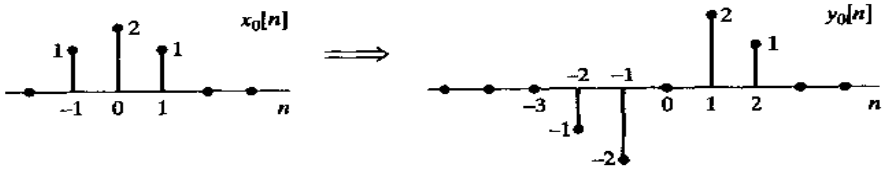


图 P2.34

(a) 求如图 P2.34－2 所示的输入 $x_1[n]$时，系统的响应

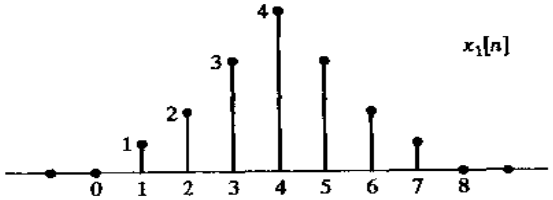


图 P2.34－2

(b) 求该系统的单位脉冲响应。

深入题

2.35 图 P2.35 中系统 T 已知是时不变的，当对系统输入是 $x_1[n]$，$x_2[n]$和 $x_3[n]$时，系统响应分别是 $y_1[n]$，$y_2[n]$和 $y_3[n]$，如图所示。

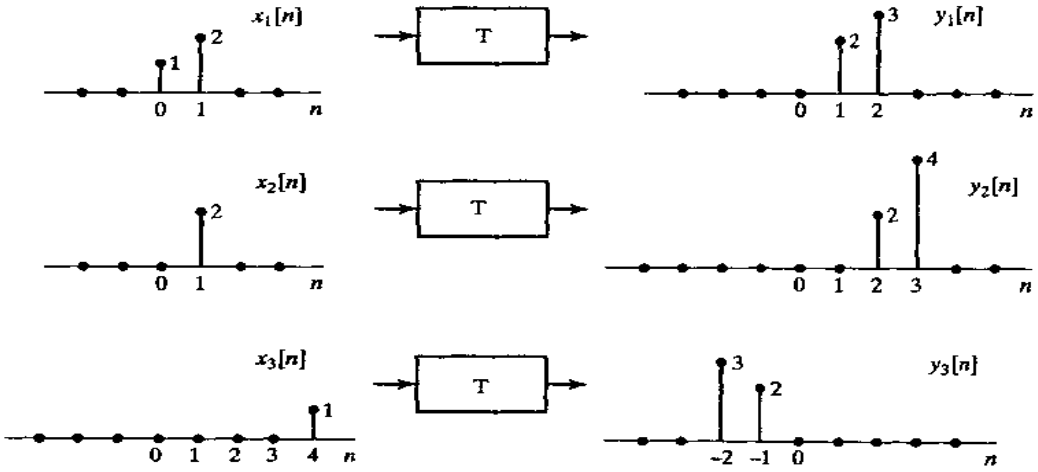


图 P2.35

(a) 确定系统 T 能否是线性的。

(b) 如果系统 T 的输入 $x[n]$是 $\delta[n]$，系统响应 $y[n]$是什么？

(c) 确定全部可能的输入 $x[n]$，对于这些输入系统 T 的响应能唯一由已给出的信息来确定。

2.36 图 P2.36 中系统 L 已知是线性的，图中示出 3 种输出信号 $y_1[n]$，$y_2[n]$ 和 $y_3[n]$ 分别是对输入信号 $x_1[n]$，$x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 的响应。

(a) 确定系统 L 能否是时不变的。

(b) 如果系统 L 的输入 $x[n]$ 是 $\delta[n]$，系统响应，$y[n]$ 是什么？

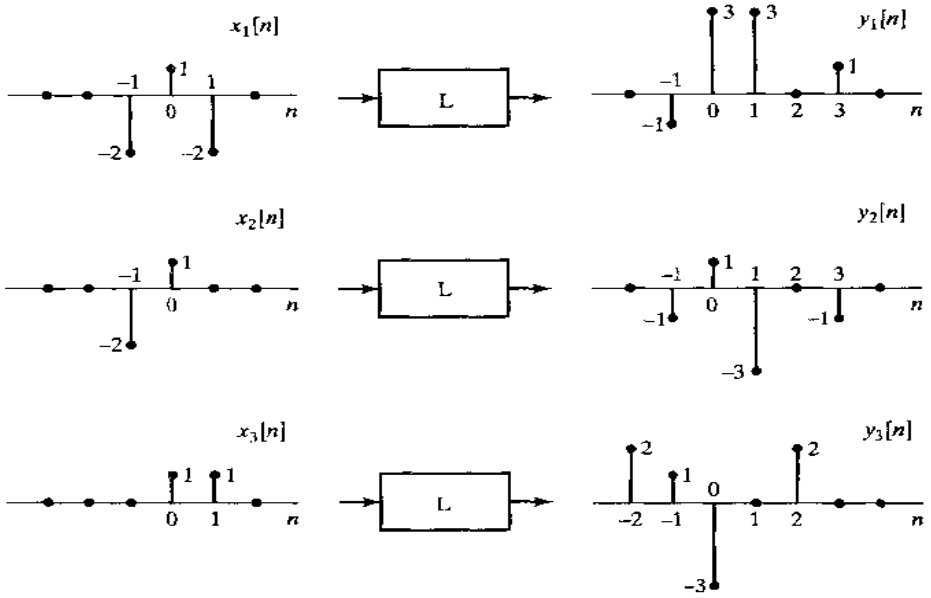


图 P2.36

2.37 考虑一个离散时间线性时不变系统，其单位脉冲响应 $h[n]$。若输入 $x[n]$ 是一个周期序，周期为 N，即 $x[n]=x[n+N]$。证明：输出 $y[n]$ 也是一个周期序列，周期为 N。

2.38 在 2.5 节中曾提到，齐次差分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_h[n-k] = 0 \tag{P2.38-1}$$

的解具有如下形式：

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N} A_m z_m^n \tag{P2.38-2}$$

式中 A_m 是任意的，z_m 是下列多项式的根：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = 0 \tag{P2.38-3}$$

也即

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{m=1}^{N} (1 - z_m z^{-1}) \tag{P2.38-4}$$

(a) 求下列差分方程齐次解的一般形式：

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1] \tag{P2.38-5}$$

(b) 若 $y[-1]=1$，$y[0]=0$，求齐次解中的系数 A_m。

(c) 现在考虑如下差分方程：

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = 2x[n-1] \qquad \text{(P2.38-6)}$$

如果齐次解仅包含式(P2.38-2)中的那些项,证明:初始条件 $y[-1]=1$ 和 $y[0]=0$ 不能满足。

(d) 如果式(P2.38-3)中有两个根是相同的,那么代替式(P2.38-2)的 $y_h[n]$ 将是

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N-1} A_m z_m^n + nB_1 z_1^n \qquad \text{(P2.38-7)}$$

式中已假定 z_1 是重根。利用式(P2.38-7)对式(P2.38-6)求 $y_h[n]$ 的一般形式。明确地证明,你的答案在满足 $x[n]=0$ 时满足式(P2.38-6)。

(e) 若 $y[-1]=1$ 和 $y[0]=0$,求在(d)中所求得的齐次解中的系数 A_1 和 B_1。

2.39 有一系统输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$,输入/输出关系由下列两个性质决定:

1. $y[n]-ay[n-1]=x[n]$

2. $y[0]=1$

(a) 确定系统是否是时不变的。

(b) 确定系统是否是线性的。

(c) 假定差分方程(性质 1)仍然不变,而 $y[0]=0$,这会改变(a)还是改变(b)的答案?

2.40 一线性时不变系统的单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{\mathrm{j}}{2}\right)^n u[n], \qquad \mathrm{j} = \sqrt{-1}$$

求稳态响应,即对激励为 $x[n]=\cos(\pi n)u[n]$ 时,在大 n 值时的响应。

2.41 一个线性时不变系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega 3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right) \\ 0, & \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right) \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

该系统的输入是一个周期 $N=16$ 的周期单位脉冲串,即

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+16k]$$

求系统的输出。

2.42 考虑图 P2.42 的系统。

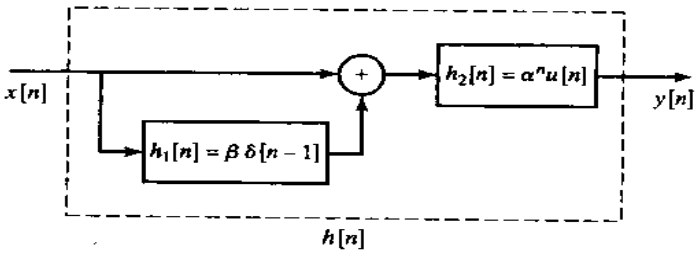


图 P2.42

(a) 求整个系统的单位脉冲响应 $h[n]$。

(b) 求整个系统的频率响应。

(c) 给出联系输出 $y[n]$ 和输入 $x[n]$ 的差分方程。

(d) 该系统是因果的吗? 在什么条件下该系统是稳定的?

2.43 若 $X(e^{j\omega})=1/(1-ae^{-j\omega})$, $-1<a<0$,求出并画出下列以 ω 为变量的函数:

(a) $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$

(b) $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$

(c) $|X(e^{j\omega})|$

(d) $\angle X(e^{j\omega})$

2.44 令 $X(e^{j\omega})$是信号 $x[n]$的傅里叶变换,如图 P2.44 所示。不需明确求出 $X(e^{j\omega})$而完成下列计算:

(a) 求 $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$

(b) 求 $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$

(c) 求$\angle X(e^{j\omega})$

(d) 求 $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$

(e) 求出并画出傅里叶变换是 $X(e^{-j\omega})$的信号。

(f) 求出并画出傅里叶变换是 $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$的信号。

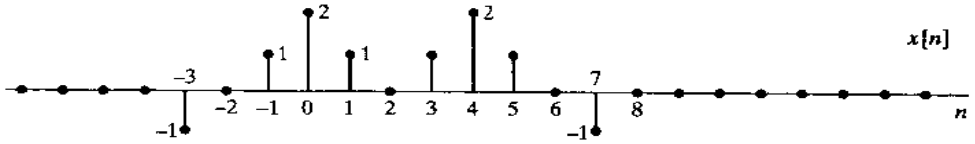


图 P2.44

2.45 对图 P2.45 系统,当输入 $x[n]=\delta[n]$时,求输出 $y[n]$,$H(e^{j\omega})$是一个理想低通滤波器,即

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

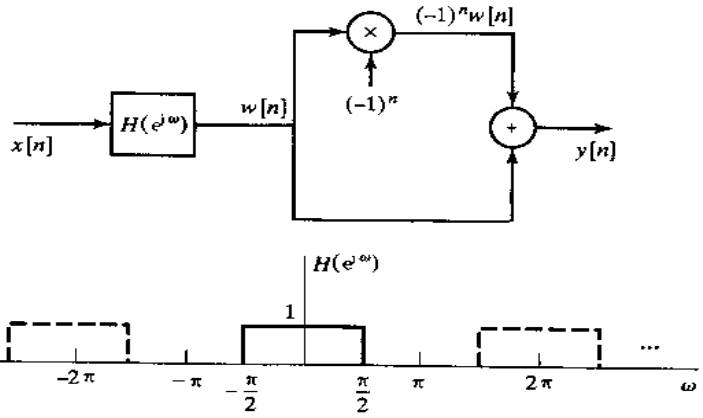


图 P2.45

2.46 有一序列,其离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} \qquad |a| < 1$$

(a) 求序列 $x[n]$。

(b) 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega)d\omega/2\pi$

2.47 一线性时不变系统，其输入/输出关系由如下方程给出：

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

(a) 求系统单位脉冲响应 $h[n]$。

(b) 这个系统是稳定的吗？

(c) 求系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$，并用三角恒等式对 $H(e^{j\omega})$求得一个简单的表示式。

(d) 画出频率响应的幅度和相位。

(e) 现在考虑一个新的系统，其频率响应是 $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$，求 $h_1[n]$。

2.48 设傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$的实值离散时间信号 $x[n]$是某一系统的输入，其输出定义为

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$$

(a) 概略画出离散时间信号 $s[n]=1+\cos(\pi n)$及其(广义)傅里叶变换 $S(e^{j\omega})$

(b) 将输出的傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$表示成 $X(e^{j\omega})$和 $S(e^{j\omega})$的函数。

(c) 你或许想用内插信号 $w[n]=y[n]+\frac{1}{2}(y[n+1]-y[n-1])$来近似 $x[n]$，求作为 $Y(e^{j\omega})$函数的傅里叶变换 $W(e^{j\omega})$。

(d) 当 $x[n]=\sin(\pi n/a)/(\pi n/a)$，$a>1$时，概略画出 $X(e^{j\omega})$，$Y(e^{j\omega})$和 $W(e^{j\omega})$。在什么条件下，所建议的内插信号 $w[n]$对原 $x[n]$是一个好的近似。

2.49 现考虑一离散时间 LTI 系统，其频率响应为 $H(e^{j\omega})$，相应的单位脉冲响应为 $h[n]$。

(a) 有关这个系统首先给出 3 条下列信息：

(ⅰ) 系统是因果的。

(ⅱ) $H(e^{j\omega})=H^*(e^{-j\omega})$

(ⅲ) 序列 $h[n+1]$的离散时间傅里叶变换(DTFT)是实函数。

利用这 3 条信息，证明该系统的单位脉冲响应为有限长。

(b) 除了上述 3 条信息外，又给出另两条信息：

(ⅳ) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = 2$

(ⅴ) $H(e^{j\pi})=0$

有足够的信息判定该系统唯一吗？若是，请求出 $h[n]$；若不是，请给出你所能给出的有关 $h[n]$的情况。

2.50 考虑下面 3 个序列：

$$v[n] = u[n] - u[n-6]$$
$$w[n] = \delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n-4]$$
$$q[n] = v[n] * w[n]$$

(a) 求出并概略画出序列 $q[n]$。

(b) 求出并概略画出序列 $r[n]$，$r[n]$满足 $r[n]*v[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} q[k]$。

(c) $q[-n]=v[-n]*w[-n]$吗？陈述理由。

2.51 有一线性时不变系统，其单位脉冲响应 $h[n]=a^n u[n]$。

(a) 求输入 $x_1[n]=e^{j(\pi/2)n}$时，系统的输出 $y_1[n]$。

(b) 借助于(a)的结果，求输入 $x_2[n]=\cos(\pi n/2)$时，系统的响应 $y_2[n]$。

(c) 求输入为 $x_3[n]=e^{j(\pi/2)n}u[n]$时，系统的响应 $y_3[n]$。

(d) 对于大的 n 值比较 $y_3[n]$与 $y_1[n]$。

2.52 一 LTI 系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/4}, \qquad -\pi < \omega \leqslant \pi$$

当输入 $x[n]=\cos(5\pi n/2)$时，确定该系统的输出 $y[n]$，并将结果尽可能简化。

2.53 考虑一个如图 P2.53 所示的 LTI 离散时间系统的级联

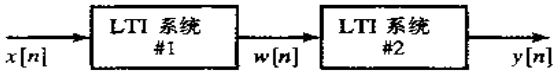


图 P2.53

第一个系统由下面方程描述：

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.5\pi \\ 0, & 0.5\pi \leqslant |\omega| < \pi \end{cases}$$

第 2 个系统由下面方程描述：

$$y[n] = w[n] - w[n-1]$$

这个系统的输入是

$$x[n] = \cos(0.6\pi n) + 3\delta[n-5] + 2$$

求输出 $y[n]$。仔细想一下就能利用 LTI 系统的性质凭观察写出答案。

2.54 考虑一 LTI 系统其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j|(\omega/2)-(\pi/4)|}, \qquad -\pi < \omega \leqslant \pi$$

若输入是

$$x[n] = \cos\left(\frac{15\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right), \qquad \text{对全部 } n$$

求输出 $y[n]$。

2.55 对于图 P2.55 的系统，系统 1 是一个无记忆的非线性系统，系统 2 按如下关系决定 A

$$A = \sum_{n=0}^{100} y[n]$$



图 P2.55

现考虑 $x[n]=\cos(\omega n)$一类的输入，ω 为实的有限数。在输入端改变 ω 值将变化 A 的值；也即，A 是 ω 的函数。一般来说，A 随 ω 改变会是周期的吗？陈述理由。

2.56 有一系统 S，其输入 $x[n]$/输出 $y[n]$按图 P2.56－1 所示方框图关联。输入 $x[n]$乘以 $e^{-j\omega_0 n}$，然后将乘积通过一个单位脉冲响应为 $h[n]$的稳定 LTI 系统。

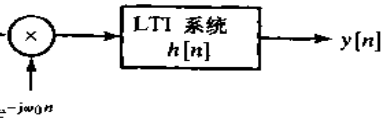


图 P2.56－1

(a) 系统 S 是线性的吗？陈述理由。

(b) 系统 S 是时不变的吗？陈述理由。

(c) 系统 S 是稳定的吗？陈述理由。

(d) 给出一个系统 C，使得图 P2.56－2 的方框图是表示系统 S 的输入/输出关系的另一种表示(注意：系统 C 不要求一定是 LTI 系统)。

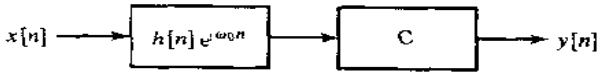


图 P2.56－2

2.57 一个具有零延迟的理想低通滤波器有单位脉冲响应为 $h_{lp}[n]$和频率响应为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.2\pi \\ 0, & 0.2\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

(a) 由 $h_1[n]=(-1)^n h_{lp}[n]=e^{j\pi n}h_{lp}[n]$定义一个新的滤波器，确定频率响应 $H_1(e^{j\omega})$的式子，并对 $|\omega|<\pi$画出 $H_1(e^{j\omega})$。这是什么类型的滤波器？

(b) 由 $h_2[n]=2h_{lp}[n]\cos(0.5\pi n)$定义第2个滤波器，确定频率响应 $H_2(e^{j\omega})$的式子，并对 $|\omega|<\pi$画出 $H_2(e^{j\omega})$。这是什么类型的滤波器？

(c) 由 $h_3[n]=\dfrac{\sin(0.1\pi n)}{\pi n}h_{lp}[n]$定义第3个滤波器，确定频率响应 $H_3(e^{j\omega})$的式子，并对 $|\omega|<\pi$画出 $H_3(e^{j\omega})$。这是什么类型的滤波器？

2.58 下面LTI系统：

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

称之为90°相移器，它常被用来产生如图P2.58-1所示的、称作解析信号的 $w[n]$。具体地说，解析信号 $w[n]$是一个复值信号，有

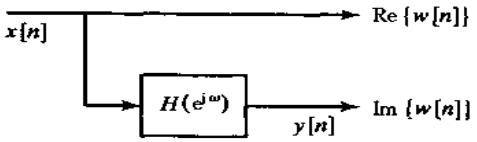


图 P2.58-1

$$\mathrm{Re}\{w[n]\} = x[n]$$
$$\mathrm{Im}\{w[n]\} = y[n]$$

如果 $X(e^{j\omega})$如图P2.58-2所示，求出并画出 $W(e^{j\omega})$，即解析信号 $w[n]=x[n]+jy[n]$的傅里叶变换。

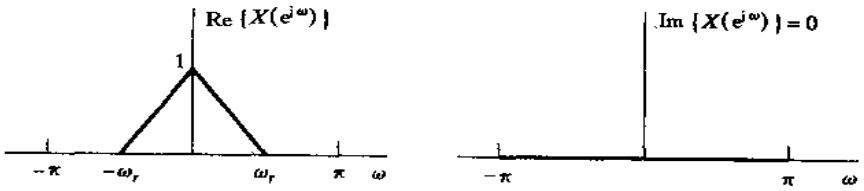


图 P2.58-2

2.59 一个信号 $x[n]$的自相关序列定义为

$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k]$$

(a) 证明对 $q[n]$适当的选择有 $R_x[n]=x[n]*g[n]$，并确认该恰当选择的 $g[n]$。

(b) 证明：$R_x[n]$的傅里叶变换等于 $|X(e^{j\omega})|^2$。

2.60 如图P2.60-1所示的 $x[n]$和 $y[n]$是相应于某一LTI系统的输入和输出，

(a) 求系统对如图 P2.60－2 所示的序列 $x_2[n]$的响应

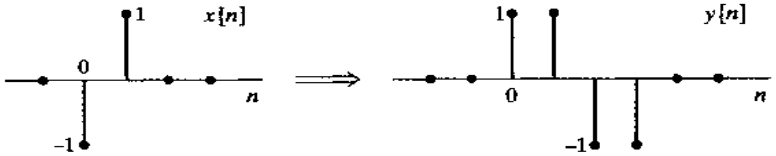


图 P2.60－1

(b) 对这个 LTI 系统求单位脉冲响应 $h[n]$。

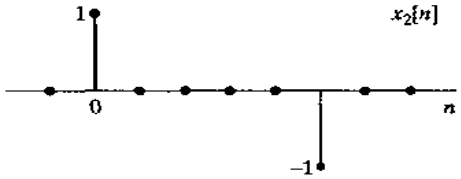


图 P2.60－2

2.61 考虑一系统其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足以下差分方程：

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$$

对全部输入，$y[-1]$都限制到零。试判断该系统是否是稳定的？如若得出系统是稳定的结论，指出你的推论；如若得出系统不是稳定的，试给出一个在有界输入下，得出无界输出的例子。

扩充题

2.62 在 2.2.4 节定义了一个系统的因果性。根据这个定义，证明：对线性时不变系统而言，因果性就意味着 $n<0$ 时，单位脉冲响应 $h[n]$是零。证明这一点的一种途径是证明：若 $n<0$，$h[n]$不为零，则系统不可能是因果的；若 $n<0$，$h[n]=0$，则系统一定是因果的。

2.63 考虑一输入为 $x[n]$、输出为 $y[n]$的离散时间系统，当输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

时，输出是

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad \text{对全部 } n$$

试判断下列哪种说法是正确的：

- 系统必须是 LTI 的。
- 系统可能是 LTI 的。
- 系统不可能是 LTI 的。

如果答案是系统一定是或可能是 LTI 的话，请给出一种可能的单位脉冲响应。如果答案是不可能，请明确地说明为什么不可能是 LTI 的。

2.64 考虑一 LTI 系统，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega/2}, \qquad |\omega| < \pi$$

试判断该系统是否是因果的。说明理由。

2.65 在图 P2.65 中示出两个序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$，它们在图示的 n 区域以外都是零。一般来说，它们的傅

里叶变换 $X_1(e^{j\omega})$和 $X_2(e^{j\omega})$都会是复数，并可写为

$$X_1(e^{j\omega}) = A_1(\omega)e^{j\theta_1(\omega)}$$
$$X_2(e^{j\omega}) = A_2(\omega)e^{j\theta_2(\omega)}$$

式中 $A_1(\omega)$，$\theta_1(\omega)$，$A_2(\omega)$和 $\theta_2(\omega)$都选定实函数，以使得 $A_1(\omega)$和 $A_2(\omega)$在 $\omega=0$ 为非负，但在其余 ω 上既能够取正值，也可以取负值。试决定对 $\theta_1(\omega)$和 $\theta_2(\omega)$的适当选取，并在 $0<\omega<2\pi$ 内画出这两个相位函数。

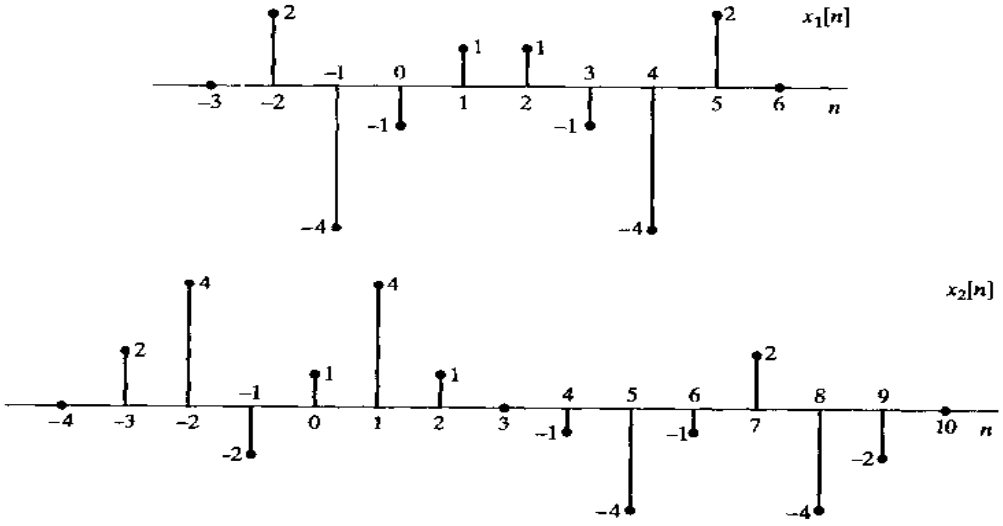


图 P2.65

2.66 考虑图 P2.66 几个离散时间的级联。时间倒置系统是定义为 $f[n]=e[-n]$和 $y[n]=g[-n]$。假设整个题目中 $x[n]$和 $h_1[n]$都是实序列。

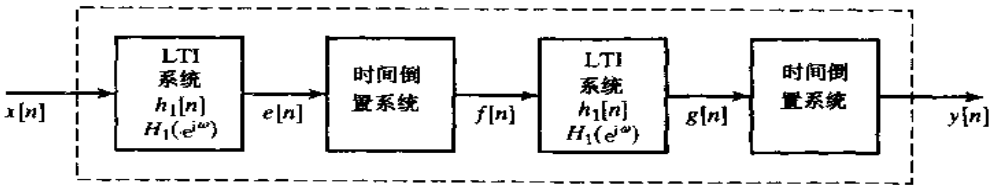


图 P2.66

(a) 用 $X(e^{j\omega})$和 $H_1(e^{j\omega})$表示 $E(e^{j\omega})$，$F(e^{j\omega})$，$G(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$。

(b) 由上(a)的结果应该让你确信整个系统是 LTI 的。求整个系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$。

(c) 求用 $h_1[n]$表示整个系统单位脉冲响应 $h[n]$的表示式。

2.67 在图 P2.67 中用虚线框住的系统可以证明是线性和时不变的。

(a) 求利用 $H_1(e^{j\omega})$，即内部 LTI 系统的频率响应，来表示从输入 $x[n]$到输出 $y[n]$的整个系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$的表示式。记住：$(-1)^n=e^{j\omega n}$。

(b) 当内部 LTI 系统的频率响应 $H_1(e^{j\omega})$为

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

时，画出 $H(e^{j\omega})$

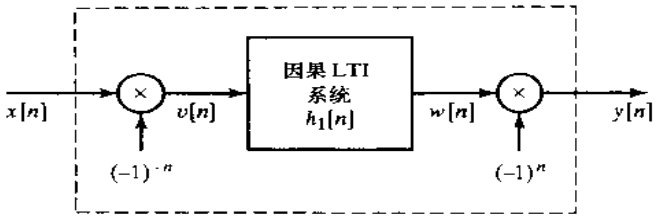


图 P2.67

2.68 图 P2.68－1 示系统 A 和系统 B 的输入/输出关系，而图 P2.68－2 包含了这些系统的两种可能的级联方式，若 $x_1[n]=x_2[n]$，$w_1[n]$ 和 $w_2[n]$ 一定相等吗？若你的回答是，请简明扼要说明为什么，并用一个例子来说明。若回答是不一定，也用一个反例来说明。

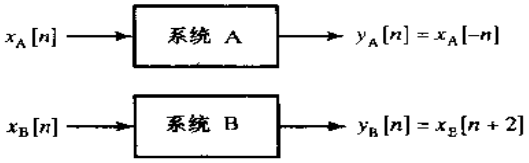


图 P2.68－1

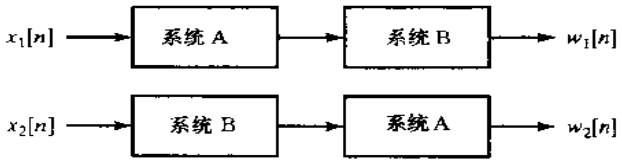


图 P2.68－2

2.69 考虑图 P2.69 的系统，其中子系统 S_1 和 S_2 都是 LTI 的。

(a) 由虚线框住的整个系统，其输入为 $x[n]$，输出 $y[n]$ 等于 $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 的乘积，请问该系统能保证是 LTI 系统吗？若是，请说明理由；若不是，请给出一个反例。

(b) 假设已知 S_1 和 S_2 的频率响应 $H_1(e^{j\omega})$ 和 $H_2(e^{j\omega})$ 在某一范围内是零，令

$$H_1(e^{j\omega})=\begin{cases}0, & |\omega|\leqslant 0.2\pi\\ \text{未给出}, & 0.2\pi<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega})=\begin{cases}\text{未给出}, & |\omega|\leqslant 0.4\pi\\ 0, & 0.4\pi<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

又假定输入 $x[n]$ 已知带限到 0.3π，即

$$X(e^{j\omega})=\begin{cases}\text{未给出}, & |\omega|\leqslant 0.3\pi\\ 0, & 0.3\pi<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

请问 $y[n]$ 的离散时间傅里叶变换（DTFT）$Y(e^{j\omega})$ 在 $-\pi\leqslant\omega<\pi$ 的什么范围内保证是零？

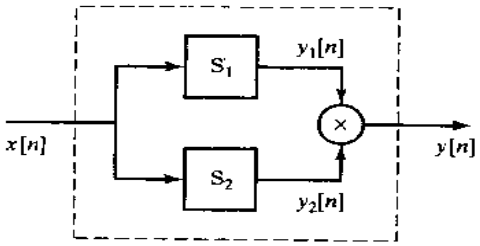


图 P2.69

2.70 常用的一种数值运算称之为**一阶差分**，定义为

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1]$$

这里 $x[n]$是输入，$y[n]$是一阶差分系统的输出。

(a) 证明该系统是线性和时不变的。

(b) 求该系统的单位脉冲响应。

(c) 求出并画出频率响应(幅度和相位)。

(d) 证明若

$$x[n] = f[n] * g[n]$$

则

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n] * g[n] = f[n] * \nabla(g[n])$$

式中 * 记作离散卷积。

(e) 当用一个系统与该一阶差分系统级联时，能恢复出 $x[n]$，求该系统的单位脉冲响应；即求 $h_i[n]$，以使

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$$

2.71 令 $H(e^{j\omega})$记作一个单位脉冲响应为 $h[n]$的 LTI 系统的频率响应，这里 $h[n]$一般是复数。

(a) 利用(2.109)式证明 $H^*(e^{-j\omega})$是脉冲响应为 $h^*[n]$的系统的频率响应，这里 * 记作复共轭。

(b) 证明若 $h[n]$为实，频率响应就是共轭对称的，即 $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$。

2.72 令 $X(e^{j\omega})$是 $x[n]$的傅里叶变换。利用傅里叶变换综合式或分析分(2.133)式和(2.134)式证明：

(a) $x^*[n]$的傅里叶变换是 $X^*(e^{-j\omega})$；

(b) $x^*[-n]$的傅里叶变换是 $X^*(e^{j\omega})$。

2.73 对 $x[n]$为实序列，证明：表 2.1 性质 7 直接可由性质 1 得到，而性质 8～11 可直接由性质 7 得到。

2.74 在 2.9 节中陈述的几个傅里叶变换定理都未作证明，请利用傅里叶分析或综合式(2.133)式和(2.134)式，证明表 2.2 中定理 1～5 的真实性。

2.75 在 2.9.6 小节中直观地证明了

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \qquad \text{(P2.75-1)}$$

$Y(e^{j\omega})$，$H(e^{\omega})$和 $X(e^{j\omega})$是一个线性时不变系统的输出 $y[n]$、单位脉冲响应 $h[n]$和输入 $x[n]$的傅里叶变换；也即

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad \text{(P2.75-2)}$$

利用(P2.75-2)式给出的卷积和的傅里叶变换证明(P2.75-1)。

2.76 将傅里叶综合式(2.133)式应用到(2.172)式中，并利用表 2.2 中的定理 3，说明调制定理(表 2.2 中定理 7)的真实性。

2.77 令 $x[n]$和 $y[n]$为复序列，$X(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$为它们的傅里叶变换。

(a) 利用卷积定理(表 2.2 中定理 6)以及表 2.1 中适当的性质，求一个序列，其傅里叶变换是 $X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$，并用 $x[n]$和 $y[n]$来表示该序列。

(b) 利用(a)的结果，证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \qquad \text{(P2.77-1)}$$

(P2.77-1)式是 2.9.5 节中给出的帕斯瓦尔定理更一般的形式。

(c) 利用(P2.77-1)式，求下列和式的数值解：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n}\,\frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

2.78 令 $x[n]$和 $X(e^{j\omega})$分别代表一个序列及其傅里叶变换。利用 $X(e^{j\omega})$求 $y_r[n]$，$y_d[n]$和 $y_e[n]$的变换。

在每一种情况下，相应于图 P2.78 所示的 $X(e^{j\omega})$画出 $Y(e^{j\omega})$。

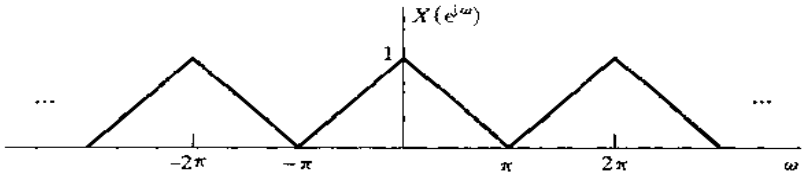


图 P2.78

(a) 采样器：

$$y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

注意：$y_s[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + (-1)^n x[n]\}$，而 $-1 = (e^{j\pi})$。

(b) 压缩器：

$$y_d[n] = x[2n]$$

(c) 扩展器：

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ 为偶数} \\ 0, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

2.79 在雷达和声纳中常使用两个频率相关的函数 $\Phi_x(N,\omega)$来估计一个信号的频率和行程-时间分辨率。对于离散时间信号，定义

$$\Phi_x(N,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega}$$

(a) 证明

$$\Phi_x(-N,-\omega) = \Phi_x^*(N,\omega)$$

(b) 若

$$x[n] = Aa^n u[n], \qquad 0 < a < 1$$

求 $\Phi_x(N,\omega)$(假设 $N \geqslant 0$)。

(c) 函数 $\Phi_x(N,\omega)$有一个频域对偶关系，证明

$$\Phi_x(N,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j[v+(\omega/2)]})X^*(e^{j[v-(\omega/2)]})e^{j2vN}dv$$

2.80 令 $x[n]$和 $y[n]$都是平稳、不相关随机信号，证明：如果

$$w[n] = x[n] + y[n]$$

那么

$$m_w = m_x + m_y \text{ 和 } \sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

2.81 令 $e[n]$是一个白噪声序列，$s[n]$是一个与 $e[n]$不相关的序列。证明序列

$$y[n] = s[n]e[n]$$

也是白噪声序列，即

$$E\{y[n]y[n+m]\} = A\delta[m]$$

式中 A 为一常数。

2.82 考虑一随机信号 $x[n] = s[n] + e[n]$，其中 $s[n]$和 $e[n]$都是独立的平稳随机信号，其自相关函数分别为 $\Phi_{ss}[m]$和 $\Phi_{ee}[m]$。

(a) 求 $\Phi_{xx}[m]$和 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$的表示式。

(b) 求 $\Phi_{xx}[m]$和 $\Phi_{xy}(e^{j\omega})$的表示式。

(c) 求 $\Phi_{xs}[m]$和 $\Phi_{xs}(e^{j\omega})$的表示式。

2.83 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应 $h[n]=a^n u[n]$。

(a) 对该单位脉冲响应计算确定性自相关函数 $\phi_{hh}[m]$。

(b) 对该系统求能量密度函数 $|H(e^{j\omega})|^2$。

(c) 利用帕斯瓦尔定理求积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

2.84 自相关函数为 $\phi_{xx}=\sigma_x^2\delta[m]$，零均值的白噪声信号作为一阶后向差分系统(例 2.10)的输入。

(a) 求出并画出系统输出的自相关函数和功率谱密度。

(b) 系统输出的平均功率是什么？

(c) 这个题告诉你有关带噪声信号的一阶后向差分的什么结论？

2.85 令 $x[n]$是一个实平稳白噪声过程，其均值为零，方差为 σ_x^2。令 $y[n]$是一个单位脉冲响应为 $h[n]$的线性时不变系统当输入为 $x[n]$时相应的输出。证明：

(a) $E\{x[n]y[n]\}=h[0]\sigma_x^2$

(b) $\sigma_y^2=\sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}h^2[n]$

2.86 令 $x[n]$是一个实平稳白噪声序列，均值为零，方差为 σ_x^2，将 $x[n]$输入到两个因果的线性离散时间时不变系统的级联上去，如图 P2.86 所示。

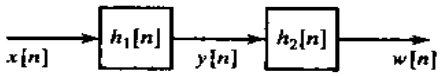


图 P2.86

(a) $\sigma_y^2=\sigma_x^2\sum_{k=0}^{\infty}h_1^2[k]$ 成立吗？

(b) $\sigma_w^2=\sigma_y^2\sum_{k=0}^{\infty}h_2^2[k]$ 成立吗？

(c) 令 $h_1[n]=a^n u[n]$，$h_2[n]=b^n u[n]$。求图 P2.86 整个系统的单位脉冲响应，并由此求出 σ_w^2。你在(b)中的答案是否与(c)的结果一致？

2.87 有时关心的是一个线性时不变系统在其输入突然加一个随机信号时，系统的统计行为。这样一种情况如图 P2.87 所示。令 $x[n]$是一个平稳白噪声过程，那么系统的输入 $w[n]$就由下式给出：

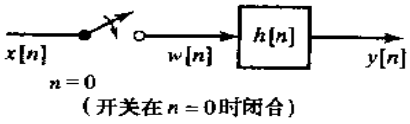


图 P2.87

$$w[n]=\begin{cases}x[n], & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$w[n]$是一个非平稳过程，输出 $y[n]$也是非平稳的。

(a) 利用输入的均值导出输出均值的表达式。

(b) 导出输出自相关序列 $\phi_{yy}[n_1,n_2]$的表达式。

(c) 证明：对于大的 n 值，在(a)和(b)中导出的公式趋近于平稳输入的结果。

(d) 假定 $h[n]=a^n u[n]$。利用输入的均值和均方值求输出的均值和均方值。画出这些参数作为 n 的函数的依赖关系。

2.88 设 $x[n]$和 $y[n]$分别记作一个系统的输入和输出。在图像中有时用于减小噪声的目的，一个系统的输入/输出关系由下式给出：

$$y[n]=\frac{\sigma_x^2[n]}{\sigma_x^2[n]}(x[n]-m_x[n])+m_x[n]$$

式中

$$\sigma_r^2[n] = \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1}(x[k] - m_x[n])^2$$

$$m_x[n] = \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1}x[k]$$

$$\sigma_s^2[n] = \begin{cases}\sigma_r^2[n] - \sigma_w^2, & \sigma_r^2[n] \geqslant \sigma_w^2 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

和 σ_w^2 是正比于噪声功率的一个已知常数。

(a) 这个系统线性吗?

(b) 这个系统时不变吗?

(c) 这个系统稳定吗?

(d) 这个系统因果吗?

(e) 对某一固定的 $x[n]$,求当 σ_w^2 很大(大噪声功率)和当 σ_w^2 很小(小噪声功率)时的 $y[n]$。对于这些极端情况,$y[n]$有何意义?

2.89 考虑一个随机过程 $x[n]$,它是图 P2.89 所示线性时不变系统的响应。图中 $w[n]$代表一个实的零均值平稳白噪声过程,且 $E\{w^2[n]\} = \sigma_w^2$。

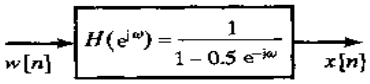


图 P2.89

(a) 用 $\phi_{xx}[n]$或 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$表示 $\mathscr{E}\{x^2[n]\}$。

(b) 求 $x[n]$的功率密度谱 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$。

(c) 求 $x[n]$的自相关函数 $\phi_{xx}[n]$。

2.90 考虑一个线性时不变系统,其单位脉冲响应 $h[n]$是实的。假设系统对两个输入 $x[n]$和 $y[n]$的响应是 $y[n]$和 $z[n]$,如图 P2.90 所示。

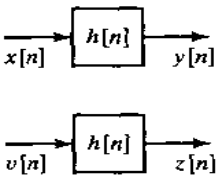


图 P2.90

在图中输入 $x[n]$和 $v[n]$均为实的零均值平稳随机过程,其自相关函数为 $\phi_{xx}[n]$和 $\phi_{vv}[n]$,互相关函数为 $\phi_{xv}[n]$,功率谱为 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$和 $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$,以及互功率谱为 $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$。

(a) 已知 $\phi_{xx}[n]$,$\phi_{vv}[n]$,$\phi_{xv}[n]$,$\Phi_{xx}(e^{j\omega})$,$\Phi_{vv}(e^{j\omega})$和 $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$,求 $y[n]$和 $z[n]$的互功率谱 $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$,这里 $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$定义为

$$\phi_{yz}(e^{j\omega}) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \Phi_{yz}(e^{j\omega})$$

且 $\phi_{yz}[n] = E\{y[n]z[k-n]\}$。

(b) 互功率谱 $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$总是非负的吗?即对所有 ω,$\Phi_{xv}(e^{j\omega}) \geqslant 0$?试证明你的答案。

2.91 考虑图 P2.91 所示 LTI 系统,该系统的输入是一个平均功率为 σ_e^2 的平稳零均值白噪声信号 $e[n]$。第 1 个系统是由(2.45)式定义的后向差分系统 $f[n] = e[n] - e[n-1]$,第 2 个系统是一个理想低通滤波器,其频率响应为

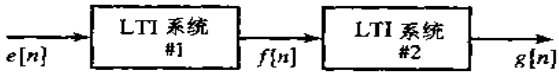


图 P2.91

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases}1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi\end{cases}$$

(a) 求 $f[n]$功率谱 $\Phi_{ff}(e^{j\omega})$的表示式,并在 $-2\pi < \omega < 2\pi$ 上画出这个表示式。

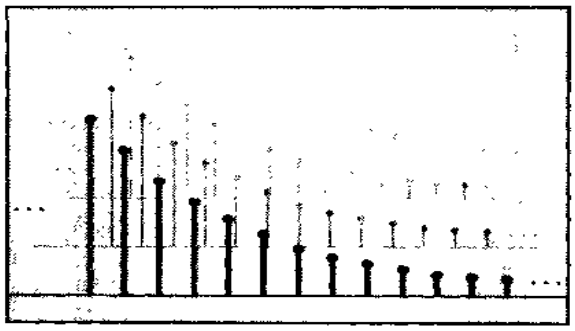
(b) 求 $f[n]$自相关函数 $\phi_{ff}[m]$的表示式。

(c) 求 $g[n]$的功率谱 $\Phi_{gg}(e^{j\omega})$的表示式,并在 $-2\pi < \omega < 2\pi$ 上画出这个表示式。

(d) 求输出平均功率 σ_g^2 的表示式。

第3章

z变换



3.0 引言

已经看到，傅里叶变换在表示和分析离散时间信号与系统中起着关键的作用。这一章要建立一个序列的 z 变换表示，并将研究一个序列的性质是如何与它的 z 变换的性质联系起来的。离散时间信号的 z 变换和连续时间信号的拉普拉斯变换是互相对应的，并且它们每一个与相应的傅里叶变换之间都有一种类似的关系。引入这种推广的主要原因是傅里叶变换不是对所有的序列都收敛，能有一个包括更为广泛信号的傅里叶变换的推广形式是有用的。第二个优点是在分析问题中，z 变换概念往往比傅里叶变换更方便。

3.1 z 变换

一个序列 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$在第 2 章是定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{3.1}$$

一个序列 $x[n]$的 z 变换 $X(z)$定义成

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{3.2}$$

(3.2)式一般是一个无穷项的和或者无穷项幂级数，其中 z 是一个复变量。有时将(3.2)式看作一个算子是有益的，它把一个序列变换成为一个函数，称 **z 变换算子** $\mathcal{Z}[\cdot]$，定义为

$$\mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \tag{3.3}$$

利用这一解释，z 变换算子就看作是将序列 $x[n]$ 变换为函数 $X(z)$，z 是一个连续复变量，一个序列和它的 z 变换之间的相应关系用符号记为

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z) \tag{3.4}$$

按(3.2)式所定义的 z 变换往往称之为**双边 z 变换**，而与此相对应的**单边 z 变换**则定义为

$$\mathcal{Z}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{3.5}$$

显然，仅当 $x[n]=0$，$n<0$，双边和单边变换才是相等的。在本书中几乎无一例外地都用双边变换。

比较一下(3.1)式和(3.2)式，很显然，傅里叶变换和 z 变换之间存在着一个紧密的关系。特别是若将(3.2)式中的复变量 z 代以复变量 $e^{j\omega}$，那么 z 变换就蜕化为傅里叶变换。这就是将傅里叶变换用 $X(e^{j\omega})$ 表示的一个初衷，因为当傅里叶变换存在时，它就是以 $z=e^{j\omega}$ 的 $X(z)$。这就相当于将 z 限制在单位幅度上，也就是说，对于 $|z|=1$，z 变换就相应于傅里叶变换。更一般地说，将复变量 z 表示成极坐标形式

$$z = re^{j\omega}$$

(3.2)式就可以写成

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$

或

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n} \tag{3.6}$$

(3.6)式可以看作是原序列 $x[n]$ 和指数序列 r^{-n} 相乘后的傅里叶变换。很明显，对于 $r=1$，(3.6)式就是 $x[n]$ 的傅里叶变换。

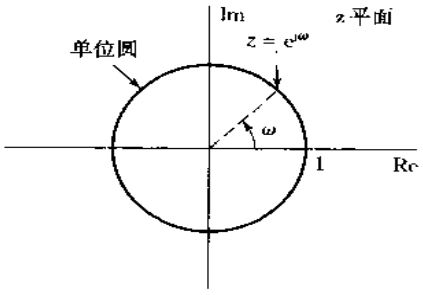


图 3.1　复数 z 平面的单位圆

因为 z 变换是一个复变量的函数，因此利用复数 z 平面来描述和阐明 z 变换是方便的。在 z 平面，相应于 $|z|=1$ 的闭线就是半径为 1 的圆，如图 3.1 所示。这个圆特称为**单位圆**。z 变换在单位圆上的求值就相应于傅里叶变换。注意 ω 是单位圆上某点 z 的矢量与复平面实轴之间的角度。若沿着 z 平面单位圆上从 $z=1$ (即 $\omega=0$)开始，经过 $z=j(\omega=\pi/2)$ 到 $z=-1(\omega=\pi)$ 对 $X(z)$ 求值，就得到了 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 的傅里叶变换。继续沿着单位圆从 $\omega=\pi$ 到 $\omega=2\pi$ 考察傅里叶变换，就等效于从 $\omega=-\pi$ 到 $\omega=0$ 一样。在第 2 章，傅里叶变换是在一个线性频率轴上展开的，现在把傅里叶变换解释成在 z 平面单位圆上的 z 变换，也就相当于在概念上把线性频率轴缠绕在单位圆上，其中 $\omega=0$ 在 $z=1$，和 $\omega=\pi$ 在 $z=-1$。有了这种解释，傅里叶变换在频率上的固有周期性就自然得到了，因为在 z 平面上

2π rad的改变相当于绕单位圆一次，然后又重新回到原来同一点上来。

正如在第 2 章讨论过的，表示傅里叶变换的幂级数不是对所有序列都是收敛的，也就是说，该无穷项之和可能不总是有限的。相类似，z 变换也不是对所有序列或者对全部 z 值都收敛。对已给定的序列，使 z 变换收敛的那一级 z 值就称为**收敛域**，缩写为 ROC。在 2.7 节已提到，傅里叶变换的一致收敛要求序列是绝对可加的。将这个条件用于(3.6)式就得到 z 变换收敛的条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | x[n]r^{-n} | < \infty \tag{3.7}$$

从(3.7)式很清楚，由于序列被实指数 r^{-n} 相乘，就有可能甚至在傅里叶变换不存在时而对 z 变换收敛。例如，序列 $x[n]=u[n]$ 不是绝对可加的，因此它的傅里叶变换不收敛。然而，$r^{-n}u[n]$ 在 $r>1$ 时是绝对可加的。这就表明，阶跃序列的 z 变换在收敛域 $|z|>1$ 内存在。

(3.2)式幂级数的收敛仅仅决定于 $|z|$；也就是说，因为 $|X(z)|<\infty$，如果

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | x[n] | | z |^{-n} < \infty \tag{3.8}$$

(3.2)式幂级数的收敛域就由满足不等式(3.8)式的全部 z 值所组成。因此，若某个 z 值，比如说 $z=z_1$ 是在 ROC 内，那么全部由 $|z|=|z_1|$ 确定的圆上的 z 值也一定在 ROC 内。结果收敛域一定由在 z 平面内以原点为中心的圆环所组成。收敛域的外边界是一个圆(或者可能向外延伸至无穷大)，而内边界也是一个圆(或者 ROC 向内可包括原点)。这就如图 3.2 所示。如果 ROC 包括单位圆，自然就意味着 z 变换对 $|z|=1$ 收敛，或者说序列的傅里叶变换收敛。相反，若 ROC 不包括单位圆，傅里叶变换就绝不收敛。

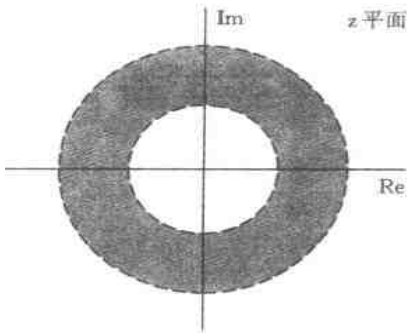


图 3.2 作为 z 平面一个圆环的收敛域(ROC)。对于一些具体情况，内边界可能向内延伸到原点，ROC 就变成一个圆盘。对于另一些情况，外边界则可能向外延伸至无穷大

(3.2)式的幂级数是一个劳伦级数。因此，在研究 z 变换中，来自复变函数理论的许多有用的定理都是可以利用的(例如可见 Churchill and Brown, 1990)。一个劳伦级数，或者说 z 变换，就代表了在收敛域内每点上的一个解析函数，因此 z 变换及其全部导数在收敛域内也一定是 z 的连续函数。这就意味着，如果收敛的区域包括单位圆，那么傅里叶变换及其全部对 ω 的导数一定是 ω 的连续函数。由 2.7 节讨论可得该序列必须是绝对可加的，也就是一个稳定序列。

z 变换的一致收敛要求如(3.7)式所示的指数加权序列绝对可加。序列

$$x_1[n] = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

和

$$x_2[n] = \cos\omega_0 n, \quad -\infty < n < \infty$$

都不是绝对可加的。再者，这两个序列对任何 r 值来说也没有一个乘以 r^{-n} 会是绝对可加的。因此，这些序列没有能满足绝对收敛的 z 变换。然而，在 2.7 节已指出即使像 $x_1[n]$ 这样的序列不是绝对可加的，但是却有着有限的能量，其傅里叶变换在均方意义上收敛到一个不连续的

周期函数。类似地，序列 $x_2[n]$既不是绝对可加的，又不是平方可加的，但是利用冲激可以对 $x_2[n]$定义出一个有用的傅里叶变换。在以上两种情况下，傅里叶变换都不是连续的、无限可微的函数，所以它们不能由在单位圆上求出 z 变换而得到。因此，在此情况下还认为傅里叶变换是作为 z 变换在单位圆上的求值严格说来就不正确了，虽然仍延用了含有这个意思的符号 $X(e^{j\omega})$。

当这个无限项和能表示成闭式时，也即可以被“求和”并且表示成一个简单的数学表达式时，z 变换是最有用的。$X(z)$在收敛域内是一个有理函数，为

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \tag{3.9}$$

它是其中最重要和最有用的 z 变换，式中 $P(z)$和 $Q(z)$都是 z 的多项式。对于使 $X(z)=0$ 的 z 称为$X(z)$的**零点**，而使 $X(z)$成为无穷大的 z 称为$X(z)$的**极点**。对于有限 z 值的$X(z)$的极点就是分母多项式的根。另外，极点也可能出现在 $z=0$ 或 $z=-\infty$。对于有理 z 变换，$X(z)$的极点位置与 z 变换的收敛域之间存在着几个重要关系，我们将在 3.2 节具体讨论这些关系。现在首先用几个例子来说明一下 z 变换。

例 3.1　右边指数序列

考虑信号 $x[n]=a^nu[n]$，由于该序列仅对 $n\geqslant 0$ 才为非零，这就是一个**右边序列**的例子。由(3.2)式可得

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

为了使 $X(z)$收敛就要求

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}| < \infty$$

因此，收敛域就是在$|az^{-1}|<1$ 范围内的全部 z 值，或者$|z|>a$。在收敛域内，该无穷级数收敛到

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1}) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a| \tag{3.10}$$

这里已经用了已熟悉的几何级数的求和公式。该 z 变换对任何有限的$|a|$值都收敛。另一方面，$x[n]$的傅里叶变换仅当$|a|<1$ 时才收敛。对 $a=1$，$x[n]$就是阶跃序列，其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1 \tag{3.11}$$

在例 3.1 中，该无限和就等于在收敛域内一个 z 的有理函数。对大多数情况来说，有理函数比无限和表示要方便得多。将会看到，任何能表示成指数和的序列都能用一个有理 z 变换来表示。这样的 z 变换，除了一个常数幅度因子外，都由它的零点和极点来决定。对这个例子，有一个零点在 $z=0$，和一个极点在 $z=a$。例 3.1 的零极点图和收敛域均如图 3.3 所示，图中“○”记作零点，“×”记作极点。对于$|a|>1$ ROC 不包括单位圆，这与 a 的这些值所带来的结果是一致的，即指数增长序列 $a^nu[n]$的傅里叶变换不收敛。

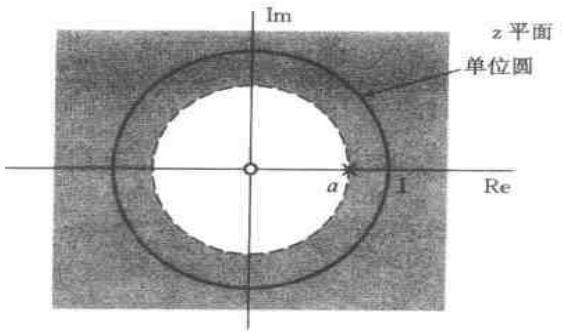


图 3.3　例 3.1 的零极点图和收敛域

例 3.2　左边指数序列

现在设 $x[n]=-a^n u[-n-1]$，因为这个序列仅在 $n\leqslant -1$ 时为非零，这就是一个**左边序列**。那么，

令 $x[n]=-a^n u[-n-1]$，那么

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^n u[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}a^n z^{-n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}a^{-n}z^n=1-\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^n \tag{3.12}$$

如果 $|a^{-1}z|<1$，或者 $|z|<a$，(3.12)式的和式收敛，并等于

$$X(z)=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a},\quad |z|<|a| \tag{3.13}$$

这个例子的零极点图和收敛域如图 3.4 所示。注意到当 $|a|<1$ 时，序列 $-a^n u[-n-1]$ 将随 $n\to-\infty$ 而指数增长，因此它的傅里叶变换不存在。

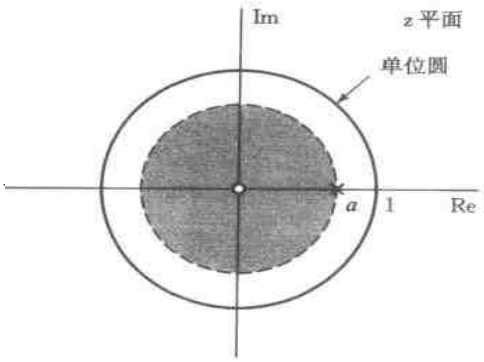


图 3.4　例 3.2 的零极点图和收敛域

将(3.10)式和(3.13)式、图 3.3 和图 3.4 作一比较就可看到，这两个序列以及它们的无限和都是不同的；然而 $X(z)$ 的代数表达式和相应的零极点图对例 3.1 和例 3.2 却是一样的。z 变换的差异仅在收敛域不同。这就强调了对于一个给定序列的 z 变换既要给出它的代数表达式，又要标出它的收敛域。同时，在这两个例子中序列都是指数的，所得到的 z 变换也都是有理的。事实上，由下一个例子可以进一步想到，只要 $x[n]$ 是一个实指数或复指数的线性组合，$X(z)$ 就一定有理的。

例 3.3　两个指数序列的和

考虑一个是两个实指数和的信号：

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \tag{3.14}$$

那么 z 变换就是

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\}z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} \tag{3.15}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)} \tag{3.16}$$

为了使 $X(z)$ 收敛，(3.15)式中的两个和都必须收敛，这就既要求 $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1$，又要求

$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}\right|<1$，或等效为$|z|>\frac{1}{2}$和$|z|>\frac{1}{3}$。由此收敛域就是$|z|>\frac{1}{2}$。对于单独每一项及组合后信号的$z$变换的零极点图和ROC都如图3.5所示。

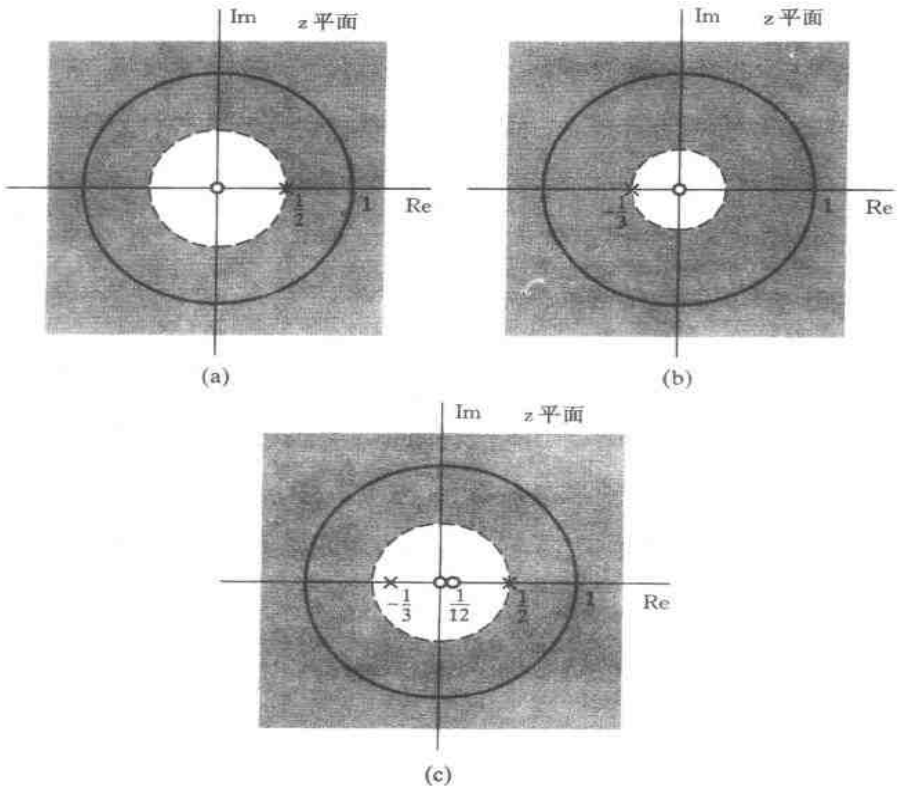


图3.5　例3.3和例3.4中单独项与这些项之和的零极点图及收敛域
(a)$1\Big/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right),|z|>1/2$;(b)$1\Big/\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right),|z|>1/3$;
(c)$1\Big/\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+1\Big/\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right),|z|>1/2$

在前面的每个例子中，都是从给定序列开始，然后把这些无限项和式中的每一项处理成一种其和能够辨别出的形式。当序列能够看作如例3.1和例3.2那种形式的指数序列之和时，z变换就能利用z变换算子是线性的这一事实以一种更为简便的方式求得。明确些就是根据z变换的定义(3.2)式，若$x[n]$是两项之和，那么$X(z)$也一定是相应于单独每一项的z变换之和，而ROC则是单个收敛域的重叠部分，即对两个单独的和都收敛的z值区域。在例3.3求得(3.15)式时已经用了这一点。例3.4用来说明例3.3的z变换如何能用一种更为直接的方式得到。

例3.4　再论两个序列的和

还是令$x[n]$由(3.14)式给出，那么利用例3.1的结果，用$a=\frac{1}{2}$和$a=-\frac{1}{3}$分别代入，这两个单独项的z变换很容易看出是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z|>\frac{1}{2} \tag{3.17}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z|>\frac{1}{3} \tag{3.18}$$

结果

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2} \tag{3.19}$$

与在例 3.3 中所得一样。每个单独项及组合后信号的 z 变换的零极点图和 ROC 如图 3.5 所示。

例 3.1～例 3.4 的全部要点反映在例 3.5 中。

例 3.5　双边指数序列

考虑序列 $x[n]$为

$$x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \tag{3.20}$$

注意到该序列随 $n\to-\infty$而指数增长。利用例 3.1 的结果，$a=-\frac{1}{3}$，有

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

和例 3.2 的结果，$a=\frac{1}{2}$，有

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

因此，根据 z 变换的线性，可得

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \frac{1}{3}<|z|, |z|<\frac{1}{2} \\ &= \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \tag{3.21}$$

在这个情况下，ROC 是个环形域 $1/3<|z|<1/2$。注意到本例中的有理函数与例 3.3 和例3.4中的有理函数是一样的，但 ROC 在两种情况下是不同的。本例的零极点图和 ROC 如图3.6所示。由于这时 ROC 不包括单位圆，所以(3.20)式所表示的序列没有傅里叶变换。

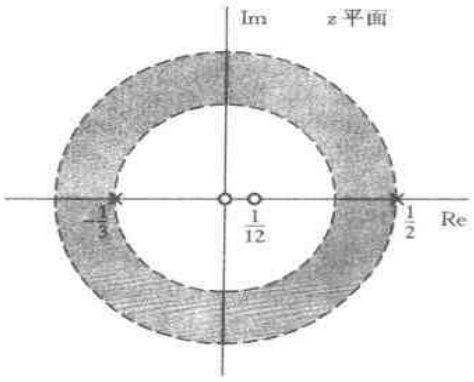


图 3.6　例 3.5 的零极点图和收敛域

前面每个例子中都把 z 变换既表示为 z 的多项式之比，又同时表示成 z^{-1}多项式之比。从(3.2)式给出的 z 变换定义的形式来看，对于 $n<0$，序列值为零的那些序列仅涉及 z 的负幂，于是对于这类信号，将 $X(z)$表示成 z^{-1}面不是 z 的多项式是特别方便的；然而，即使当 $x[n]$在 $n<0$ 不是零，$X(z)$仍然能利用

$(1-az^{-1})$形式的因式来表示。应该记住的是：这样一个因式既引入了一个极点，又引入了一个零点，这就如同在前面例子中的代数表达式所说的一样。

从这些例子容易看到，无限长指数序列的 z 变换能表示成 z 或 z^{-1} 的有理函数。在序列为有限长的情况下也有一个相当简单的形式。如果序列仅在区间 $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$ 内为非零，则 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n} \tag{3.22}$$

只要每一项 $|x[n]z^{-n}|$ 是有限的，$X(z)$ 就不存在收敛的问题。一般来说不太可能把一个有限项的和表示成一个闭式；不过，在这样的情况下可能也不必要。例如，若 $x[n]=\delta[n]+\delta[n-5]$，那么容易看出 $X(z)=1+z^{-5}$，它对 $|z|>0$ 是有限的。例 3.6 给出的就是能把有限项的和相加而得出一个更为紧凑的 z 变换表示式的例子。

例 3.6　有限长序列

考虑信号

$$x[n] = \begin{cases} a^n, 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, \text{ 其它} \end{cases}$$

那么

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z-a} \tag{3.23}$$

这里已经用了(2.56)式的通用公式对有限项级数求和。ROC 由满足

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty$$

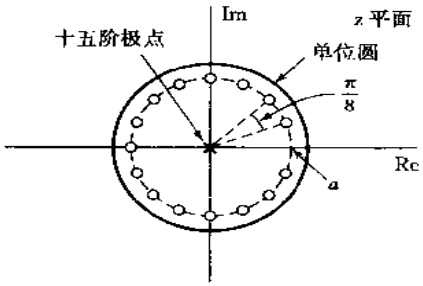


图 3.7　$N=16, 0<a<1$ 时例 3.6 的零极点图。本例的收敛域除 $z=0$ 外由全部 z 组成

的 z 值所决定。因为只有有限个非零项，所以只要 $|az^{-1}|$ 是有限的，其和就一定有限。这就仅要求 $|a|<\infty$ 和 $z\neq 0$。因此，假定 $|a|$ 是有限的，ROC 除原点($z=0$)外包括整个 z 平面。设 $N=16$，a 为实数且位于 0 和 1 之间，这时的零极点图如图 3.7 所示。具体些就是分子多项式的 N 个根在

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{3.24}$$

(注意，这些值都满足 $z^N=a^N$。当 $a=1$ 时，这些复数值就是 1 的 N 个根)。$k=0$ 时的零点，抵消了 $z-a$ 的极点。结果，除了原点外没有任何极点。剩下来的零点在

$$z_k = ae^{j(2\pi k/N)}, \qquad k = 1, \cdots, N-1 \tag{3.25}$$

表 3.1 综合了前面一些例子的变换对，以及其它一些常遇到的 z 变换对。将会看到，这些基本变换对在已知序列求变换，或者相反在给定 z 变换求序列中都是非常有用的。

表 3.1 基本 z 变换对

序列	变换	所有 z
1. $\delta[n]$	1	所有 z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	全部 z 除去 0(若 $m>0$)或∞(若 $m<0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
13. $\begin{cases}a^n, 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, \text{其它}\end{cases}$	$\frac{1-a^Nz^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$

3.2 z 变换收敛域的性质

上一节的各个例子告诉我们收敛域的性质与信号的属性有关。现将这些性质归纳如下，并接着作一些讨论和直观确认。假定 z 变换的代数表示式是一个有理函数，而序列 $x[n]$除了可能在 $n=\infty$或 $n=-\infty$外，都有有限的幅度。

性质 1：ROC 在 z 平面是中心在原点的一个圆环或圆盘，即 $0\leqslant r_R<|z|<r_L\leqslant\infty$。

性质 2：当且仅当 $x[n]$的 z 变换的 ROC 包括单位圆时，$x[n]$的傅里叶变换才绝对收敛。

性质 3：ROC 内不能包含任何极点。

性质 4：若 $x[n]$是一个有限长序列，即一个序列除在有限区间 $-\infty<N_1\leqslant n\leqslant N_2<+\infty$内，其余均为零，那么其 ROC 就是整个 z 平面，可能 $z=0$ 或 $z=\infty$除外。

性质 5:若 $x[n]$是一个**右边序列**,即一个序列在 $n<N_1<\infty$是零,那么其 ROC 是从 $X(z)$中**最里面**(即最大幅度)的有限极点点向外延伸至(可能包括)$z=\infty$。

性质 6:若 $x[n]$是一个**左边序列**,即一个序列在 $n>N_2>-\infty$是零,那么其 ROC 是从 $X(z)$中**最里面**(即最小幅度)的非零极点向内延伸至(可能包括)$z=0$。

性质 7:一个**双边序列**是一个无限长序列,它既不是右边的,也不是左边的。若 $x[n]$是双边序列,那么其 ROC 一定由 z 平面的一个圆环所组成,其内外边界均由某一极点所界定,而且依据性质 3,其内也不能包含任何极点。

性质 8:ROC 必须是一个连通的区域。

如同在 3.1 节中所讨论的,性质 1 来自这一点:对一个给定的 $x[n]$,(3.2)式的收敛仅依赖于$|z|$,而性质 2 就是当$|z|=1$时,(3.2)式就蜕化为傅里叶变换的结果。性质 3 是由于 $X(z)$在极点处是无穷大,因此按定义它不收敛。

性质 4 到性质 7 或多或少都能直接由把 z 变换看作是原序列经指数加权后的傅里叶变换来导得。首先考虑性质 4。图 3.8 示出一个有限长序列、$r>1$ 的指数序列 r^{-n}(指数衰减)和 $0<r<1$ 的指数序列(指数增长)。z 变换的收敛要求序列 $x[n]|z|^{-n}$,或者等效为 $x[n]r^{-n}$ 绝对可加。由图 3.8 很明显,因为 $x[n]$仅有有限个非零值,只要这些值当中的每一个都是有限的,$x[n]$就一定是绝对可加的。再者,如果加权序列在 $x[n]$为非零值的区间内,即 $N_1\leqslant n\leqslant N_2$,为有限幅度,那么这种绝对可加性也不会受到指数加权的影响。因此,对一个有限长序列,$x[n]r^{-n}$,$0<r<\infty$,一定是绝对可加的。唯一可能出现的麻烦是在 $r=0$ 或 $r=\infty$。如

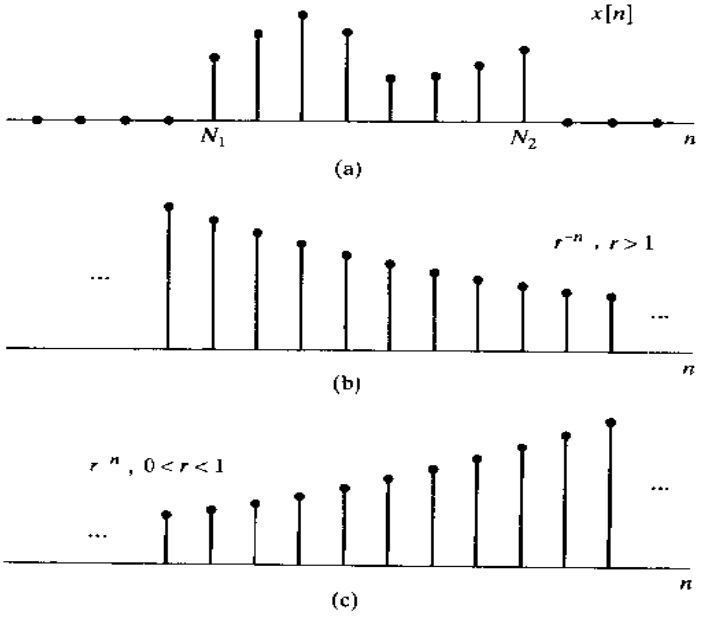


图 3.8 有限长序列和加权序列所内含的 z 变换收敛
(a)有限长序列 $x[n]$;(b)加权序列 r^{-n},$r>1$;
(c)加权序列 r^{-n},$0<r<1$

果 $x[n]$对任意正的 n 值是非零(即若 $N_2>0$),而 r 或等效为$|z|$是零,那么 $x[n]r^{-n}$对于 $0<n\leqslant N_2$将为无穷大。相应地,如果 $x[n]$对任意负的 n 值是非零(即若 $N_1<0$),而 r 或等效为$|z|$是无穷大,那么 $x[n]r^{-n}$对$N_1\leqslant n<0$将为无穷大。

性质 5 可以用一种大致类似的方式给予解释。图 3.9 示出一个右边序列和两个不同 r 值的指数序列 r^{-n}。一个右边序列就是在某一 n 值,譬如说 N_1 之前是零。如果 $z|=r_0$ 是在 ROC 内,那么 $x[n]r_0^{-n}$ 就是绝对可加的,或者说 $x[n]r_0^{-n}$ 的傅里叶变换收敛。因为 $x[n]$ 是右边的,这个序列 $x[n]r_1^{-n}$,若 r_1^{-n} 衰减得比 r_0^{-n} 更快,也一定是绝对可加的。具体地说,如图 3.9 所示,这个更快的指数衰减会加快衰减正 n 值时的序列值,而不会引起负 n 值时的序列值变成无界,因为 $x[n]z^{-n}=0, n<N_1$。基于这一点就能够得出:对一个右边序列,ROC 在 z 平面从某一个圆向外延伸。这个圆事实上就是在 $X(z)$中的最外面的极点处。为了看出这点,假定这些极点出现在 $z=d_1,\cdots,d_N, d_1$ 为最小幅度,即相应于最里面的极点,而 d_N 为最大幅度,即相应于最外面的极点。为了简化论证,假定全部为单阶极点(可以很容易推广到多重极点)。正如将在 3.3 节中看到的,对于 $N_1\leqslant n$, $x[n]$将由如下的指数形式之和所组成:

$$x[n]=\sum_{k=1}^{N}A_k(d_k)^n, \qquad n\geqslant N \tag{3.26}$$

这些指数项中,随 n 的增加,增长最慢的是相应于最里面的极点,即 d_1 这一项;而衰减最慢

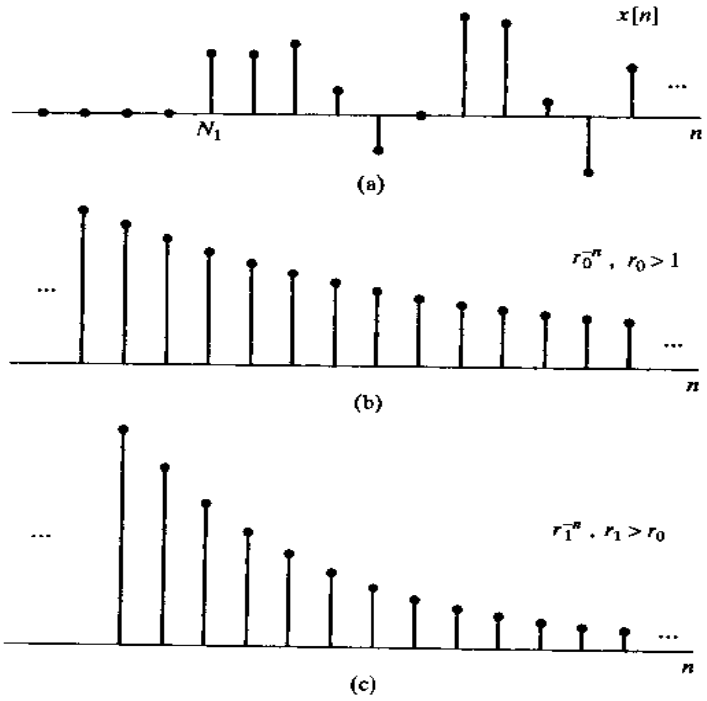


图 3.9 右边序列和加权序列所内含的 z 变换收敛
(a)右边序列 $x[n]$;(b)加权序列 $r_0^{-n}, 1<r_0$;
(c)加权序列 $r_0^{n}, r_1>r_0$

(或增长最快)的是相应于最外面的极点,即 d_N 这一项。现在考虑序列 $x[n]$ 用 r^{-n} 指数加权,即

$$x[n]r^{-n} = r^{-n}\sum_{k=1}^{N} A_k(d_k)^n, \qquad n \geqslant N_1 \tag{3.27}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k(d_k r^{-1})^n, \qquad n \geqslant N_1 \tag{3.28}$$

$x[n]r^{-n}$ 的绝对可加性要求(3.28)式中的每一指数项都是绝对可加的,即

$$\sum_{n=N_1}^{\infty} | d_k r^{-1} |^n < \infty, \qquad k = 1, \cdots, N \tag{3.29}$$

或者等效为

$$| r | > | d_k |, \qquad k = 1, \cdots, N \tag{3.30}$$

因为最外面的极点 d_N 具有最大的幅度值,所以有

$$| r | > | d_N | \tag{3.31}$$

这就是说,ROC 是位于最外面极点的外边,一直延伸到无穷。若 $N_1 < 0$,ROC 不包括 $|z| = \infty$,因为 r^{-n} 对 r 为无穷大和 n 为负时为无穷大。

由上述讨论可以想到,要仔细地论证性质 5 是可能的(以及相关的性质 6 和性质 7)。然而,论证的实质就是对于一个受到指数加权的右边指数序列之和,其指数加权必须加以限制,使所有被指数加权后的项都随 n 增加面衰减。

性质 6 是关于左边序列,完成可以用与右边序列并行的证法来完成。然而,这里 $x[n]$ 是由与(3.28)式相同形式的指数和组成,但 $n \leqslant N_2$,即

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k(d_k)^n, \qquad n \leqslant N_2 \tag{3.32}$$

或者用指数加权为

$$x[n]r^{-n} = \sum_{k=1}^{N-1} A_k(d_k r^{-1})^n, \qquad n \leqslant N_2 \tag{3.33}$$

因为 $x[n]$ 现在沿负 n 轴延伸到 $-\infty$,所以 r 必须加以限制,使对每一个 d_k,指数序列 $(d_k r^{-1})^n$ 随着 n 朝向 $-\infty$ 减小都衰减到零。这就等效为

$$| r | < | d_k |, \qquad k = 1, \cdots, N$$

或者,因为 d_1 有最小的幅度,故

$$| r | < | d_1 | \tag{3.34}$$

即 ROC 位于最里面极点的里面。若左边序列对正 n 值有非零值,那么 ROC 就不能包括原点,$z = 0$。

对右边序列,ROC 受制于用指数加权要求全部指数项随 n 增加而衰减到零;而对左边序列,则是指数加权必须要使全部指数项随 n 减小而衰减到零。对双边序列,指数加权就需要求得平衡,因为如果随 n 增加而衰减得太快,就可能导致随 n 减小而增长得太快,反之亦然。更明确点说,对双边序列来说,某些极点仅仅对 $n > 0$ 起作用,而剩下的仅对 $n < 0$ 起作用。收敛域在里边被最大幅度的极点所界定,这个极点是对 $n > 0$ 起作用的;而在外面则被最小幅度的极点所界定,这个极点是对 $n < 0$ 起作用的。

性质 8 正规地证明似乎要更困难些,但是由性质 4 到性质 7 的讨论,至少在直观上还是可

以得出的。任何无限长的双边序列可以看作是一个右边部分(比如说对 $n \geqslant 0$)和一个左边部分(包括除了右边部分以外的全部)之和。右边部分将有如(3.31)式所给出的 ROC,而左边部分的 ROC 如(3.34)式所给出。整个双边序列的 ROC 必须是这两个区域的相交部分。于是,如果这样一个相交部分存在,它总是一个简单的连通环域,其形式为

$$r_R < |z| < r_L$$

也有一种可能就是右边和左边部分的收敛域之间没有重合的部分,即 $r_L < r_R$。序列 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$就是属于这种情况的一个例子。在这种情况下,序列的 z 变换就不存在。然而,如果这种情况出现,仍然有可能利用 z 变换。这就是把该序列当作两个序列的和,其中每一个都有一个 z 变换,但是两个 z 变换不能以代数表达式组合起来,因为它们没有公共的 ROC。

正如我们在比较例 3.1 和例 3.2 时所指出的,代数表达式或零极点图都不足以完全表征一个序列的 z 变换;也就是说,ROC 也必须给出。这一节所讨论的这些性质限定了与一个给定的零极点图有可能相关的一些 ROC。为了说明这一点,考虑一下图 3.10(a)的零极点图。根据性质 1,3 和 8,ROC 仅存在 4 种可能的选取。这些都分别图示在图 3.10(b),(c),(d)和

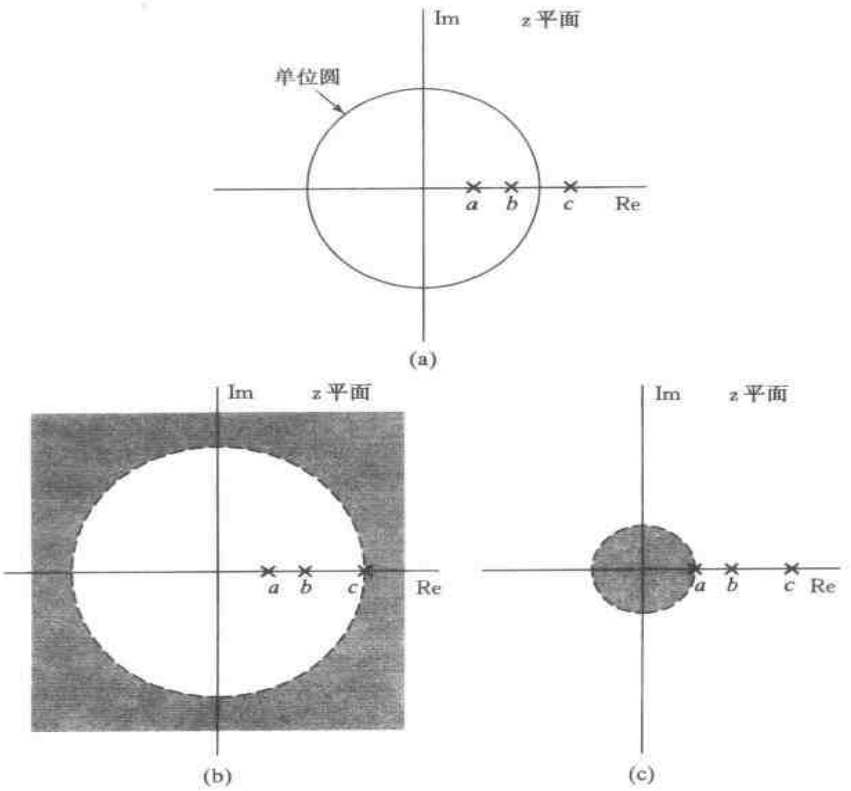


图 3.10 说明具有同一个零极点图,而有四种可能不同的收敛域的 z 变换例子。每一个都相应于一个不同的序列:(b)对应于一个右边序列;(c)对应于一个左边序列;

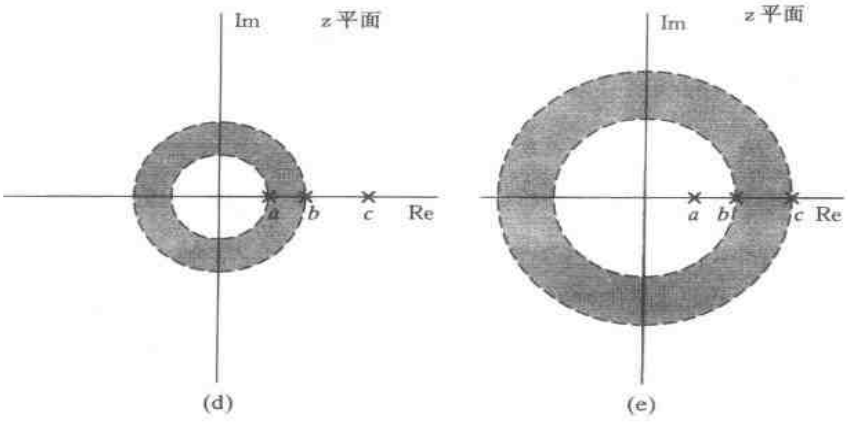


图 3.10(续) (d)对应于一个双边序列;(e)对应于一个双边序列

(e)中,每一个都与一个不同的序列相联系。图 3.10(b)相应于一个右边序列。图 3.10(c)对应一个左边序列,而图 3.10(d)和图 3.10(e)则对应于两个不同的双边序列。如果假定单位圆落在极点 $z=b$ 和 $z=c$ 之间,如图 3.10(a)所示,那么 4 种情况中仅有一个,即图 3.10(e)的傅里叶变换收敛。

例 3.7 稳定性,因果性和 ROC

考虑有一单位脉冲响应为 $h[n]$的系统,其 z 变换 $H(z)$的零极点图如图 3.11 所示。根据性质 1~8,存在 3 种可能的 ROC 与该零极点图有关。然而,如果再附加说明系统是稳定的(或等效地说,$h[n]$是绝对可加的,因此存在一个傅里叶变换),那么 ROC 就必须包括单位圆。因此,系统的稳定性和性质 1~8 就意味着 ROC 是$\frac{1}{2}<|z|<2$。注意,其结果就是 $h[n]$是双边序列,因此系统就不是因果的。

如果我们换成说系统是因果的,因此 $h[n]$是右边序列,那么性质 5 就要求 ROC 是在$|z|>2$的区域。在这一条件下,系统就不是稳定的;也就是说,对于这样一个具体的零极点图来说,不存在任何 ROC 以使系统既是稳定的又是因果的。

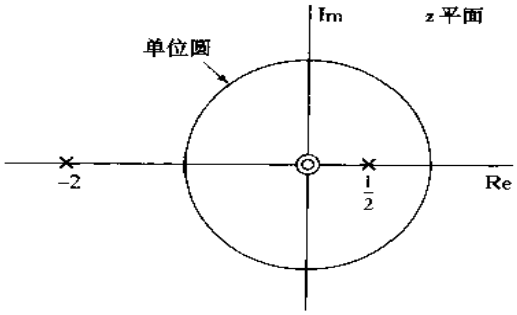


图 3.11 例 3.7 系统函数的零极点图

3.3 z反变换

z变换的重要作用之一是在离散时间线性系统的分析中。这种分析往往涉及到求序列的z变换，再将该代数表达式经过某些运算处理后，求z反变换。从一个给定的代数表达式及其收敛域来求z反变换有几种正规的和简便的方法。有一种基于柯西积分定理的正规z反变换表达式(见 Churchill and Brown, 1990)。然而，在离散时间线性时不变系统分析中所遇到的典型序列和z变换，使用一些稍欠正统的方法也就足够了，而且它们更为可取。3.3.1节～3.3.3节将考虑其中的几种，这就是观察法、部分分式展开法和幂级数展开法。

3.3.1 观察法

这一方法就是由某些熟悉的，或凭观察就能辨认出的变换对所构成的。例如，在3.1节曾求过这种形式序列 $x[n]=a^nu[n]$ 的z变换，这里 a 可以是实数或复数。这种形式的序列经常遇到，因此直接应用如下这一变换对就特别有用：

$$a^nu[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z|>|a| \tag{3.35}$$

如果需要求如下的z反变换：

$$X(z)=\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right\}, \qquad |z|>\frac{1}{2} \tag{3.36}$$

就可以想到(3.35)式的变换对，根据观察就能判断与该变换相联系的序列是 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^nu[n]$。如果与(3.36)式中 $X(z)$ 有关的ROC是在 $|z|<\frac{1}{2}$，那么就可以想到表3.1中的变换对6，根据观察就能求得序列为 $x[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^nu[-n-1]$。

表3.1所列z变换对在应用观察法时是很有价值的。如果这张表很丰富，就可能把一个给定的z变换表示成几项之和，其中每一项的反变换在表中都能找到。如果是这样，那么反变换(也即相应序列)就能直接从该表中写出。

3.3.2 部分分式展开法

已经提到，如果z变换表示式能辨认出来，或已列成表格的，那么z反变换就可以凭观察求得，有时 $X(z)$ 可能不是直接按照表格所列形式给出的，但有可能将 $X(z)$ 表示成一些简单项之和的另一种表示式，而其中的每一项都能由表格查出。对于任意一个有理函数就属于这种情况，因为可以对有理函数求得一个部分分式展开，而相应于单个项的序列又极易确认。

为了看出如何求得部分分式展开，假设 $X(z)$ 是表示成 z^{-1} 的多项式之比，即

$$X(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}} \tag{3.37}$$

这样的z变换在线性时不变系统的研究中常常出现。一种等效表示是

$$X(z) = \frac{z^N \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} \tag{3.38}$$

(3.38)式指出，对这样的函数在 z 平面的非零区域将有 M 个零点和 N 个极点。另外，若 $M > N$，还有 $M-N$ 个极点在 $z=0$；或者，若 $N > M$，有 $N-M$ 个零点在 $z=0$。换句话说，(3.37)式的 z 变换在有限 z 平面内总是具有相同数目的零点和极点，并且没有任何零、极点在 $z=\infty$。为了求得(3.37)式中的 $X(z)$的部分分式展开，注意到 $X(z)$可以表示成如下形式是最方便的：

$$X(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})} \tag{3.39}$$

式中 c_k 是$X(z)$的非零值零点，d_k 是$X(z)$的非零值极点。若 $M < N$ 并且极点都是一阶的，那么 $X(z)$就能表示成

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \tag{3.40}$$

很明显，(3.40)式中这些分式的公共分母与(3.39)式中的分母是相同的。将(3.40)式两边都乘以$(1 - d_k z^{-1})$并对 $z = d_k$ 求值，系统 A_k 就能由下式求得：

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z = d_k} \tag{3.41}$$

例 3.8　二阶 z 变换

考虑一序列 $x[n]$，其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})(1 - \frac{1}{2} z^{-1})}, \qquad |z| > \frac{1}{2} \tag{3.42}$$

$X(z)$的零极点图示于图 3.12。依据所给收敛域，以及性质 5 和3.2节的讨论可以得出 $x[n]$是一个右边序列。因为极点都为一阶，所以 $X(z)$可以表示成(3.40)式的形式，即

$$X(z) = \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})}$$

由(3.41)式，求得 A_1, A_2 为

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4} z^{-1}) X(z) \Big|_{z = 1/4} = -1$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2} z^{-1}) X(z) \Big|_{z = 1/2} = 2$$

因此，

$$X(z) = \frac{-1}{(1 - \frac{1}{4} z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})}$$

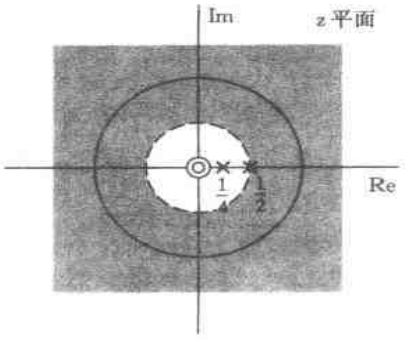


图 3.12　例 3.8 的零极点图和 ROC

因为 $x[n]$是右边序列，每一项的 ROC 都是从最外层极点向外延伸。由表 3.1 和 z 变换的线性，则有

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

很显然，将(3.40)式中的各项相加就能得到分子，它最多就是 z^{-1}的$(N-1)$次阶。若 $M \geqslant N$，那么在(3.40)式的右边必须要附加一个多项式，该多项式的阶数就是$(M-N)$。于是，对 $M \geqslant N$，完整的部分分式展开就有如下形式：

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \tag{3.43}$$

如果给出的是形如(3.37)式的有理函数，且 $M \geqslant N$，那么 B_r 就可以用长除法以分母除以分子来得到，一直除到余因式的阶数低于分母的阶数为止。A_k 仍然可以用(3.41)式求得。

如果 $X(z)$有多重极点且 $M \geqslant N$，(3.43)式应进一步修改，特别是若 $X(z)$有一个阶数为 s 的极点在 $z = d_i$，而其余全部极点都是一阶的话，那么(3.43)式就变成

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i=0}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{s} \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m} \tag{3.44}$$

系数 A_k 和 B_r 仍如上述求得，系数 C_m 由下式求得：

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{s-m}}{\mathrm{d}w^{s-m}} [(1 - d_i w)^s X(w^{-1})] \right\}_{w = d_i^{-1}} \tag{3.45}$$

(3.44)式是对 $M \geqslant N$ 和 d_i 是一个 s 阶极点情况下，一个有理 z 变换表示成 z^{-1}函数的部分分式展开的最一般形式。如果有几个多重极点，那么对每一个多重极点将会有像(3.44)式的第三个和式那样的一项。如果没有多重极点，(3.44)式就简化到(3.43)式。如果分子的阶小于分母的阶$(M < N)$，那么多项式的这一项就从(3.43)式和(3.44)式中消失。

应该强调的是，我们本来可以假设把有理 z 变换表示成 z 而不是 z^{-1}的函数来得到同样的结果。这就是说，我们可以考虑用$(z-a)$形式的因式来代替$(1-az^{-1})$形式的因式。这也会导出类似于(3.39)式到(3.45)式这样一组式子。该组式子对于利用由 z 表示的 z 变换表是很方便的。因为表 3.1 是利用 z^{-1}表示的，所以我们这样得到的结果会更为有用。

为了看看如何求得相应于一个给定有理 z 变换的序列，假定 $X(z)$仅有一阶极点，这样(3.43)式就是部分分式展开的最一般形式了。为了求得 $x[n]$，我们首先注意到 z 变换运算是线性的，这样单个项的反变换就能找到，然后加在一起就构成 $x[n]$。

$B_r z^{-r}$这些项相应于受到移位和幅度加权的单位样本序列，即 $B_r \delta[n-r]$这些项。各分式项相应于指数序列。为了决定这样一项

$$\frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

是对应于$(d_k)^n u[n]$，还是$-(d_k)^n u[-n-1]$，就必须利用在 3.2 节讨论过的收敛域的性质。根据那里的讨论就应该有：如果 $X(z)$仅有单阶极点，而 ROC 是 $r_R < |z| < r_L$ 这种形式，那么一个给定的极点 d_k，若$|d_k| < r_R$，就对应于一个右边指数序列$(d_k)^n u[n]$；若$|d_k| > r_L$ 就对应于一个左边指数序列。因此，收敛域能用来分类极点。多重极点也以相同方法划分为引起左边序列的和右边序列的极点。从部分分式展开利用收敛域来求 z 反变换可用下例给予说明。

例 3.9　用部分分式展开法求 z 反变换

为了举例说明具有(3.43)式的 z 变换形式的部分分式展开法，令考虑一序列，其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}, \qquad |z| > 1 \tag{3.46}$$

图 3.13 示出 $X(z)$的零极点图。根据所示 ROC，以及性质 5 和 3.2 节的讨论可知，$x[n]$是一个右边序列。因为 $M=N=2$ 和极点全部是一阶的，因此 $X(z)$能表示为

$$X(z) = B_0 + \frac{A_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-z^{-1}}$$

常数 B_0 能用长除法求得如下：

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline z^{-2}+2z^{-1}+1 \;\big|\; \frac{1}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-1}+1 \\ z^{-2}-3z^{-1}+2 \\ \hline 5z^{-1}-1 \end{array}$$

因为经过一步长除后余因式中变量 z^{-1}的阶次为 1，所以就不必要再继续除下去。因此 $X(z)$可写成

$$X(z) = 2 + \frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} \quad (3.47)$$

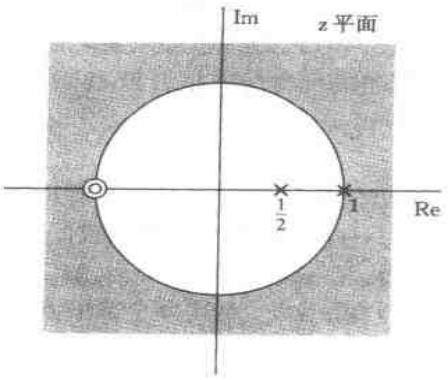


图 3.13 例 3.9z 变换的零极点图

现在系统 A_1 和 A_2 可以将(3.41)式用到(3.46)式求出，或者等效地用到(3.47)式求出，若利用(3.47)式可得

$$A_1 = \left[\left(2 + \frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right]_{z=1/2} = -9$$

$$A_2 = \left[\left(2 + \frac{-1+5z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}\right)(1-z^{-1})\right]_{z=1} = 8$$

因此

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1-z^{-1}} \quad (3.48)$$

因为 ROC 是$|z|>1$，由表 3.1 可得：

$$2 \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} 2\delta[n]$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}} \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} u[n]$$

再根据 z 变换的线性特性，就有

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

3.4 节将讨论并说明 z 变换的几个性质，将这些性质再与部分分式展开结合起来就为从一个给定的有理代数表达式及其 ROC 求 z 反变换提供了一种方法。这种方法甚至当 $X(z)$不完全是(3.39)式那样也能应用。

3.3.3 幂级数展开法

z 变换的定义式是一个幂级数，序列 $x[n]$值是 z^{-n}的系数。因此，如果 z 变换是由如下的幂级数形式给出时：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$
$$=\cdots+x[-2]z^{2}+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots \quad (3.49)$$

就能用求适当 z^{-1}的幂的系数的办法确定该序列的任何特定值。已经用这一办法求过当 $M\geqslant N$ 时部分分式展开中多项式部分的反变换。这种办法对有限长序列也是很有用的，这时 $X(z)$可能一点也不比 z^{-1}多项式来得简单。

例 3.10　有限长序列

假定 $X(z)$变换如下：

$$X(z)=z^{2}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-1})(1-z^{-1}) \quad (3.50)$$

虽然 $X(z)$明显地是一个有理函数，但是它唯一的极点是在 $z=0$，所以按照 4.3.2 节的部分分式展开就不合适了。然而，将(3.50)式的各因式乘开，$X(z)$就能表示为

$$X(z)=z^{2}-\frac{1}{2}z-1+\frac{1}{2}z^{-1}$$

凭观察，$x[n]$就是

$$x[n]=\begin{cases}1, & n=-2\\ -\frac{1}{2}, & n=-1\\ -1, & n=0\\ \frac{1}{2}, & n=1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

这就等效为

$$x[n]=\delta[n+2]-\frac{1}{2}\delta[n+1]-\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

在求一个序列的 z 变换时，一般总要寻求(3.49)式幂级数的和以得到一个较简单的数学表达式，譬如一个有理函数。如果希望利用幂级数来求相应的以闭式表示给出的 $X(z)$的序列，就必须把 $X(z)$展开回到幂级数表示上来。对于超越函数，如对数、正弦、双曲正弦等等，很多幂级数展开已经列成表格可查。在某些情况下，这样的幂级数能有一个有用的作为 z 变换的解释，这就是如下例 3.11 所说明的。对于有理 z 变换，幂级数展开可以用长除法得到，如下面例 3.12 和例 3.13 所说明的。

例 3.11　用幂级数展开求反变换

考虑 z 变换

$$X(z)=\log(1+az^{-1}), \qquad |z|>|a| \quad (3.51)$$

对 $\log(1+x)$用幂级数展开，在 $|x|<1$ 时可得

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n}$$

因此，$x[n]$就是

$$x[n]=\begin{cases}(-1)^{n+1}\frac{a^{n}}{n}, & n\geqslant 1\\ 0, & n\leqslant 0\end{cases} \quad (3.52)$$

例 3.12　用长除法进行幂级数展开

考虑 z 变换

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a| \tag{3.53}$$

因为收敛域是在一个圆的外面，序列就是一个右边序列。另外，因为 $X(z)$ 随 $z\to\infty$ 而趋于一个有限的常数，所以是一个因果序列。因此，相除以后应得到一个以 z^{-1} 为幂的级数。长除后可得

$$\begin{array}{r|l} 1-az^{-1} & 1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots \\ \hline & 1 \\ & \underline{1-az^{-1}} \\ & az^{-1} \\ & \underline{az^{-1}-a^2z^{-2}} \\ & a^2z^{-2}\cdots \end{array}$$

或者

$$\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots$$

所以 $x[n]=a^nu[n]$。

例 3.13　左边序列的幂级数展开

作为另一个例子，还考虑(3.53)式，但具有不同的收敛域：

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|<|a| \tag{3.54}$$

由于收敛域的关系，序列应是一个左边序列。因为 $X(z)$ 在 $z=0$ 是有限的，所以序列在 $n>0$ 应为零。由此，相除应得到以 z 为幂的级数。

$$\begin{array}{r|l} -a+z & \dfrac{-a^{-1}z-a^{-2}z^2-\cdots}{z} \\ \hline & \underline{z-a^{-1}z^2} \\ & a^{-1}z^2 \end{array}$$

因此，$x[n]=-a^nu[-n-1]$。

3.4　z 变换性质

在研究离散时间信号与系统中，z 变换的许多性质是特别有用的。例如，这些性质往往与 3.3 节讨论的 z 反变换技术联系在一起，可以用来求得更为复杂表示式的 z 反变换。在第 5 章中将看到，这些性质也是利用变换变量 z 把线性常系数差分方程变换为代数方程的基础，其解然后又能利用 z 反变换来得到。这一节讨论几个最常用的性质。以下讨论中，将 $X(z)$ 记为 $x[n]$ 的 z 变换，$X(z)$ 的 ROC 用 R_x 表示，即

$$x[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}X(z),\qquad \text{ROC}=R_x$$

正如我们已经看到的，R_x 代表一个满足 $r_R<|z|<r_L$ 的 z 值的集合。对于涉及两个序列及其有关 z 变换的性质，这些变换对将记作

$$x_1[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}X_1(z),\qquad \text{ROC}=R_{x_1}$$

$$x_2[n]\overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow}X_2(z),\qquad \text{ROC}=R_{x_2}$$

3.4.1 线性

线性性质是说

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z), \qquad \text{ROC 包含 } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

这由 z 变换的定义(3.2)式直接可得。正如所指出的,收敛域至少是两个单一收敛域的交。对于有理 z 变换的序列,若 $aX_1(z)+bX_2(z)$的极点由全部 $X_1(z)$和 $X_2(z)$的极点所组成,也就是说,若没有任何零极点相消的情况,那么收敛域一定完全等于两个单一收敛域的重叠部分。如果线性组合使得引入的某些零点抵消了极点,那么收敛域就可能增大。发生这一情况的简单例子就是当 $x_1[n]$和 $x_2[n]$都是无限长,而线性组合是有限长的情况。在这种情况下,线性组合的收敛域就是整个 z 平面,可能的例外是 $z=0$ 或 $z=\infty$。例 3.6 就属于这种情况,其中 $x[n]$可以表示成

$$x[n] = a^n u[n] - a^n u[n-N]$$

$a^n u[n]$和 $a^n u[n-N]$都是无限长的右边序列,它们的 z 变换都有一个极点在 $z=a$。因此,它们各自的收敛域都是$|z|>|a|$。然而,如例 3.6 所示,在 $z=a$ 的极点与在 $z=a$ 的零点相消,因此 ROC 除 $z=0$ 外,就引伸至整个 z 平面。

在前面讨论利用部分分式展开求 z 反变换中已经用过这一性质。当时,将 $X(z)$展开成一些简单项之和,利用线性,z 反变换等于这些项中每一项 z 反变换的和。

3.4.2 时移

按照时移性质有

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z), \qquad \text{ROC} = R_x(\text{除了可能加上或除掉 } z=0 \text{ 或 } z=\infty \text{ 之外})$$

n_0 是一个整数。如果是正的,原序列 $x[n]$就被右移;若 n_0 为负,$x[n]$就向左移。和在线性性质的情况一样。ROC 可能由于 z^{-n_0}因子改变在 $z=0$ 或 $z=\infty$处极点的数目而变化。

这个性质可以直接从 z 变换表示(3.2)式导出。若 $y[n]=x[n-n_0]$,相应 z 变换就是

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]z^{-n}$$

以变量 $m=n-n_0$ 置换,

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(m+n_0)} = z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-m}$$

或者

$$Y(z) = z^{-n_0}X(z)$$

时移性质常常与其它性质和方法结合在一起,在求 z 反变换中是很有用的。现用一个例子来说明。

例 3.14 移位指数序列

考虑 z 变换

$$X(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{4}}, \qquad |z|>\frac{1}{4}$$

从 ROC 就能判定该变换相应于一个右边序列。首先将 $X(z)$重新写成

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{4} \tag{3.55}$$

这个 z 变换具有(3.39)式的形式，其中 $M=N=1$，将它展开成(3.43)式的形式

$$X(z) = -4 + \frac{4}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{3.56}$$

由(3.56)式，$x[n]$就为

$$x[n] = -4\delta[n] + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \tag{3.57}$$

应用时移性质可以更为直接地得到 $x[n]$。首先，$X(z)$能写成

$$X(z) = z^{-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right), \qquad |z| > \frac{1}{4} \tag{3.58}$$

根据时移性质，(3.58)式中因子 z^{-1}就是序列 $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$向右移一个样本，即

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \tag{3.59}$$

虽然(3.57)式和(3.59)式在表面上是不相同的序列，很容易证明，对全部 n 值它们都是一样的。

3.4.3 用指数序列相乘

指数相乘性质数学上表示为

$$z_0^n x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z/z_0), \qquad \mathrm{ROC} = |z_0| R_x$$

符号 $\mathrm{ROC}=|z_0|R_x$ 表示 ROC 是 R_x，但用 $|z_0|$改变了尺度；也就是说，如果 R_x 是 $r_R<|z|<r_L$ 的 z 值集合，那么 $|z_0|R_x$ 就是 $|z_0|r_R<|z|<|z_0|r_L$ 的 z 值集合。

这个性质很容易证明的，只要直接将 $z_0^n x[n]$代入(3.2)式即可。按照这一性质，全部零极点的位置的尺度均改变了 z_0，这是因为如果 $X(z)$有一个极点在 $z=z_1$ 处，那么 $X(z_0^{-1}z)$一定有一个极点在 $z=z_0z_1$ 处。若 z_0 是一个正实数，这就可以解释为 z 平面的一个压缩或扩展；也即零点位置在 z 平面内沿径向变化。若 z_0 是幅度为 1 的复数，即 $z_0=e^{j\omega_0}$，那么就相应于在 z 平面内旋转一个 ω_0 的角度；即零极点位置沿着以原点为中心的圆变化。这就能解释为与在时域中用复数序列 $e^{j\omega_0 n}$调制有关的频率移位或频率转移。这就是说，如果傅里叶变换存在，这个性质就有如下形式：

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

例 3.15 指数相乘

假设已知

$$u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z| > 1 \tag{3.60}$$

利用指数相乘性质可求下面序列的 z 变换

$$x[n] = r^n \cos(\omega_0 n) u[n] \tag{3.61}$$

首先将 $x[n]$表示成

$$x[n] = \frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] + \frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^n u[n]$$

然后利用(3.60)式和指数相乘性质，可以看出

$$\frac{1}{2}(re^{j\omega_0})^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z|>r$$

$$\frac{1}{2}(re^{-j\omega_0})^n u[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \quad |z|>r$$

由线性性质就有

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z|>r \\ &= \frac{(1-r\cos\omega_0 z^{-1})}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}, \qquad |z|>r \end{aligned} \tag{3.62}$$

3.4.4 $X(z)$的微分

微分性质说的是

$$nx[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad \mathrm{ROC}=R_x$$

这个性质用微分(3.2)式的z变换表示式就可以证明;即,因为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=-z\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n)x[n]z^{-n-1}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]z^{-n}=\mathscr{Z}\{nx[n]\}$$

现用两个例子来说明微分性质的应用。

例 3.16 非有理z变换的反变换

在这个例子中,用微分性质和时移性质一起求例3.11的z反变换。由于

$$X(z)=\log(1+az^{-1}), \qquad |z|>|a|$$

首先对z微分得到一个有理表示式:

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}}$$

根据微分性质

$$nx[n] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}=\frac{az^{-1}}{1+az^{-1}}, \qquad |z|>|a| \tag{3.63}$$

(3.63)式的反变换可以联合利用例3.1的变换对、微分性质、线性性质和时移性质来得到。具体就是将$nx[n]$表示成

$$nx[n]=a(-a)^{n-1}u[n-1]$$

因此

$$x[n]=(-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u[n-1] \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} \log(1+az^{-1}), \qquad |z|>|a|$$

例 3.17 二阶极点

作为微分性质应用的另一个例子,我们来求下面序列的z变换:

$$x[n]=na^nu[n]=n(a^nu[n])$$

由例 3.1 的 z 变换对和微分性质，就可得：

$$X(z) = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right), \qquad |z|>|a|$$

$$= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a|$$

因此

$$na^n u[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a|$$

3.4.5 复数序列的共轭

共轭性质表示为

$$x^*[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*), \qquad \mathrm{ROC} = R_x$$

这个性质由 z 变换的定义直接可得。详细证明留作练习(习题 3.51)。

3.4.6 时间倒置

时间倒置性质是

$$x^*[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X^*(1/z^*), \qquad \mathrm{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

符号 $\mathrm{ROC} = 1/R_x$ 意指 R_x 的颠倒；即如果 R_x 是在 $r_R < |z| < r_L$ 内 z 值的集合，那么 ROC 就是在 $1/r_L < |z| < 1/r_R$ 内 z 值的集合。因此，如果 z_0 是在 $x[n]$ 的 z 变换的 ROC 内，那么 $1/z_0^*$ 就是在 $x^*[-n]$ 的 z 变换的 ROC 内。如果序列 $x[n]$ 是实序列，或者不对一个复序列取共轭，则结果变为

$$x[-n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(1/z), \qquad \mathrm{ROC} = \frac{1}{R_x}$$

与共轭性质一样，时间倒置性质也容易由 z 变换的定义得到，详细证明也留作练习(习题 3.51)。

例 3.18 时间倒置指数序列

作为应用时间倒置性质的一个简单例子是考虑序列

$$x[n] = a^{-n}u[-n]$$

它就是 $a^n u[n]$ 的时间倒置。由时间倒置性质直接可得

$$X(z) = \frac{1}{1-az} = \frac{-a^{-1}z^{-1}}{1-a^{-1}z^{-1}}, \qquad |z|<|a^{-1}|$$

3.4.7 序列卷积

按照卷积性质有

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \qquad \mathrm{ROC}\text{包含 } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

为了正规地推导出这个性质，现在考虑

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

并做 z 变换

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k] \right\} z^{-n}$$

如果交换求和次序

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k]z^{-n}$$

在第二个和式中，将变量从 n 变为 $m = n - k$，可得

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[m]z^{-m} \right\} z^{-k}$$

因此，对于均在 $X_1(z)$和 $X_2(z)$收敛域内的 z，就能写成

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z)$$

这里收敛域包括了 $X_1(z)$和 $X_2(z)$收敛域的交。如果 z 变换之一的收敛域有一个界定的极点是被另一个 z 变换的零点所抵消，那么 $Y(z)$的收敛域就可能增大。正如在第 5 章将研究和表明的，卷积性质在分析 LTI 系统中将起到特别重要的作用。作为这个性质的结果，这就是 LTI 系统输出的 z 变换是输入的 z 变换和系统单位脉冲响应 z 变换的乘积。一个 LTI 系统单位脉冲响应的 z 变换就称之为系统函数。

例 3.19　用 z 变换求卷积

令 $x_1[n] = a^n u[n]$和 $x_2[n] = u[n]$。相应的 z 变换就是

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

和

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

如果$|a| < 1$，$x_1[n]$与 $x_2[n]$卷积的 z 变换就是

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - a)(z - 1)}, \qquad |z| > 1 \tag{3.64}$$

$Y(z)$的零极点图如图 3.14 所画，收敛域就是两者的重叠部分。序列 $y[n]$可以由求 z 反变换得到。将(3.64)式展开成部分分式

$$Y(z) = \frac{1}{1 - a}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right), \quad |z| > 1$$

因此

$$y[n] = \frac{1}{1 - a}(u[n] - a^{n+1}u[n])$$

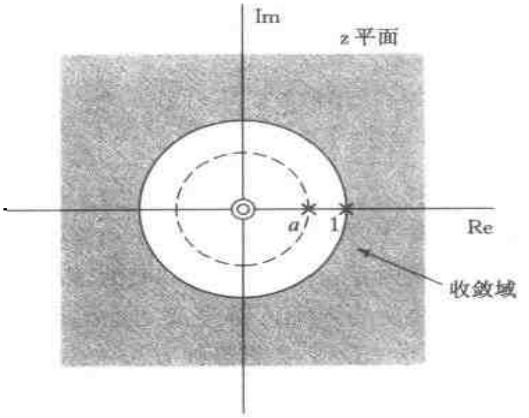


图 3.14　序列 $u[n]$和 $a^n u[n]$卷积的 z 变换的零极点图

3.4.8　初值定理

如果 $n < 0$，$x[n] = 0$(即若 $x[n]$是因果序列)，则有

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

考虑(3.2)式级数每一项的极限，就可以证明该定理(见习题 3.56)。

3.4.9 若干 z 变换性质列表

我们已经提到并讨论了 z 变换的几个定理和性质，其中许多在运算 z 变换中都是很有用的。为便于参考，表 3.2 归纳了这些性质以及另外几个性质。

表 3.2 z 变换的一些性质

性质	对应节号	序列	变换	ROC
		$x[n]$	$X(z)$	R_x
		$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
		$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
1	3.4.1	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	包含 $R_{x_1}\cap R_{x_2}$
2	3.4.2	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x 除了可能加上或除掉原点或∞点之外
3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\lvert z_0\rvert R_x$
4	3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x 除了可能加上或除掉原点或∞点之外
5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
6		$\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$	包含 R_x
7		$\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$	包含 R_x
8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
9	3.4.7	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	包含 $R_{x_1}\cap R_{x_2}$
10	3.4.8	初值定理：$x[n]=0$，$n<0$ $\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=x[0]$		

3.5 小结

本章定义了序列的 z 变换，并指出了它就是傅里叶变换的推广。本章的讨论是集中在 z 变换的性质，以及求得一个序列 z 变换的各种方法上，或者相反。特别是，当傅里叶变换不存在时，z 变换所定义的幂级数可能收敛。详细阐明了收敛域的形状与序列性质的依赖关系。对收敛域性质的详细理解是成功地运用 z 变换的关键。这一点在确定由给定 z 变换求相对应的序列，即求 z 反变换的各种方法中是特别应验的。大部分有关收敛域的讨论都放在有理函数 z 变换上。对于这一类函数，我们给出了基于 $X(z)$ 部分分式展开的求反变换的方法。也讨论了诸如利用查表的幂级数展开法和长除法等其它方法。

本章一个重要部分是讨论 z 变换的许多性质，这些性质在分析离散时间信号与系统时是很有用的。各种各样的例子都用来说明如何利用这些性质来求 z 变换和 z 反变换。

习　题

基本题(附答案)

3.1　求下列序列的 z 变换,包括收敛域:

(a) $(\frac{1}{2})^n u[n]$

(b) $-(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

(c) $(\frac{1}{2})^n u[-n]$

(d) $\delta[n]$

(e) $\delta[n-1]$

(f) $\delta[n+1]$

(g) $(\frac{1}{2})^n(u[n]-u[n-10])$

3.2　求序列 z 变换

$$x[n]=\begin{cases} n, & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ N, & N\leqslant n \end{cases}$$

3.3　求下列每个序列的 z 变换,包括收敛域,并画出零极点图。全部以闭式表示,a 可以为复数。

(a) $x_a[n]=a^{|n|}$,　　$0<|a|<1$

(b) $x_b[n]=\begin{cases} 1, & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$

(c) $x_c[n]=\begin{cases} n, & 0\leqslant n\leqslant N, \\ 2N-n, & N+1\leqslant n\leqslant 2N, \\ 0, & \text{其余 } n \end{cases}$

[提示:注意 $x_b[n]$是一个矩形序列,而 $x_c[n]$是一个三角序列。首先用 $x_b[n]$表示$x_c[n]$]。

3.4　考虑 z 变换,其零极点图如图 P3.4 所示。

(a) 若已知傅里叶变换存在,确定 $X(z)$的收敛域,并确定这时相应的序列是右边、左边或双边序列。

(b) 有多少可能的双边序列都有如图 P3.4 所示的零极点图?

(c) 对于图 P3.4 所示的零极点图有无可能有一个既稳定又因果的序列与其对应?若有,请给出相应的收敛域。

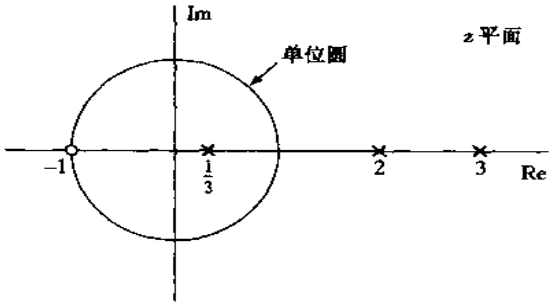


图 P3.4

3.5　求具有如下 z 变换的序列:

$$X(z)=(1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1})$$

3.6　对以下几个所列 z 变换,用在 3.3 节讨论的两种方法——部分分式展开法和幂级数展开法,求每个的 z 反变换。另外,指出在每种情况下是否傅里叶变换存在。

(a) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$,　　$|z|>\frac{1}{2}$

(b) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$,　　$|z|<\frac{1}{2}$

(c) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$, $\quad |z|>\frac{1}{2}$

(d) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$, $\quad |z|>\frac{1}{2}$

(e) $X(z)=\dfrac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$, $\quad |z|>|1/a|$

3.7 一个因果的 LTI 系统的输入是

$$x[n]=u[-n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

这个系统输出的 z 变换是

$$Y(z)=\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-1})}$$

(a) 求系统单位脉冲响应的 z 变换 $H(z)$，标明收敛域。

(b) $Y(z)$的收敛域是什么？

(c) 求 $y[n]$。

3.8 一个因果 LTI 系统的系统函数是

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$$

系统的输入是

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+u[-n-1]$$

(a) 求系统的单位脉冲响应。

(b) 求输出 $y[n]$。

(c) 该系统是稳定的吗？即 $h[n]$是绝对可加的吗？

3.9 一个因果的 LTI 系统有单位脉冲响应 $h[n]$，其 z 变换是

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

(a) $H(z)$的收敛域是什么？

(b) 系统是稳定的吗？请解释。

(c) 某一输入 $x[n]$，产生的输出为

$$y[n]=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]-\frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

求 $x[n]$的 z 变换 $X(z)$。

(d) 求系统单位脉冲响应 $h[n]$。

3.10 勿需显式求出 $X(z)$，求下列每个序列 z 变换的收敛域，并判断是否傅里叶变换收敛：

(a) $x[n]=[(\frac{1}{2})^n+(\frac{3}{4})^n]u[n-10]$

(b) $x[n]=\begin{cases}1, & -10\leqslant n\leqslant 10\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(c) $x[n]=2^n u[-n]$

(d) $x[n]=\left[(\frac{1}{4})^{n+4}-(e^{j\pi/3})^n\right]u[n-1]$

(e) $x[n]=u[n+10]-u[n+5]$

(f) $x[n]=(\frac{1}{2})^{n-1}u[n]+(2+3j)^{n-2}u[-n-1]$

3.11 以下给出的是 4 个 z 变换。确定哪一些可能是一个因果序列的 z 变换。不用求出 z 反变换，凭观察就应该能够给出答案，对每种情况清楚地陈述你的道理。

(a) $\frac{(1-z^{-1})^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$　　(b) $\frac{(z-1)^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$

(c) $\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^5}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}$　　(d) $\frac{\left(z-\frac{1}{4}\right)^6}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^5}$

3.12 画出下面每个 z 变换的零极点图，并标出其收敛域：

(a) $X_1(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}}$，　　ROC: $|z|<2$

(b) $X_2(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$，$x_2[n]$为因果序列

(c) $X_3(z)=\frac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{13}{6}z^{-1}+z^{-2}}$，　$x_3[n]$绝对可加

3.13 一因果序列 $g[n]$有 z 变换为

$$G(z)=\sin(z^{-1})(1+3z^{-2}+2z^{-4})$$

求 $g[11]$。

3.14 若 $H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}$和 $h[n]=A_1\alpha_1^n u[n]+A_2\alpha_2^n u[n]$，求 A_1, A_2, α_1 和 α_2 的值。

3.15 若 $H(z)=\frac{1-\frac{1}{1\,024}z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，$|z|>0$，对应的 LTI 系统是因果的吗？陈述你的理由。

3.16 当一个 LTI 系统的输入是

$$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+(2)^n u[-n-1]$$

时，相应的输出是

$$y[n]=5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-5\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

(a) 求该系统的系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$的零极点图并指出收敛域。

(b) 求系统的单位脉冲响应 $h[n]$。

(c) 写出满足给定输入和输出关系的差分方程。

(d) 系统是稳定的吗？因果吗？

3.17 考虑一个其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足如下差分方程的 LTI 系统：

$$y[n]-\frac{5}{2}y[n-1]+y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

求 $n=0$ 时，该系统单位脉冲响应 $h[n]$的所有可能值。

3.18 一个因果 LTI 系统其系统函数为

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

(a) 求该系统的单位脉冲响应 $h[n]$。

(b) 当输入为 $x[n]=e^{j(\pi/2)n}$时，求系统输出 $y[n]$。

3.19 对下列每一对输入的 z 变换 $X(z)$和系统函数 $H(z)$，确定输出 z 变换 $Y(z)$的收敛域：

(a) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$，　$|z|>\dfrac{1}{2}$

$H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$　　$|z|>\dfrac{1}{4}$

(b) $X(z)=\dfrac{1}{1-2z^{-1}}$，　$|z|<2$

$H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$，　$|z|>\dfrac{1}{3}$

(c) $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{5}z^{-1})(1+3z^{-1})}$，　$\dfrac{1}{5}<|z|<3$

$H(z)=\dfrac{1+3z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$，　$|z|>\dfrac{1}{3}$

3.20 对下列每一对输入和输出的 z 变换 $X(z)$和 $Y(z)$，确定系统函数 $H(z)$的收敛域：

(a) $X(z)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$，　$|z|>\dfrac{3}{4}$

$Y(z)=\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}$，　$|z|>\dfrac{2}{3}$

(b) $X(z)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$，　$|z|<\dfrac{1}{3}$

$Y(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{6}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$，　$\dfrac{1}{6}<|z|<\dfrac{1}{3}$

基本题

3.21 考虑一个线性时不变系统，其单位脉冲响应 $h[n]$，输入 $x[n]$如下：

$$h[n]=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant (N-1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 用 $x[n]$和 $h[n]$的离散卷积求输出 $y[n]$。

(b) 用输入和单位脉冲响应 z 变换乘积的 z 反变换求输出 $y[n]$。

3.22 考虑一稳定的 LTI 系统，其单位脉冲响应的 z 变换 $H(z)$为

$$H(z)=\frac{3}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

假定系统的输入 $x[n]=u[n]$：

(a) 用 $x[n]$和 $h[n]$的离散卷积求输出 $y[n]$。

(b) 用求 $Y(z)$的反变换求输出 $y[n]$。

3.23 一 LTI 系统由下列系统函数所表征：

$$H(z)=\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})},\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

(a) 求系统单位脉冲响应。

(b) 确定关联系统输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的差分方程。

3.24 画出下列每个序列,求它们的 z 变换,包括收敛域:

(a) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$

(b) $\frac{1}{2}\left[e^{j\pi n}+\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right]u[n]$

3.25 考虑一右边序列 $x[n]$,其 z 变换为

$$X(z)=\frac{1}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})}=\frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

在 3.3 节曾讨论过将 $X(z)$看作 z^{-1}的多项式之比,用部分分式展开来确定 $x[n]$。现考虑过 $X(z)$化作 z 的多项式之比,并从其展开式中确定 $x[n]$。

深入题

3.26 求下列各 z 反变换:(a)~(c)按要求方法求,而(d)随意。

(a) 长除法:

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}},\qquad x[n]\text{ 为右边序列}$$

(b) 部分分式法:

$$X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}},\qquad x[n]\text{ 为稳定序列}$$

(c) 幂级数法:

$$X(z)=\ln(1-4z),\qquad |z|<\frac{1}{4}$$

(d) $X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-3}},\qquad |z|>(3)^{-1/3}$

3.27 用任何方法求下列每个 z 反变换:

(a) $X(z)=\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}$, 稳定序列

(b) $X(z)=e^{z^{-1}}$

(c) $X(z)=\frac{z^3-2z}{z-2}$, 左边序列

3.28 求下列各 z 反变换。你应该发现 3.4 节 z 变换的诸性质是有助于解题的。

(a) $X(z)=\frac{3z^{-3}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2}$, $x[n]$为左边序列

(b) $X(z)=\sin(z)$, ROC 包括 $|z|=1$

(c) $X(z)=\frac{z^7-2}{1-z^{-7}}$, $|z|>1$

3.29 一个序列 $x[n]$的 z 变换是 $X(z)=e^z+e^{1/z}, z\neq 0$,求 $x[n]$。

3.30 求

$$X(z) = \log 2\left(\frac{1}{2} - z\right), \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

的 z 反变换，按：

(a) 用幂级数

$$\log(1-x) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} \qquad |x| < 1$$

(b) 首先将 $X(z)$微分，然后用它来恢复 $x[n]$。

3.31 对下列序列求 z 变换和收敛域，并画出零极点图。

(a) $x[n] = a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1], \qquad |a| < |b| < |c|$

(b) $x[n] = n^2 a^n u[n]$

(c) $x[n] = e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)u[n] - e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)u[n-1]$

3.32 图 P3.32 相应于一个因果序列 $x[n]$的 z 变换的零极点图。画出 $Y(z)$的零极点图，这里 $y[n] = x[-n+3]$，同时标出 $Y(z)$的收敛域。

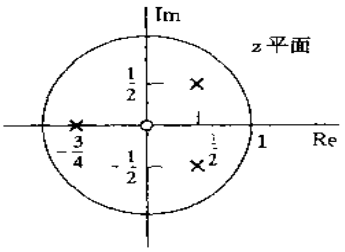


图 P3.32

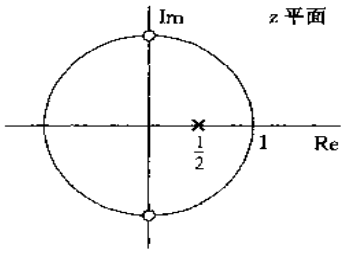


图 P3.33

3.33 设 $x[n]$是具有如图 P3.33 所示的零极点图的序列，对下面序列画出其对应的零极点图：

(a) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n]$

(b) $w[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)x[n]$

3.34 考虑一个稳定的 LTI 系统，其单位脉冲响应的 z 变换 $H(z)$为

$$H(z) = \frac{3 - \frac{7}{2}z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

假设输入 $x[n]$是单位阶跃序列。

(a) 用计算 $x[n]$与 $h[n]$的离散卷积求输出 $y[n]$。

(b) 用计算 $Y(z)$的 z 反变换求输出 $y[n]$。

3.35 求因果系统的单位阶跃响应，其单位脉冲响应的 z 变换是

$$H(z) = \frac{1 - z^3}{1 - z^4}$$

3.36 若对一个 LTI 系统的输入 $x[n]$是 $x[n] - u[n]$，输出 $y[n]$是

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1]$$

(a) 求该系统单位脉冲响应的 z 变换 $H(z)$，并画出它的零极点图。

(b) 求单位脉冲响应 $h[n]$。

(c) 该系统是稳定的吗？

(d) 该系统是因果的吗?

3.37 考虑一个序列 $x[n]$,其 z 变换是

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}$$

收敛域包括单位圆。利用初值定理求 $x[0]$。

3.38 考虑一个稳定的 LTI 系统,其单位脉冲响应的 z 变换是

$$H(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

假设系统输入 $x[n] = 2u[n]$,求 $n = 1$ 时的 $y[n]$。

3.39 假设 $x[n]$的 z 变换为

$$X(z) = \frac{z^{10}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)^{10}\left(z + \frac{3}{2}\right)^{2}\left(z + \frac{5}{2}\right)\left(z + \frac{7}{2}\right)}$$

同时已知 $x[n]$是一个稳定序列。

(a) 求 $X(z)$的收敛域。

(b) 求 $n = -8$ 时的 $x[n]$。

3.40 在图 P3.40 中,$H(z)$是一因果 LTI 系统的系统函数

(a) 利用图中各信号的 z 变换,求得对 $W(z)$的如下形式的表达式:

$$W(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)E(z)$$

其中 $H_1(z)$和 $H_2(z)$都是用 $H(z)$表示的。

(b) 若 $H(z) = z^{-1}/(1 - z^{-1})$,确定 $H_1(z)$和 $H_2(z)$。

(c) 系统 $H(z)$是稳定的吗? 系统 $H_1(z)$和 $H_2(z)$是稳定的吗?

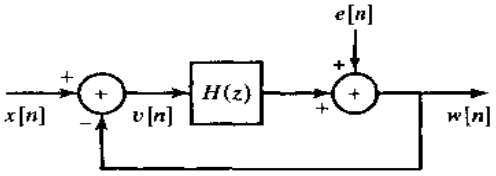


图 P3.40

3.41 在图 P3.41 中,$h[n]$是里面方框 LTI 系统的单位脉冲响应。系统 $h[n]$的输入是 $v[n]$,输出是 $w[n]$。$h[n]$的 z 变换 $H(z)$在下面收敛域内存在:

$$0 < r_{\min} < |z| < r_{\max} < \infty$$

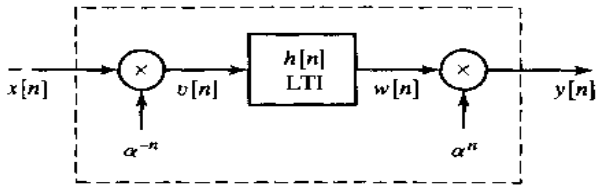


图 P3.41

(a) 单位脉冲响应为 $h[n]$的 LTI 系统能是BIBO(有界输入有界输出)稳定吗? 若能,请确定不等式中在 $r_{\min}$和 $r_{\max}$上的限制,以使系统稳定。若不能,简要说明为什么。

(b) 整个系统(大方框,其输入为 $x[n]$,输出为 $y[n]$)是 LTI 的吗? 若是,试求它的单位脉冲响应 $g[n]$。若不是,简要说明为什么。

(c) 整个系统能够是 BIBO 稳定吗? 若能,请确定不等式中有关 α,$r_{\min}$和 $r_{\max}$的限制,以使系统稳定。

若不是，简要说明为什么。

3.42 一因果稳定的 LTI 系统 S，其输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 由下列线性常系数差分方程所关联：

$$y[n]+\sum_{k=1}^{10}\alpha_k y[n-k]=x[n]+\beta x[n-1]$$

令系统 S 的单位脉冲响应是序列 $h[n]$。

(a) 证明 $h[0]$ 一定是非零。

(b) 证明 α_1 可用 $h[0]$ 和 $h[1]$ 确定。

(c) 若 $h[n]=(0.9)^n\cos(\pi n/4)$；$0\leqslant n\leqslant 10$，画出系统 S 的系统函数的零极点图，并指出收敛域。

3.43 一 LTI 系统，当输入 $x[n]$ 是

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2^n u[-n-1]$$

输出 $y[n]$ 是

$$y[n]=6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(a) 求该系统的系统函数 $H(z)$，画 $H(z)$ 的零极点图，指出收敛域。

(b) 求系统的单位脉冲响应 $h[n]$。

(c) 写出表征该系统的差分方程。

(d) 系统是稳定的吗？是因果的吗？

3.44 一因果 LTI 系统，当输入为

$$x[n]=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

时，输出的 z 变换是

$$Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

(a) 求 $x[n]$ 的 z 变换。

(b) $Y(z)$ 的收敛域是什么？

(c) 求系统的单位脉冲响应。

(d) 该系统稳定吗？

3.45 设 $x[n]$ 是一离散时间信号，并有 $x[n]=0$，$n\leqslant 0$，其 z 变换为 $X(z)$。另外，已知 $x[n]$，离散时间信号 $y[n]$ 定义为

$$y[n]=\begin{cases}\frac{1}{n}x[n], & n>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 利用 $X(z)$ 计算 $Y(z)$。

(b) 利用(a)的结果，求如下 $w[n]$ 的 z 变换：

$$w[n]=\frac{1}{n+\delta[n]}u[n-1]$$

3.46 信号 $y[n]$ 是某单位脉冲响应为 $h[n]$ 的 LTI 系统，在给定输入 $x[n]$ 下的输出。整个这道题都假定 $y[n]$ 是稳定的，有 z 变换为 $Y(z)$，其零极点图如图 P3.46－1 所示。信号 $x[n]$ 也是稳定的，其 z 变换的零极点图如图 P3.46－2 所示。

(a) $Y(z)$ 的收敛域是什么？

(b) $y[n]$ 是左边、右边、或者双边信号吗？

(c) 什么是 $X(z)$ 的 ROC？

(d) $x[n]$ 是因果序列吗？也即有 $x[n]=0$，$n<0$ 吗？

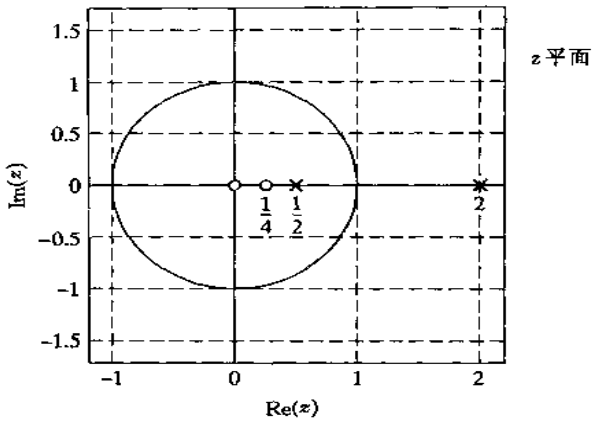


图 P3.46－1

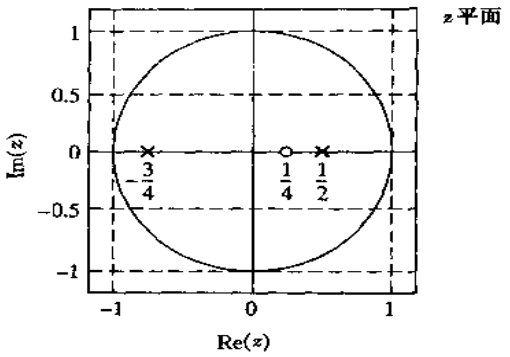


图 P3.46－2

(e) $x[0]$是什么值?

(f) 画出 $H(z)$的零极点图,并表示出它的 ROC。

(g) $h[n]$是反因果的吗? 也即有 $h[n]=0, n>0$ 吗?

扩充题

3.47 令 $x[n]$是一个因果序列,即 $x[n]=0, n<0$,另假定 $x[0]\neq 0$。

(a) 证明 $X(z)$没有极点或零点在 $z=\infty$处,即 $\lim_{z\to\infty} X(z)$非零且有限。

(b) 证明在有限 z 平面极点数等于零点数,(有限 z 平面不包括 $z=\infty$)。

3.48 考虑具有 z 变换为 $X(z)=P(z)/Q(z)$的序列;其中 $P(z)$和 $Q(z)$都是 z 的多项式。如果该序列是绝对可加的,且 $Q(z)$的全部根都在单位圆内,该序列一定是因果的吗? 若回答:是,请明确给予解释。如果回答:否,请给出一个相反的例子。

3.49 令 $x[n]$是一个因果稳定序列,其 z 变换出 $X(z)$。定义**复倒谱** $\hat{x}[n]$作为 $X(z)$对数的反变换,即,

$$\hat{X}(z) = \log X(z) \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \hat{x}[n]$$

其中 $\hat{X}(z)$的 ROC 包括单位圆(严格讲,取某个复数的对数要仔细考虑。再者,一个有效 z 变换的对数可能不是一个有效的 z 变换。目前暂假定都成立)。

求下列序列的复倒谱:

$$x[n] = \delta[n] + a\delta[n-N], \qquad |a|<1$$

3.50 假设 $x[n]$为实的且为偶,即 $x[n]=x[-n]$;再假设 z_0 是 $X(z)$的一个零点,即$X(z_0)=0$。

(a) 证明 $1/z_0$ 也是 $X(z)$的一个零点。

(b) 还有其它 $X(z)$的零点隐含在所给出的信息中吗?

3.51 利用 z 变换定义(3.2)式,证明:若 $X(z)$是 $x[n]=x_R[n]+jx_I[n]$,的 z 变换,那么

(a) $x^*[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X^*(z^*)$

(b) $x[-n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(1/z)$

(c) $x_R[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]$

(d) $x_1[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2j}[X(z)-X^*(z^*)]$

3.52 考虑一个实序列 $x[n]$，其 z 变换的全部零极点都在单位圆内。利用 $x[n]$ 求另一个实序列 $x_1[n]$，$x_1[n]$ 不等于 $x[n]$，但是有 $x_1[0]=x[0]$，$|x_1[n]|=|x[n]|$，并且 $x_1[n]$ 的 z 变换其全部零极点也在单位圆内。

3.53 一个实的有限长序列，若它的 z 变换没有零点位于共轭倒数对的位置上，且也没有零点的单位圆上，则唯一地可以由其傅里叶变换的相位来确定，除去一个正的幅度加权系统外(Hayes et al.，1980)。

在共轭倒数对上的零点的一个例子是 $z=a$ 和 $(a^*)^{-1}$。虽然我们能产生某些序列，它们不满足以上条件，但几乎任何有实际意义的序列都满足这些条件，因此这些序列是唯一地由它的傅里叶相位来确定的，除了一个正的幅度加权系统外。

今考虑一个序列 $x[n]$，它是实的，且在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 以外为零。它的 z 变换没有零点在共轭倒数对的位置上，也没有零点在单位圆上。我们希望建立一个算法，要从 $\angle X(e^{j\omega})$ 恢复 $cx[n]$，$\angle X(e^{j\omega})$ 是 $x[n]$ 傅里叶变换的相位，c 是一个正的幅度加权系数。

(a) 给出一组 $(N-1)$ 个线性方程，它的解将提供从 $\tan|\angle X(e^{j\omega})|$ 恢复出 $x[n]$，但有一个正的或负的幅度加权系数。你不必证明这组 $(N-1)$ 个线性方程组有唯一解。同时证明如果已知 $\angle X(e^{j\omega})$ 而不是刚才的 $\tan|\angle X(e^{j\omega})|$，那么幅度加权系数的符号就能确定。

(b) 假设 $x[n]$ 为

$$x[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0\\ 2, & n=1\\ 3, & n=2\\ 0, & n\geqslant 3\end{cases}$$

利用(a)建立的方法，说明 $cx[n]$ 可以由 $\angle X(e^{j\omega})$ 确定，这里 c 是一个正的幅度加权系数。

3.54 对一个序列 $x[n]$ 在 $n<0$ 是零，证明 $\lim_{z\to\infty}X(z)=x[0]$。如果 $n>0$，该序列是零，相应的定理是什么？

3.55 一个实值稳定序列 $x[n]$ 的非周期自相关函数定义为

$$c_{xx}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]x[n+k]$$

(a) 证明 $c_{xx}[n]$ 的 z 变换是

$$C_{xx}(z)=X(z)X(z^{-1})$$

确定 $C_{xx}(z)$ 的收敛域。

(b) 假设 $x[n]=a^nu[n]$。图示出 $C_{xx}(z)$ 的零极点及其收敛域。同时用求 $C_{xx}(z)$ 的 z 反变换求 $c_{xx}[n]$。

(c) 给出另一个序列 $x_1[n]$，它不等于(b)中的 $x[n]$，但有与(b)中 $x[n]$ 相同的自相关函数 $c_{xx}[n]$。

(d) 给出第三个序列 $x_2[n]$，它不等于 $x[n]$ 或 $x_1[n]$，但有与(b)中 $x[n]$ 相同的自相关函数。

3.56 决定 $X(z)=z^*$ 是否能对应于某个序列的 z 变换，说明你的理由。

3.57 令 $X(z)$ 是 z 的多项式之比，即

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

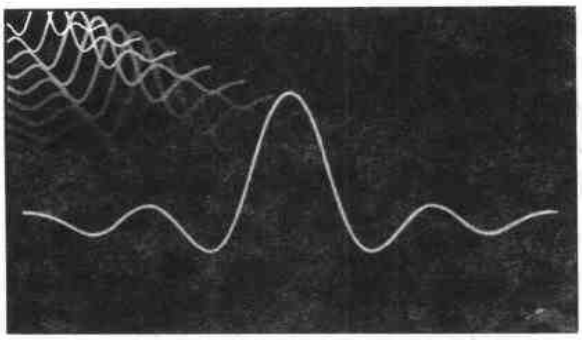
证明，如果 $X(z)$ 在 $z=z_0$ 有一个单阶极点，那么 $X(z)$ 在 $z=z_0$ 的留数就等于

$$\frac{B(z_0)}{A'(z_0)}$$

式中 $A'(z_0)$ 为 $A(z)$ 的导数在 $z=z_0$ 的值。

第4章

连续时间信号的采样



4.0 引言

虽然离散时间信号出现在很多情况之中，但是最常见的还是作为连续时间信号的采样表示而出现的。值得注意的是在一些合理条件限制下，一个连续时间信号能由它在离散时刻点上所取得的样本完全准确地给予表示。本章将详细讨论周期采样的过程，包括当信号不是带限或采样率太低时所产生的混叠问题。其中最为重要的就是连续时间信号的处理可以通过采样、离散时间处理以及后续的连续时间信号的重构来实现。

4.1 周期采样

虽然有其它的一些可能性(见 Steiglitz, 1965; Oppenheim and Johnson, 1972)，但是获得一个连续时间信号的离散时间表示的典型方法还是通过周期采样，这里由连续时间信号$x_c(t)$得到的样本序列是按照如下关系构成的：

$$x[n] = x_c(nT), \quad -\infty < n < \infty \tag{4.1}$$

在(4.1)式中，T 是**采样周期**，而它的倒数 $f_s = 1/T$ 是**采样频率**，即每秒内的样本数。当要想用弧度/秒(rad/s)的频率时，也将采样频率表示为 $\Omega_s = 2\pi/T$。

我们把实现(4.1)式的系统称为**理想连续时间到离散时间(C/D)转换器**，其方框图如图

4.1所示。作为一个例子，我们曾在图 2.2 中示出了一个连续时间语音波形 $x_c(t)$和其相应的样本序列 $x[n]$之间的关系。

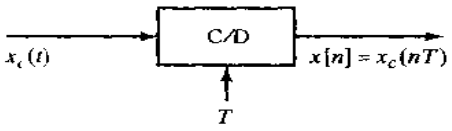


图 4.1　一个理想连续到离散时间(C/D)转换器方框图

在实际装置中，采样往往是用模拟到数字(A/D)转换器来实现的。这样的系统可以看作是对理想 C/D 转换器的近似。在实现或者选择一个 A/D 转换器时有一些重要的考虑。其中包括输出样本的量化、量化阶的线性度、是否需要采样保持电路以及采样率的极限等等。量化效应将在 4.8.2 节及 4.8.3 节作简要的讨论。A/D 转换器的其它一些实际问题已超出本书范围，而属于电子电路所关注的了。

采样一般是不可逆的；也就是说，已知输出 $x[n]$，一般不可能恢复 $x_c(t)$，即采样器的输入。这是因为有很多连续时间信号都能产生相同的输出样本序列。采样中固有的模糊度就是信号处理中的一个基本问题。所幸的是，限制采样器的输入信号类别有可能除掉这一模糊度。

在数学上以两步来表示采样过程是方便的，如图 4.2(a)所示。它由一个冲激串调制器紧跟着一个由冲激串到序列的转换来构成。图 4.2(b)示出了一个连续时间信号 $x_c(t)$在两种不同采样率下冲激串采样的结果。图 4.2(c)是相应的输出序列。$x_s(t)$和 $x[n]$之间的本质差别在于：在某种意义上 $x_s(t)$还是一个连续时间信号(即一个冲激串)，它除了在整倍数 T 的时

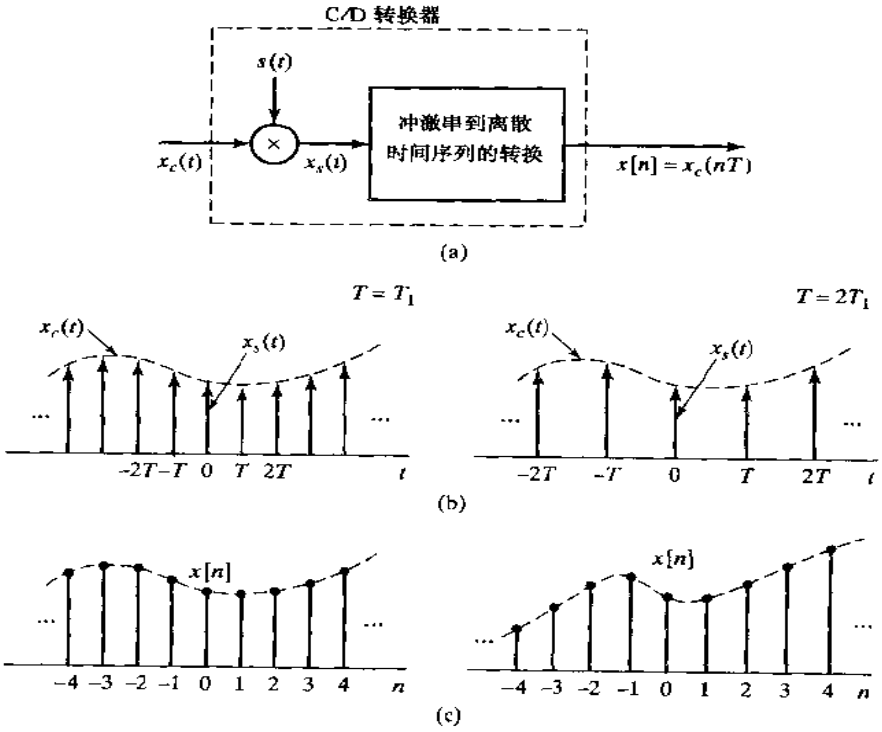


图 4.2　用周期冲激串采样紧跟着一个到离散时间序列的转换
(a) 总的系统；(b) 对于两个采样率的 $x_s(t)$；(c) 两个不同采样率的输出序列

刻以外都为零；另一方面，序列 $x[n]$是以整数变量 n 给出的，事实上这就引入了时间归一化的过程，也即数的序列 $x[n]$已没有任何明显的有关采样率的信息。再者，$x_c(t)$的样本在 $x[n]$中是用有限数值来表示的，而不是在 $x_s(t)$中以冲激面积来表示的。

应该强调，图 4.2(a)仅是采样的一种数学上的表示，这种表示为在时域和频域深刻理解采样是方便的。它并不代表为实现采样而设计的任何具体电路或系统。一片硬件能否构成对方框图 4.2(a)的近似那是第二位的问题。之所以要引入采样过程的这种表示，是因为它能给出某一关键结果的简单推导，以及经由这一途径而得到许多重要的细节和内涵，而这些若从基于傅里叶变换公式运算的正规推导而获得则是困难的。

4.2 采样的频域表示

为了导出理想 C/D 转换器输入和输出之间的频域关系，首先考虑通过周期冲激串调制由 $x_c(t)$到 $x_s(t)$的转换，

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{4.2}$$

式中 $\delta(t)$是单位冲激函数或称狄拉克函数。用 $x_c(t)$调制 $s(t)$可得

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x_c(t)s(t) \\ &= x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \end{aligned} \tag{4.3}$$

通过冲激函数的“筛选性质”，$x_s(t)$可表示为

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT) \tag{4.4}$$

现在来考虑 $x_s(t)$的傅里叶变换。因为从(4.3)式，$x_s(t)$是 $x_c(t)$和 $s(t)$的乘积，那么 $x_s(t)$的傅里叶变换就是傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$和 $S(j\Omega)$的卷积。一个周期冲激串的傅里叶变换还是一个周期冲激串(Oppenheim and Willsky, 1997)。这样，$S(j\Omega)$为

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \tag{4.5}$$

式中 $\Omega_s = 2\pi/T$ 是采样频率，以 rad/s 计。因为

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

式中 * 记作连续变量的卷积运算，可得

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s) \tag{4.6}$$

(4.6)式给出了在图 4.2(a)中冲激串调制器输入和输出傅里叶变换之间的关系。由(4.6)式可见，$x_s(t)$的傅里叶变换是由 $x_c(t)$的傅里叶变换周期重复所构成的。$X_c(j\Omega)$被整数倍的采样频率所移位，然后叠加起来就得到了该样本冲激串的周期傅里叶变换。图 4.3 画出了冲激串采样的频域表示。图 4.3(a)表示一个带限的傅里叶变换，这里 $X_c(j\Omega)$中非零的最高频率分量是 Ω_N。图 4.3(b)示出周期冲激串的 $S(j\Omega)$，而图 4.3(c)则是 $X_s(j\Omega)$，它就是 $X_c(j\Omega)$与 $S(j\Omega)$卷积的结果。由图 4.3(c)很明显看出，当

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N, \text{或 } \Omega_s > 2\Omega_N \tag{4.7}$$

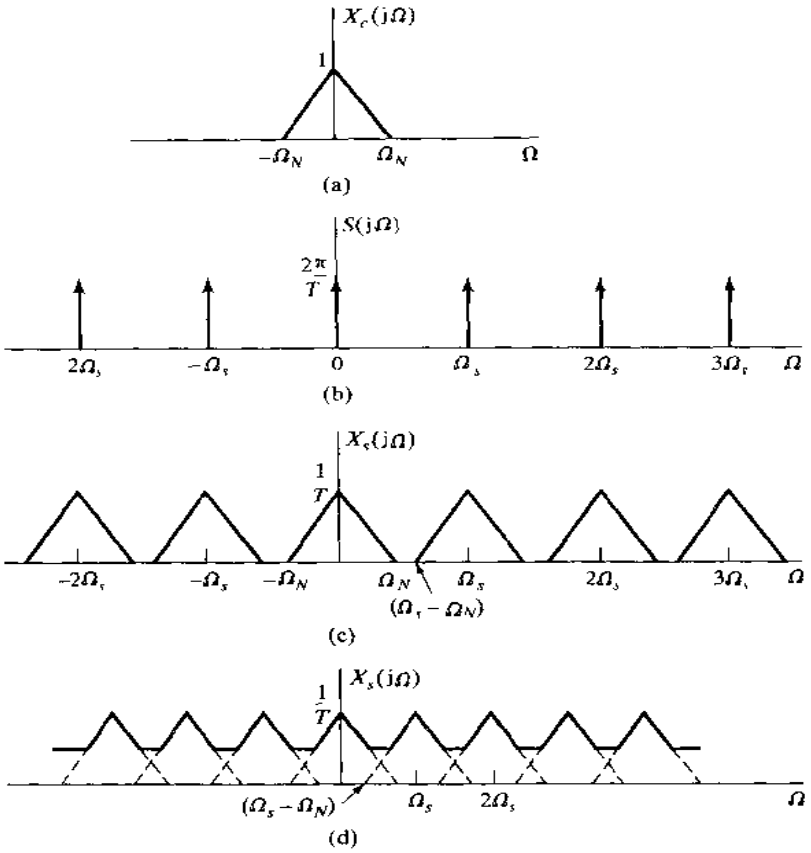


图 4.3　时域中采样在频域中的效果
(a) 原始信号频谱;(b) 采样函数频谱;
(c) 已采样信号频谱($\Omega_s > 2\Omega_N$); (d) 已采样信号频谱($\Omega_s < 2\Omega_N$)

$X_c(j\Omega)$的重复部分不会重叠,因此当它们按(4.6)式加在一起时,在每一个整数倍的 Ω_s 上,仍保持一个与 $X_c(j\Omega)$完全一样的复本(附加一个幅度尺度因子 $1/T$)。这样,$x_c(t)$就可以用一个理想低通滤波器从 $x_s(t)$中恢复出来。这就如图 4.4(a)所示,图中示出一个冲激串调制器紧跟着一个频率响应为 $H_r(j\Omega)$的线性时不变系统。对于如图 4.4(b)的 $X_c(j\Omega)$, $X_s(j\Omega)$就如图 4.4(c)所示,这里已假设 $\Omega_s > 2\Omega_N$。因为

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) \tag{4.8}$$

那么,若 $H_r(j\Omega)$是一个增益为 T,截止频率为 Ω_c 的理想低通滤波器的话,且有

$$\Omega_N < \Omega_c < (\Omega_s - \Omega_N) \tag{4.9}$$

那么

$$X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega) \tag{4.10}$$

这就如图 4.4(e)所示。

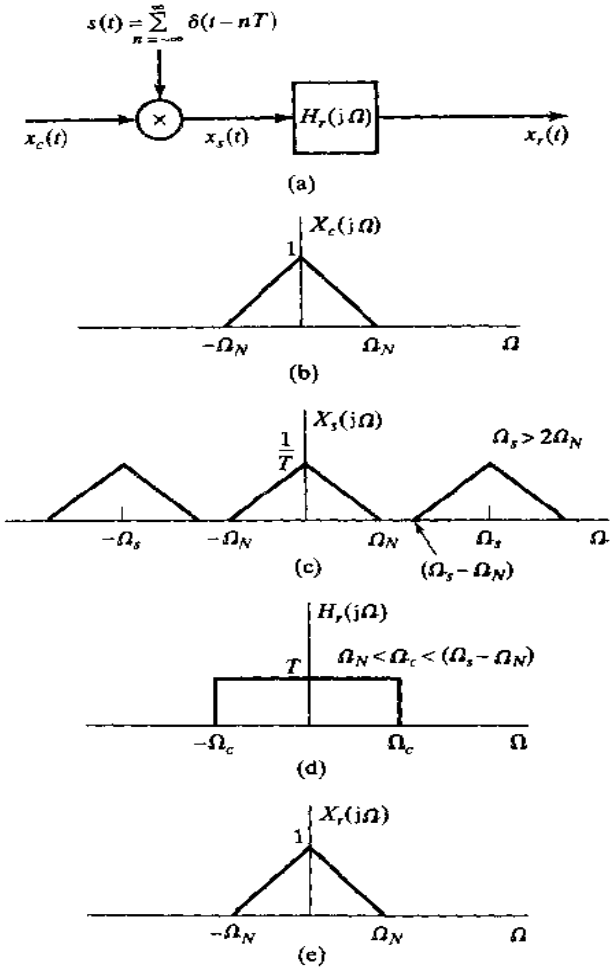


图 4.4　利用理想低通滤波器从样本中完全恢复原连续时间信号

如果(4.7)式的不等式不满足，即若 $\Omega_s \leqslant 2\Omega_N$，$X_c(j\Omega)$的重复部分互相重叠，以至于当它们相加在一起时，$X_c(j\Omega)$不再能用低通滤波恢复出来。这就如图 4.3(d)所示。在这种情况下，在图 4.4(a)中恢复出来的 $x_r(t)$就与一个称之为**混叠失真**了的原始连续时间输入有关。图 4.5 说明了在简单余弦信号情况下频域混叠的情况。图 4.5(a)示出该余弦信号的傅里叶变换

$$x_c(t) = \cos\Omega_0 t \tag{4.11}$$

图 4.5(b)是在 $\Omega_0 < \Omega_s/2$ 时，$x_s(t)$的傅里叶变换，而图 4.5(c)是在 $\Omega_0 > \Omega_s/2$ 时，$x_s(t)$的傅里叶变换。(d)和(e)则分别相应于 $\Omega_0 < \Omega_s/2 = \pi/T$ 和 $\Omega_0 > \pi/T$ 时低通滤波器($\Omega_c = \Omega_s/2$)输出的傅里叶变换。图 4.5(c)和(e)对应于有混叠的情况。在没有混叠时图 4.5(b 和 d)，恢复出的输出$x_r(t)$为

$$x_r(t) = \cos\Omega_0 t \tag{4.12}$$

在有混叠时，则是

$$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t \quad (4.13)$$

这就是说，作为采样和恢复的结果，高频信号 $\cos\Omega_0 t$ 已经被当作和低频信号 $\cos(\Omega_s - \Omega_0)t$ 是一样的东西（冒名顶替的）。这个讨论就是奈奎斯特采样定理（Nyquist，1928；Shannon，1949）的基础，现陈述如下：

奈奎斯特采样定理 令 $x_c(t)$ 是一个带限信号，

$$X_c(j\Omega) = 0, \text{ 对于 } |\Omega| > \Omega_N \quad (4.14a)$$

那么 $x_c(t)$ 能唯一由它的样本 $x[n] = x_c(nT)$，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 所决定，唯有

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\Omega_N \quad (4.14b)$$

频率 Ω_N 一般称为**奈奎斯特频率**，而频率 $2\Omega_N$ 称为**奈奎斯特率**。采样频率必须大于奈奎斯特率。

到目前为止，我们仅仅考虑了图 4.2(a) 中的冲激串调制器，我们最终的目的是要用 $X_s(j\Omega)$ 和 $X_c(j\Omega)$ 来表示序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。为此，我们来考虑 $X_s(j\Omega)$ 的另一种表示式。对(4.4)式进行傅里叶变换，可得

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega Tn} \quad (4.15)$$

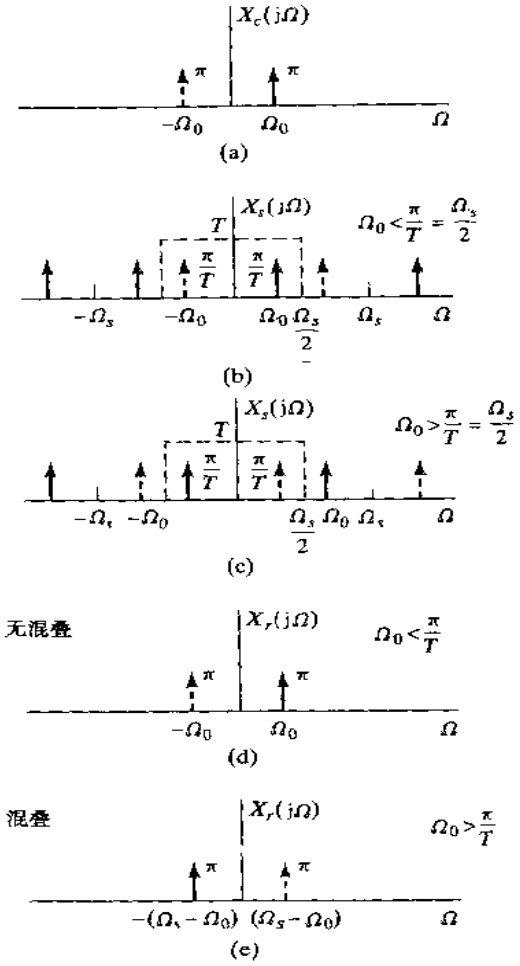


图 4.5 一个余弦信号采样中的混叠效果

因为

$$x[n] = x_c(nT) \quad (4.16)$$

和

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (4.17)$$

就可以得出

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega = \Omega T} = X(e^{j\Omega T}) \quad (4.18)$$

由(4.6)式和(4.18)式，结果为

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (4.19)$$

或等效为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - jk\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{4.20}$$

从(4.18)式到(4.20)式可以看出，$X(e^{j\omega})$只是将$X_s(j\Omega)$作一个频率尺度变换的结果。频率尺度因子由$\omega = \Omega T$给出。这种尺度变换也可以被认为是一种频率轴的归一化，以使得$X_s(j\Omega)$中的$\Omega = \Omega_s$归一化到$X(e^{j\omega})$中的$\omega = 2\pi$。由$X_s(j\Omega)$变换到$X(e^{j\omega})$存在着一个频率归一化这一事实是与从$x_s(t)$变换到$x[n]$过程中存在着一个时间归一化的这一事实直接有关的。明确地说，如在图4.2中所见，$x_s(t)$在样本之间仍保留着一个与采样周期T相等的样本间隔。与此对照，$x[n]$序列值之间的"间隔"总是等于1，这就是说，时间轴已被因子T所归一化。这样，相应地在频域就应有一个因子为$f_s = 1/T$的频率轴归一化。

例4.1　一个正弦信号的采样与重建

如果用采样周期$T = 1/6\,000$对连续时间信号$x_c(t) = \cos(4\,000\pi t)$采样，就得到$x[n] = x_c(nT) = \cos(4\,000\pi Tn) = \cos(\omega_0 n)$，式中$\omega_0 = 4\,000\pi T = 2\pi/3$。在这个情况下，$\Omega_s = 2\pi/T = 12\,000\pi$，而信号的最高频率是$\Omega_0 = 4\,000\pi$，所以满足奈奎斯特定理而没有混叠。$x_c(t)$的傅里叶变换是

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4\,000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4\,000\pi)$$

图4.6(a)指出在$\Omega_s = 12\,000\pi$时的

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \Omega_s)) \tag{4.21}$$

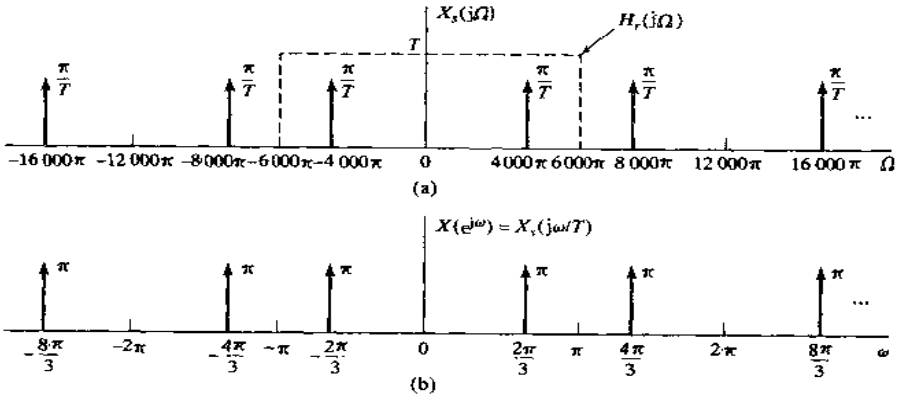


图4.6　$\Omega_0 = 4\,000\pi$和采样周期$T = 1/6\,000$的已采样余弦信号的连续时间(a)和离散时间(b)的傅里叶变换

应该注意到，$X_c(j\Omega)$是在$\Omega = \pm 4\,000\pi$的一对冲激，而我们看到，这个傅里叶变换的移位复本集中在$\pm\Omega_s$，$\pm 2\Omega_s$，…等等。画出$X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$作为归一化频率$\omega = \Omega T$的函数就给出了图4.6(b)，图中已经应用了这一结论，即：对一个冲激独立变量的加权也就是对其面积加权，即$\delta(\omega/T) = T\delta(\omega)$。注意到，原始频率$\Omega_0 = 4\,000\pi$对应于归一化频率$\omega_0 = 4\,000\pi T = 2\pi/3$，它满足不等式$\omega_0 < \pi$，这就相应于$\Omega_0 = 4\,000\pi < \pi/T = 6\,000\pi$。图4.6(a)还指出对于给定采样率$\Omega_s = 12\,000\pi$时理想重建滤波器$H_r(j\Omega)$的频率响应。从这个图上很清楚要被重建的信号一定具有频率$\Omega_0 = 4\,000\pi$，这就是原信号$x_c(t)$的频率。

例4.2　在欠采样正弦信号重建中的混叠

现在假定连续时间信号是$x_c(t) = \cos(16\,000\pi t)$，而采样周期仍与例4.1一样为$T = 1/6\,000$。这个

采样周期没有满足奈奎斯特准则，因为 $\Omega_s = 2\pi/T = 12\,000\pi < 2\Omega_0 = 32\,000\pi$，这样就会能看到混叠。现在我们来看看一个很有趣的结果。对于这种情况，$X_r(j\Omega)$是与图 4.6(a)完全一样的！然而，现在位于 $\Omega = -4\,000\pi$的冲激是由(4.21)式中 $X_c(j(\Omega - \Omega_s))$来的，而不是从 $X_c(j\Omega)$来的；位于 $\Omega = 4\,000\pi$的冲激则是从 $X_c(j(\Omega + \Omega_s))$产生的。将 $X(e^{j\omega}) = X_r(j\omega/T)$画出作为 ω 的函数就产生与图 4.6(b)一样的图，因为我们用了相同的采样周期归一化了。对于这一点的最根本原因是：在两种情况下，样本序列是相同的，即

$$\cos(16\,000\pi n/6\,000) = \cos(2\pi n + 4\,000\pi n/6\,000) = \cos(2\pi n/3)$$

(在余弦的宗量上加上任意 2π 的整倍数都不会改变它的值)。因此，得出相同的样本序列 $x[n] = \cos(2\pi n/3)$，而这个序列是用同一个采样频率对两个不同的连续时间信号采样而得出的，其中一种情况是采样频率满足奈奎斯特定理，而另一种情况则是不满足。和前面一样，图 4.6(a)指出在给定采样率 $\Omega_s = 12\,000\pi$ 时的理想重建滤波器 $H_r(j\Omega)$的频率响应。由图显而易见将被重建的信号是频率 $\Omega_0 = 4\,000\pi$，而这并不是原信号 $x_c(t)$的频率。

例 4.3　第二个混叠的例子

作为最后一个例子，假定信号是 $x_c(t) = \cos(4\,000\pi t)$，即与例 4.1 相同，频率仍为 $\Omega_0 = 4\,000\pi$。然而，现在将采样周期增加到 $T = 1/1\,500$。由于 $\Omega_s = 2\pi/T = 3\,000\pi < 2\Omega_0 = 8\,000\pi$，这个采样周期再次不满足采样定理，结果就会看到混叠。图 4.7(a)是这时的 $X_s(j\Omega)$的图。现在位于 $\Omega = -1\,000\pi$ 的冲激是来自 $X_c(j(\Omega - \Omega_s))$，而位于 $\Omega = 1\,000\pi$ 的冲激则来自 $X_c(j(\Omega + \Omega_s))$。将 $X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T)$作为 ω 的函数画出来就得到图 4.7(b)，而这张图与图 4.6(b)是完全一样的。再一次得到，这个傅里叶变换是对应于序列 $x[n] = \cos(2\pi n/3)$的。这样我们就看到，同一个离散时间信号可以用两种不同的采样率对同一个连续时间信号进行采样而得到，只要其中之一是不满足采样定理的。图 4.7(a)中也给出了在采样率 $\Omega_s = 3\,000\pi$ 时理想重建滤波器 $H_r(j\Omega)$的频率响应。由图可见用采样周期 $T = 1/1\,500$ 将被重建的信号具有频率是 $\Omega_0 = 1\,000\pi$，而不是 $4\,000\pi$。

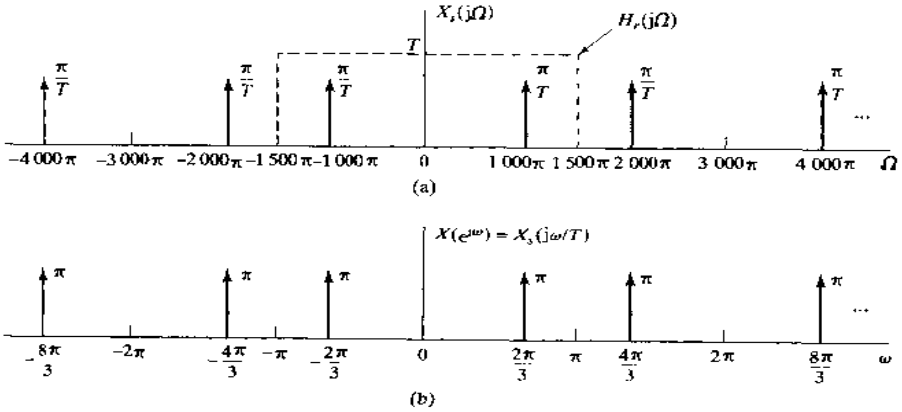


图 4.7　$\Omega_0 = 4\,000\pi$ 和采样周期 $T = 1/1\,500$ 的已采样余弦信号的连续时间(a)和离散时间(b)的傅里叶变换

4.3　由样本重构带限信号

根据采样定理，若将一个连续时间带限信号的样本取得足够密，就足以用样本来完全表示

该信号，这指的是该信号可以由样本及采样周期恢复出来。冲激串调制对于了解由样本重构该连续时间带限信号的过程提供了一种简便的方法。

在4.2节中已经看到，如果满足采样定理中的条件，并且已调冲激串是用一个适当的低通滤波器来过滤的话，那么该低通滤波器输出的傅里叶变换就一定与原连续时间信号 $x_c(t)$ 的傅里叶变换是一样的，因此该滤波器的输出就是 $x_c(t)$。如果已给出一个样本序列 $x[n]$，就能形成一个冲激串 $x_s(t)$，在 $x_s(t)$ 中令相继的冲激面积等于相继的各序列值，即有

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[t - nT] \tag{4.22}$$

第 n 个样本值与在 $t = nT$ 的冲激有关，其中 T 是与序列 $x[n]$ 有关的采样周期。如果这个冲激串输入到频率响应为 $H_r(j\Omega)$ 和冲激响应为 $h_r(t)$ 的理想低通连续时间滤波器的话，那么滤波器的输出就是

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT) \tag{4.23}$$

这样一个信号重构过程的方框图如图4.8(a)所示。该理想重构滤波器的增益为 T（用以补偿(4.19)式和(4.20)式中的因子 $1/T$）和截止频率为 Ω_c（Ω_c 位于 Ω_N 和 $\Omega_s - \Omega_N$ 之间）。截止频率一种方便和常用的选择是取 $\Omega_c = \Omega_s/2 = \pi/T$。这种选取对任何 Ω_s 和 Ω_N 之间的关系都是

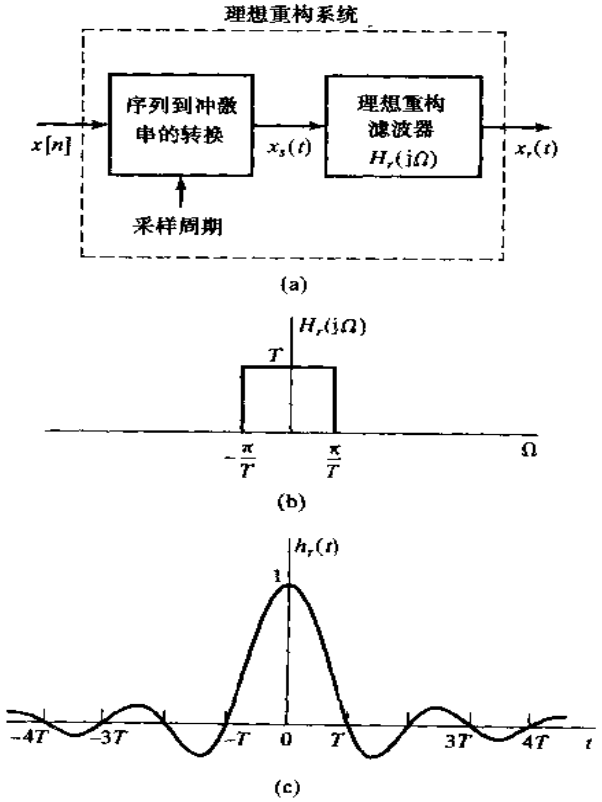


图 4.8 (a)理想带限信号重构系统的方框图；(b)理想重构滤波器的频率响应；(c)理想重构滤波器的冲激响应

适合的(只要 $\Omega_s > 2\Omega_N$,即避免混叠发生)。图 4.8(b)示出该理想重构滤波器的频率响应。对于截止频率为 π/T 时相应的冲激响应 $h_r(t)$就是 $H_r(j\Omega)$的傅里叶反变换,由下式给出:

$$h_r(t) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} \tag{4.24}$$

如图 4.8(c)所示。将(4.24)式代入(4.23)式立即可得

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \tag{4.25}$$

从 4.2 节频域中的证明已经看到,若 $x[n] = x_c(nT)$,这里 $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geqslant \pi/T$,那么 $x_r(t)$就等于 $x_c(t)$。但是,仅根据(4.25)式,这个结果不是立即就一目了然的。然而,稍仔细地看看(4.25)式就会茅塞顿开。首先考虑一下由(4.24)式给出的函数 $h_r(t)$,注意到

$$h_r(0) = 1 \tag{4.26a}$$

这是由洛皮塔尔(L'Hôpital)法则得出的。另外

$$h_r(nT) = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.26b}$$

由(4.26a)和(4.26b)式以及(4.23)式可得,若 $x[n] = x_c(nT)$,则

$$x_r(mT) = x_c(mT) \tag{4.27}$$

m 为任意整数。这就是说,由(4.25)式重构的信号在各采样时刻点上与原连续时间信号有相同的值,且与采样周期 T 无关。

图 4.9 中示出了一个连续时间信号 $x_c(t)$及其相应的已调冲激串。图 4.9(c)则示出由下式中若干项

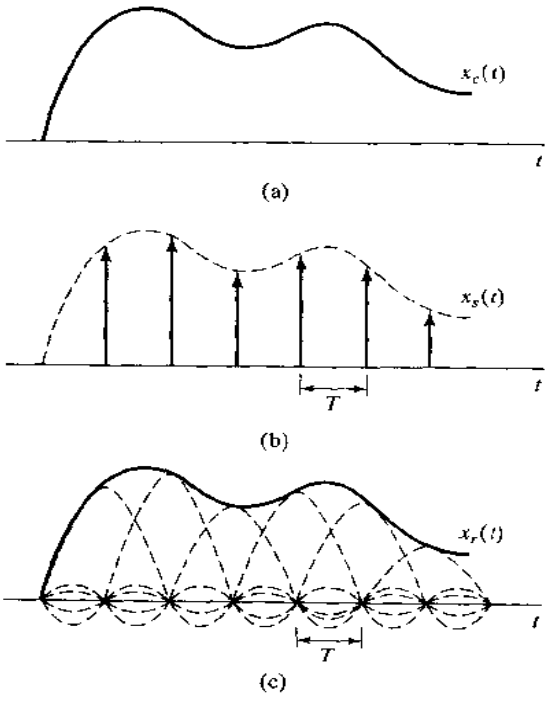


图 4.9 理想带限内插

$$x[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

及其所合成的重构信号 $x_r(t)$。由该图可以想到，该理想低通滤波器在 $x_s(t)$的冲激之间进行内插以形成一个连续时间信号 $x_r(t)$。由(4.27)式，该合成信号在采样时刻点上是真正的 $x_c(t)$的重构。如果不存在混叠，低通滤波器就内插出样本之间准确的值，这样就与采样和恢复过程的频域分析所得一致。

定义一个从样本序列重构一个带限信号的理想系统，并将该系统称为**理想离散到连续时间(D/C)转换器**，如图 4.10 所示，以此来归纳一下前面的讨论是很有用处的。如同已经看到的，该理想重构过程可以表示成序列到冲激串的转换((4.22)式)，然后再紧跟着一个理想低通滤波器的过滤，所得输出就如(4.25)式所给出。序列到冲激串转换的中间步骤只是在导出(4.25)式和理解信号重构过程中一种数学上的便利。然而，一旦熟悉了这一过程，定义一个如图 4.10(b)所示的更为紧凑的表示是有用的，这里输入是序列，而输出就是由(4.25)式给出的连续时间信号 $x_r(t)$。

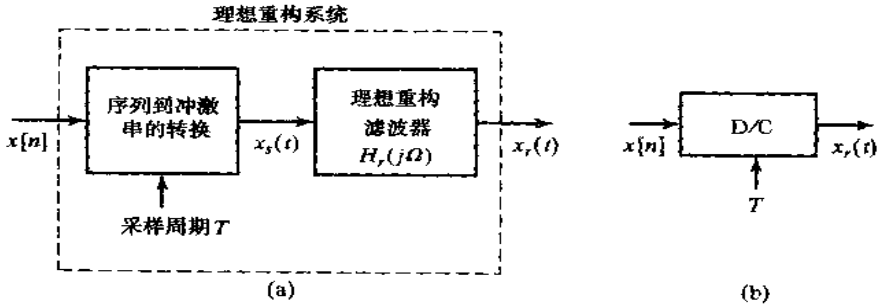


图 4.10 (a)理想带限信号重构；(b)理想 D/C 转换器的等效表示

该理想 D/C 转换器的性质最容易在频域中看出。为了导出在频域的输入/输出关系，考虑一下(4.23)式或(4.25)式的傅里叶变换，这就是

$$X_r(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]H_r(j\Omega)e^{-j\Omega Tn}$$

求 $H_r(j\Omega)$从求和符号中提出，就能写成

$$X_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)X(e^{j\Omega T}) \tag{4.28}$$

(4.28)式给出了该理想 D/C 转换器的频域描述。按照(4.28)式，$X(e^{j\omega})$是在频率上被重新标定了的(即用 ΩT 代替 ω)。理想低通滤波器 $H_r(j\Omega)$选取所得到的周期傅里叶变换 $X(e^{j\Omega T})$中的基带周期，并补偿在采样中固有的 $1/T$ 幅度因子。因此，如果序列 $x[n]$已经由采样一个带限信号(以奈奎斯特采样率或更高的采样率)而得到，那么重构信号 $x_r(t)$就一定等于原带限信号。由(4.28)式也很清楚，在任何情况下理想 D/C 转换器的输出总是将输入带限到低通滤波器的最高截止频率，该截止频率一般都取为采样频率的一半。

4.4 连续时间信号的离散时间处理

离散时间系统的主要应用场合是在连续时间信号的处理方面。这可以用图 4.11 所示的

一般形式的系统完成。这个系统是由一个 C/D 转换器紧跟着一个离散时间系统，再跟着 D/C 转换器的级联所构成。图 4.11 的方框图代表着一大类系统，因为采样率和离散时间系统都能按需要来选择。应该注意到，整个系统等效为一个连续时间系统，因为系统将连续时间输入信号 $x_c(t)$变换为连续时间输出信号 $y_r(t)$。然而，这个系统的特性是与离散时间系统的选择和采样率有关的。在图 4.11 中假设 C/D 和 D/C 转换器都有相同的采样率，这一点不是本质上的，本章稍后部分以及章末的某些习题中都将考虑输入和输出采样率不相同的一些系统。



图 4.11　连续时间信号的的离散时间处理

本章的前述各节都放在对图 4.11 中 C/D 和 D/C 转换过程的理解上。为了方便，同时也作为理解图 4.11 整个系统的第一步，先把这些过程的数学表示综合一下。

C/D 转换器产生一个离散时间信号如下：

$$x[n] = x_c(nT) \tag{4.29}$$

这就是连续时间输入信号 $x_c(t)$的样本序列。这个序列的离散时间傅里叶变换与连续时间输入信号的傅里叶变换的关系是

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{4.30}$$

D/C 转换器产生一个如下式的连续时间输入信号：

$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \tag{4.31}$$

这里序列 $y[n]$是离散时间系统在输入为 $x[n]$时的输出。由(4.28)式，$y_r(t)$的连续时间傅里叶变换 $Y_r(j\Omega)$和 $y[n]$的离散时间傅里叶变换 $Y(e^{j\omega})$由下式联系在一起：

$$\begin{aligned} Y_r(j\Omega) &= H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) \\ &= \begin{cases} TY(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.32}$$

下一步，把输出序列 $y[n]$和输入序列 $x[n]$，或者等效为把 $Y(e^{j\omega})$和 $X(e^{j\omega})$联系起来。一个简单的例子就是恒等系统，即 $y[n]=x[n]$。这个例子已经详细研究过。我们知道，如果 $x_c(t)$有一个带限的傅里叶变换，以使 $X_c(j\Omega)=0, |\Omega|\geqslant\pi/T$，并且图 4.11 中的离散时间系统是一个恒等系统，以使得 $y[n]=x[n]=x_c[nT]$，那么输出就是 $y_r(t)=x_c(t)$。回想一下在证明这一结果时，利用了连续时间和离散时间信号的频域表示，因为混叠这一关键概念最容易在频域中被理解。同样，当处理比恒等系统更为复杂的系统时，一般也在频域中完成分析。如果离散时间系统是非线性的或时变的，那么要得到该系统输入和输出傅里叶变换之间的一般关系通常是很困难的。(在习题 4.33 中将考虑一下例子对应于图 4.11 系统中离散时间系统是非线性的情况)。然而，在线性时不变情况下，会得出一个相当简单和十分有用的结果。

4.4.1 线性时不变离散时间系统

如果图 4.11 中的离散时间系统是线性和时不变的，那么就有

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \tag{4.33}$$

这里 $H(e^{j\omega})$是该系统的频率响应，或者说是单位脉冲响应的傅里叶变换，而 $X(e^{j\omega})$和$Y(e^{j\omega})$则分别是输入和输出的傅里叶变换，将(4.32)式和(4.33)式结合在一起，就可以得到

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}) \tag{4.34}$$

接下来，利用(4.30)式，并用 $\omega = \Omega T$，有

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\Omega - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{4.35}$$

如果 $X_c(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geqslant\pi/T$，那么理想低通重构滤波器 $H_r(j\Omega)$抵消了 $1/T$ 因子，并且仅仅选择(4.35)式中 $k=0$ 这一项，即

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geqslant \pi/T \end{cases} \tag{4.36}$$

因此，如果 $X_c(j\Omega)$是带限的，并且采样率是高于奈奎斯特率的话，那么输出与输入就通过下述关系联系起来：

$$Y_r(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\Omega)X_c(j\Omega) \tag{4.37}$$

式中

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geqslant \pi/T \end{cases} \tag{4.38}$$

这就是说，整个连续时间系统是等效于一个线性时不变系统，其有效频率响应由(4.38)式给出。

图 4.11 系统的线性和时不变性特性依赖于两个因素，强调这一点是很重要的。第一，离散时间系统必须是线性的和时不变的；第二，输入信号必须是带限的，并且采样率要足够高，以使得任何混叠的分量都被该离散时间系统所消除。作为违反第二个条件的一个简单说明是考虑当 $x_c(t)$是一个单一的单位幅度脉冲的情况，该脉冲的持续期小于采样周期。如果该脉冲在 $t=0$ 时为 1，那么 $x[n]=\delta[n]$。然而，完全有可能将该脉冲移位，以至于移到脉冲不与任何采样时刻重合，这时 $x[n]=0$(对所有 n 而言)。很明显，这样一个脉冲由于是时限的，所以不是带限的。即使是该离散时间系统是一个恒等系统，即 $y[n]=x[n]$，整个系统也不是时不变的。一般来说，如果图 4.11 中的离散时间系统是线性和时不变的，并且采样率是高于与输入 $x_c(t)$带宽有关的奈奎斯特率，那么整个系统就保证是等效为一个线性时不变连续时间系统，其有效频率响应由(4.38)式给出。再者，甚至在 C/D 转换器中有某些混叠发生，只要 $H(e^{j\omega})$不通过这些混叠的分量，(4.38)式仍是正确的。例 4.4 就是这种情况的一个简单说明。

例 4.4　利用离散时间低通滤波器的理想连续时间的低通滤波

考虑图 4.11 中线性时不变离散时间系统具有频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{4.39}$$

自然这个频率响应是周期的，周期为 2π，如图 4.12(a)所示。对于带限输入，并在高于奈奎斯特率采

样，由(4.38)式，图 4.11 的整个系统将表现为一个线性时不变连续时间系统，其频率响应为

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega T| < \omega_c \text{ 或 } |\Omega| < \omega_c / T \\ 0, & |\Omega T| > \omega_c \text{ 或 } |\Omega| > \omega_c / T \end{cases} \tag{4.40}$$

如图 4.12(b)所示。这个有效频率响应就是一个截止频率为 $\Omega_c = \omega_c / T$ 的理想低通滤波器。

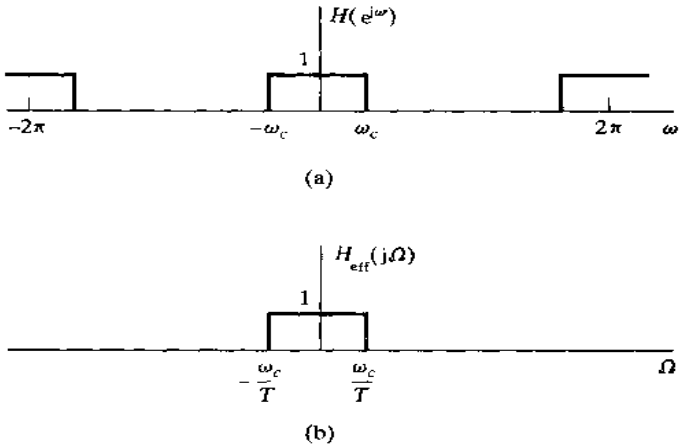


图 4.12 (a)图 4.11 中离散时间系统的频率响应；(b)带限输入时相应的有效连续时间的频率响应

作为这一结果的一个说明，考虑一下由图 4.13 给出的图解说明。图 4.13(a)指出一个带限信号的傅里叶变换。图 4.13(b)是中间已调冲激串的傅里叶变换，它是与 $X(e^{j\Omega T})$ 一致的，$X(e^{j\Omega T})$ 就是以 $\omega = \Omega T$ 求值的样本序列的离散时间傅里叶变换。在图 4.13(c)中，把样本序列的离散时间傅里叶变换和离散时间系统的频率响应都作为归一化的离散时间频率变量 ω 的函数画在一起。图 4.13(d)示出了 $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$，即离散时间系统输出的傅里叶变换。图 4.13(e)示出作为连续时间频率 Ω 的函数的离散时间系统输出的傅里叶变换，以及 D/C 转换器的理想重构滤波器的频率响应 $H_r(j\Omega)$。最后，图 4.13(f)是得到的 D/C 转换器输出的傅里叶变换。将图 4.13(a)与图 4.13(f)作一比较就可看出，该系统就表现为一个线性时不变系统，该系统具有由(4.38)式所给出的，并在图 4.12(b)中画出的频率响应。

在本例中要说明几个重要之处。首先注意到具有离散时间截止频率为 ω_c 的理想低通离散时间滤波器当用于图 4.11 这样的结构中时就具有一个截止频率为 $\Omega_c = \omega_c / T$ 的理想低通滤波器的效果。这个截止频率既依赖于 ω_c，又与 T 有关。尤其是当利用一个固定的离散时间低通滤波器而变化采样周期 T 时，就能实现一个等效的、具有可变截止频率的连续时间低通滤波器。例如，如果 T 选择成 $\Omega_N T < \omega_c$，那么图 4.11 系统的输出一定是 $y_r(t) = x_c(t)$。另外，正如在习题 4.25 中所说明的，甚至在图 4.13(b)和(c)中存在一些混叠，(4.40)式还是正确的，只要这些失真(混叠)的分量被滤波器 $H(e^{j\omega})$ 滤除掉。特别是从图 4.13(c)中可看到，在输出中存在混叠，就要求

$$(2\pi - \Omega_N T) > \omega_c \tag{4.41}$$

对此奈奎斯特定理的要求则是

$$(2\pi - \Omega_N T) > \Omega_N T \tag{4.42}$$

作为利用离散时间系统的连续时间处理的另一个例子，考虑一个对带限信号的理想微分

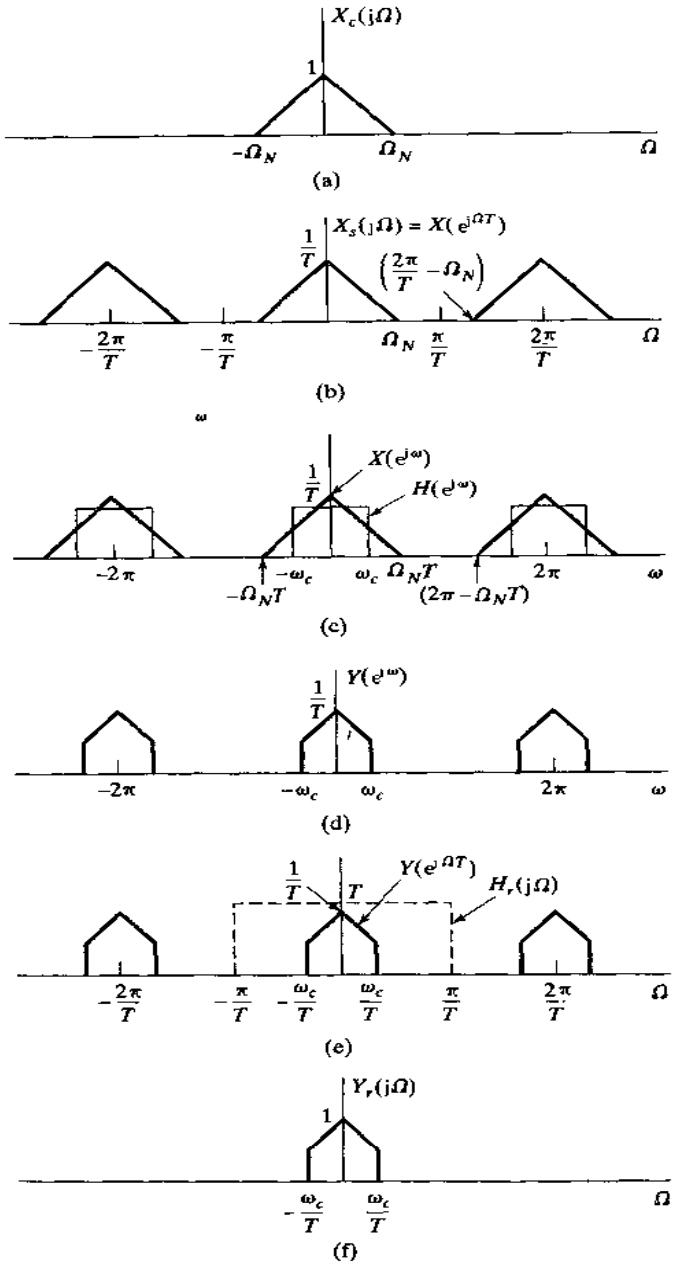


图 4.13 (a)一个带限输入信号的傅里叶变换；(b)画作连续时间频率 Ω 函数的已采样输入的傅里叶变换；(c)对 ω 画出的样本序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$和离散时间系统的频率响应$H(e^{j\omega})$；(d) 离散时间系统输出的傅里叶变换；(e)对 Ω 画出的离散时间系统输出的傅里叶变换和理想重构滤波器的频率响应；(f)输出的傅里叶变换

器的实现。

例 4.5　一个理想连续时间带限微分器的离散时间实现

由下式定义理想连续时间微分器系统：

$$y_c(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_c(t)] \tag{4.43}$$

相应的频率响应为

$$H_c(\mathrm{j}\Omega) = \mathrm{j}\Omega \tag{4.44}$$

因为考虑的是图 4.11 形式的一个实现，所以输入总是被限制为带限的。对于处理带限信号，满足下式就足够了：

$$H_{\mathrm{eff}}(\mathrm{j}\Omega) = \begin{cases} \mathrm{j}\Omega, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geqslant \pi/T \end{cases} \tag{4.45}$$

如图 4.14(a)所示。相应的离散时间系统应有如下频率响应：

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{j}\omega/T, \qquad |\omega| < \pi \tag{4.46}$$

并且是周期的，周期为 2π，如图 4.14(b)所示。相应的单位脉冲响应能证明为

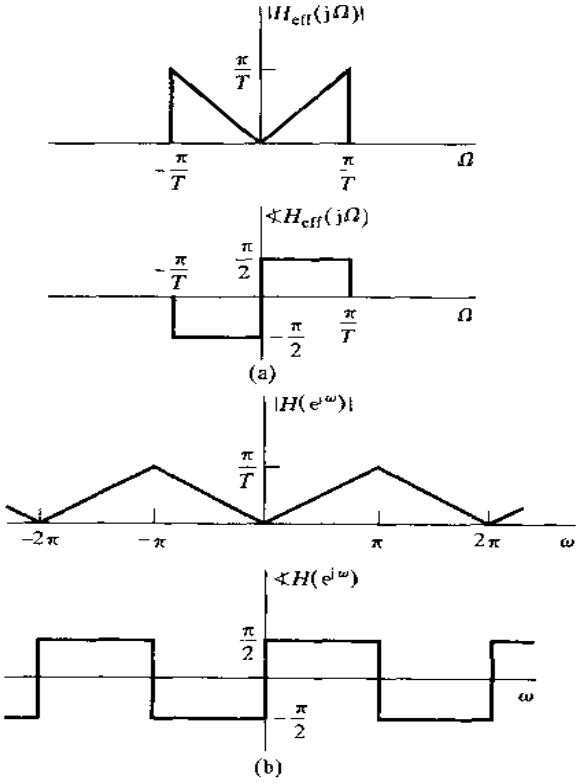


图 4.14　(a)连续时间理想带限微分器的频率响应 $H_c(\mathrm{j}\Omega) = \mathrm{j}\Omega, |\Omega| < \frac{\pi}{T}$；(b) 实现一个连续时间带限微分器的离散时间滤波器的频率响应

$$h[n] = \frac{\pi n \cos \pi n - \sin \pi n}{\pi n^2 T}, \quad -\infty < n < \infty$$

或等效为

$$h[n]=\begin{cases}0, & n=0\\ \dfrac{\cos\pi n}{nT}, & n\neq 0\end{cases} \tag{4.47}$$

因此，如果一个具有这样单位脉冲响应的离散时间系统用在图 4.11 结构中的话，那么，对每一个带限输入，其输出都是输入的导数。

例 4.6　用一个正弦输入为例来说明例 4.5

假设例 4.5 的带限微分器有输入 $x_c(t)=\cos(\Omega_0 t)$，$\Omega_0<\pi/T$。已采样的输入就是 $x[n]=\cos(\omega_0 n)$，$\omega_0=\Omega_0 T<\pi$，而表示成 Ω 函数的离散时间傅里叶变换是

$$X(e^{j\Omega T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi\delta(\Omega-\Omega_0-k\Omega_s)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0-k\Omega_s)]$$

如果我们关注的是频率在 $-\pi/T<\Omega<\pi/T$ 内的基带，就得

$$X(e^{j\Omega T})=\frac{\pi}{T}\delta(\Omega-\Omega_0)+\frac{\pi}{T}\delta(\Omega+\Omega_0),\quad |\Omega|\leqslant\pi/T \tag{4.48}$$

为了用 ω 来表示这个离散时间傅里叶变换，可以在(4.48)式中用 $\Omega=\omega/T$ 代入，并利用 $\delta(\omega/T)=T\delta(\omega)$这一结果，就得到

$$X(e^{j\omega})=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0),\qquad |\omega|\leqslant\pi$$

当然，离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$周期重复，在变量 ω 上周期为 2π，而 $X(e^{j\omega T})$则是以周期为 $2\pi/T$周期重复。现在由(4.46)式，输出的离散时间傅里叶变换是

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})&=H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})\\&=\frac{j\omega}{T}[\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)]\\&=\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\omega+\omega_0),\quad |\omega|\leqslant\pi\end{aligned}$$

由(4.32)式，D/C 转换器输出的连续时间傅里叶变换对于 $|\Omega|\leqslant\pi/T$ 则是

$$\begin{aligned}Y_r(j\Omega)&=H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T})=TY(e^{j\Omega T})\\&=T\left[\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T-\Omega_0 T)-\frac{j\omega_0\pi}{T}\delta(\Omega T+\Omega_0 T)\right]\\&=T\left[\frac{j\omega_0\pi}{T}\frac{1}{T}\delta(\Omega-\Omega_0 T)-\frac{j\omega_0\pi}{T}\frac{1}{T}\delta(\Omega+\Omega_0)\right]\\&=j\Omega_0\delta(\Omega-\Omega_0)-j\Omega_0\delta(\Omega+\Omega_0)\end{aligned}$$

因此，该重构滤波器选取在 $\pm\Omega_0$ 处的两个冲激，所以立即可得

$$y_r(t)=j\Omega_0\frac{1}{2}e^{j\Omega_0 t}-j\Omega_0\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 t}=-\Omega_0\sin(\Omega_0 t)$$

得到所期望的结果是

$$y_r(t)=\frac{d}{dt}[x_c(t)]$$

4.4.2　脉冲响应不变

已经证明，图 4.11 的级联系统对带限输入信号而言能够等效成一个线性时不变系统。现在假定已给出的是一个所要求的连续时间系统，而希望用图 4.11 的形式来实现它，如图 4.15 所示。由于 $H_c(j\Omega)$是带限的，(4.38)式给出了如何选择 $H(e^{j\omega})$，以满足 $H_{\text{eff}}(j\Omega)=H_c(j\Omega)$。特别是

$$H(e^{j\omega})=H_c(j\omega/T),\quad |\omega|<\pi \tag{4.49}$$

进一步的要求是应选择 T，使

$$H_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geqslant \pi/T \tag{4.50}$$

在(4.49)式和(4.50)式的约束下，连续时间冲激响应 $h_c(t)$ 和离散时间单位脉冲响应 $h[n]$ 之间也存在着一个直接而有用的关系。特别是如下面将要证明的，存在有

$$h[n] = Th_c[nT] \tag{4.51}$$

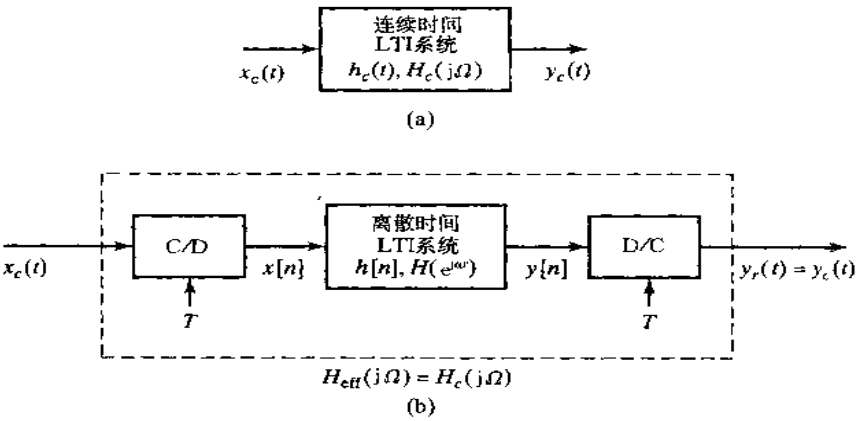


图 4.15 (a)连续时间 LTI 系统；(b)对带限输入的等效系统

即，离散时间系统的单位脉冲响应就是一个在幅度上受到加权的 $h_c(t)$ 的采样序列。当 $h[n]$ 和 $h_c(t)$ 是通过(4.51)式联系在一起时，该离散时间系统就可以说成是连续时间系统的一个**脉冲响应**不变型式。

(4.51)式是 4.2 节讨论的一个直接结果。在(4.16)式中，将 $x[n]$ 和 $x_r(t)$ 分别用 $h[n]$ 和 $h_c(t)$ 代替，即

$$h[n] = h_c(nT) \tag{4.52}$$

(4.20)式就变成

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{4.53}$$

或者，若(4.50)式成立

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi \tag{4.54}$$

考虑到(4.51)式中的幅度因子 T，将(4.52)式和(4.54)式作点变化，就得

$$h[n] = Th_c(nT), \tag{4.55}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leqslant \pi \tag{4.56}$$

例 4.7 由脉冲响应不变法求得一离散时间低通滤波器

假设想要得到一个截止频率 $\omega_c < \pi$ 的理想低通离散时间滤波器，可以用采样一个截止频率 $\Omega_c = \omega_c/T < \pi/T$ 的连续时间理想低通滤器来完成。这个连续时间理想低通滤波器定义为

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| \leqslant \Omega_c \end{cases}$$

它的单位冲激响应是

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}$$

所以定义离散时间的单位脉冲响应为

$$h[n] = Th_c(nT) = T\frac{\sin(\Omega_c nT)}{\pi nt} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

式中 $\omega_c = \Omega_c T$。我们已经证明过，这个序列对应的离散时间傅里叶变换为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

这就如同(4.56)式所预期的，和 $H_c(j\omega/T)$是一样的特性。

例 4.8　脉冲响应不变法应用于具有有理系统函数的连续时间系统

很多连续时间系统的单位冲激响应都由指数序列和的形式所组成

$$h_c(t) = Ae^{s_0 t}u(t)$$

这样的时间函数其拉普拉斯变换为

$$H_c(s) = \frac{A}{s - s_0}$$

如果把脉冲响应不变的概念应用到这样一类连续时间系统，就得到单位脉冲响应为

$$h[n] = Th_c(nT) = Ae^{s_0 Tn}u[n]$$

它的 z 变换为

$$H(z) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T}z^{-1}}$$

频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T}e^{-j\omega}}$$

在这种情况下，(4.56)式不能完全成立，因为原连续时间系统没有严格带限的频率响应。因此所得离散时间频率响应是一个 $H_c(j\Omega)$的混叠结果，即使是混叠效果可能很小。高阶系统的单位冲激响应由多个复指数的和组成，因此其频率响应在高频区域衰减较快，如果采样率足够高，混叠是很小的。因此，连续时间系统的离散时间仿真的一种途径，同时也是数字滤波器设计的一种方法就是经由采样一个相应的模拟滤波器的单位冲激响应来实现。

4.5　离散时间信号的连续时间处理

我们在 4.4 节讨论和分析了利用离散时间系统，以图 4.11 的形式来处理连续时间信号。这一节将研究如图 4.16 所示的一种互补的情况，这种情况可以把它称作离散时间信号的连续时间处理。虽然图 4.16 这种系统一般是不会用来实现离散时间系统的，但是它却提供了对某些离散时间系统的一种有用的解释。

根据理想 D/C 转换器的定义，对于$|\Omega| \geqslant \pi/T$，$X_c(j\Omega)$从而 $Y_c(j\Omega)$都必定是零。因此，C/D 转换器对 $y_c(t)$采样而不会引起混叠，$x_c(t)$和 $y_c(t)$就能表示成如下：

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \tag{4.57}$$

和

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t - nT)/T]}{\pi(t - nT)/T} \tag{4.58}$$

式中 $x[n] = x_c(nT)$，$y[n] = y_c(nT)$。图 4.16 的频域关系是：

$$X_c(j\Omega) = TX(e^{j\Omega T}), \qquad |\Omega| < \pi/T \tag{4.59a}$$

$$Y_c(j\Omega) = H(j\Omega)X_c(j\Omega), \qquad |\Omega| < \pi/T \tag{4.59b}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}Y_c(j\omega/T), \qquad |\omega| < \pi \tag{4.59c}$$

因此，将(4.59a)式和(4.59b)式代入(4.59c)式，立即可得：整个系统表现为一个离散时间系统，其频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = H_c(j\omega/T), \qquad |\omega| < \pi \tag{4.60}$$

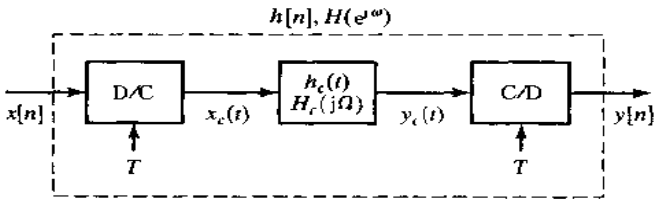


图 4.16　离散时间信号的连续时间处理

或者说，如果该连续时间系统的频率响应是

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}), \quad |\Omega| < \pi/T \tag{4.61}$$

那么图 4.16 系统的总频率响应就等于一个给定的 $H(e^{j\omega})$。因为 $X_c(j\Omega) = 0$，$|\Omega| \geqslant \pi/T$，$H_c(j\Omega)$在 π/T 以上可以任意选定。一种方便(但是任意)的选择是 $H_c(j\Omega) = 0$，$|\Omega| \geqslant \pi/T$。

利用离散时间系统的这种表示，就能把注意力放在对带限连续时间信号 $x_c(t)$的连续时间系统的等效效果上。现在用例 4.9 和例 4.10 来说明这一点。

例 4.9　非整数延迟

考虑一个离散时间系统，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\Delta}, \quad |\omega| < \pi \tag{4.62}$$

当 Δ 是一个整数时，该系统就有一个明确的解释——延迟 Δ，即

$$y[n] = x[n - \Delta] \tag{4.63}$$

当 Δ 不是整数时，(4.63)式没有正规意义，因为我们无法将序列 $x[n]$移位到不是一个整数上。然而，利用图 4.16，一种有用的时域解释就可以应用到由(4.62)式所表征的系统上。考虑将图 4.16 中 $H_c(j\Omega)$选成

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega\Delta T} \tag{4.64}$$

那么，根据(4.61)式，图 4.16 中的整个离散时间系统将有由(4.62)式所给出的频率响应，不论 Δ 是不是一个整数。为了说明(4.62)式的系统，注意到(4.64)式代表延迟 ΔT 秒。因此，

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta T) \tag{4.65}$$

再者 $x_c(t)$是 $x[n]$的带限内插，而 $y[n]$是 $y_c(t)$的采样。例如，若 $\Delta = 1/2$，那么，$y[n]$就是输入序列值之间带限内插后一半处的那些值。这如图 4.17 所表明的那样。对于由(4.62)式所定义的系统也能求得一个直接的卷积表示。由(4.65)式和(4.57)式可得

$$y[n] = y_c(nT) = x_c(nT - \Delta T)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin[\pi(t-\Delta T-kT)/T]}{\pi(t-\Delta T-kT)/T}\Bigg|_{t=nT} \tag{4.66}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{\sin\pi(n-k-\Delta)}{\pi(n-k-\Delta)}$$

按照卷积定义，上式就是 $x[n]$ 与如下 $h[n]$ 的卷积：

$$h[n] = \frac{\sin\pi(n-\Delta)}{\pi(n-\Delta)}, \quad -\infty < n < \infty$$

当 Δ 不是整数时，$h[n]$ 有无限长。然而，当 $\Delta = n_0$ 是一个整数时，极易证明 $h[n] = \delta[n-n_0]$，这就是理想整数延迟系统的单位脉冲响应。

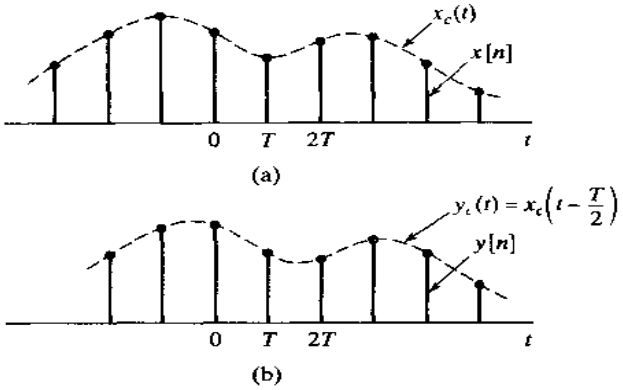


图 4.17 (a)中的离散时间序列的连续时间处理可以产生一个"半样本间隔"延迟的新序列，如图(b)所示

由(4.66)式所表示的非整数延迟有很大的实际意义，因为这样的因式在系统的频域表示中常常出现。当这一项在一个因果离散时间系统的频域响应中遇到时，就可以用这个例子来给予说明。例 4.10 就说明这一点。

例 4.10 具有非整数延迟的滑动平均系统

在例 2.20 中曾研究过一般的滑动平均系统，并得出它的频率响应。对于因果 $(M+1)$ 点滑动平均系统的情况，有 $M_1=0$ 和 $M_2=M$，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(M+1)} \frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}, \quad |\omega| < \pi \tag{4.67}$$

这个频率响应的表示式告诉我们可以将 $(M+1)$ 点滑动平均系统看作两个系统的级联，如图 4.18 所示。第 1 个系统施加一个频域幅度加权，而第 2 个系统则代表(4.67)式中的线性相移项。如果 M 是一个偶数(意味着有一个奇数样本的滑动平均)，那么线性相移项就相应于一个整数延迟，即

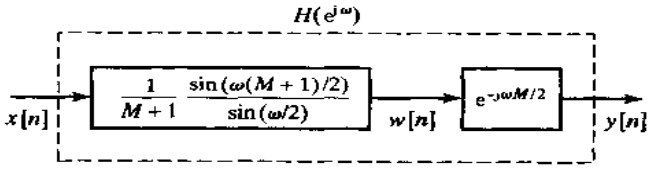


图 4.18 滑动平均系统表示成两个系统的级联

$$y[n] = w[n - M/2] \tag{4.68}$$

然而，若 M 为奇数，该线性相移项就相应于一个非整数延迟，也就是一个整数样本再加上半个样本间隔。这个非整数延迟就可以用例 4.9 的讨论来解释；即，$y[n]$ 是等效于 $w[n]$ 的带限内插，紧跟着一个连续时间 $MT/2$ 的延迟（这里 T 是假定的，但是与 D/C 内插 $w[n]$ 有关的任意采样周期），再跟着一个仍用采样周期 T 的 C/D 转换。现用图 4.19 来说明这个分数延迟。图 4.19(a) 示出一个离散时间序列 $x[n]=\cos(0.25\pi n)$，该序列用作一个 6 点（$M=5$）滑动平均滤波器的输入。在本例中，假定这个输入加上已经很久了，以至于在图展示的时段内输出仅由稳态响应所组成。图 4.19(b) 是相应的输出序列，它由下式给出：

$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j0.25\pi})\frac{1}{2}e^{j0.25\pi n} + H(e^{-j0.25\pi})\frac{1}{2}e^{-j0.25\pi n} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin[3(0.25\pi)]}{2\sin(0.125\pi)}e^{-j(0.25\pi)5/2}e^{j0.25\pi n} + \frac{1}{2}\frac{\sin[3(-0.25\pi)]}{6\sin(-0.125\pi)}e^{j(0.25\pi)5/2}e^{-j0.25\pi n} \\ &= 0.308\cos[0.25\pi(n-2.5)] \end{aligned}$$

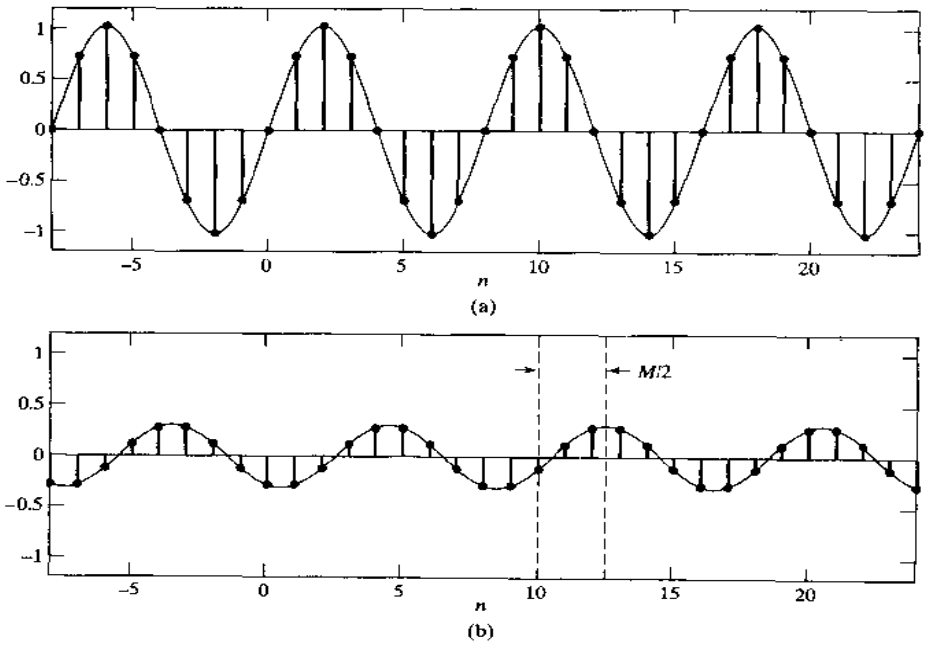


图 4.19　说明滑动平均滤波

(a) 输入信号 $x[n]=\cos(0.25\pi n)$；(b) 6 点滑动平均滤波器的对应输出

由此式可见，6 点滑动平均滤波器减小了该余弦信号的幅度，并引入对应于 2.5 个样本延迟的相移。这点从图 4.19 中很容易看出，图中已经画出了连续时间的余弦曲线，它们就是在输入和输出序列上由理想 D/C 转换器内插的结果。应该注意到，在图 4.19(b) 中 6 点滑动平均滤波给出了一个已采样的余弦信号，使得这些样本点相对于输入的样本点已经移位了 2.5 个样本。这点只要将图 4.19(a) 和 (b) 上任选一个峰值点作比较就能看到，比如在图 4.19(a) 上对输入的内插余弦峰值点 10，在图 4.19(b) 中对输出的内插余弦上该峰值点移到 12.5。因此，该 6 点滑动平均滤波器就被认为有一个 $5/2=2.5$ 个样本的延迟。

4.6 利用离散时间处理改变采样率

已经看到，一个连续时间信号 $x_c(t)$能用如下样本序列

$$x[n] = x_c(nT) \tag{4.69}$$

组成的离散时间信号来表示。另一方面，前面的讨论已经证明，即使 $x[n]$不是最初由采样得到的，也总能利用(4.25)式找到一个连续时间带限信号 $x_r(t)$，它的样本是 $x[n]=x_c(nT)$。

往往有必要改变一个离散时间信号的采样率，也就是说，为了得到以同一个连续时间信号为基础的一个新的离散时间序列

$$x'[n] = x_c(nT') \tag{4.70}$$

式中 $T'\neq T$。从 $x[n]$得到序列 $x'[n]$的一种办法是利用(4.25)式从 $x[n]$重构 $x_c(t)$，然后以周期 T'对 $x_c(t)$重新采样以得到 $x'[n]$。由于在实际中所用的都是非理想的模拟重构滤波器、D/A 转换和 A/D 转换器，所以往往这不是一个可取的办法。因此，考虑一些只涉及离散时间运算的方法来变化采样率是值得讨论的。

4.6.1 采样率按整数因子减小

利用"采样"一个序列可以降低一个序列的采样率，即定义一个新序列为

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT) \tag{4.71}$$

由(4.71)式定义的系统如图 4.20 所示，称之为**采样率压缩器**(Crochiere and Rabiner, 1983)，或者简称为**压缩器**。从(4.71)式很清楚，$x_d[n]$可以用采样周期 $T'=MT$ 直接采样 $x_c(t)$来得到。再者，如果 $X_c(j\Omega)=0$，$|\Omega|>\Omega_N$，并且 $\pi/T'=\pi(MT)>\Omega_N$，那么 $x_d[n]$也是 $x_c(t)$的真正表示。也就是说，如果原采样率至少是 M 倍的奈奎斯特率，或者该序列的带宽首先用离散时间滤波减小 M 倍的话，那么采样率就能减小 M 倍而不会引起混叠。一般，减小采样率的过程(包括任何预滤波)称为**减采样**(downsampling)。

和采样一个连续时间信号的情况一样，求出压缩器输入输出间的频域关系是有用的。然而这时将是离散时间傅里叶变换之间的一种关系。虽然可用几种方法来导出所要求的结果，但是我们将把推导建立在对采样连续时间信号已经得到的结果的基础上。首先，$x[n]=x_c(nT)$的离散时间傅里叶变换是

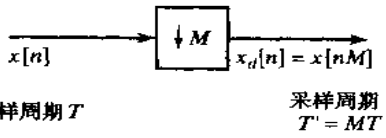


图 4.20 离散时间采样器或压缩器的表示

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{4.72}$$

类似地，以 $T'=MT$ 的 $x_d[n]=x[nM]=x_c(nT')$的离散时间傅里叶变换是

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T'} - j\frac{2\pi r}{T'}\right) \tag{4.73}$$

现在，由于 $T'=MT$，(4.73)式就能够写成

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{MT} - j\frac{2\pi r}{MT}\right) \tag{4.74}$$

为了看出(4.74)式与(4.72)式之间的关系，注意到(4.74)式中的求和指数 r 可以表示成

$$r = i + kM \tag{4.75}$$

式中 k 和 i 都是整数，且 $-\infty < k < \infty$ 和 $0 \leqslant i \leqslant M-1$。很明显，这样 r 仍是一个整数且在 $-\infty$到∞的范围内变化。但是现在(4.74)式就能够写成

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega}{MT} - j\frac{2\pi k}{T} - j\frac{2\pi i}{MT}\right)\right] \tag{4.76}$$

(4.76)式中方括号内的这一项从(4.72)式就可以看作

$$X(e^{j(\omega-2\pi i)/M}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_c\left(j\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - j\frac{2\pi k}{T}\right) \tag{4.77}$$

这样就能将(4.76)式表示成

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)}) \tag{4.78}$$

(4.72)式和(4.78)式之间的类似性是很清楚的。(4.72)式是利用连续时间信号 $x_c(t)$的傅里叶变换来表示样本序列 $x[n]$(采样周期为 T)的傅里叶变换的；(4.78)式则是利用序列 $x[n]$的傅里叶变换来表示离散时间采样序列 $x_d[n]$(采样周期为 M)的傅里叶变换的。如果将(4.73)式与(4.78)式作一比较，就能看出：$X_d(e^{j\omega})$既能认为是由频率按 $\omega = \Omega T'$作尺度变化，并按 $2\pi/T'$整数倍移位的无数个 $X_c(j\Omega)$的复本所组成((4.73)式)；也可看作是由频率受到 M 倍扩展的、并按 $2\pi/M$ 整倍数移位的 M 个周期傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$的复本所组成((4.78)式)。任何一种解释都明显地说明：$X_d(e^{j\omega})$是周期的，周期为 2π(如同所有的离散时间傅里叶变换一样)，并且只要保证 $X(e^{j\omega})$是带限的，即

$$X(e^{j\omega}) = 0, \quad \omega_N \leqslant |\omega| \leqslant \pi \tag{4.79}$$

以及 $2\pi/M \geqslant 2\omega_N$，就可以避免混叠

减采样的过程如图 4.21 所示。图(4.21)(a)示出一个带限连续时间信号的傅里叶变换，而图 4.21(b)则是用采样周期 T 得到的样本冲激串的傅里叶变换。图 4.21(c)是 $X(e^{j\omega})$，并通过(4.18)式与图 4.21(b)联系起来。如同我们已经看到的，图 4.21(b)和(c)的差别仅仅在将频率轴重新给以标定。图 4.21(d)是当 $M=2$ 时减采样序列的离散时间傅里叶变换，图中已将这个傅里叶变换画成归一化频率 $\omega = \Omega T'$的函数。最后图 4.21(e)就是减采样序列的离散时间傅里叶变换画作连续时间频率变量 Ω 的函数。图 4.21(e)与图 4.21(d)除了频率轴按 $\Omega = \omega/T'$的关系重新标定外，两者是完全一样的。

在本例中 $2\pi/T = 4\Omega_N$，就是说原采样率是为避免混叠所需最低采样率的两倍。因此，当原采样序列以 $M=2$ 减采样时，没有任何混叠发生。在这个情况下，如果减采样因子是大于2，混叠就会产生，如图 4.22 所示。

图 4.22(a)示出 $x_c(t)$的连续时间傅里叶变换，图 4.22(b)是当 $2\pi/T = 4\Omega_N$ 时序列 $x[n] = x_c(nT)$的离散时间傅里叶变换。因此有 $\omega_N = \Omega_N T = \pi/2$。现在如果以 $M=3$ 减采样，就得到一个序列为 $x_d[n] = x[3n] = x_c[n3T]$，它的离散时间傅里叶变换如图 4.22(c)所画(用归一化频率 $\omega = \Omega T'$)。注意到由于 $M\omega_N = 3\pi/2 > \pi$，所以发生混叠。一般为了在以 M 因子减采样时避免混叠，就要求

$$\omega_N M < \pi \qquad 或 \qquad \omega_N < \pi/M \tag{4.80}$$

如果这个条件不满足，就会发生混叠，但是对某些应用来说可能是允许的。在另一些情况下，如果在减采样之前希望减小信号 $x[n]$带宽的话，减采样也能在没有混叠的情况下完成。因

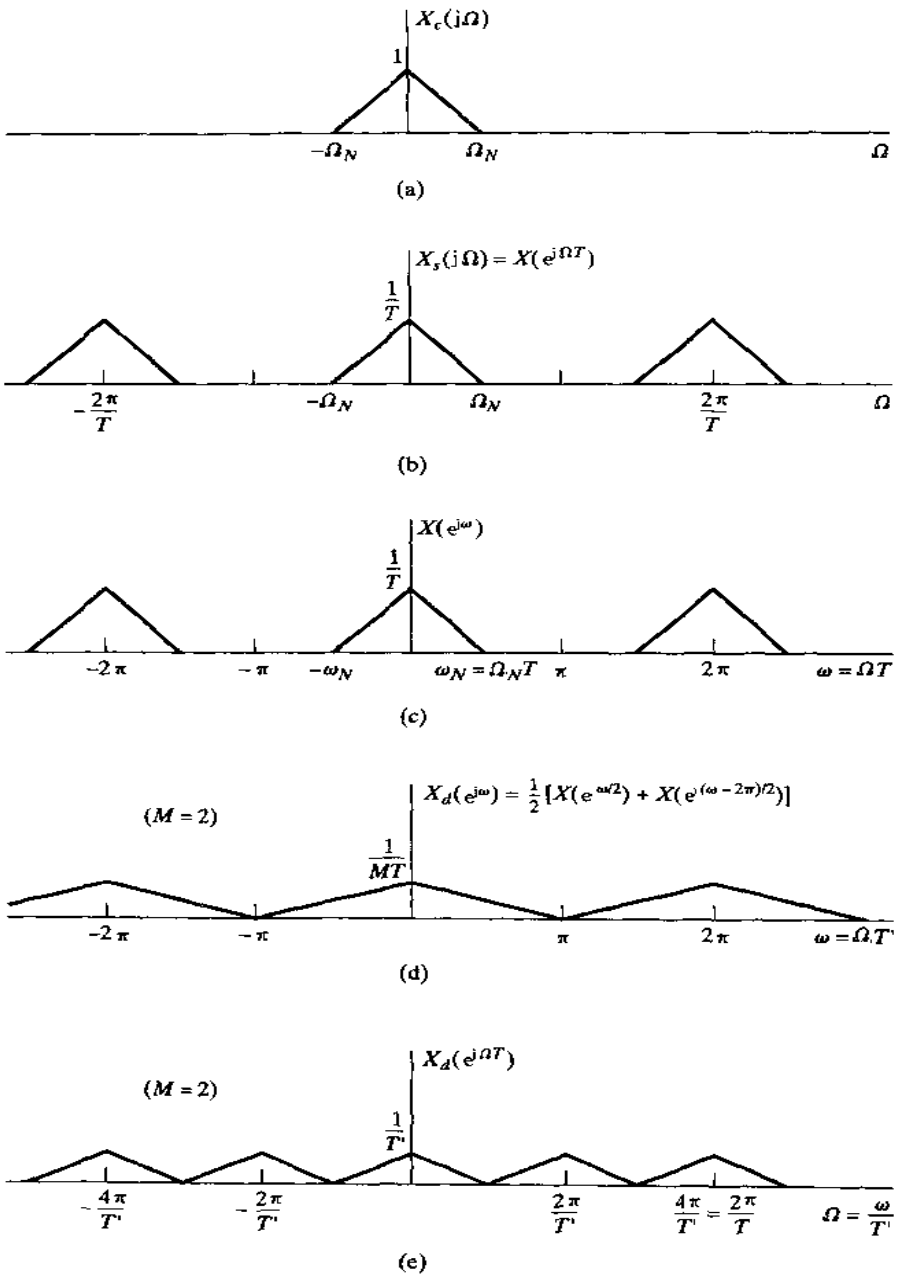


图 4.21 减采样的频域说明

此，如果 $x[n]$用一个截止频率为 π/M 的理想低通滤波器过滤的话，那么输出 $\tilde{x}[n]$也能减采样而没有混叠，如图 4.22(d)，(e)和(f)所示。应该注意，序列 $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}[nM]$已不再代表原来的连续时间信号 $x_c(t)$了，而是 $\tilde{x}_d[n] = \tilde{x}_c[nT']$，这里 $T' = MT$，而 $\tilde{x}_c(t)$则是从 $x_c(t)$用

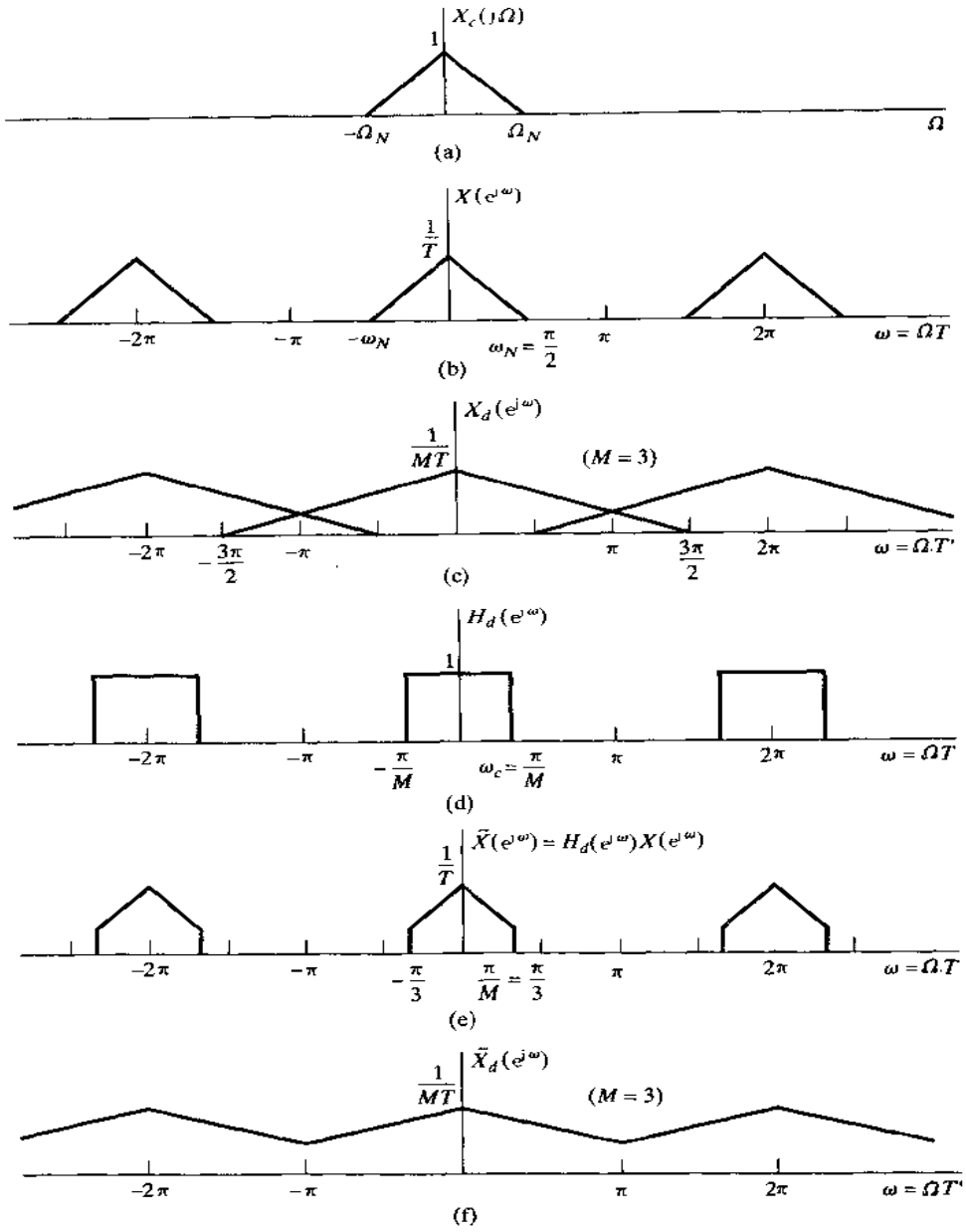


图 4.22 (a)～(c)有混叠的减采样；(d)～(f)具有为避免混叠的预滤波的减采样

截止频率为 $\Omega_c=\pi/T'=\pi/(MT)$的低通过滤后而得到的。

从上述的讨论中可见，对于以 M 因子减采样的一般系统就是由图 4.23 所示的系统。这样的系统称为**抽取器**，而用低通过滤再紧跟着压缩的减采样过去一直称做抽取(Cochiere and Rabiner, 1983)。

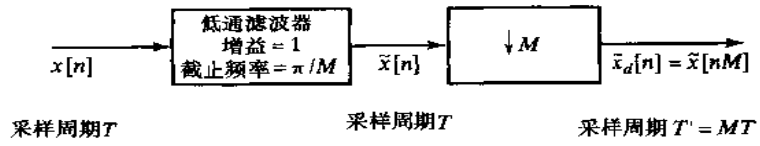


图 4.23　采样率减小 M 倍的一般系统

4.6.2　采样率按整数因子增加

已经知道离散时间信号以某一整数因子减小采样率就如同采样一个连续时间信号那样涉及序列的采样。不容置疑，增加采样率应涉及到类似于 D/C 转换器那样的过程。为了看出这点，考虑一个信号 $x[n]$，希望将它的采样率增加 L 倍。若考虑的是下面的连续时间信号 $x_c(t)$，那么目的就是要得到样本为

$$x_i[n] = x_c(nT') \tag{4.81}$$

的序列，式中 $T' = T/L$，而 $x_i[n]$要从样本序列

$$x[n] = x_c(nT) \tag{4.82}$$

中得到。我们把增加采样率的过程称为**增采样**(Upsampling)。

很清楚，由(4.81)式和(4.82)式

$$x_i[n] = x[n/L] = x_c(nT/L),\ n = 0, \pm L, \pm 2L, \cdots \tag{4.83}$$

图 4.24 示出了一个仅用离散时间处理从 $x[n]$得到 $x_i[n]$的系统。该系统的左边称为**采样率扩展器**(Crochiere and Rabiner, 1983)，或简称为**扩展器**。它的输出是

$$x_e[n] = \begin{cases} x[n/L], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \cdots \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{4.84}$$

或者等效为

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL] \tag{4.85}$$

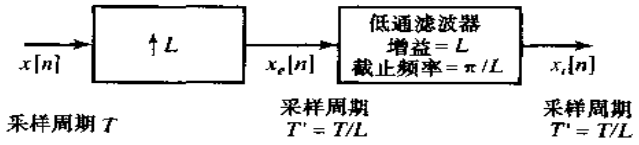


图 4.24　采样率增加 L 倍的一般系统

该系统的右边是一个截止频率为 π/L，增益为 L 的低通离散时间滤波器。该系统起的作用类似于图 4.10(b)中理想 D/C 转换器的作用。首先产生一个离散时间冲激串 $x_e[n]$，然后用低通滤波器来重构该序列。

图 4.24 系统的工作最容易在频域中解释。$x_e[n]$的傅里叶变换可以表示成

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL] \Big) e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega Lk} = X(e^{-j\omega L}) \end{aligned} \tag{4.86}$$

因此，扩展器输出的傅里叶变换就是频率尺度受到变换的输入的傅里叶变换，这就是说，用 ωL 代表 ω 以使得现在的 ω 是按下式归一化的：

$$\omega = \Omega T' \tag{4.87}$$

其效果如图 4.25 所示。图 4.25(a)是某一带限的连续时间信号的傅里叶变换，而图 4.25(b)

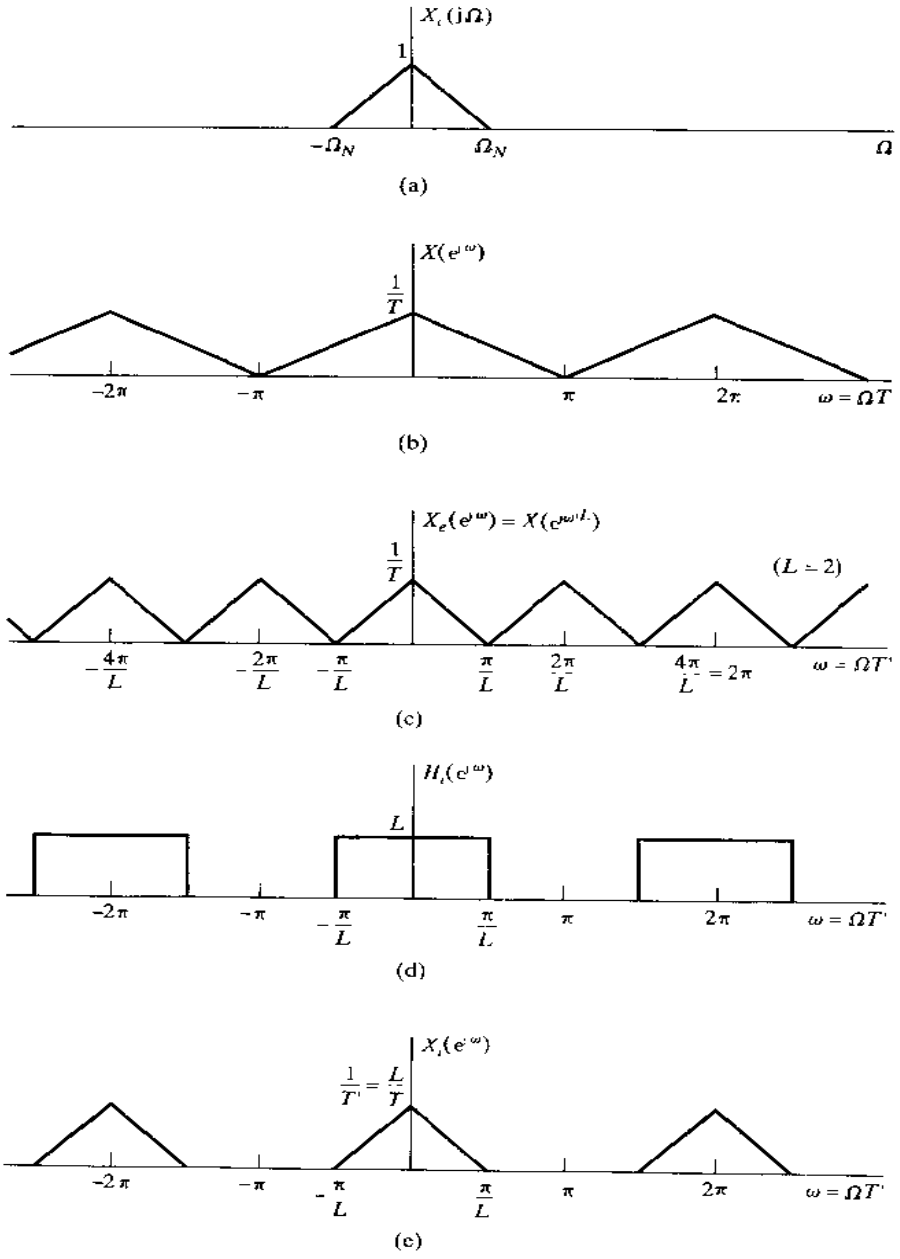


图 4.25　内插的频域说明

则是序列 $x[n]=x_c(nT)$（这里 $\pi/T=\Omega_N$）的离散时间傅里叶变换。图 4.25(c)是根据(4.86)式，当 $L=2$ 时的 $X_e(e^{j\omega})$，而图 4.25(e)就是所求序列 $x_i[n]$的傅里叶变换。可以看到，$X_i(e^{j\omega})$可以从 $X_e(e^{j\omega})$得到，这只要把幅度因子由 $1/T$ 改为 $1/T'$，并除掉 $X_e(e^{j\omega})$中除了在 2π 整倍数点上的全部经频率尺度变换后的 $X_c(j\Omega)$的图形。对于如图 4.25 所示情况，这就要求有一个增益为 2、截止频率为 $\pi/2$ 的低通滤波器，如图 4.25(d)所示。一般来讲，所要求的增益为 L，因为 $L(1/T)=[1/(T/L)]=1/T'$，而截止频率为 π/L。

这个例子说明，如果序列 $x[n]=x_c(nT)$是经采样而得到的话（没有混叠），图 4.24 的系统确实给出了一个满足(4.81)式的输出。因此，那个系统称为内插器，因为系统填补了丢掉的样本，并因此把增采样的过程与内插同义。

和 D/C 转换器情况一样，有可能利用 $x[n]$求得一个 $x_i[n]$的内插公式。首先注意到图 4.24 中低通滤波器的单位脉冲响应是

$$h_i[n]=\frac{\sin(\pi n/L)}{\pi n/L} \tag{4.88}$$

利用(4.85)式可得

$$x_i[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\frac{\sin[\pi(n-kL)/L]}{\pi(n-kL)/L} \tag{4.89}$$

单位脉冲响应 $h_i[n]$有下列性质：

$$\begin{aligned}&h_i[0]=1\\&h_i[n]=0,\quad n=\pm L,\pm 2L,\cdots\end{aligned} \tag{4.90}$$

由此对理想低通内插滤波器就有

$$x_i[n]=x[n/L]=x_c(nT/L)=x_c(nT'),\quad n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots \tag{4.91}$$

这就是所要求的，对全部 n，$x_i[n]=x_c(nT')$这一事实从频域证明直接可得。

实际上，理想低通滤波器是不能真正实现的，但是在第 7 章将看到相当好的近似却是能设计出来的（也可见 Schafer and Rabiner, 1973 及 Oetken et al., 1975）。在某些情况下，很简单的内插过程就很可以了。因为线性内插常被应用（虽然一般不是很准确），所以值得在刚才所建立的一般框架内来考查一下线性内插。

按图 4.24 的系统，线性内插可用具有下述单位脉冲响应的滤波器来完成：

$$h_{\text{lin}}[n]=\begin{cases}1-|n|/L, & |n|\leqslant L\\0, & \text{其它}\end{cases} \tag{4.92}$$

对 $L=5$，就如图 4.26 所示。利用这个滤波器，内插输出就是

$$x_{\text{lin}}[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_e[k]h_{\text{lin}}[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_{\text{lin}}[n-kL] \tag{4.93}$$

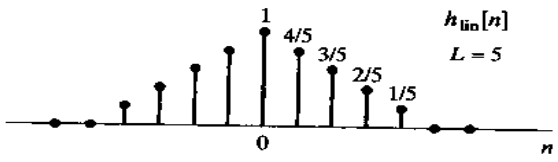


图 4.26　线性内插的单位脉冲响应

图 4.27(a)画出的是 $L=5$ 时的 $x_r[n]$和 $x_{\text{lin}}[n]$。从该图可见，$x_{\text{lin}}[n]$与样本间按线性内插

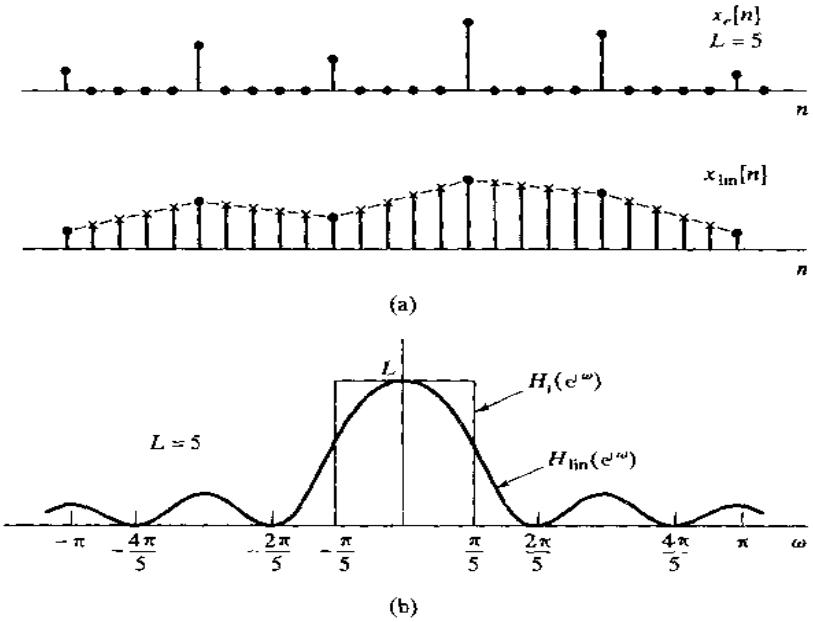


图 4.27 (a)线性内插的说明；(b)线性内插滤波器与理想低通内插滤波器频率响应的比较

所得到的序列是一致的。应该注意到

$$h_{\text{lin}}[0]=1$$
$$h_{\text{lin}}[n]=0, \qquad n=\pm L,\pm 2L,\cdots \tag{4.94}$$

所以有

$$x_{\text{lin}}[n]=x[n/L], \qquad n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots \tag{4.95}$$

内插样本的失真大小可以用比较线性内插器和理想低通内插器对同一个内插因子 L 的频率响应来估计。可以证明(见习题 4.50)

$$H_{\text{lin}}(e^{j\omega})=\frac{1}{L}\left[\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 \tag{4.96}$$

$L=5$ 时，该函数与理想低通内插滤波器的频率响应一起示于图 4.27(b)。由该图可以明显看到，如果原始信号是以奈奎斯特率采样得到的话，线性内插将不会很好，因为滤波器的输出包含有位于 $\pi/L<|\omega|\leqslant\pi$ 带内相当大的能量。然而，如果原采样率大大高于奈奎斯特率，那么线性内插器在滤除 $2\pi/L$ 整倍数点上经频率尺度变换后的 $X_r(j\Omega)$的图形还是相当成功的。这一点在直观上也是合情理的，因为若原采样率大大超过奈奎斯特率，那么信号在样本间将不会有明显变化，因此线性内插对于过采样的信号就应该是更为准确了。

4.6.3 采样率按非整数因子变化

我们已经指出如何将一个序列的采样率按某一整数因子增加或减小。将抽取和内插结合

起来，就有可能用某一非整数因子来变更采样率。更具体些，可以考虑图 4.28(a)。图中示出一个内插器，把采样周期从 T 降到 T/L，然后紧跟着一个抽取器，该抽取器又将采样周期提高 M 倍，所产生的输出序列 $\tilde{x}_d[n]$真正有效的采样周期为 $T' = TM/L$。通过适当地选择 L 和 M，就能够任意地接近任何所要求的采样周期的比。例如，若 $L = 100$，$M = 101$，则 $T' = 1.01T$。

如果 $M > L$，那么在采样周期上就有一个净的增加(采样率下降)；若 $M < L$，则相反。由图 4.28(a)可见，内插和抽取滤波器是级联的，可以把两者合并在一起组成一个低通滤波器，其增益为 L，而截止频率为 π/L 和 π/M 两者中的最小值，如图 4.28(b)所示。如果 $M > L$，那么 π/M 就是主截止频率，从而在采样率上有一个净的减小。正如在 4.6.1 节所指出的，若 $x[n]$是以奈奎斯特率采样得到的话，如果想要避免混叠，那么序列 $\tilde{x}_d[n]$将代表一个原带限信号经低通过滤后的信号。另一方面，若 $M < L$，那么 π/L 就是主截止频率，这时将不需对低于原奈奎斯特频率的信号的带宽提出进一步的限制。

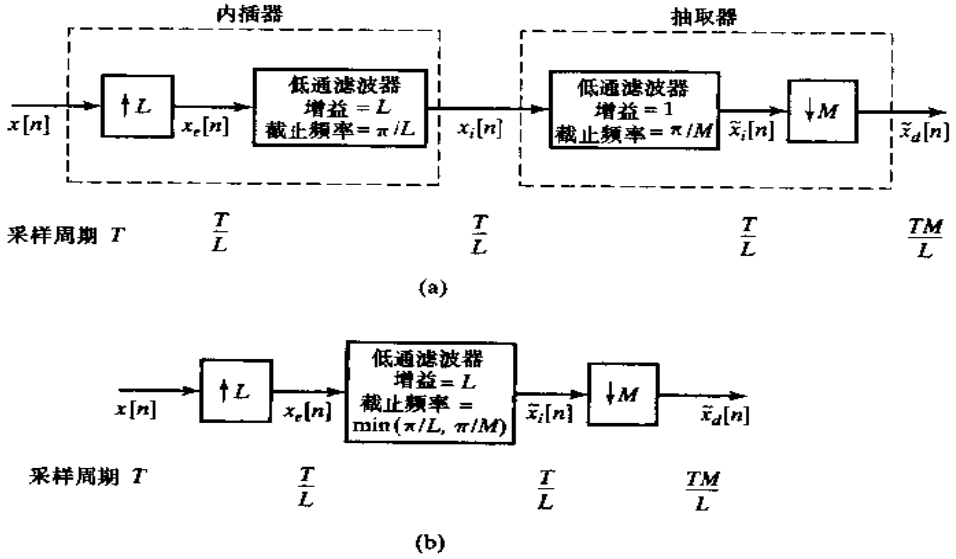


图 4.28 (a)按非整数因子改变采样率的系统；(b)抽取和内插滤波器合而为一的简化系统

例 4.11 采样率按一非整数有理因子的转换

图 4.29 说明按某一有理因子变换采样率的例子。假设如图 4.29(a)所给出的带限信号 $X_c(j\Omega)$对其在奈奎斯特率下进行采样，即 $2\pi/T = 2\Omega_N$。所得到离散时间傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

画在图 4.29(b)上。如果我们欲想将采样周期改变为 $T' = (3/2)T$，那么就必须先按因子 $L = 2$ 内插，然后再按因子 $M = 3$ 抽取。这就意味着在采样率上有净的降低，而原信号又是在奈奎斯特率下采样的，所以为了避免混叠必须要考虑另外的低通过滤。

图 4.29(c)示出 $L = 2$ 的增采样器输出的离散时间傅里叶变换。如果我们关注的只是在以因子为 2 的内插上，就能选取这个低通滤波器的截止频率 $\omega_c = \pi/2$，增益为 $L = 2$。但是，该滤波器输出要以

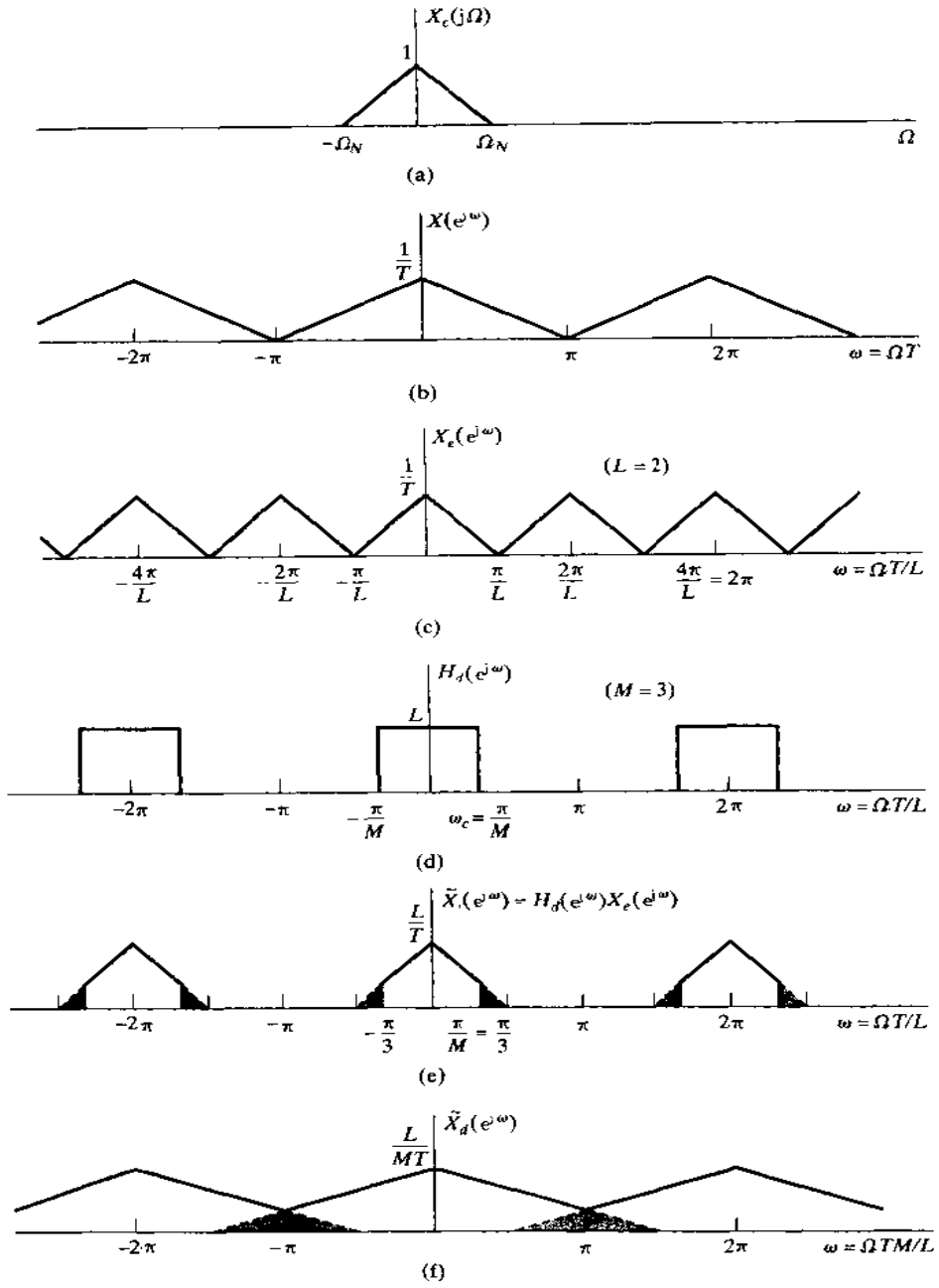


图 4.29　按非整数因子变换采样率的说明

$M=3$ 抽取，因此就必须用一个截止频率为 $\omega_c=\pi/3$，而滤波器增益仍应该为 2 的低通滤波器，如图 4.29(d)所示。该低通滤波器输出的傅里叶变换 $\tilde{X}_i(e^{j\omega})$ 如图 4.29(e)所示。图中阴影部分指出由于用于内插滤波器较低的截止频率而被滤除掉的信号频谱部分。最后，图 4.29(f)示出按 $M-3$ 的

减采样器输出的离散时间傅里叶变换。应该注意到，该图的阴影区域表明如果内插低通滤波器的截止频率不是 $\pi/3$ 而是本来的 $\pi/2$ 的话，本应该发生的混叠部分。

4.7 多采样率信号处理

已经看到，用内插和抽取的组合有可能变化一个离散时间信号的采样率。例如，如果我们想要一个新的采样周期 $T'=1.01T$，就能够首先用截止频率 $\omega_c=\pi/101$ 的低通滤波器以 $L=100$ 内插，然后再按 $M=101$ 抽取来实现。在采样率上这些大的中间变化，如果是在所要求的高的中间采样率上直接实现这一过滤的话，那么对每个输出样本来说都会要求有大的计算量。所幸的是，如果利用在多采样率信号处理领域一些基本技术，就有可能大大降低所要求的计算量。多采样率技术一般指的是利用增采样，减采样，压缩器和扩展器等各种方式来提高信号处理系统的效率。除了它们在采样率转换中的应用外，在利用过采样和噪声整形的 A/D 和 D/A 系统中也是极为有用的。另一类用于信号分析和/或处理的重要信号处理算法是滤波器组，而这些算法也日益依赖于多采样率技术。

正是由于它们广泛的可适用性，因此在多采样率信号处理方面有大量的研究成果。这一节我们主要集中在两个基本的成果上，并展示如何将这些成果组合起来以能大大提高采样率转换中的效率。第一个成果是有关滤波和减采样或增采样操作的交换，第二个是多相分解问题。

4.7.1 滤波和减采样/增采样的互换

首先，我们来导出两个恒等关系，这两个恒等关系在处置和理解多采样率系统的运算上是有帮助的。采用直接的方式就可证明图 4.30 中的这两个系统是等效的。为了看出这个等效性，注意到在图 4.30(b)中有

$$X_b(e^{j\omega})=H(e^{j\omega M})X(e^{j\omega}) \tag{4.97}$$

由(4.78)式有

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X_b(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)}) \tag{4.98}$$

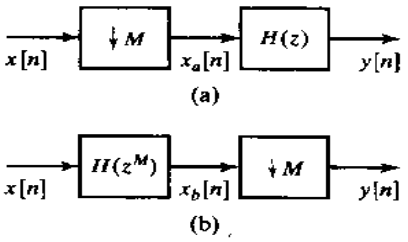


图 4.30 基于减采样恒等的两个等效系统

将(4.97)式代入(4.98)式后给出

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}X(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)})He^{j(\omega-2\pi i)}) \tag{4.99}$$

因为 $H(e^{j(\omega-2\pi i)})=H(e^{j\omega})$，(4.99)式变为

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})&=H(e^{j\omega})\frac{1}{M}(e^{j(\omega/M-2\pi i/M)})\\&=H(e^{j\omega})X_a(e^{j\omega})\end{aligned} \tag{4.100}$$

这就与图 4.30(a)相对应。

一种类似的恒等关系是对增采样的。具体地说，利用在 4.6.2 节的(4.86)式也能直接证明图 4.31 中的两个系统的等效性。根据(4.86)式和图 4.31(a)有

$$\begin{aligned}Y(e^{j\omega})&=X_a(e^{j\omega L})\\&=X(e^{j\omega L})H(e^{j\omega L})\end{aligned} \tag{4.101}$$

因为，由(4.86)式

$$X_b(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$$

于是(4.101)式就等效为

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega L})X_b(e^{j\omega})$$

这就与图 4.31(b)相对应。

总之，我们已经证明了如果变更线性滤波器的话，线性滤波和减采样或增采样是可以交换次序的。

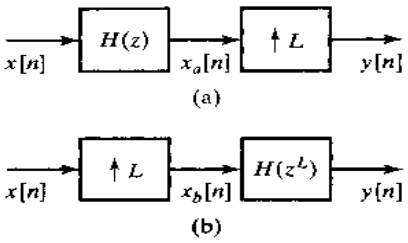


图 4.31　基于增采样恒等的两个等效系统

4.7.2　多相分解

将一个序列表示成 M 组子序列的叠加，其中每一组都由该序列中每隔 M 个依次延迟的序列值所组成，这就得到了一个序列的多相分解。当将这一分解应用到一个滤波器的单位脉冲响应上时，就能导致线性滤波器在几个方面的有效实现结构。具体地说，考虑某一单位脉冲响应 $h[n]$，将其分解成 M 组子序列 $h_k[n]$ 如下：

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n+k], & n = M \text{ 的整倍数} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{4.102}$$

将这些子序列依次延迟就能恢复原单位脉冲响应 $h[n]$，即

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k] \tag{4.103}$$

这种分解可用方框图 4.32 表示。如果在输入端构造一串超前单元链，而在输出端构造一串延迟单元链，那么方框图 4.33 就等效于图 4.32。在图 4.32 和图 4.33 的分解中，序列 $e_k[n]$ 是

$$e_k[n] = h[nM+k] = h_k[nM] \tag{4.104}$$

并且一般就称其为 $h[n]$ 的多相分量。还有其它几种方法可导出这些多相分量，并且为了标号方便也有另外的方式给这些多相分量标号(Vaidynathan, 1993)，但对这一节的目的来说，(4.104)式的定义已足够了。

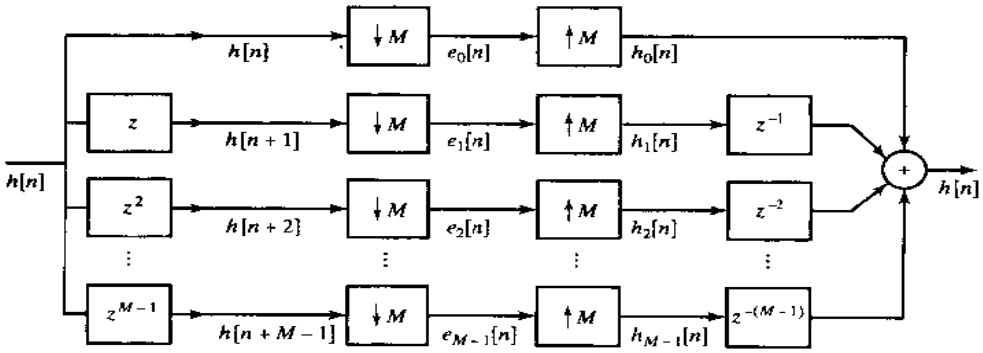


图 4.32　利用 $e_k[n]$ 分量的滤波器 $h[n]$ 的多相分解

图 4.32 和图 4.33 都不是这一滤波器的实现，但它们表明了如何将这个滤波器分解成 M 个并联滤波器。注意到图 4.32 和图 4.33 所表明的，在频域或 z 变换域多相表示就对应于将 $H(z)$ 表示成

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k} \tag{4.105}$$

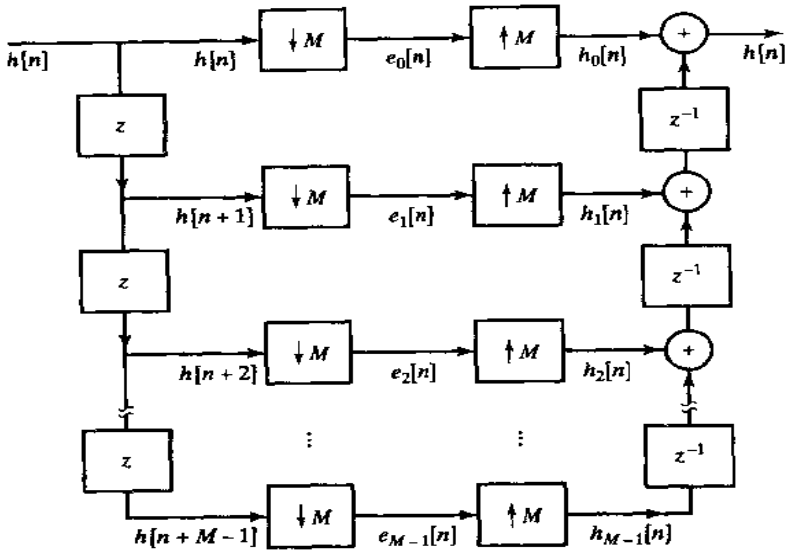


图 4.33　利用 $e_k[n]$分量和延迟链的滤波器 $h[n]$的多相分解

(4.105)式将系统函数 $H(z)$表示为延迟的多相分量滤波器之和。例如，由(4.105)式就可得出图 4.34 的滤波器结构

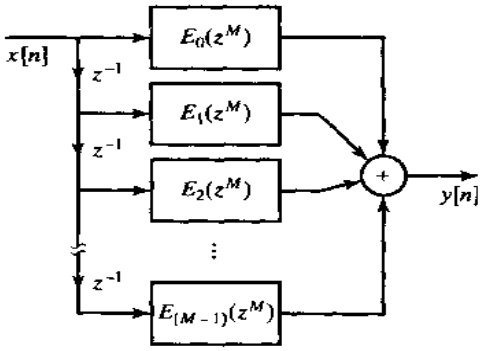


图 4.34　基于 $h[n]$多相分解的实现结构

4.7.3　抽取滤波器的多相实现

多相分解的重要应用之一是在输出被减采样的滤波器的实现上，如图 4.35 所示。

图 4.35 系统的最为直接的实现是在每一 n 值滤波器计算出一个输出样本，然后在每 M 个输出点中仅保留一个。直观上看，可以想到不必计算出那些丢弃的样本，应该有可能得到一种更加高效的实现。

为了得到一种高效的实现，能够利用该滤波器的多相分解。假设将 $h[n]$ 表示成多相形式，其多相分量为

$$e_k[n] = h[nM + k] \qquad (4.106)$$

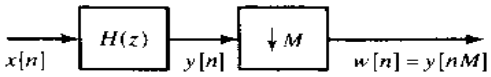


图 4.35　抽取系统

由(4.105)式，有

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M) z^{-k} \qquad (4.107)$$

利用这一分解和减采样可与相加交换的事实，图 4.35 能重画出图 4.36。再将图 4.30 中的恒等关系应用于图 4.36 的系统，就变成图 4.37 的系统。

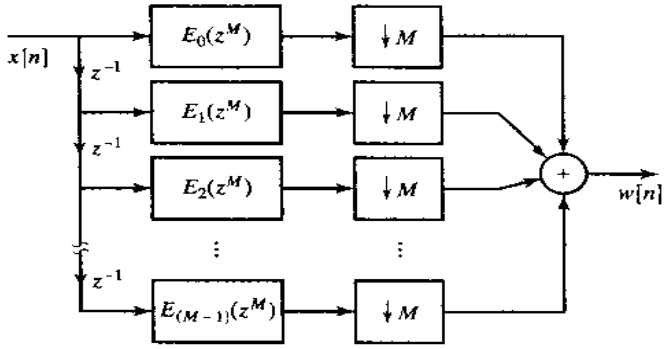


图 4.36　利用多相分解的抽取滤波器的实现

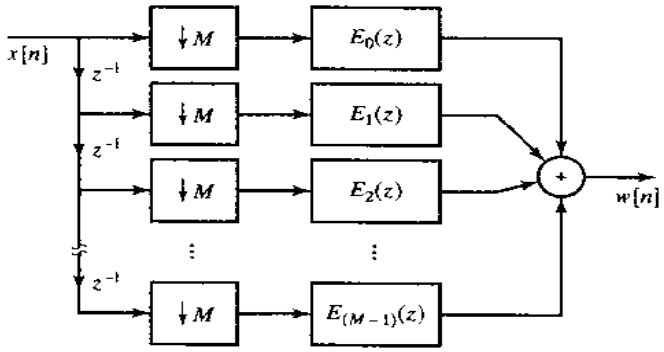


图 4.37　将减采样恒等关系用于多相分解的抽取滤波器的实现

为了说明与图 4.35 比较图 4.37 的优点，假设输入 $x[n]$ 是定时在每单位时间采 1 个样本的采样率，$H(z)$ 是一个 N 点的 FIR 滤波器。在图 4.35 的直接实现中要求有每单位时间有 N 次乘法和 $(M-1)$ 次加法。在图 4.37 系统中，每个 $E_R(z)$ 滤波器都是 N/M 长，它们的输入是定在每 M 个单位时间 1 个样本的采样率。这样，每个滤波器要求每单位时间有 $\frac{1}{M}(\frac{N}{M})$ 次乘法和 $\frac{1}{M}(\frac{N}{M}-1)$ 次加法，然后整个系统要求有每单位时间 (N/M) 次乘法和 $(\frac{N}{M}-1)+(M-1)$ 次加法。因此，对一些 M 和 N 值来说，能有明显的节省。

4.7.4 内插滤波器的多相实现

如同上面对抽取所作的讨论一样，如果将多相分解用于一个系统，在该系统中一个增采样器是放在一个滤波器的前面如图 4.38 所示，那么也能完成一种高效的实现。因为 $w[n]$ 中仅仅每隔 L 个样本才是非零，所以最直接的方法实现图 4.38 系统一定会涉及到将滤波器的系数加到明知是零值的那些序列值上。从直观上看，能预期到可能会有一个更加高效的实现。

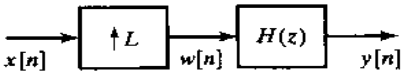


图 4.38 内插系统

为了更加高效地实现图 4.38 的系统，还是要利用 $H(z)$ 的多相分解。例如，可以将 $H(z)$ 表示成(4.107)式的形式，这样图 4.38 就能表示成图 4.39，再用图 4.31 的恒等关系就能将图 4.39 重新整理成图 4.40。

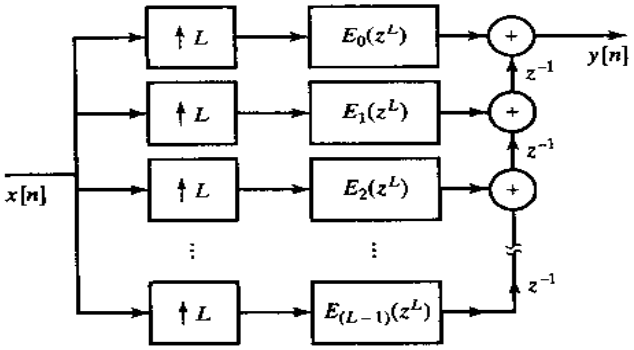


图 4.39 利用多相分解的内插滤波器的实现

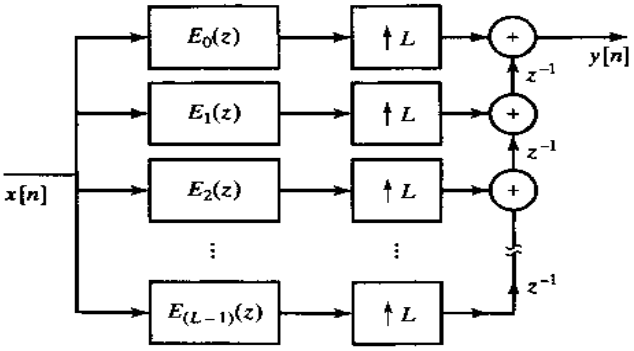


图 4.40 将增采样恒等关系用于多相分解的内插滤波器的实现

为了说明与图 4.38 比较图 4.40 的优点。可以注意到在图 4.38 中，如果 $x[n]$ 是定在每单位时间 1 个样本的采样率，那么 $w[n]$ 就是定时在每单位时间 L 个样本的速率。若 $H(z)$ 是一个长度为 N 的 FIR 滤波器，那么就需要每单位时间 NL 次乘法和 $(NL-1)$ 次加法。另

一方面，图 4.40 则需要每单位时间 $L(N/L)$次乘法和 $L(\frac{N}{L}-1)$次加法，再加上$(L-1)$次加法就得出 $y[n]$。因此，对于某些 L 和 N 值来说，还是有可能在计算量上有明显的节省。

对于抽取和内插来说，在计算高效上所获得的好处是来自于对运算作了重新安排，以使得滤波在低的采样率下完成。在非整数采样率变化中内插和抽取系统的混合使用，当需要高的中间采样率时就会有显著的得益。

4.8 模拟信号的数字处理

本章到现在为止，有关用离散时间序列来表示连续时间信号的讨论都是集中在周期采样和带限内插的理想化模型上。我们把讨论的问题归纳为利用一个称之为**理想的连续到离散(C/D)转换器**的理想化采样系统，和一个称之为**理想的离散到连续(D/C)转换器**的理想化带限内插器系统。这些理想化的转换系统使得我们能够把精力集中在带限信号及其样本之间关系的主要数学细节上。例如，在 4.4 节用了理想的 C/D 和 D/C 转换系统证明了：如果输入是带限的，而采样率又超过奈奎斯特率的话，那么线性时不变离散时间系统就能在图 4.41(a)的结构中得以实现线性时不变连续时间系统。在实际装置中，连续时间信号不是真正带限的，理想滤波器也不能实现，以及理想的 C/D 和 D/C 转换器也仅仅是能够近似的，这些都是分别由称之为模拟到数字(A/D)和数字到模拟(D/A)的转换器来近似完成的。图 4.41(b)的方框图示出对连续时间(模拟)信号数字处理的一个较为现实的模型，这一节将考查一下由图4.41(b)系统中每一部分所引入的某些因素。

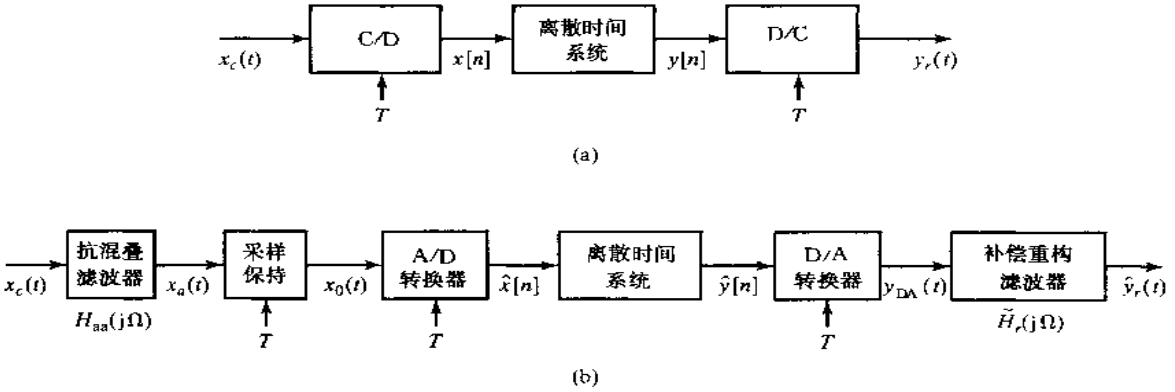


图 4.41 (a)连续时间信号的离散时间过滤；(b)模拟信号的数字处理

4.8.1 消除混叠的预滤波

在很多情况中，处理模拟系统总是希望使得一个离散时间系统的采样率最低。这是由于为实现该系统要求处理运算的量是正比于要处理的样本数的。如果输入不带限或者输入的奈奎斯特频率太高，往往就要用到预滤波。一个例子是发生在处理语音信号中，即使语音信号在 4～20kHz 带内含有明显的分量，但对可懂度来说仅要求到 3～4kHz 就够了。另外，即使信号本身是带限的，宽带的加性噪声也可能占据高频区域，作为采样的结果，这些噪声分量也会混

叠到低频中去。如果希望避免混叠，就必须将输入信号强制限带到低于所要求的采样率一半的频率上。这可在 C/D 转换器之前用低通滤波连续时间信号来完成，如图 4.42 所示。这种位于 C/D 转换器之前的低通滤波器称为**抗混叠滤波器**。理想情况，抗混叠滤波器的频率响应为

$$H_{aa}(j\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|<\Omega_c<\pi/T\\ 0, & |\Omega|>\Omega\end{cases} \tag{4.108}$$

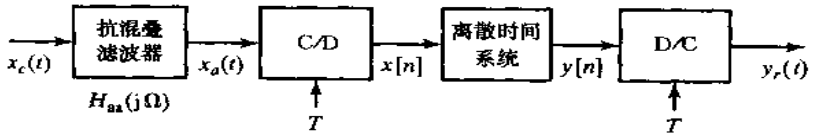


图 4.42　为消除混叠的预滤波的应用

根据 4.4.1 节的讨论，从抗混叠滤波器的输出 $x_a(t)$到系统输出 $y_r(t)$这一部分系统总是表现为一个线性时不变系统，这是因为输入到 C/D 转换器的 $x_a(t)$是被抗混叠滤波器强制限带到低于 π/T rad/s 的频率内。因此，整个图 4.42 系统的有效频率响应将是 $H_{aa}(j\Omega)$和由 $x_a(t)$到 $y_r(t)$的有效频率响应的乘积。将(4.108)式和(4.38)式结合在一起就有

$$H_{eff}(j\Omega)=\begin{cases}H(e^{j\Omega T}), & |\Omega|<\Omega_c\\ 0, & |\Omega|>\Omega_c\end{cases} \tag{4.109}$$

因此，对于一个理想的抗混叠滤波器来说，即使当 $X_c(j\Omega)$不是带限的，图 4.42 的系统仍表现为一个其频率响应如(4.109)式所给出的线性时不变系统。实际上，频率响应 $H_{aa}(j\Omega)$也不可能是理想带限的，但是能够将 $H_{aa}(j\Omega)$在$|\Omega|>\omega/T$ 做得足够小，以使混叠最小。在这种情况下，图 4.42 系统的总频率响应将近似为

$$H_{eff}(j\Omega)\approx H_{aa}(j\Omega)H(e^{j\Omega T}) \tag{4.110}$$

为了实现在 π/T 以上的频率响应部分小到可以忽略不计，就需要对 $H_{aa}(j\Omega)$特性一开始就“滚降”，也即在低于 π/T 的频率上就引入衰减。(4.110)式指出抗混叠滤波器的滚降(以及其它稍后要讨论的线性时不变失真)至少能够部分地在离散时间系统设计中计及它们而得到补偿。这点将在习题 4.56 中说明。

上面讨论中要求有锐截止抗混叠滤波器。用有源网络和集成电路可以实现这样的锐截止滤波器。然而，在涉及功能强大的，但廉价的数字处理器应用中，这些连续时间滤波器在整个模拟信号的离散时间处理中可能认为是一个系统中耗资的主要部分。实现锐截止滤波器是很困难和昂贵的，并且如果系统是要与可变采样率一起工作的话，那么还要求可调节滤波器。再者，锐截止模拟滤波器一般都有很严重的非线性相位响应，尤其是在通带边缘上。因此，有很多理由都希望除掉这个连续时间滤波器，或者简化对它们的要求。

解决这个问题的一条途径是如图 4.43 所示。Ω_N 记作在实施抗混叠滤波之后最后保留下的最高频率分量，首先用一个很简单的抗混叠滤波器，它有一个在 $M\Omega_N$ 显著衰减但渐渐截止的特性。接着在比 $2\Omega_N$ 高得多的采样率，比如 $M\Omega_N$ 下实现 C/D 转换，转换之后再将采样率降低 M 倍，这其中包含锐截止的抗混叠滤波是在离散时间域实现的。这样，后续的离散时间处理就能在低的采样率下完成以使计算量最小。

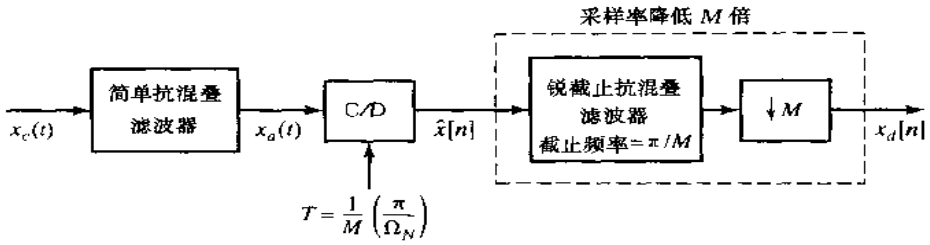


图 4.43　采用过采样的 A/D 转换以简化连续时间抗混叠滤波器

这种采用过采样再跟着采样率转换的道理可用图 4.44 来说明。图 4.44(a)展示的是某一信号的傅里叶变换(占有频率为 $|\Omega|<\Omega_N$),再加上可能是相应于高频"噪声"或者是由于抗混叠滤波器的不完善而最终要除掉的不想要的分量的傅里叶变换。同时还图示(虚线)出某一抗混叠滤波器的频率响应,它不是锐截止的,而是在某一频率 Ω_c 以上逐渐衰减到零。图 4.44(b)是这个滤波器输出的傅里叶变换。倘若信号 $x_a(t)$ 用采样周期 T,$(2\pi/T-\Omega_c)>\Omega_N$,采样,那么序列 $\hat{x}[n]$ 的离散时间傅里叶变换就如图 4.44(c)所示。注意,"噪声"将被混叠,但混

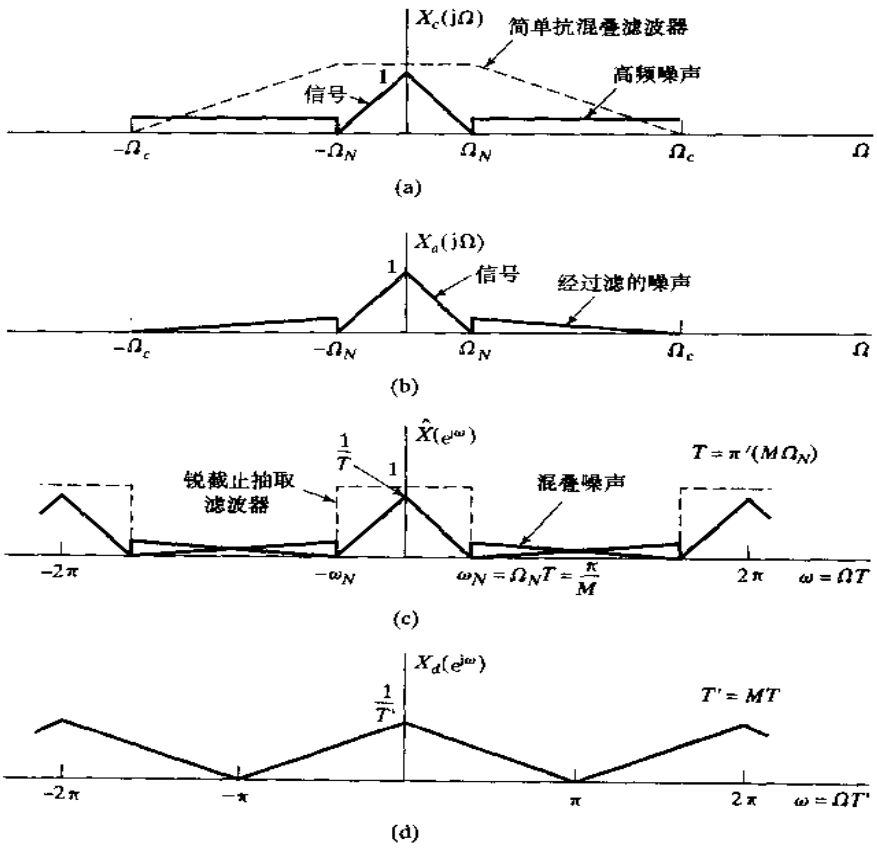


图 4.44　在 C/D 转换器采用过采样再紧跟抽取的说明

叠不会影响信号的频带$|\omega|<\Omega_N=\Omega_N T$。现在若 T 和 T'选取为 $T'=MT$ 和 $\pi/T'=\Omega_N$，那么 $\hat{x}[n]$就可用一个锐截止的、增益为1，截止频率为 π/M 的离散时间滤波器(在图4.44(c)示出的是已理想化了的)所过滤。这个离散时间滤波器的输出被减采样 M 倍得到采样序列 $x_d[n]$，其傅里叶变换如图4.44(d)所示。由此，全部锐截止的滤波都能在离散时间系统中完成，而且仅要求名义上的连续时间滤波。因为离散时间 FIR 滤波器可以有真正的线性相位，这样就有可能采用这种过采样途径来实现抗混叠滤波而实际上没有相位失真。在不仅仅需要保留频谱，而且也需要保留波形的情况下，这是有显著优势的。

4.8.2 模拟到数字(A/D)转换

一个理想的C/D转换器将一个连续时间信号转换为一个离散时间信号，其中每个样本都认为是无限精度的。对数字信号处理而言，作为一种近似，图4.45的系统把一个连续时间(模拟)信号转换为一个数字信号，也即一个有限精度的序列或量化样本。图4.45中的两个系统作为具体的器件都是可以获得的系统。A/D转换器是一个真正的器件，它将输入端电压或电流大小转换为二进制码，该二进制码代表了最接近于输入大小的一个量化幅度值。在外部时钟的控制下，A/D转换器在每 T 秒内起动和完成一次 A/D 转换。然而，转换不是瞬时的，为此一个高性能的 A/D 系统一般都包括一个采样与保持环节，如图 4.45 所示。理想的采样-保持系统是其输出为

$$x_0(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]h_0(t-nT) \qquad (4.111)$$

式中 $x[n]=x_a(nT)$是 $x_a(t)$的理想样本，而 $h_0(t)$是零阶保持系统的冲激响应，即

$$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \qquad (4.112)$$

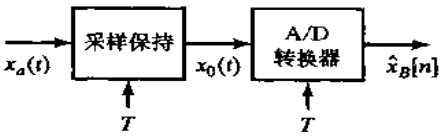


图 4.45 模数转换的实际构成

如果注意到(4.111)式可以等效为

$$x_0(t)=h_0(t)*\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT) \qquad (4.113)$$

那么该理想采样保持就等效为冲激串调制紧跟着零阶保持系统的线性滤波，如图 4.46(a)所示。$x_0(t)$的傅里叶变换与 $x_a(t)$的傅里叶变换之间的关系可以仿照 4.2 节的分析步骤算出来，并且在讨论 D/A 转换器时将作类似的分析。然而在目前这种分析不是很必要的，因为有关该系统的特性要了解的都能从其时域表达式中看到。明确点说，零阶保持的输出是一个阶梯波，它在采样周期 T 秒内样本值都保持不变，这就是如图 4.46(b)所指出的。实际的采样保持电路都设计成尽可能瞬时地对 $x_a(t)$采样，并且直到下一次采样前尽量保持样本值不变。其目的是为了给 A/D 转换器提供一个所要求的不变的输入电压(或电流)。有关各种各样的 A/D 转换过程，以及采样保持电路和 A/D 电路实现的详细论述都不属于本书的讨论范围。有很多实际问题都会在为获得一个既采样得快、又保持样本值不变的采样保持系统中出现。同样，还有很多实际考虑是受制于 A/D 转换器电路的转换速度和精度的。诸如此类的问题都在 Hnatek(1986)和 Schmid(1976)的著作中讨论到。关于某一具体产品的性能指标可以在厂家的产品目录中找到。本节关心的是在 A/D 转换过程中量化效应的分析。

因为在图 4.45 中采样保持系统的目的是要实现理想采样并保持该样本值以供 A/D 转换

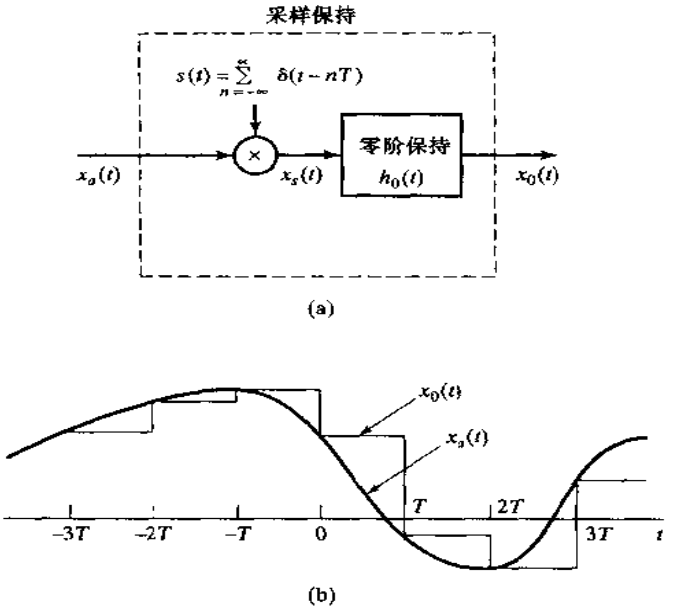


图 4.46 (a)理想采样保持的表示;(b)采样保持典型的输入输出信号

器量化,所以可以将图 4.45 的系统用图 4.47 的系统来表示,图中理想的 C/D 转换器表示由采样保持完成的采样,而量化器和编码器一起则代表 A/D 转换器的工作,关于这点稍后将作说明。

量化器是一种非线性系统,它的作用是变换输入样本 $x[n]$为某一预先规定的有限集合值中的一个。把这种运算表示为

$$\hat{x}[n] = Q(x[n]) \qquad (4.114)$$

称 $\hat{x}[n]$为量化样本。量化器可以有均匀间隔的量化电平,也可以是非均匀间隔的;然而,当对样本进行数值计算时,量化阶通常是均匀的。图 4.48 示出了一种典型的均匀量化特性①,其中样本值是被舍入到最接近的量化电平上。



图 4.47 图 4.45 系统的概念性表示

图 4.48 有几个特点应该强调一下。首先,这种量化器适合于具有正负值样本的信号(双极性)。如果已知输入样本总是正(或负)的,那么一种不同的量化电平分布或许更为适合。其次是图 4.48 量化器的量化电平数为偶数电平。利用偶数电平,就不可能在零幅度点上有一个量化电平,同时有相同的正负量化电平数。一般来说,量化电平数是 2 的幂,但是数目比 8 要大得多,所以相邻两电平之差通常是微不足道的。

图 4.48 还给出了量化电平的编码。因为有 8 个量化电平,所以可用 3 位二进制码来表示(一般,2^{B+1}个电平可用$(B+1)$位二进制码编码)。原则上,任何一种符号的安排都可以使用,

① 由于量化台阶是线性上升的,所以这种量化器又称为线性量化器。

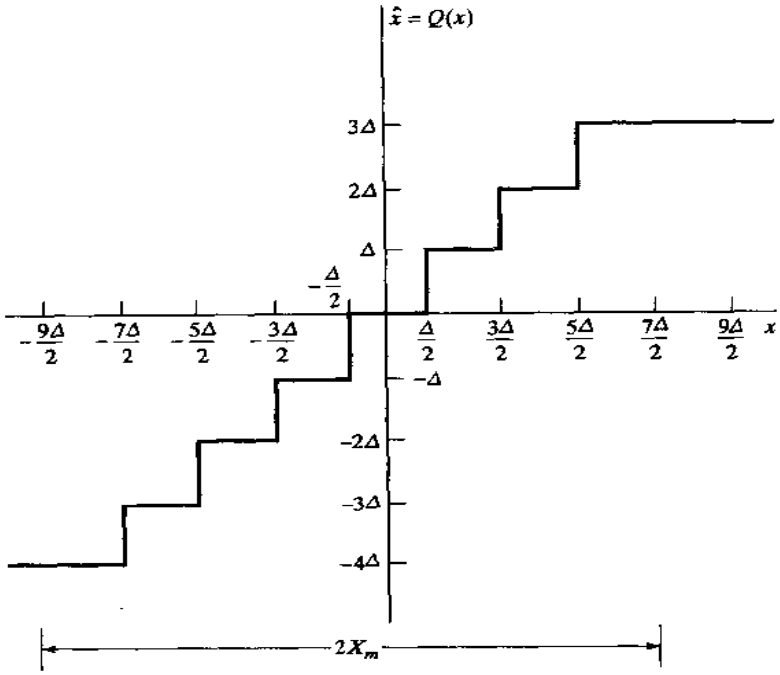


图 4.48 用于 A/D 转换的典型量化器

并且有很多现成的二进制编码方案，根据应用场合不同各有其利弊。例如在图 4.48 中右边一列的二进制数就是补偿二进制编码方案，在这里二进制符号从最负量化电平开始是以一种数值的次序安排的。然而，在数字信号处理中一般都希望应用一种二进制编码，使得作为量化样本加权表示的码字能直接作算术运算。

图 4.48 中左面一列示出按 2 的补码安排的一种二进制数。对于表示带符号的数来说，这种数制广泛用在大多数计算机和微处理器中。或许这也是最方便的一种量化电平表示方法。顺便提及，只要在最高有效位求补，就能把补偿二进制码转换成 2 的补码。

在 2 的补码表示中，最左或最高有效位是符号位，而剩下来的位既可用来表示二进制整数，也可以是分数，我们假定都是用来表示二进制的分数，也即假定二进制的小数点是在两个最高有效位之间。那么，在 2 的补码表示中，二进制符号具有如下意义(设 $B=2$)：

二进制符号	数值，$\hat{x}_B$
$0_\diamond 1\ 1$	3/4
$0_\diamond 1\ 0$	1/2
$0_\diamond 0\ 1$	1/4
$0_\diamond 0\ 0$	0
$1_\diamond 1\ 1$	−1/4
$1_\diamond 1\ 0$	−1/2
$1_\diamond 0\ 1$	−3/4
$1_\diamond 0\ 0$	−1

一般,如果有一个$(B+1)$位的2的补码分数,它表示为

$$a_0 \diamond a_1 a_2 \cdots a_B$$

那么其值就是

$$-a_0 2^0 + a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots + a_B 2^{-B}$$

请注意,符号◇记作该数值的"二进制小数点"。码字与量化电平之间的关系与图4.48中的参数X_m有关。这个参数一般称为A/D转换器的满幅度值。典型值是10,5或1V。由图4.48可见,量化器量化阶Δ的大小一般是

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B} \tag{4.115}$$

最小的量化电平$(\pm\Delta)$就相应于二进制码字中的最低有效位。再者,码字与量化样本间的数值关系是

$$\hat{x}[n] = X_m \hat{x}_B[n] \tag{4.116}$$

因为已经假定$\hat{x}_B[n]$是一个二进制数,且$-1 \leqslant \hat{x}_B[n] < 1$(对2的补码而言)。在这种方案中二进制编码样本$\hat{x}_B[n]$就正比于量化样本(用2的补码),因此可以用来作为样本大小的一种数值表示。一般都假定输入信号是归一化到X_m,这样$\hat{x}[n]$和$\hat{x}_B[n]$在数值上就是一样的,从而不需再区分什么量化样本和二进制编码样本。

图4.49示出一个简单的例子,该例用一个3位的量化器,给出一个正弦波的样本量化和编码。图中未量化的样本$x[n]$用实圆点表示,已量化样本$\hat{x}[n]$用空圆点表示。同时也示出理想采样保持的输出。虚线标出的"D/A转换器的输出"稍后再作讨论。另外图4.49还指出

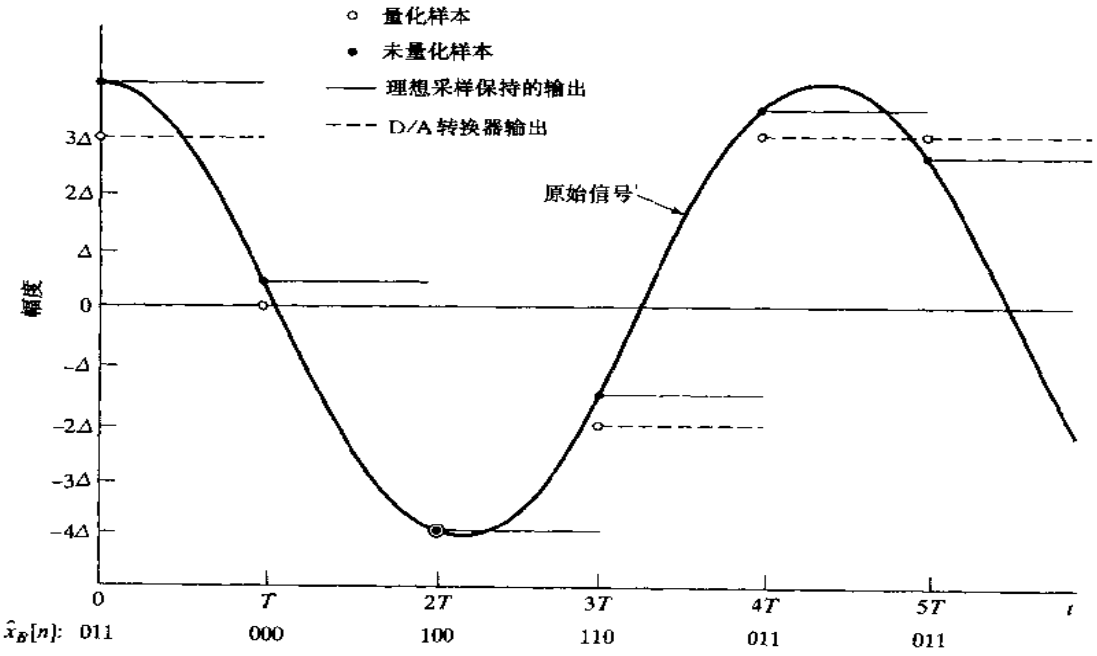


图4.49 用3位量化器的采样、量化、编码和D/A转换

了代表每个样本的 3 位码字。由于模拟信号 $x_a(t)$超出了该量化器的满幅度值，所以某些正样本就被“箝位”。

虽然前述大部分讨论都是有关量化电平的补码表示，但在 A/D 转换中，有关量化和编码的基本原理都是相同的，而与用来表示样本的二进制码无关。有关在数字计算中用到的二进制运算的详细讨论可在关于计算机算术运算的教科书中找到(例如，Knuth，1997)。现在我们转到量化效应的分析上来。因为分析不依赖于二进制码字的安排，所以可以得到更为一般的结论。

4.8.3 量化误差分析

由图 4.48 和图 4.49 可见，一般量化样本 $\hat{x}[n]$不同于样本的真值 $x[n]$。其差值就是**量化误差**，定义为

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n] \tag{4.117}$$

例如，对于图 4.48 的 3 位量化器，如果 $\Delta/2 < x[n] \leqslant 3\Delta/2$，那么 $\hat{x}[n] = \Delta$，于是有

$$-\Delta/2 < e[n] \leqslant \Delta/2 \tag{4.118}$$

在图 4.48 情况下，只要

$$-9\Delta/2 < x[n] \leqslant 7\Delta/2 \tag{4.119}$$

(4.118)式总成立。一般在$(B+1)$位量化器中，其 Δ 由(4.115)式给定，只要有

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leqslant (X_m - \Delta/2) \tag{4.120}$$

量化误差总满足(4.118)式。如果 $x[n]$超出该范围(像图 4.49 中 $t=0$ 时的样本)，那么量化误差在幅度上就大于 $\Delta/2$，这些样本就说是**箝位**了。

一种简化而有用的量化器模型如图 4.50 所示。在该模型中，量化误差样本被认为是一种加性噪声信号。如若已知 $e[n]$的话，该模型就完全等效于该量化器。在大多数情况下，$e[n]$是未知的，这时基于图 4.50 的一种统计模型就可以用来表示量化效应。在第 6 章和第 9 章将使用这样的模型来描述信号处理算法中的量化效应。量化误差的统计表示是基于如下假设：

1. 误差序列 $e[n]$是平稳随机过程的一个样本序列。
2. 误差序列与序列 $x[n]$不相关。
3. 误差过程的随机变量是不相关的；也就是说误差是一个白噪声过程。
4. 误差过程的概率分布在量化误差范围内是均匀分布的。

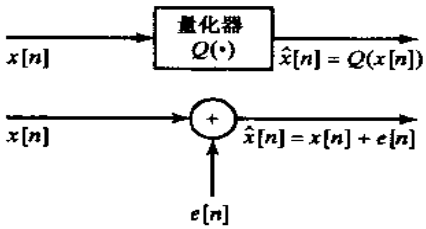


图 4.50 量化器的加性噪声模型

将会看到，这些假设会导致一个量化噪声相当简单的分析。极易发现这些假设是明显地不成立的一些情况。例如，若 $x_a(t)$是一个阶跃函数，这些假设就不能认为是合理的。然而，当信号是一个复杂的信号时，像语音或音乐这样一类多少是以一种不可预见的方式剧烈起伏波动的信号，这些假设就更为真实些。实验已经证明，随着信号变得愈益复杂，信号与量化噪声之间所测得的相关愈趋减弱，并且误差也变得不相关(见 Bennett，1948；Widrow，1956，1961)。依此可推理，如果信号足够复杂，而量化阶又足够小，以致于从一个样本到另一个样

本，信号的幅度很可能横穿过许多量化台阶，那么这个统计模型的假设似乎就愈真实。

例 4.12　一个正弦信号的量化误差

作为一个说明性的例子，图4.51(a)示出余弦信号 $x[n]=0.99\cos(n/10)$ 未量化样本的序列。图4.51(b)是3位量化器($B-1=3$)的量化样本序列 $\hat{x}[n]=Q[x[n]]$，并假设 $X_m=1$，图中虚线是8种可能的量化电平。图4.51(c)和(d)分别是对应于3位量化和8位量化时的量化误差 $e[n]=\hat{x}[n]-x[n]$。在每一种情况，量化误差的标尺都被调整到以使得由虚线指出 $\pm\Delta/2$ 的范围。

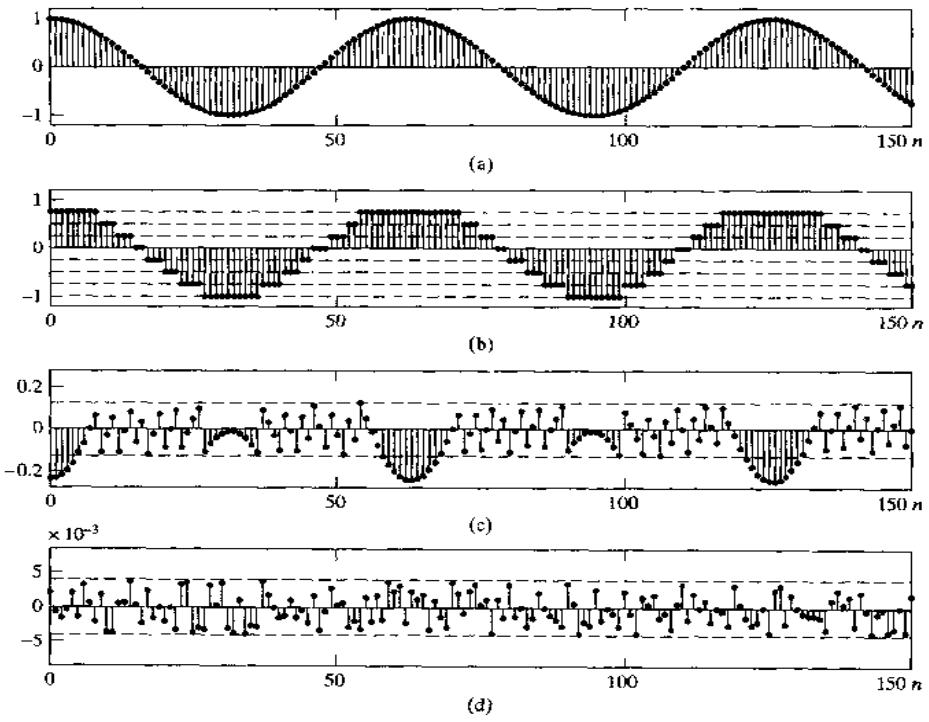


图 4.51　量化噪声的例子

(a)信号 $x[n]=0.99\cos(n/10)$ 的未量化样本；(b)用3位量化器(a)中余弦波形的量化样本；(c)在(a)中信号用3位量化的量化误差序列；(d)在(a)中信号用8位量化的量化误差序列

值得注意的是，在3位量化的情况下，误差信号与未量化样本有强的相关性。例如，在这个余弦正的和负的峰值附近，量化信号在跨越好多接续的样本上仍然保持不变，以致于在这些区段量化误差具有输入序列的形状。同时还注意到在正峰的这些区段周围，误差在幅度上比 $\Delta/2$ 大。这是由于对这种量化器参数的设置，信号电平太大的缘故。

另一方面对于8位量化时的量化误差没有这种明显的波形①。由直观观察这些图就能确信前面有关在精细量化(8位)下量化噪声性质的结论；即量化样本是随机变换的，与未量化信号不相关，

① 对于周期余弦信号来说，很自然，量化误差也会是周期的。在本例中我们用了频率 $\omega_0=1/10$ 以避免出现这种情况。

并在 $-\Delta/2$ 和 $+\Delta/2$ 之间的范围内变化。在第 10 章当计算一个量化噪声序列的功率谱密度和自相关时还将定量地给予说明。

对属于是舍入样本值到最接近的量化电平的量化器来说(如图 4.48 所示),量化噪声的幅度是在下列范围内

$$-\Delta/2 < e[n] \leqslant \Delta/2 \tag{4.121}$$

对于小的 Δ,$e[n]$是一个在 $-\Delta/2$ 到 $\Delta/2$ 作均匀分布的随机变量的假设是合理的。因此,对于这种量化噪声的一阶概率密度如图 4.52 所示(如果在实现量化中是截尾而不是舍入,那么误差总是负的,并假设从 $-\Delta$ 到 0 为均匀概率密度分布)。为了完成量化噪声统计模型,假定噪声样本间是不相关的,以及 $e[n]$与 $x[n]$也不相关。这样 $e[n]$就假设为一个均匀分布的白噪声序列。$e[n]$的均值是零,而其方差为

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} \mathrm{d}e = \frac{\Delta^2}{12} \tag{4.122}$$

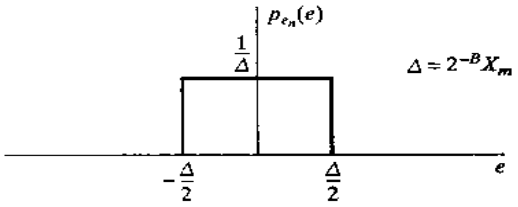


图 4.52 舍入量化器(图 4.48)量化误差的概率密度函数

对于一个$(B+1)$位量化器,其满幅度值为 X_m,噪声方差或功率就是

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}X_m^2}{12} \tag{4.123}$$

一个信号被加性噪声所污损的一种常用度量是信号噪声比,定义为信号方差(功率)对噪声方差的比。以 dB(分贝)表示,一个$(B+1)$位量化器信噪比就是

$$\begin{aligned} \mathrm{SNR} &= 10\log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{12 \cdot 2^{2B}\sigma_x^2}{X_m^2}\right) \\ &= 6.02B + 10.8 - 20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) \end{aligned} \tag{4.124}$$

由(4.124)式可见,量化样本的字长每增加一位(也即量化电平数加倍),信噪比近似提高 6dB,特别有启发性的是考虑(4.124)式中的这一项

$$-20\log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right) \tag{4.125}$$

首先,X_m 是量化器的一个参数,通常在一个实际系统中是固定的。量 σ_x 是信号幅度的均方根值,它一定小于信号的峰值幅度。例如,若 $x_a(t)$是一个峰值幅度为 X_p 的正弦波,则 $\sigma_x = X_p/\sqrt{2}$。如果 σ_x 太大,峰值信号幅度将超过 A/D 转换器的满幅度值 X_m。这时,(4.124)式不再成立,并且会产生严重失真。另一方面,若 σ_x 太小,(4.125)式这一项变大且是负的,那么(4.124)式的信噪比下降。事实上,容易看出,当 σ_x 减半时,SNR 下降 6dB。因此,仔细地将信号幅度与 A/D 转换器的满幅度值匹配是很重要的。

对于像语音和音乐这样的模拟信号,幅度分布趋向于集中在零附近,并随着幅度的增加很快地跌落。在这些情况下,样本幅度超过均方根值 3 倍或 4 倍的概率非常小。例如,如果信号幅度是一个高斯型分布,那么仅有 0.064% 的样本其幅度才大于 $4\sigma_x$。因此,为了避免信号峰值箝位(如在统计模型中所假设的),可以在 A/D 转换器之前设置滤波器和放大器的增益,以使得 $\sigma_x = X_m/4$。在(4.124)式中利用该 σ_x 值,则有

$$\mathrm{SNR} \approx 6B - 1.25\mathrm{dB} \tag{4.126}$$

例如，用在高质量的音乐录制和重放系统中，要获得大约 90－96dB 的信噪比，就要求有 16 位的量化，但是要记住，要得到这样一个性能仅在输入信号是精心地与 A/D 转换器的满幅度值匹配之后方有可能。

峰值信号幅度与量化噪声的绝对大小之间的这种折衷对任何量化过程来讲都是基本的。在第 6 章当讨论在实现离散时间线性系统中的舍入噪声时将会再一次看到它的重要性。

4.8.4 D/A 转换

在 4.3 节讨论了如何利用理想低通滤波从一个样本序列来重构一个带限信号。利用傅里叶变换，这个重构过程表示成

$$X_r(\mathrm{j}\Omega) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega T})H_r(\mathrm{j}\Omega) \tag{4.127}$$

式中 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是样本序列的离散时间傅里叶变换，$X_r(\mathrm{j}\Omega)$是已重构的连续时间信号的傅里叶变换。理想重构滤波器是

$$H_r(\mathrm{j}\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases} \tag{4.128}$$

对于 $H_r(\mathrm{j}\Omega)$的这种选取，$x_r(t)$和 $x[n]$之间的相应关系是

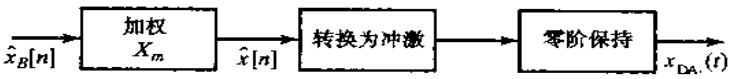
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \tag{4.129}$$

该系统以序列 $x[n]$作输入，产生输出为 $x_r(t)$，把它称作**理想 D/C 转换器**。对理想 D/C 转换器一个具体的可实现的对应系统是一个**数字-模拟转换器**(D/A 转换器)紧跟着一个近似低通滤波器，如图 4.53(a)所示。一个 D/A 转换器将一个二进制码字序列作它的输入，产生一个如下式所示的连续时间输出：

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{DA}}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m\hat{x}_B[n]h_0(t-nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}[n]h_0(t-nT) \end{aligned} \tag{4.130}$$



(a)



(b)

图 4.53 (a)D/A 转换器方框图；(b)利用零阶保持的表示

式中 $h_0(t)$是由(4.112)式给出的零阶保持系统的冲激响应。在图 4.49 中的虚线示出了对正弦波量化例子的 D/A 转换器的输出。应该注意到，D/A 转换器以和采样保持中保持未被量化的输入样本同样的方式在一个样本周期内保持该量化样本。如果用加性噪声模型来表示量化效应，那么(4.130)式就变成

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t-nT) \tag{4.131}$$

为了简化讨论,定义

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_0(t-nT) \tag{4.132}$$

$$e_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]h_0(t-nT) \tag{4.133}$$

这样,(4.131)式就能写成

$$x_{DA}(t) = x_0(t) + e_0(t) \tag{4.134}$$

因为 $x[n]=x_a(nT)$,所以信号分量 $x_0(t)$就与输入信号 $x_a(t)$有关。噪声信号 $e_0(t)$决定于量化噪声样本 $e[n]$,这与 $x_0[t]$决定于未被量化的信号样本的方式是一样的。(4.132)式的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X_0(j\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]H_0(j\Omega)e^{-j\Omega nT} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn}\right)H_0(j\Omega) \\ &= X(e^{j\Omega T})H_0(j\Omega) \end{aligned} \tag{4.135}$$

现在因为

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j2\pi k/T) \tag{4.136}$$

因此就有

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - j2\pi k/T)\right]H_0(j\Omega) \tag{4.137}$$

如果 $X_a(j\Omega)$是带限到 π/T 频率以下,那么在(4.137)式中 $X_a(j\Omega)$频移的那些部分就不会重叠。如果定义一个补偿的重构滤波器为

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)} \tag{4.138}$$

如果输入是 $x_0(t)$的话,那么该滤波器的输出就是 $x_a(t)$。零阶保持滤波器的频率响应很容易证明是

$$H_0(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T/2)}{\Omega}e^{-j\Omega T/2} \tag{4.139}$$

因此这个补偿的重构滤波器就是

$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \begin{cases} \dfrac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}e^{j\Omega T/2}, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases} \tag{4.140}$$

图 4.54(a)示出按(4.139)式给出的 $|H_0(j\Omega)|$与按(4.128)式给出的理想内插滤波器 $|H_r(j\Omega)|$的比较。这两个滤波器在 $\Omega=0$ 都有增益为 T,但是零阶保持虽在性质上也是低通型,可在 $\Omega=\pi/T$ 处并不是锐截止的。图 4.54(b)是理想补偿重构滤波器频率响应的幅度,它用于紧跟在一个零阶保持重构系统如 D/A 转换器之后。相位响应理想地应相应于一个 $T/2$ 秒的超前时移以补偿零阶保持所引入的那个延时量。因为时间超前在实际的实时近似该理想

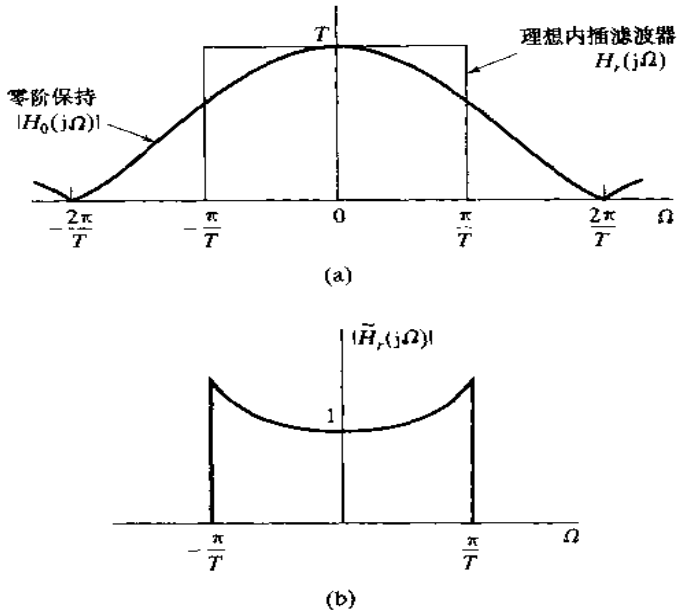


图 4.54 (a)零阶保持与理想内插滤波器频率响应的比较；
(b)用于与零阶保持输出相接的理想补偿重构滤波器

补偿重构滤波器时是不可能实现的，所以仅仅是幅度响应上的补偿，并且往往甚至连这点补偿也可省去，因为零阶保持的增益在 $\Omega=\pi/T$ 处仅仅下降 $2/\pi$(或 -4dB)。

图 4.55 示出一个 D/A 转换器紧跟着一个理想补偿重构滤波器。正如前面讨论所见，用理想补偿重构滤波器接在 D/A 转换器后面，重构的输出信号就是

$$\hat{x}_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{x}[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}e[n]\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (4.141)$$

换句话说，输出为

$$\hat{x}_r(t)=x_a(t)+e_a(t) \quad (4.142)$$

式中 $e_a(t)$是一个带限白噪声信号。

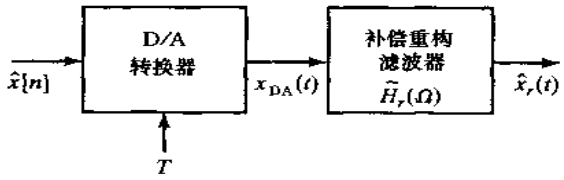


图 4.55 数模转换的实际组成

重新回过头来考虑一下图 4.41(b)，现在我们该明白模拟信号数字处理系统的特性了。

如果假设抗混叠滤波器的输出是带限到低于 π/T 频率以下，$\widetilde{H}_r(j\Omega)$也是类似带限的，并且离散时间系统是线性时不变的，那么总的系统输出就有如下形式：

$$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t) \tag{4.143}$$

这里

$$Y_a(j\Omega) = \widetilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{aa}(j\Omega)X_c(j\Omega) \tag{4.144}$$

式中 $H_{aa}(j\Omega)$，$H_0(j\Omega)$和 $\widetilde{H}_r(j\Omega)$分别是抗混叠滤波器、D/A 转换器的零阶保持以及重构低通滤波器的频率响应。$H(e^{j\Omega T})$是离散时间系统的频率响应。类似地，假设由 A/D 转换器引入的量化噪声是方差 $\sigma_e^2=\Delta^2/12$ 的白噪声，那么可以证明输出噪声的功率谱是

$$P_{e_a}(j\Omega) = |\widetilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})|^2\sigma_e^2 \tag{4.145}$$

这就是说，输入量化噪声受到离散时间和连续时间连续几级过滤而变化。由(4.144)式可以得出在忽略混叠的假定下，从 $x_c(t)$到 $\hat{y}_r(t)$总的有效频率响应是

$$H_{eff}(j\Omega) = \widetilde{H}_r(j\Omega)H_0(j\Omega)H(e^{j\Omega T})H_{aa}(j\Omega) \tag{4.146}$$

如果抗混叠滤波器是理想的，如(4.108)式所给出，而重构滤波器的补偿也是理想的，如(4.140)式所给出，那么有效频率响应就如(4.109)式所给出。否则，(4.146)式就对有效频率响应提供了一个合理的模型。应该注意到，(4.146)式还指出对于 4 项当中任何一项不完善特性的补偿原则上都能包括在某它项当中的任何一项之内来进行；譬如，离散时间系统可以对抗混叠滤波器，或零阶保持，或重构滤波器，或所有这些不完善特性作适当的补偿。

除了由(4.146)式提供的过滤外，(4.143)式也使我们想到，输出也会被经过滤波后的量化噪声所污损。在第 6 章将看到，噪声还会由离散时间线性系统的实现中引入。一般来说，这个内部噪声都将被离散时间系统的实现、D/A 转换器的零阶保持以及重构滤波器等部分予以过滤。

4.9 在 A/D 和 D/A 转换中的过采样和噪声形成

在 4.8.1 节曾说明结合数字滤波和抽取，过采样有可能实现锐截止的抗混叠滤波。正如将要在 4.9.1 节讨论的，过采样以及后续的离散时间滤波与减采样也容许增大量化器的量化阶 Δ，或者等效地说在模拟到数字转换中所要求的位数可以减少。4.9.2 节将说明在利用过采样并结合量化噪声反馈以后，怎样能够可以将量化阶进一步减小。4.9.3 节讨论如何将过采样原理应用于 D/A 转换中去。

4.9.1 用直接量化的过采样 A/D 转换

为了研究过采样和量化阶大小之间的关系，现来考虑图 4.56 的系统。为了分析过采样在这个系统中的效果，我们考虑 $x_a(t)$是一个零均值广义平稳的随机过程，其功率谱密度记为 $\Phi_{x_ax_a}(j\Omega)$，自相关函数记为 $\Phi_{x_ax_a}(\tau)$。为了简化讨论，最初假设 $x_a(t)$已经带限到 Ω_N，即

$$\Phi_{x_ax_a}(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geqslant \Omega_N \tag{4.147}$$

并假定 $2\pi/T=2M\Omega_N$。常数 M 假定是整数，称为过采样率。利用在 4.8.3 节详细讨论过的加性噪声模型，能用图 4.57 替代图 4.56。图 4.57 中的抽取滤波器是增益为 1，截止频率为 ω_c

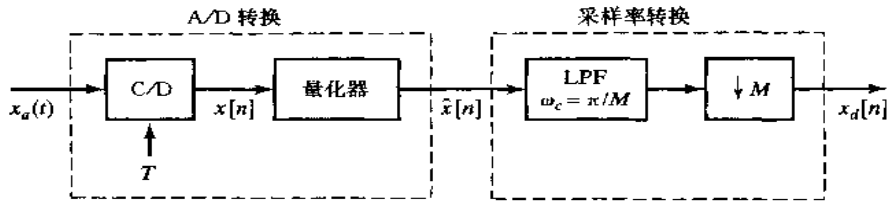


图 4.56　用简单量化和减采样的过采样 A/D 转换

$=\pi/M$ 的理想低通滤波器。因为图 4.57 整个系统是线性的，所以它的输出 $x_d[n]$有两个分量：一个是由于信号输入 $x_a(t)$引起的，另一个是由于量化噪声输入 $e[n]$产生的，分别记这两个分量为 $x_{da}[n]$和 $x_{de}[n]$。

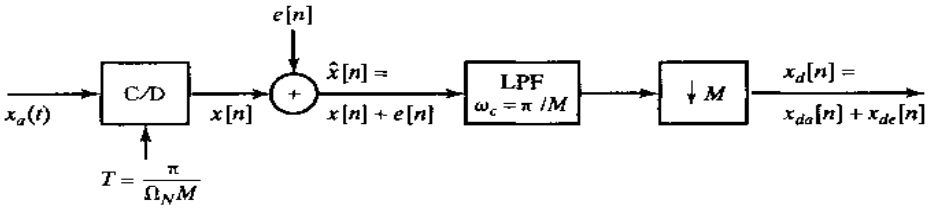


图 4.57　用线性噪声模型代替量化器的图 4.56 系统

我们的目的是要在输出 $x_d[n]$中确定作为量化阶 Δ 和过采样率 M 的函数的信号功率 $\mathscr{E}\{x_{da}^2[n]\}$对量化噪声功率 $\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\}$的比。因为图 4.57 的系统是线性的，而噪声又假定是独立于信号的，所以在计算输出端信号和噪声分量各自的功率时可以分开作为两个源来对待。

首先考虑输出中的信号分量。作为开始，先将采样信号 $x[n]$的功率谱密度、自相关函数和信号功率与连续时间模拟信号 $x_a(t)$的对应函数联系起来。令 $\phi_{xx}[m]$和 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$分别记作 $x[n]$的自相关函数和功率谱密度，那么按定义就有 $\phi_{xx}[m]=\mathscr{E}\{x[n+m]x[n]\}$，以及由于 $x[n]=x_a(nT)$和 $x[n+m]=x_a(nT+mT)$，于是

$$\mathscr{E}\{x[n+m]x[n]\} = \mathscr{E}\{x_a((n+m)T)x_a(nT)\} \tag{4.148}$$

因此，

$$\phi_{xx}[m] = \phi_{x_a x_a}(mT) \tag{4.149}$$

这就是说，样本序列的自相关函数就是对应的连续时间信号自相关函数的采样。特别是，(4.148)式和(4.149)式与广义平稳的假定结合在一起就意寓着 $\mathscr{E}\{x_a^2(t)\}$是一个常数而与 t 无关。这样就得到

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\} = \mathscr{E}\{x_a^2(nT)\} = \mathscr{E}\{x_a^2(t)\} \qquad \text{对全部 } n \text{ 或 } t \tag{4.150}$$

因为功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换，作为(4.149)式的结果有

$$\Phi_{xx}(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Phi_{x_a x_a}\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \tag{4.151}$$

假设输入是带限的，如(4.147)式所示，又假设过采样 M 倍而有 $2\pi/T=2M\Omega_N$，用 $\Omega=\omega/T$ 代入(4.151)式可得

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega})=\begin{cases}\dfrac{1}{T}\Phi_{x_a x_a}\left(j\dfrac{\omega}{T}\right), & |\omega|<\pi/M\\ 0, & \pi/M<\omega\leqslant\pi\end{cases}\tag{4.152}$$

假如，若 $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$如图 4.58(a)所来，而选取的采样率又是 $2\pi/T=2M\Omega_N$，那么 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$就一定如图 4.58(b)所示。

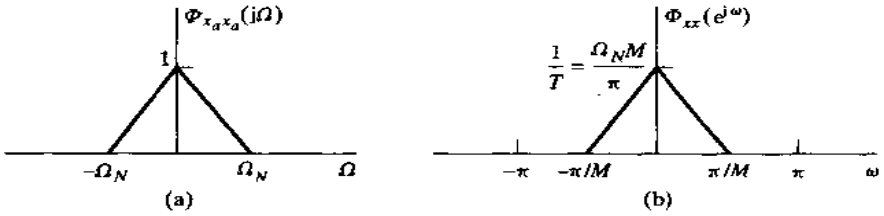


图 4.58　$\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$和 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$之间频率和幅度加权的说明

利用功率谱说明，(4.150)式是对的这一点是很有启发意义的。原模拟信号的总功率是

$$\mathscr{E}\{x_a^2(t)\}=\frac{2}{2\pi}\int_{-\Omega_N}^{\Omega_N}\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)d\Omega$$

由(4.152)式，采样信号的总功率是

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega\tag{4.153}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/M}^{\pi/M}\frac{1}{T}\Phi_{x_a x_a}\left(j\frac{\omega}{T}\right)d\omega\tag{4.154}$$

利用 $\Omega_N T=\pi/M$，并以 $\Omega=\omega/T$ 代入(4.154)式，给出

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_N}^{\Omega_N}\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)d\Omega=\mathscr{E}\{x_a^2(t)\}$$

据此，采样信号的总功率和原模拟信号的总功率是完全相同的。因为该抽取滤波器是截止频率 $\omega_c=\pi/M$ 的理想低通滤波器，所以信号 $x[n]$通过这个滤波器未受任何改变，因此在输出中减采样信号分量 $x_{da}[n]=x[nM]=x_a(nMT)$也就有相同的总功率。这一点可由功率谱看出，只要注意到，因为 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$是带限制$|\omega|<\pi/M$，所以

$$\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\Phi_{xx}(e^{j(\omega-2\pi k)/M})$$

$$=\frac{1}{M}\Phi_{xx}(e^{j\omega/M}),\quad |\omega|<\pi\tag{4.155}$$

利用(4.155)式就得

$$\mathscr{E}\{x_{da}^2[n]\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{xx}(e^{j\omega/M})d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega=\mathscr{E}\{x^2[n]\}$$

这就证明了当输入 $x_a(t)$横穿整个系统到对应的输出分量 $x_{da}[n]$时，信号分量的功率仍然是

一样的。利用功率谱解释，发生这一情况是由于当我们采样从 $\Phi_{x_a x_a}(j\Omega)$ 到 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ 再到 $\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})$ 的过程中，对于因采样而形成的频率轴的每一次尺度变换都在幅度上作了反尺度变换，以至于在功率谱下的面积仍然是相同的。

现在考虑由量化产生的噪声分量。按照 4.8.3 的模型，假设 $e[n]$ 是一个广义平稳的白噪声过程，其均值为零，方差[①] 为

$$\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

结果，$e[n]$ 的自相关函数和功率谱密度分别是

$$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2\delta[m] \qquad (4.156)$$

和

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2, \quad |\omega| < \pi \qquad (4.157)$$

在图 4.59 中指出了 $e[n]$ 和 $x[n]$ 的功率谱密度。量化信号 $\hat{x}[n]$ 的功率谱密度就是这两者之和，因为在模型中已假定信号和量化噪声样本是独立的。

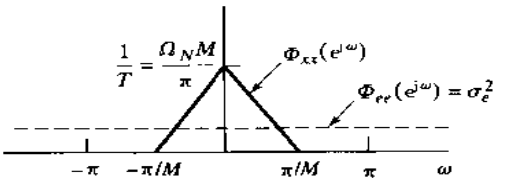


图 4.59 在过采样因子为 M 时，信号和量化噪声的功率谱密度

虽然我们已经证明了 $x[n]$ 或 $e[n]$ 的功率都与 M 无关，但是注意到，随着过采样率 M 的增加，量化噪声谱与信号谱重叠的份量就少。正是这种过采样的效果才使得信号对量化噪声比得以改善。具体地说，该理想低通滤波器在频带 $\pi/M < |\omega| \leqslant \pi$ 内消除量化噪声，而信号分量没有改变，在理想低通滤波器输出端噪声功率是

$$\mathscr{E}\{e^2[n]\} = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi/M}^{\pi/M}\sigma_e^2 d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M}$$

接下来，低通过滤后的信号被减采样。已经知道在减采样输出中信号功率仍然未变。图 4.60 指出了 $x_{da}[n]$ 和 $x_{de}[n]$ 的功率谱密度。将图 4.58(b)，图 4.59 和图 4.60 作一比较可见，因为频率轴和幅度轴的尺度变换是相反的，所以信号功率谱密度下的面积没有变化。另一方面，在抽取输出中的噪声功率和低通滤波器输出中是相同的，即

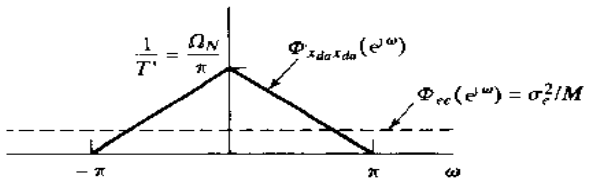


图 4.60 减采样后的信号和量化噪声功率谱密度

$$\mathscr{E}\{x_{de}^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma_e^2}{M}d\omega = \frac{\sigma_e^2}{M} = \frac{\Delta^2}{12M} \qquad (4.158)$$

因此，通过滤波和减采样，量化噪声功率 $\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\}$ 已减小了 M 倍，而信号功率依旧未变。

从(4.158)式可知，对于某一给定的量化噪声功率来说，过采样因子 M 和量化器的量化阶 Δ 之间明显有一个权衡。(4.115)式表明对于一个 $(B+1)$ 位的量化器，最大输入信号电平在正负 X_m 之间，其量化阶是

$$\Delta = X_m/2^B$$

因此

$$\mathscr{E}\{x_{de}^2[n]\} = \frac{1}{12M}\left(\frac{X_m}{2^B}\right)^2 \qquad (4.159)$$

① 因为随机过程有零均值，所以平均功率和方差是相同的。

(4.159)式说明，对于某一固定的量化器，用提高过采样比 M 能将噪声功率减小。因为信号功率与 M 无关，所以增加 M 就会使信号对量化噪声之比增加。换句话说，对于某一固定的量化噪声功率 $P_{de}=\mathcal{E}\{x_{de}^2[n]\}$，所需要的 B 值是

$$B = -\frac{1}{2}\log_2 M - \frac{1}{2}\log_2 12 - \frac{1}{2}\log_2 P_{de} + \log_2 X_m \qquad (4.160)$$

根据(4.160)式可见，为达到某一给定的信号量化噪声比，每将过采样 M 加倍，就可减少 1/2 位；或者换句话说，若过采样按因子 $M=4$，在表示该信号为达到所期望的精度要求可以减少 1 位。

4.9.2 用噪声成形的过采样 A/D 转换

在前面一节已经表明，过采样和抽取可以改善信号量化噪声比。这似乎多少是一项很突出的成果。这意味着，原则上在信号的最初采样中可以用很粗糙的量化，并且如果过采样率足够高，那么就仍然能够用在带有噪声的样本上完成数字计算而得到原样本的一个准确表示。到目前为止，已经看到的问题是，为了实现在所需要的位数上有明显的减少，就需要很大的过采样率。例如，为了从 16 位减少到 12 位就要求 $M=4^4=256$！这似乎是一个相当高的代价。然而，如果把过采样与用反馈噪声谱成形的概念结合起来，基本的过采样原理能导致高得多的获益。

如同在图 4.59 中指出过的，用直接量化量化噪声的功率谱密度在全部频带上都是不变的。在噪声成形中的基本思想是要改变 A/D 转换的过程，以使得量化噪声的功率谱密度不再是均匀的，而是将其成形为大部分的噪声功率位于频带 $|\omega|<\pi/M$ 之外。这样一来，后续的滤波和减采样就将更多的量化噪声功率滤除。

噪声成形量化器(通常称采样-数据 Delta-Sigma 调制器)如图 4.61 所示(见 Candy and Temes1992 年为此专题所作的文献汇集)。图 4.61(a)是一个方框图，说明用集成电路这个系统是如何实现的。图中的积分器是一种开关电容离散时间积分器。A/D 转换器能用多种方式来实现，但一般来说它是一个简单的 1 比特量化器或比较器。D/A 转换器提取数字输出并

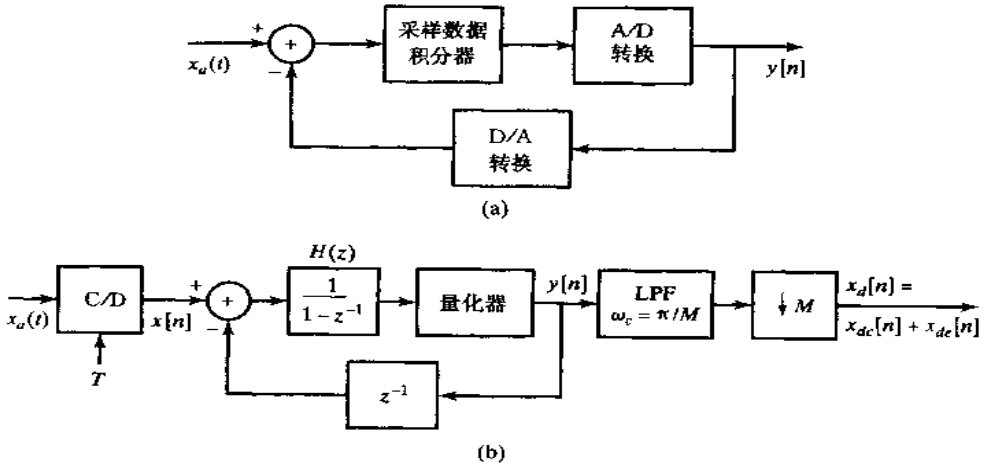


图 4.61 用噪声成形的过采样量化器

将它转换回一个模拟脉冲，在积分器的输入端从输入信号中减去这个模拟脉冲。这个系统可以用图 4.61(b)的离散时间等效系统来表示。开关电容积分器用一个累加器系统来代表，反馈路径中的延迟代表由 D/A 转换器引入的延迟。

和前面一样，将量化噪声用一个加性噪声源建模，这样，图 4.61 的系统就能用图 4.62 的线性模型来代替。在这个系统中，输出 $y[n]$是两个分量之和：单独由输入 $x[n]$产生的$y_x[n]$和单独由噪声 $e[n]$产生的 $\hat{e}[n]$。

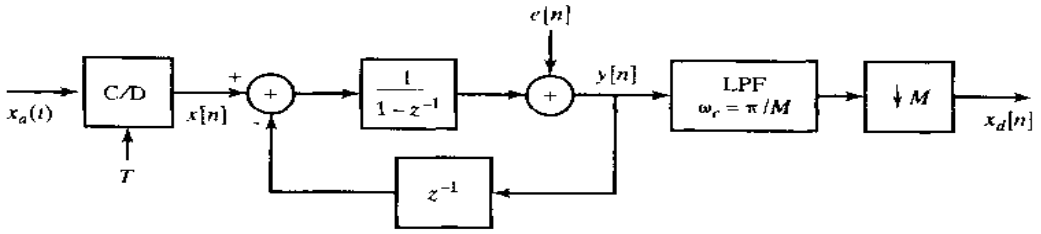


图 4.62　用线性噪声模型代替量化器的从 $x_a(t)$到 $y[n]$的图 4.61 系统

从 $x[n]$到 $y[n]$的传递函数记作 $H_x(z)$，从 $e[n]$到 $\hat{e}[n]$记作 $H_e(z)$。这两个传递函数都能直接计算为

$$H_x(z) = 1 \tag{4.161a}$$

$$H_e(z) = (1 - z^{-1}) \tag{4.161b}$$

结果，

$$y_x[n] = x[n] \tag{4.162a}$$

和

$$\hat{e}[n] = e[n] - e[n-1] \tag{4.162b}$$

因此，输出 $y[n]$可等效表示为 $y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$，其中 $x[n]$没有变化，而量化噪声 $e[n]$则按一阶差分算子 $H_e(z)$改变，这就如图 4.63 所画。利用(4.157)式给出的 $e[n]$的功率谱密度，出现在 $y[n]$中的量化噪声 $\hat{e}[n]$的功率谱密度是

$$\begin{aligned}\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) &= \sigma_e^2 \mid H_e(e^{j\omega}) \mid^2 \\ &= \sigma_e^2[2\sin(\omega/2)]^2\end{aligned} \tag{4.163}$$

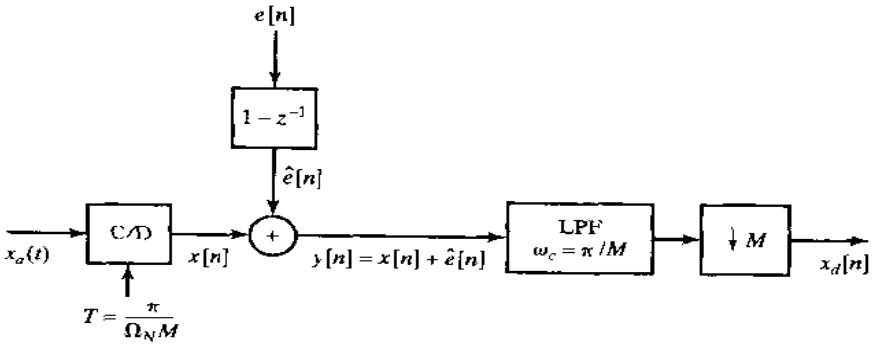


图 4.63　图 4.62 的等效表示

在图 4.64 中示出 $\hat{e}[n]$的功率谱密度，$e[n]$的功率谱，以及曾示于图 4.59(b)和图 4.59 的同一信号的功率谱。很有意思地看到，**总噪声功率**由在量化器端的 $\mathscr{E}\{e^2[n]\}=\sigma_e^2$ 增加到在噪声成形系统输出端的 $\mathscr{E}\{\hat{e}^2[n]\}=2\sigma_e^2$，然而在与图 4.59 比较之后注意到，量化噪声已成形为使噪声功率比直接过采样情况有更多功率位于信号带宽 $|\omega|<\pi/M$ 以外，而在直接过采样情况噪声功率谱是平坦的。

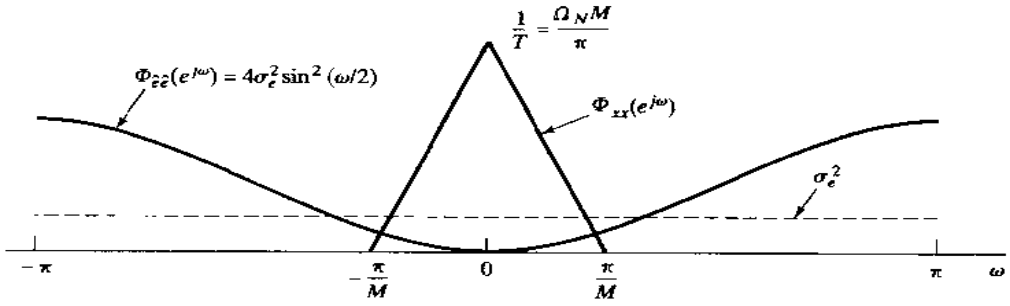


图 4.64　量化噪声和信号的功率谱密度

在图 4.61 系统中，带外的噪声功率被低通滤波器滤除。具体地说，在图 4.65 中示出了重叠在 $\Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega})$功率谱密度上的$\Phi_{x_{da}x_{da}}(e^{j\omega})$功率谱密度。因为减采样器并没有减少任何信号功率，所以在 $x_{da}[n]$中的信号功率是

$$P_{da}=\mathscr{E}\{x_{da}^2[n]\}=\mathscr{E}\{x^2[n]\}=\mathscr{E}\{x_a^2(t)\}$$

在最后输出中的量化噪声功率是

$$P_{de}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{x_{de}x_{de}}(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{\Delta^2}{12M}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right)\right)^2\mathrm{d}\omega \tag{4.164}$$

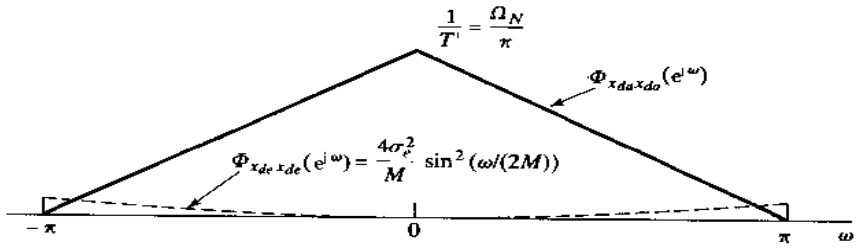


图 4.65　减采样后的信号和量化噪声的功率谱密度

为了与 4.9.1 节的结果近似地作一比较，假设 M 足够大，以至满足

$$\sin\left(\frac{\omega}{2M}\right)\approx\frac{\omega}{2M}$$

利用这一近似式，(4.164)式容易计算出为

$$P_{de}=\frac{1}{36}\frac{\Delta^2\pi^2}{M^3} \tag{4.165}$$

从(4.165)式我们再次看到，过采样率 M 和量化器的量化阶Δ 之间有一个权衡。因此，

对于一个$(B+1)$位的量化器和最大输入信号电平位于$\pm X_m$，$\Delta = X_m/2^B$，之间，为要实现某一给定的量化噪声功率P_{dc}，必须有

$$B = -\frac{3}{2}\log_2 M + \log_2(\pi/6) - \frac{1}{2}\log_2 P_{dc} + \log_2 X_m \tag{4.166}$$

将(4.166)式与(4.160)式比较可见，不是如直接量化时那样，每将过采样比加倍在量化上只有1/2比特的获益，而是利用噪声成形后有1.5比特的获益。

表4.1所列为相对于无过采样($M=1$)的直接量化时，(a)按4.9.1节讨论的直接量化的过采样和(b)按本节所研究的用噪声成形的过采样，在量化器位数上带来的节省。

表4.1　相对于$M=1$，直接量化和一阶噪声成形在量化器位数上的等效节省

M	直接量化	噪声成形
4	1	2.2
8	1.5	3.7
16	2	5.1
32	2.5	6.6
64	3	8.1

用吸收进第2个累加级可将图4.61的噪声成形策略进一步推广，这就如图4.66所示。在这种情况下，量化器还用加性噪声源$e[n]$建模，就能证明

$$y[n] = x[n] + \hat{e}[n]$$

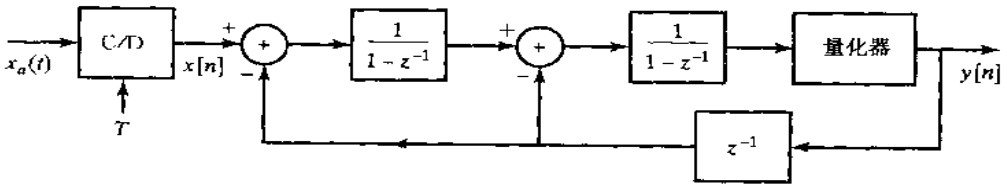


图4.66　具有二阶噪声成形的过采样量化器

式中，在两级的情况下，$\hat{e}[n]$是经由传递函数

$$H_e(z) = (1 - z^{-1})^2 \tag{4.167}$$

处理量化噪声$e[n]$的结果。现在对应的存在于$y[n]$中的量化噪声功率谱密度是

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2[2\sin(\omega/2)]^4 \tag{4.168}$$

有了这个结果，虽然在两级噪声成形系统的输出上总的噪声功率比一级的情况要大，但更多的噪声位于信号带宽之外。更一般地说，采用p级累加和反馈，相应的噪声成形为

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2[2\sin(\omega/2)]^{2p} \tag{4.169}$$

表4.2给出的是量化器的位数作为噪声成形的阶p和过采样率M的函数的等效下降位数。值得注意的是，当$p=2$和$M=64$时，几乎得到在精度上有13比特的提高，这就告诉我们，1比特的量化器在抽取器的输出端能够实现大约14比特的精度。

表 4.2　量化器的位数随噪声成形阶次 p 的减少

量化器的阶	过采样因子 M				
P	4	8	16	32	64
0	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	2.2	3.7	5.1	6.6	8.1
2	2.9	5.4	7.9	10.4	12.9
3	3.5	7.0	10.5	14.0	17.5
4	4.1	8.5	13.0	17.5	22.0
5	4.6	10.0	15.5	21.0	26.5

虽然，像图 4.66 那样的多级反馈回路可以大大将噪声减小，但是它们不是没有任何问题的。特别是，对于大的 p 值，产生不稳定和发生振荡的潜在威胁增加。称之为多级噪声成形(MASH)的另一种结构在习题 4.62 中考虑。

4.9.3　在 D/A 转换中的过采样和噪声成形

在 4.9.1 节和 4.9.2 节，我们讨论了利用过采样以简化模拟到数字转换过程。如同曾经提到过的，为了简化抗混叠滤波和提高精度信号最初被过采样，但是 A/D 转换器的最后输出 $x_d[n]$还是在奈奎斯特率下对 $x_a(t)$采样的。很自然，对于数字处理或者对于以数字形式简单表示模拟信号来说，最小采样率总是非常希望的，比如在 CD 音频刻录系统中就是这样。以相反的过程来应用同一原理从而实现在 D/A 转换过程中的改善，这种想法是很自然的了。

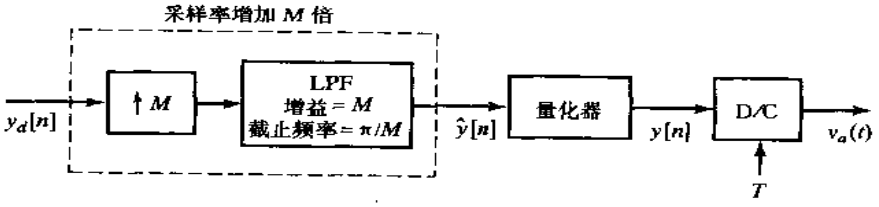


图 4.67　过采样 D/A 转换

基本系统如图 4.67 所示，它是与图 4.56 对应的。要被转换为连续时间信号的序列 $y_d[n]$首先被增采样得到 $\hat{y}[n]$，然后在将 $\hat{y}[n]$送到 D/A 转换器之前再重新量化，这样 D/A 转换器所接受的二进制样本是用再量化过程所产生的位数。如果可以确保量化噪声不占据信号频带的话，那么就能用一个很少位数的简单 D/A 转换器，这样噪声就能用廉价的模拟滤波滤除。

图 4.68 示出一种结构，其中量化器将量化噪声按照图 4.61 系统所提供的一阶噪声成形的类似方式成形。为了分析图 4.67 和图 4.68 的系统，将图 4.68 中的量化器用一个加性白噪声源 $e[n]$代

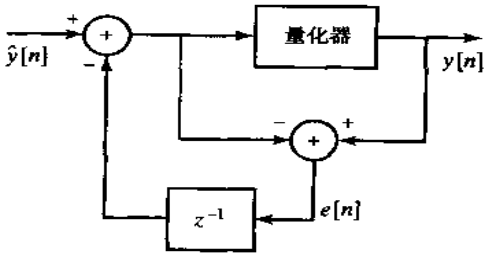


图 4.68　过采样 D/A 量化的一阶噪声成形系统

替，这样就有了图 4.69。从 $\hat{y}[n]$到 $y[n]$的传递函数是 1，也就是说出现在输出端的增采样信号 $\hat{y}[n]$没有变化。从 $e[n]$到 $y[n]$的传递函数 $H_e(z)$是

$$H_e(z) = 1 - z^{-1}$$

因此，在图 4.69 中出现在噪声成形系统输出端的量化噪声分量 $\hat{e}[n]$具有功率谱密度为

$$\Phi_{\hat{e}\hat{e}}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2(2\sin\omega/2)^2 \qquad (4.170)$$

式中 $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$。

图 4.70 是对 D/A 转换采用这种办法的一个说明。图 4.70(a)是图 4.67 中输入 $y_d[n]$的功率谱 $\Phi_{y_dy_d}(e^{j\omega})$。注意，已经假定信号 $y_d[n]$是在奈奎斯

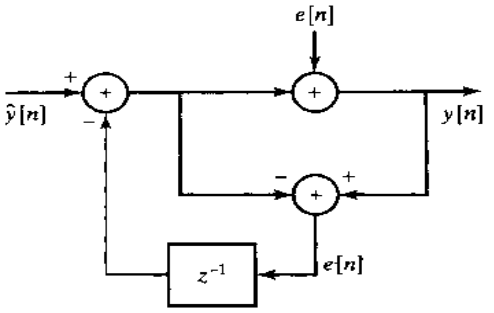


图 4.69　用线性噪声模型代替量化器的图 4.68 系统

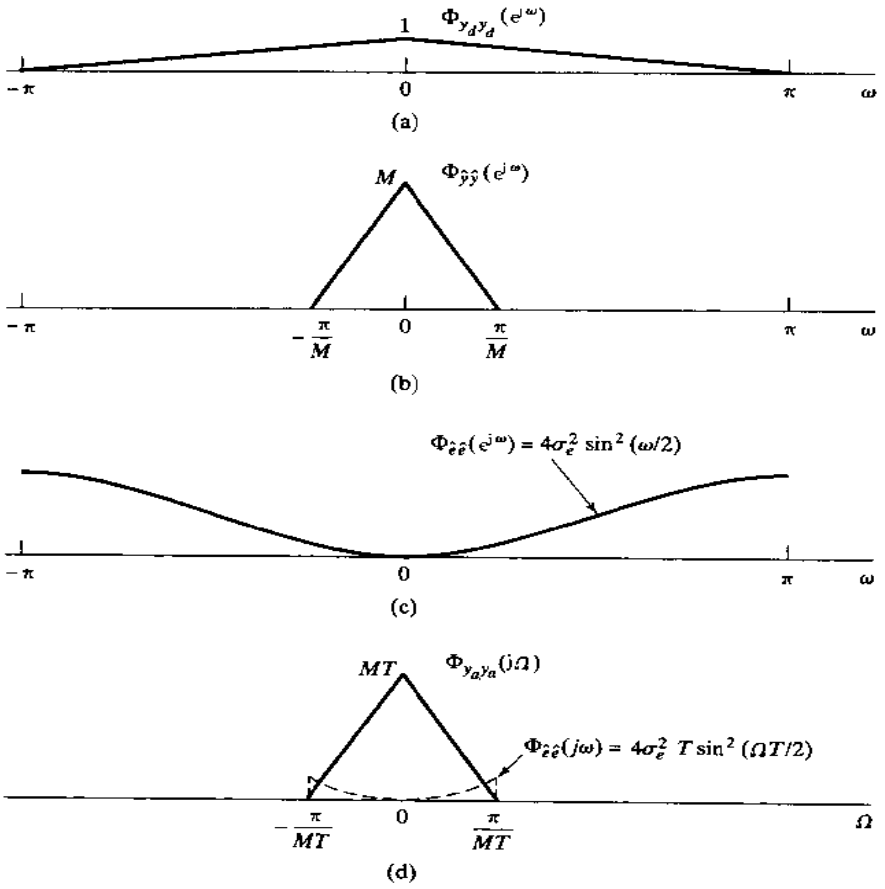


图 4.70　(a)信号 $y_d[n]$的功率谱密度；(b)信号 $\hat{y}[n]$的功率谱密度；(c)量化噪声的功率谱密度；(d)连续时间信号和量化噪声的功率谱密度

特率下采样的。图 4.70(b)是对应于增采样器(提高 M 倍)输出的功率谱,图 4.70(c)是对应于量化器/噪声成形器系统输出的量化噪声谱。最后,图 4.70(d)展示的是被放在图 4.67 D/C转换器模拟输出中噪声分量功率谱上面的信号分量的功率谱。在这种情况下,假定 D/C 转换器有一个截止频率为 $\pi/(MT)$的理想低通重构滤波器,它将尽可能多的量化噪声滤除。

在实际装置中,总希望避免锐截止的模拟重构滤波器,由图 4.70(d)很清楚,如果能够容许稍许多一点的量化噪声的话,那么 D/C 重构滤波器就不必要如此陡峭的滚降。再者,若在噪声成形中采用多级处理,输出噪声功率谱就具有如下形式:

$$\Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2(2\sin\omega/2)^{2p}$$

这将会把更多的噪声推到更高的频率上,这时模拟重构滤波器的要求就能进一步放宽。

4.10 小结

这一章我们建立并研究了连续时间信号与经周期采样而得到的离散时间序列之间的关系。能够用样本序列来表示连续时间信号的基本定理是奈奎斯特定理,该定理表明对一个带限信号而言,只要采样率相对于连续时间信号中的最高频率来说是足够高的话,那么周期样本就是一个充分的表示。在这个条件下,连续时间信号用低通滤波的方法可以从它的样本中恢复出来,这就相应于带限内插。如果相对于信号带宽而言采样率太低的话,那么就会产生混叠。

用采样样本来表示信号的能力就有可能对连续时间信号进行离散时间处理。这就由首先采样、然后应用离散时间处理,并从处理的结果中重构一个连续时间信号来完成。所给出的是有关低通滤波和微分方面的例子。

特别重要的一类处理是相应于采样率的改变。将一个离散时间序列减采样,在频域就相应于离散时间谱重复并给频率轴重新归一化,但为了避免混叠,可能要求附加的带限。增采样就相应于等效地提高了采样率,因而在频域也代表着频率轴的重新归一化。将增采样和减采样按整数倍组合起来,就可能实现非整数采样率的转换。我们也指出了如何利用多采样率技术高效地实现采样率转换。

本章最后部分仔细研究了与连续时间信号的离散时间处理有关的几个实际方面的问题,其中包括为消除混叠的预滤波的应用,在模数转换中的量化误差,以及在连续时间信号的采样和重构中所使用的有关滤波的一些问题。最后说明,如何利用离散时间的抽取与内插和噪声成形来简化 A/D 和 D/A 转换中的模拟部分。

习 题

基本题(附答案)

4.1 用采样周期 $T=(1/400)$秒对信号

$$x_c(t) = \sin(2\pi(100)t)$$

采样得到一离散时间序列 $x[n]$,所得信号 $x[n]$是什么?

4.2 序列

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right), \qquad -\infty < n < \infty$$

用采样模拟信号

$$x_c(t) = \cos(\Omega_0 t), \qquad -\infty < t < \infty$$

而得到，采样率为 1 000 样本/s。问有哪两种可能的 Ω_0 值以同样的采样率能得到该序列 $x[n]$?

4.3 用采样周期 T 对连续时间信号

$$x_c(t) = \cos(4\,000\pi t)$$

采样得到一离散时间信号

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

(a) 确定一种选取的 T 与这个信息相符。

(b) 在(a)中你所选取的 T 唯一吗? 若是，解释为什么? 若不是，请给出另一种选择的 T 与已知信息相符。

4.4 用采样周期 T 对连续时间信号

$$x_c(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$$

采样得到离散时间信号

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$$

(a) 确定一种选取的 T 与这个信息相符。

(b) 在(a)中你所选取的 T 唯一吗? 若是，解释为什么? 若不是，请给出另一种选择的 T 与已知信息相符。

4.5 考虑图 4.11 的系统，其中离散时间系统是一个理想低通滤波器，截止频率为 $\pi/8$ rad/s。

(a) 若 $x_c(t)$带限到 5kHz，为了避免在 C/D 转换器中发生混叠，最大的 T 值是多少?

(b) 若 $1/T = 10$kHz，有效连续时间滤波器的截止频率是多少?

(c) 若 $1/T = 20$kHz，重复(b)。

4.6 令 $h_c(t)$记作某一线性时不变连续时间滤波器的冲激响应，$h_d[n]$为某一线性时不变离散时间滤波器的单位脉冲响应。

(a) 若

$$h_c(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

求该连续时间滤波器的频率响应，并画出它的幅度特性。

(b) 若 $h_d[n] = Th_c(nT)$，$h_c(t)$如(a)所给，求该离散时间滤波器的频率响应，并画出它的幅度特性。

(c) 若给定 a 值，作为 T 的函数，求离散时间滤波器频率响应的最小幅度值。

4.7 图 P4.7-1 示出一种多径通信信道的简单模型，假设 $s_c(t)$是带限的，$S_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geqslant \pi/T$，对 $x_c(t)$用采样周期 T 采样得到序列

$$x[n] = x_c(nT)$$

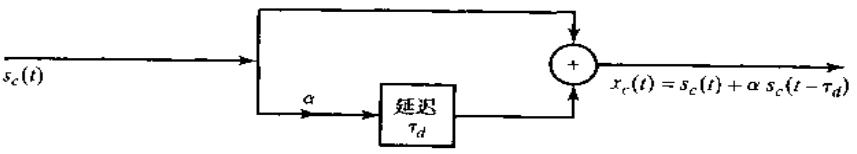


图 P4.7-1

(a) 求 $x_c(t)$的傅里叶变换和 $x[n]$的傅里叶变换(利用 $S_c(j\Omega)$表示)。

(b) 现在要用一个离散时间系统来仿真该多径系统，选择该离散时间系统的 $H(e^{j\omega})$，使得当输入为

$s[n]=s_c(nT)$时，输出为 $r[n]=x_c(nT)$，如图 P4.7-2 所示。求利用 T 和 τ_d 表示的 $H(e^{j\omega})$。

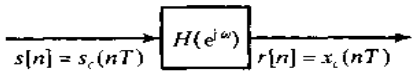


图 P4.7-2

(c) 当(i)$\tau_d \simeq T$ 和(ii)$\tau_d \simeq T/2$ 时，求图 P4.7-2 单位脉冲响应 $h[n]$。

4.8 图 P4.8 系统有下列关系：

$$X_c(j\Omega)=0,\quad |\Omega| \geqslant 2\pi\times 10^4$$

$$x[n]=x_c(nT)$$

$$y[n]=T\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

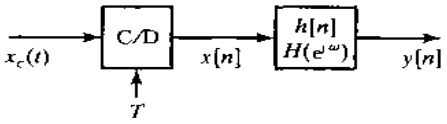


图 P4.8

(a) 如果要避免混叠，即 $x_c(t)$ 能从 $x[n]$ 恢复，求该系统最大可允许的 T 值。

(b) 求 $h[n]$。

(c) 利用 $X(e^{j\omega})$，当 $n=\infty$ 时，$y[n]$ 为多少？

(d) 试决定是否存在任何 T 值，对该值有

$$y[n]\Big|_{n=\infty}=\int_{-\infty}^{\infty}x_c(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(P4.8-1)}$$

如果有这样一个 T 值，求其最大值。如果不存在，请说明并给出 T 该如何选，才能使等式(P4.8-1)有最好的近似。

4.9 考虑一稳定离散时间信号 $x[n]$，其离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 满足下列方程：

$$X(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega-\pi)})$$

并有偶对称性，即 $x[n]=x[-n]$。

(a) 证明：$X(e^{j\omega})$ 是周期的，周期为 π。

(b) 求 $x[3]$ 的值。(**提示**：求全部 n 为奇数点的值)

(c) 令 $y[n]$ 是 $x[n]$ 的抽取，即 $y[n]=x[2n]$。你能从 $y[n]$ 中对全部 n 恢复出 $x[n]$ 吗？若是，如何恢复？若不能，请陈述理由。

4.10 下面每一个连续时间信号都被用作为图 4.1 中一个理想 C/D 转换器的输入，采样周期 T 也如下给出。在每种情况下，求所得离散时间信号 $x[n]$。

(a) $x_c(t)=\cos(2\pi(1\,000)t)$，$T=(1/3\,000)$s

(b) $x_c(t)=\sin(2\pi(1\,000)t)$，$T=(1/1\,5000)$s

(c) $x_c(t)=\sin(2\pi(1\,000)t)/(\pi t)$，$T=(1/5\,000)$s

4.11 下面给出的连续时间信号 $x_c(t)$ 和对应的离散时间输出信号 $x[n]$ 就是图 4.1 中理想 C/D 的输入和输出。请给出一种采样周期 T 与每对 $x_c(t)$ 和 $x[n]$ 相一致。另外指出是否 T 的选取是唯一的，若不是，给出第 2 种可能的选择 T 与所给信息相符。

(a) $x_c(t)=\sin(10\pi t)$，$x[n]=\sin(\pi n/4)$

(b) $x_c(t)=\sin(10\pi t)/(10\pi t)$，$x[n]=\sin(\pi n/2)/(\pi n/2)$

4.12 在图 4.11 系统中，假设

$$H(e^{j\omega})=j\omega/T,\quad -\pi\leqslant\omega<\pi$$

和 $T=(1/10)$s。

(a) 对下面每一输入 $x_c(t)$，求相应输出 $y_c(t)$：

(i) $x_c(t)=\cos(6\pi t)$

(ii) $x_c(t)=\cos(14\pi t)$

(b) 这些输出 $y_c(t)$是从一个微分器的输出所期望的吗?

4.13 在如图 4.16 系统中,$h_c(t)=\delta(t-T/2)$。

(a) 假设输入 $x[n]=\sin(\pi n/2)$和 $T=10$,求 $y[n]$。

(b) 假设 $x[n]$与(a)相同,但 $T=5$,求 $y[n]$。

(c) 一般来说,这个连续时间 LTI 系统 $h_c(t)$是如何限制不改变 $y[n]$而能用作采样周期 T 的范围的?

4.14 下列信号中哪些能用图 4.20 的系统以因子 2 减采样而不会丢失任何信息?

(a) $x[n]=\delta[n-n_0]$, n_0 为某未知整数。

(b) $x[n]=\cos(\pi n/4)$

(c) $x[n]=\cos(\pi n/4)+\cos(3\pi n/4)$

(d) $x[n]=\sin(\pi n/3)/(\pi n/3)$

(e) $x[n]=(-1)^n\sin(\pi n/3)/(\pi n/3)$

4.15 考虑图 P4.15 系统,对下列每一输入信号 $x[n]$,指出是否输出 $x_r[n]=x[n]$?

(a) $x[n]=\cos(\pi n/4)$

(b) $x[n]=\cos(\pi n/2)$

(c) $x[n]=\left[\dfrac{\sin(\pi n/8)}{\pi n}\right]^2$

提示:利用傅里叶变换的调制性质求 $X(e^{j\omega})$。

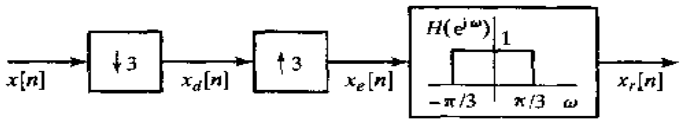


图 P4.15

4.16 考虑图 4.28 的系统。在下列每一对输入 $x[n]$和对应的输出 $\bar{x}_d[n]$是对某一特定的选择 M/L 给出的,根据给出的信息,确定某 M/L,并标出你的选择是否唯一。

(a) $x[n]=\sin(\pi n/3)/(\pi n/3)$, $\bar{x}_d[n]=\sin(5\pi n/6)/(5\pi n/6)$

(b) $x[n]=\sin(3\pi n/4)$, $\bar{x}_d[n]=\cos(\pi n/2)$

4.17 对于图 4.28 的系统,下列每一部分列出了输入 $x[n]$和增采样率 L,减采样率 M,确定对应的输入 $\bar{x}_d[n]$。

(a) $x[n]=\sin(2\pi n/3)/\pi n$, $L=4$, $M=3$

(b) $x[n]=\sin(3\pi n/4)$, $L=3$, $M=5$

4.18 对于图 4.28 的系统,输入信号 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$如图 P4.18 所示。对下列选取的每一种 L 和 M 的选取,对某常数 a,给出最大可能的 ω_0 值,以使 $\tilde{X}_d(e^{j\omega})=aX(e^{jM\omega/L})$

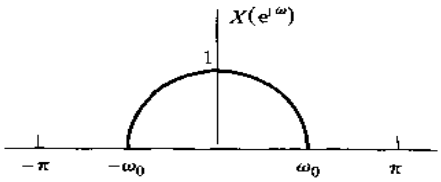


图 P4.18

(a) $M=3$, $L=2$

(b) $M=5$, $L=3$

(c) $M=2$, $L=3$

4.19 傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$如图 P4.19-1 所示的连续时间信号 $x_c(t)$通过如图 P4.19-2 所示的系统，确定使其有 $x_r(t)=x_c(t)$的 T 值的范围。

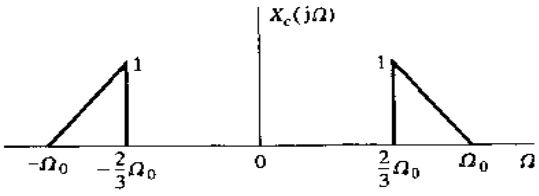


图 P4.19-1

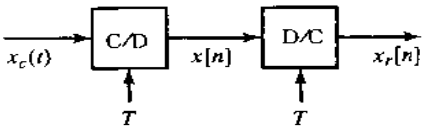


图 P4.19-2

4.20 考虑图 4.11 的系统。输入信号 $x_c(t)$的傅里叶变换如图 P4.20 所示，$\Omega_0=2\pi(1\ 000)$rad/s。离散时间系统是一个理想低通滤波器，其频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 为使在采样该输入信号中无混叠发生，什么是最小的采样率 $F_s=1/T$?

(b) 若 $\omega_c=\pi/2$，什么是最小的采样率而有 $y_r(t)=x_c(t)$?

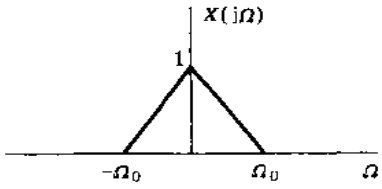


图 P4.20

基本题

4.21 一个复值带通模拟信号 $x_c(t)$有如图 P4.21 所示的傅里叶变换，这里$(\Omega_2-\Omega_1)=\Delta\Omega_c$ 对该信号进行采样，得到序列 $x[n]=x_c(nT)$.

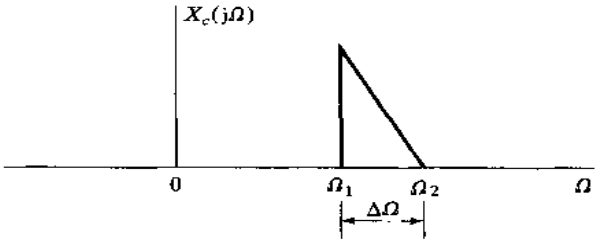


图 P4.21

(a) 当 $T=\pi/\Omega_2$，画出序列 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

(b) 不会引起混叠失真的能用的最低采样频率是什么(也即是 $x_c(t)$可以由 $x[n]$恢复)?

(c) 如果采样率大于或等于由(b)确定的采样率，试画出由 $x[n]$恢复 $x_c(t)$的系统方框图。假设有(复数的)理想低通滤波器可资利用。

4.22 一个具有如图 P4.22 所示的傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$连续时间信号 $x_c(t)$用采样周期 $T=2\pi/\Omega_0$ 采样形成序列 $x[n]=x_c(nT)$。

(a) 对$|\omega|<\pi$，画出傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

(b) 信号 $x[n]$经过一个数字信道传输。在接收端原信号 $x_c(t)$必须恢复出来。试画出该恢复系统的方框图，并给出它的特性。假设可以采用理想滤波器。

(c) 问 T 在什么范围内(用 Ω_0 表示)，$x_c(t)$可从 $x[n]$恢复？

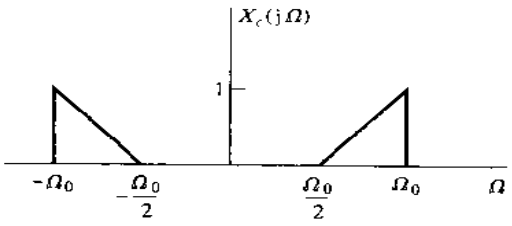


图 P4.22

4.23 在图 P4.23 中，设 $X_c(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geqslant\pi/T_1$。对于一般情况 $T_1\neq T_2$，试用 $x_c(t)$来表示 $y_c(t)$。对于 $T_1>T_2$和 $T_1<T_2$ 基本关系是不同的吗？

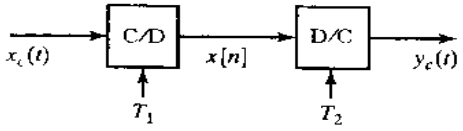


图 P4.23

4.24 在图 P4.24 的系统中，$X_c(j\Omega)$和 $H(e^{j\omega})$如图所示。对下列各种情况画出并标注 $y_c(t)$的傅里叶变换：

(a) $1/T_1=1/T_2=10^4$

(b) $1/T_1=1/T_2=2\times10^4$

(c) $1/T_1=2\times10^4$，$1/T_2=10^4$

(d) $1/T_1=10^4$，$1/T_2=2\times10$

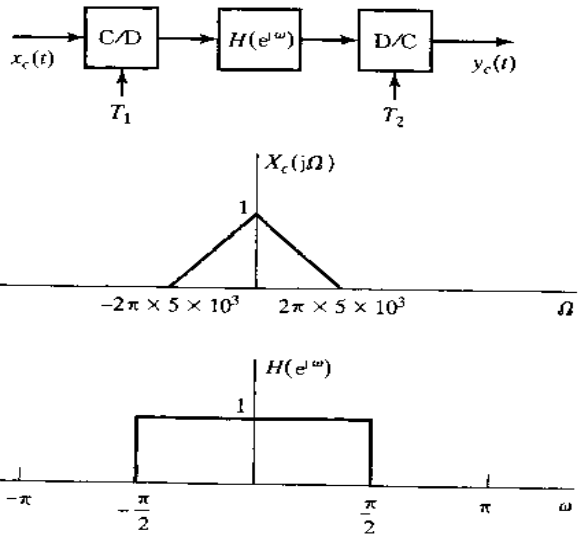


图 P4.24

4.25 图 P4.25－1 示出利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的整个系统。重构滤波器 $H_r(j\Omega)$ 和离散时间滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的频率响应如图 P4.25－2 所示。

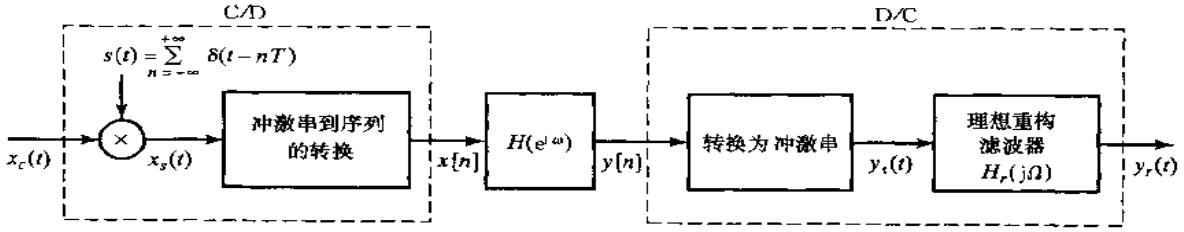


图 P4.25－1

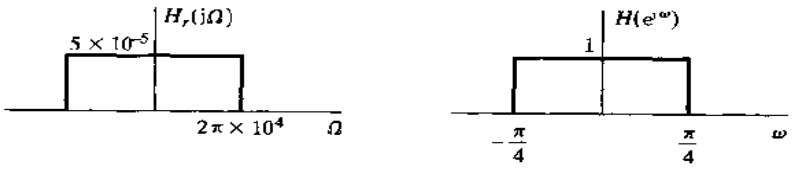


图 P4.25－2

(a) 对如图 P4.25－3 所示的 $X_c(j\Omega)$ 和 $1/T=20\text{kHz}$，画出 $X_s(j\Omega)$ 和 $X(e^{j\omega})$。对于某个 T 值范围，具有输入为 $x_c(t)$，输出为 $y_c(t)$ 的整个系统被等效为一个如图 P4.25－4 所示的频率响应为 $H_{\text{eff}}(j\Omega)$ 的连续时间低通滤波器。

(b) 求该 T 值范围，在该范围内，当 $X_c(j\Omega)$ 带限到 $|\Omega|\leqslant2\pi\times10^4$，如图 P4.25－3 所示时，(a)中所给结论成立。

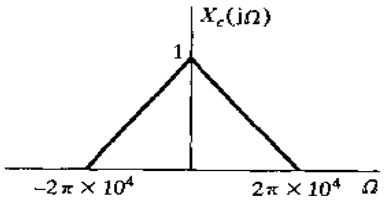


图 P4.25－3

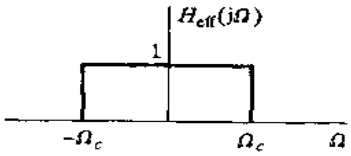


图 P4.25－4

注意：这就是利用固定的连续时间和离散时间滤波器和可变采样率来实现可变截止频率的连续时间滤波器的一种方法。

4.26 考虑序列 $x[n]$，它的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 如图 P4.26 所示。试对 $M=3$，$\omega_H=\pi/2$ 和 $\omega_H=\pi/4$ 画出 $X_s(e^{j\omega})$ 和 $X_d(e^{j\omega})$，这里

$$x_s[n]=\begin{cases}x[n], & n=Mk,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

和

$$x_d[n]=x_s[Mn]=x[Mn]$$

当 $M=3$ 时，不存在混叠的最大 ω_H 值是什么？

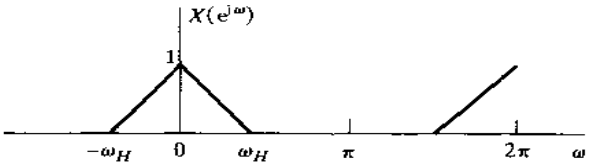


图 P4.26

4.27 利用帕斯瓦尔定理简要解释为什么傅里叶变换的幅值当减采样时变化，而当增采样时不改变？

4.28 (a) 对某一给定选取的 T。图 4.11 系统是线性的吗？若是，给出一个简单的论证性说明它满足线性；若不是，给出一个反例。

(b) 对某一给定选取的 T，图 4.11 系统是时不变的吗？若是，给出一个简单的论证性说明它满足时不变性；若不是，给出一个反例。

深入题

4.29 考虑示于图 P4.29 系统。假定 $H_1(e^{j\omega})$ 是固定的且已知，求一个 LTI 系统的频率响应 $H_2(e^{j\omega})$，以使当输入是相同时，有 $y_2[n]=y_1[n]$。

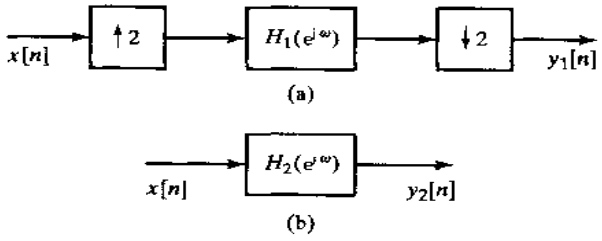


图 P4.29

4.30 在图 4.11 的系统中，设离散时间系统是线性和时不变的，且

$$X_c(j\Omega)=0, \qquad |\Omega| \geqslant 4\,000\pi$$

求满足

$$Y_c(j\Omega)=\begin{cases}|\Omega|X_c(j\Omega), & 1\,000\pi<|\Omega|<2\,000\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

的最大可能的 T 值及相应的离散时间系统频率响应 $H(e^{j\omega})$

4.31 在图 4.11 的系统中，设 $X_c(j\Omega)=0, |\Omega|>\pi/T$。求出并画出离散时间 LTI 系统的幅度和相位特性，使得输出 $y_r(t)$ 是输入的连续积分，即

$$y_r(t)=\int_{-\infty}^{t}x_c(\tau)d\tau$$

4.32 已知一个带限的连续时间信号含有 60Hz 分量，这个分量想用图 4.11 系统的处理把它除掉，这里 $T=10^{-4}$。

(a) 如果要避免混叠，那么连续时间信号中能包含的最高频率是多少？

(b) 利用具有如下频率响应的离散时间系统：

$$H(e^{j\omega})=\frac{[1-e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-e^{j(\omega+\omega_0)}]}{[1-0.9e^{-j(\omega-\omega_0)}][1-0.9e^{-j(\omega+\omega_0)}]}$$

画出 $H(e^{j\omega})$的幅度和相位

(c)为消除 60Hz 的分量，ω_0 应选什么值?

4.33 考虑图 4.11 系统，其

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geqslant 2\pi(1\,000)$$

而离散时间系统是一个平方器，即 $y[n]=x^2[n]$，使得 $y_c(t)=x_c^2(t)$的最大的 T 值是什么?

4.34 图 P4.34-1 的 LTI 系统，其 $H(e^{j\omega})$是

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}, \quad |\Omega| \geqslant 2\pi(\text{半个样本间隔的延迟})$$

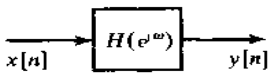


图 P4.34-1

(a) 求图 4.16 系统中的 T 和 $h_c(t)$，使得该系统等效为图 P4.34-1 的系统，后者的 $H(e^{j\omega})$如上所给。

(b) 当输入序列为

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

并如图 P4.34-2 所示时，求出并画出 $y[n]$。

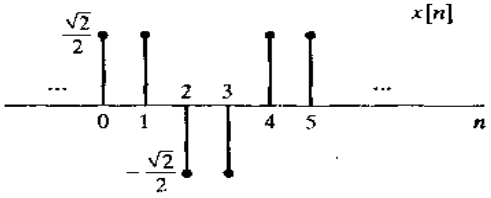


图 P4.34-2

4.35 考虑图 4.16 系统，其中连续时间 LTI 系统是因果的，且由下列线性常系数微分方程所表征：

$$\frac{d^2y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t)$$

整个系统等效为一个因果的离散时间线性时不变系统。求该等效离散时间系统当 $T=0.1$s 时的频率响应 $H(e^{j\omega})$。

4.36 图 P4.36 中，$x[n]=x_c(nT)$和 $y[n]=x[2n]$。

(a) 在如图 P4.36 所示系统中，若 $x_c(t)$的傅里叶变换是 $X_c(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geqslant 2\pi\times 100$，为了使

$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad \frac{\pi}{2} < |\omega| \leqslant \pi$$

要求的 T 值是什么?

(b) 如何选择 T'，可使 $y_c(t)=x_c(t)$?

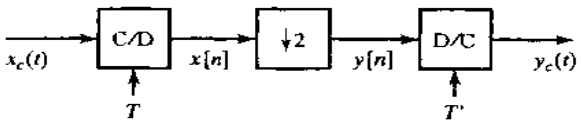


图 P4.36

4.37 假设一个序列 $s[n]$是用截止频率为 5kHz 的连续时间低通滤波器过滤的一个语音信号 $s_c(t)$，然后用 10kHz 采样率采样而得到的，如图 P4.37-1 所示。不幸的是，一旦序列 $s[n]$被存储在磁带上之后，该语音信号 $s_c(t)$受到破坏。稍后发现本应该按照如图 P4.37-2 所示的系统来处理。利用离散时间处理，建立一种从 $s[n]$得到 $s_1[n]$的方法。方法可以要求有大量的计算量，但不应要求有 C/D 或 D/C

转换器。如果方法用了一个离散时间滤波器，请给出该滤波器的频率响应。

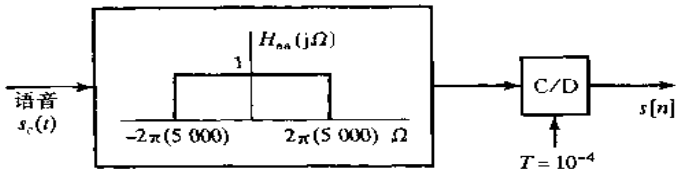


图 P4.37－1

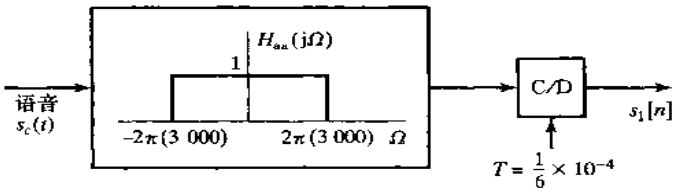


图 P4.37－2

4.38 考虑图 P4.38－1 所示系统，这里

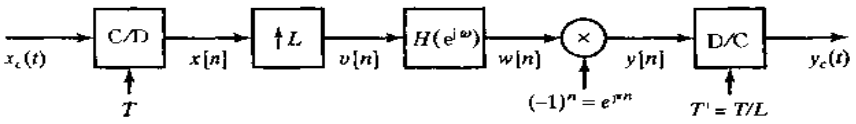


图 P4.38－1

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/L \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

若 $X_c(j\Omega)$如图 P4.38－2 所示，画出 $Y_c(j\Omega)$。

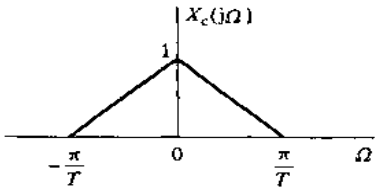


图 P4.38－2

4.39 图 P4.39 的系统近似为将序列 $x[n]$以因子 L 内插。假设该线性滤波器的单位脉冲响应 $h[n]$有 $h[n]=h[-n]$和 $h[n]=0$，$|n|>(RL-1)$，这里 R 和 L 都是整数，即该单位脉冲响应是对称的，且长度为$(2RL-1)$个样本。

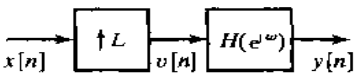


图 P4.39

(a) 在回答下面问题中，不要关心有关该系统的因果性，因为可以用包括某些延迟来达到因果。明确点说，必须插入多少延迟该系统才能成为因果的？

(b) 为了有 $y[n]=x[n/L]$，$n=0,\pm L,\pm 2L,\pm 3L,\cdots$，$h[n]$必须满足什么条件？

(c) 利用单位脉冲响应的对称性，证明 $y[n]$的每个样本用不多于 RL 次乘法都能计算出来。

(d) 利用不需要做被零乘的相乘这一事实，证明每个输出样本只要 $2R$ 次乘法。

4.40 图 P4.40 系统中，

$$X_c(j\Omega)=0,\qquad |\Omega|\geqslant \pi/T$$

和

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega}, & |\omega|<\pi/L\\ 0, & \pi/L<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$y[n]$与输入信号 $x_c(t)$是什么关系？

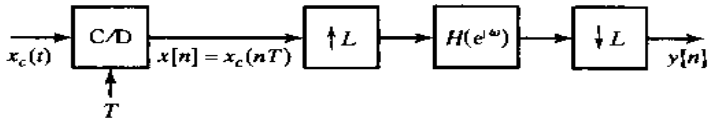


图 P4.40

4.41 考虑图 P4.41－1 所示系统。该系统输入是带限信号，其傅里叶变换如图 P4.20 所示，其中 $\Omega_0=\pi/T$。图 P4.41－1 中的离散时间 LTI 系统其频率响应如图 P4.41－2 所示

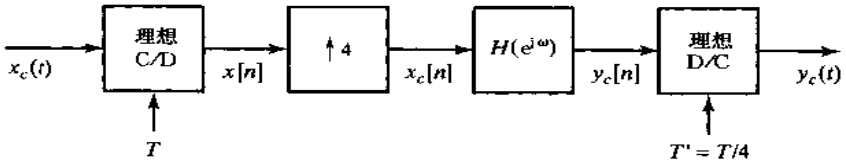


图 P4.41－1

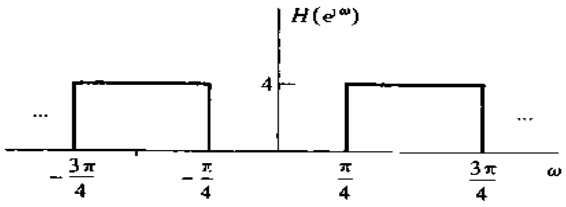


图 P4.41－2

(a) 画出傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$，$X_p(e^{j\omega})$，$Y_p(e^{j\omega})$和 $Y_c(j\Omega)$。

(b) 对于一般情况，当 $X_c(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geqslant\pi/T$ 时，用 $X_c(j\Omega)$来表示 $Y_c(j\Omega)$。同时，当 $x_c(t)$是以这种方式带限时，给出用 $x_c(t)$表示 $y_c(t)$的一般表达式。

4.42 令 $x_c(t)$是一实值连续时间信号，其最高频率为 $2\pi(250)$rad/s。再者，令 $y_c(t)=x_c(t-1/1\,000)$。

(a) 若 $x[n]=x_c(n/500)$，请问由 $x[n]$恢复 $x_c(t)$理论上是可能的吗？陈述理由。

(b) 若 $y[n]=y_c(n/500)$，请问由 $y[n]$恢复 $y_c(t)$理论上是可能的吗？陈述理由。

(c) 利用图 P4.42 的系统有可能从 $x[n]$得到 $y[n]$吗？

若能够，请确定 $H_1(e^{j\omega})$。

(d) 不用任何增采样或减采样，而用一个频率响应为 $H_2(e^{j\omega})$的单个 LTI 系统也有可能从 $x[n]$得到

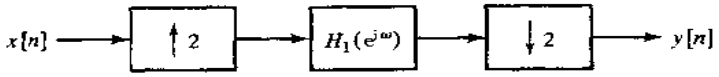


图 P4.42

$y[n]$吗？请确定 $H_2(e^{j\omega})$。

4.43 考虑对连续时间输入信号 $g_c(t)$进行离散时间处理的示于图 P4.43－1 的系统。输入信号 $g_c(t)$具有 $g_c(t)=f_c(t)+e_c(t)$的形式，而 $f_c(t)$和 $e_c(t)$的傅里叶变换如图P4.43－2所示。因为输入信号不是带限的，所以要用一个连续时间抗混叠滤波器 $H_{aa}(j\Omega)$，$H_{aa}(j\Omega)$的幅度特性如图 P4.43－3 所示，相位特性是$\angle H_{aa}(j\Omega)=-\Omega^3$。

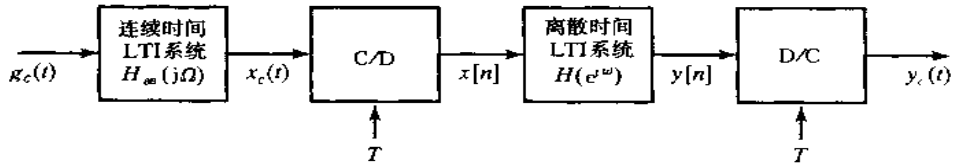


图 P4.43－1

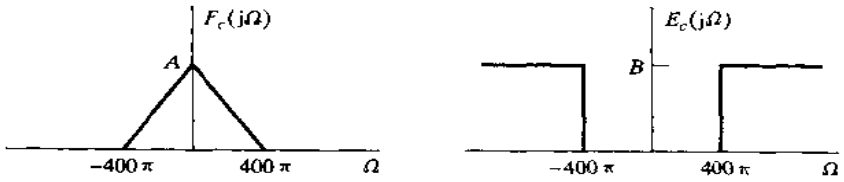


图 P4.43－2

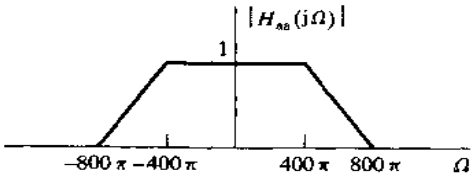


图 P4.43－3

(a) 如果采样率是 $2\pi/T=1\,600\pi$，求该离散时间系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$的幅度和相位，以使得输出 $y_r(t)=f_c(t)$。

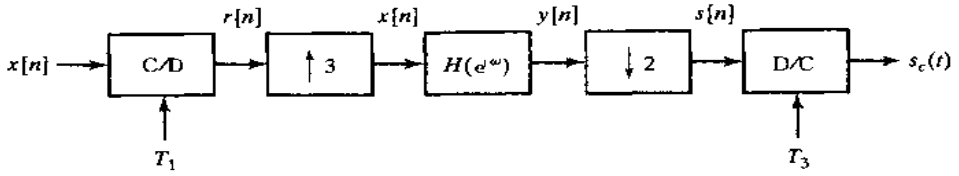
(b) 若 $2\pi/T<1\,600\pi$，$y_r(t)=f_c(t)$有可能吗？若可能，什么是 $2\pi/T$ 的最小值？对这一 $2\pi/T$ 的选取确定 $H(e^{j\omega})$。

4.44 考虑图 P4.44 给出的系统。假设 $R_c(j\Omega)$是带限的，也即 $R_c(j\Omega)=0$，$|\Omega|\geq 2\pi(1\,000)$，如图中所示。

(a) 画出 $R(e^{j\omega})$和$X(e^{j\omega})$。

(b) 选取非零的 ω_0 和 T_2 值，使之对某非零常数 α 有 $y[n]=\alpha r_c(nT_2)$。（不必确定 α 的值）

(c) 利用在(b)中得到的 ω_0 值，确定某一种 T_3 的选取，使之对某非零常数 β 有 $s_r(t)=\beta r_c(t)$。（不必确定 β 的值）



$$T_1 = \frac{1}{2\,000}\text{s} \qquad H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, 0 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_0 \\ 0, \omega_0 < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

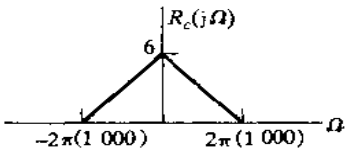


图 P4.44

4.45 假定在图 P4.45 中的连续时间 $x_c(t)$是真正带限和时限的，而有

$$x_c(t) = 0, \quad t < 0 \text{ 和 } t > 10\text{s}$$

和

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geqslant 2\pi \times 10^4$$

虽然没有任何连续时间信号能够是真正带限的，而又是真正时限的，但是一个信号满足这两个限制的假设往往是一种最好的近似，而且在连续时间信号的离散时间处理中正是我们所依赖的基础。在图 P4.45 中连续时间信号 $x_c(t)$被采样得到序列 $x[n]$，我们想对该序列 $x[n]$作处理，以尽可能精确地估计出在 $x_c(t)$下所覆盖的总面积 A。

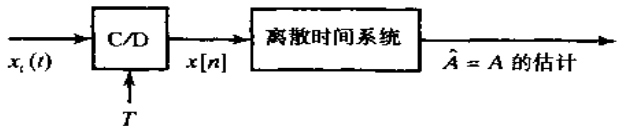


图 P4.45

具体地说，定义

$$A = \int_0^{10} x_c(t)\mathrm{d}t$$

对该离散时间系统的单位脉冲响应 $h[n]$和最大可能的 T 值作出一种选取，以求得对 A 尽可能准确的估计。特别陈述一下，你的估计是准确的，还是近似的？

4.46 考虑图 P4.46－1 的系统，其中$H_0(z)$，$H_1(z)$和 $H_2(z)$均是 LTI 系统的系统函数。假设 $x[n]$是某一任意稳定的复数信号，没有任何对称性质。

(a) 设 $H_0(z)=1$，$H_1(z)=z^{-1}$和 $H_2(z)=z^{-2}$，你能从 $y_0[n]$，$y_1[n]$和 $y_2[n]$中恢复 $x[n]$吗？如果可以，如何恢复？如果不能，陈述理由。

(b) 假设 $H_0(e^{j\omega})$，$H_1(e^{j\omega})$和$H_2(e^{j\omega})$分别为：

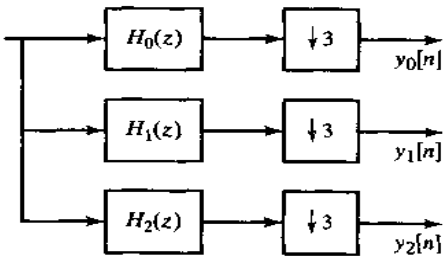


图 P4.46－1

$$H_0(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \pi/3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi/3 < |\omega| \leqslant 2\pi/3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 2\pi/3 < |\omega| \leqslant \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

你能从 $y_0[n]$, $y_1[n]$ 和 $y_2[n]$ 中恢复 $x[n]$ 吗？如果可以，如何恢复？如果不能，陈述理由。

现在考虑图 P4.46-2 的系统，图中 $H_3(e^{j\omega})$ 和 $H_4(e^{j\omega})$ 都是 LTI 系统的频率响应。再次假定 $x[n]$ 是一任意稳定的复数信号，没有任何对称性质。

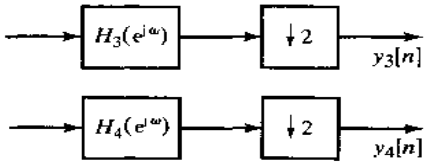


图 P4.46-2

(c) 假设 $H_3(e^{j\omega}) = 1$ 和

$$H_4(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega < \pi \\ -1, & -\pi \leqslant \omega < 0 \end{cases}$$

你能从 $y_3[n]$ 和 $y_4[n]$ 中恢复 $x[n]$ 吗？若可以，如何恢复？若不能，陈述理由。

扩充题

4.47 在许多应用中，离散时间随机信号是经对连续时间随机信号周期采样而得到的。本题关注的是随机信号采样定理的推导。今考虑一个由随机变量 $\{x_a(t)\}$ 所定义的连续时间平稳随机过程，这里 t 是一个连续变量。自相关函数定义为

$$\Phi_{x_c x_c}(\tau) = \mathcal{E}\{x(t)x^*(t+\tau)\}$$

功率密度谱是

$$P_{x_c x_c}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x_c x_c}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

用周期采样所得到的离散时间随机过程由随机变量 $\{x[n]\}$ 的集合所定义，这里 $x[n] = x_a(nT)$，T 为采样周期。

(a) $\phi_{xx}[n]$ 和 $\phi_{x_c x_c}(\tau)$ 之间是什么关系？

(b) 利用连续时间过程的功率密度谱表示离散时间过程的功率密度谱。

(c) 在什么条件下，离散时间功率密度谱才是连续时间功率密度谱的一个正确表示？

4.48 考虑一个具有如图 P4.48-1 所示的带限功率密度谱 $P_{x_c x_c}(\Omega)$ 的连续时间随机过程 $x_c(t)$。假定采样 $x_c(t)$ 以得到离散时间随机过程 $x[n] = x(nT)$。

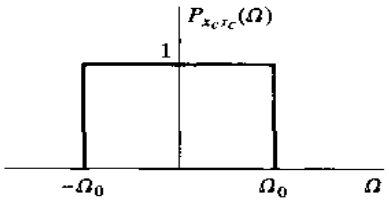


图 P4.48-1

(a) 该离散时间随机过程的自相关序列是什么？

(b) 对于如图 P4.48-1 所示的连续时间功率密度谱，T 应该如何选取才能使离散时间过程是白的，即其功率密度谱对所有 ω 都是常数？

(c) 若连续时间功率密度谱如图 P4.48-2 所示，T 该如何选取才能使离散时间过程是白的？

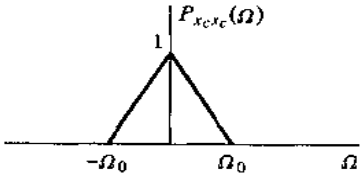


图 P4.48-2

(d) 对连续时间过程和采样周期有哪些一般要求才能使离散时间过程是白的？

4.49 本题研究交换两种运算的次序在信号上所产生的影响，这两种运算是采样和执行一个无记忆的非线性运算。

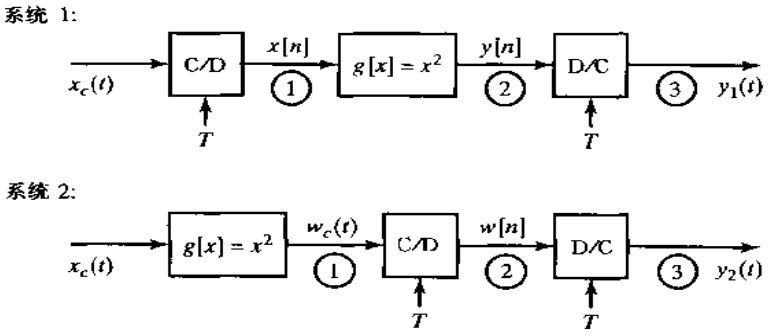


图 P4.49－1

(a) 考虑图 P4.49－1 中两个信号处理系统，这里 C/D 和 D/C 转换器都是理想的。映射 $g[x]=x^2$ 代表一个无记忆非线性器件。当采样率选为 $1/T=2f_m$Hz 和 $x_c(t)$ 的傅里叶变换如图 P4.49－2 所示时，画出在点 1,2 和 3 处的信号频谱。$y_1(t)=y_2(t)$吗？若不等，为什么？$y_1(t)=x_c^2(t)$吗？请解释你的答案。

(b) 考虑系统 1，令 $x_c(t)=A\cos 30\pi t$ 和采样率 $1/T=40$Hz，$y_1(t)=x_c^2(t)$吗？请说明为什么是或不是。

(c) 考虑图 P4.49－3 的信号处理系统，这里 $g[x]=x^3$，而 $g^{-1}[v]$是它的(唯一的)逆，即 $g^{-1}[g(x)]=x$。令 $x_c(t)=A\cos 30\pi t$ 和 $1/T=40$Hz，用 $x[n]$来表示 $v[n]$。存在有频谱混叠吗？用 $x[n]$表示 $y[n]$，从这个例子你能得到什么结论呢？

$\left($你可能要用到恒等式 $\cos^3\Omega_0 t=\frac{3}{4}\cos\Omega_0 t+\frac{1}{4}\cos 3\Omega_0 t\right)$

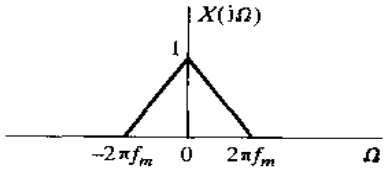


图 P4.49－2

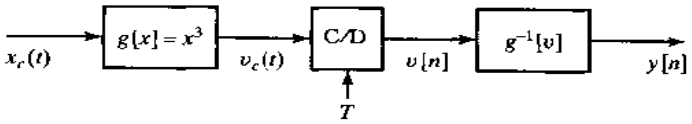


图 P4.49－3

(d) 一个实际问题是数字化一个大动态范围信号所引起的问题。假设我们用下面方法来压缩这个动态范围：在 A/D 转换之前将信号通过一个无记忆非线性器件，在 A/D 转换之后再将信号扩展回来，那么位于 A/D 转换之前的这个非线性运算在选择采样率上有什么影响？

4.50 图 4.24 画出一个用因子 L 内插信号的系统，其中

$$x_e[n]=\begin{cases}x[n/L], & n=0,\pm L,\pm 2L,\cdots\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

低通滤波器在 $x_e[n]$的非零值间内插产生一个增采样或内插的信号 $x_i[n]$。当该低通滤波器是理想时，就称为带限内插。如同在 4.6.2 节所指出的，简单的内插过程往往就够了。零阶保持和线性内插就是常用的两种简单的内插过程。对于零阶保持内插，$x[n]$的每一个值只是重要 L 次，即

$$x_i[n] = \begin{cases} x_c[0], & n = 0,1,\cdots,L-1 \\ x_c[L], & n = L,L+1,\cdots,2L-1 \\ x_c[2L], & n = 2L,2L+1,\cdots \\ \vdots \end{cases}$$

线性内插已在 4.6.2 节中讨论过。

(a) 为实现零阶保持内插，求图 4.24 中低通滤波器的单位脉冲响应，同时求出相应的频率响应。

(b) (4.92)式给出了线性内插的单位脉冲响应，求相应的频率响应。($h_{\text{lin}}[n]$是一个三角波，它就相应于两个矩形序列的卷积，这一点对求解是有帮助的)。

(c) 对零阶保持和线性内插画出该滤波器频率响应的幅度特性。相对于理想带限内插来说哪一个是更好一些的近似?

4.51 希望要计算某个增采样序列的自相关函数，如图 P4.51－1 所示。有人提议，这可以等效地用图 P4.51－2的系统来完成。可以选取 $H_2(e^{j\omega})$以使得 $\phi_3[n] = \phi_1[n]$吗? 如果不能，为什么不能? 如果可以，请给出 $H_2(e^{j\omega})$。

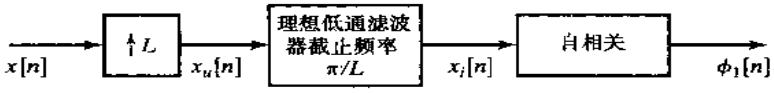


图 P4.51－1

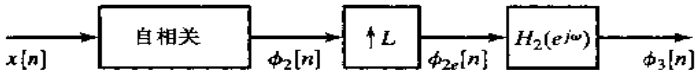
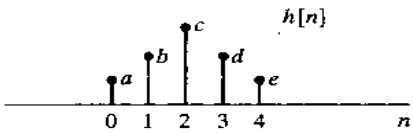


图 P4.51－2

4.52 欲利用图 4.24 形式的系统将一系列以因子 2 增采样。然而，图 4.24 中的低通滤波器是用如图 P4.52－1 所示的 5 点单位脉冲响应 $h[n]$的滤波器来近似的。在该系统中输出 $y_1[n]$是 $h[n]$与 $\omega[n]$的直接卷积求得的。



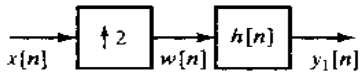


图 P4.52－1

(a) 利用这个 $h[n]$，该系统一种推荐的实现如图 P4.52－2 所示。$h_1[n]$，$h_2[n]$和$h_3[n]$这 3 个单位脉冲响应在 $0 \leqslant n \leqslant 2$以外都为零。求出并明确证明 $h_1[n]$，$h_2[n]$和 $h_3[n]$的一种选择，以使对任意 $x[n]$都有 $y_1[n] = y_2[n]$，即该两个系统是恒等的。

(b) 分别求图 P4.52－1 和图 P4.52－2 系统中每个输出点所要求的乘法次数。应该发现图 P4.52－2 系统是更为

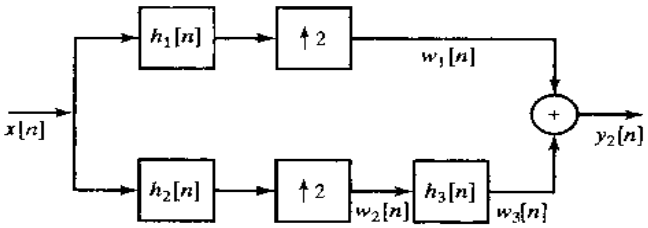


图 P4.52－2

高效些。

4.53 考虑图 P4.53－1 的分析/综合系统。低通滤波器 $h_0[n]$在分析器和综合器中是相同的，高通滤波器 $h_1[n]$在分析器和综合器中也是一样的。$h_0[n]$和 $h_1[n]$的傅里叶变换有如下关系：

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega+\pi)})$$

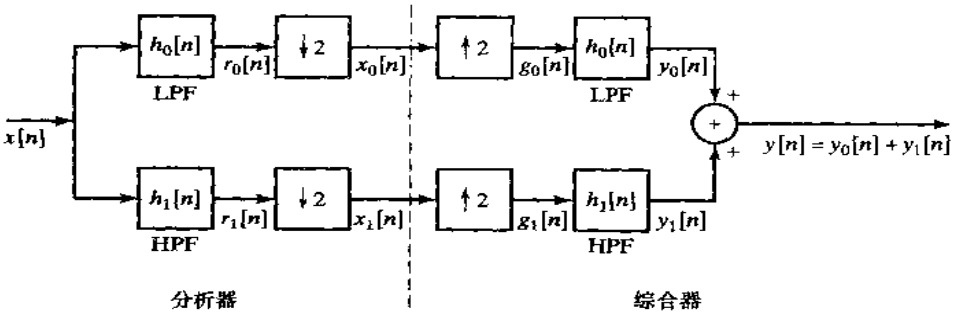


图 P4.53－1

(a) 若 $X(e^{j\omega})$和 $H_0(e^{j\omega})$如图 P4.53－2 所示，画出 $X_0(e^{j\omega})$，$G_0(e^{j\omega})$和 $Y_0(e^{j\omega})$（在某幅度加权因子之内）。

(b) 利用 $X(e^{j\omega})$和 $H_0(e^{j\omega})$对 $G_0(e^{j\omega})$写出一个一般的表示式，不用假定 $X(e^{j\omega})$和 $H_0(e^{j\omega})$是如图 P4.53－2 所示。

(c) 对 $H_0(e^{j\omega})$求一组条件，这组条件尽可能一般化，以保证对任何稳定的输入 $x[n]$，$y[n]$是正比于 $x[n-n_d]$。

注意：本题中所讨论的这种形式分析/综合滤波器柜称为正交镜像滤波器柜(Quadrature mirror filter banks)．进一步的内容可见 Crochiere and Rabiner(1983)，pp.378～392.

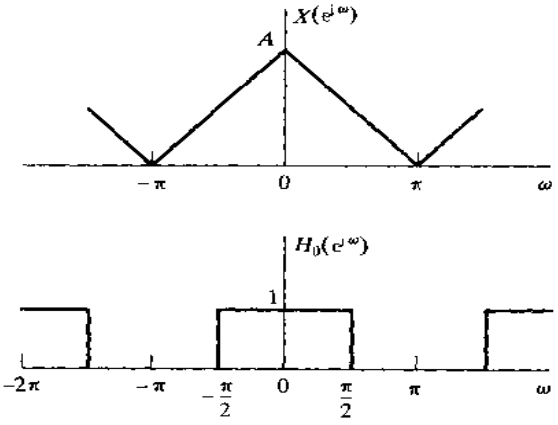


图 P4.53－2

4.54 考虑一个实值序列，有

$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad \frac{\pi}{3} \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

$x[n]$中有一个序列值可能有误，而想近似地或准确地恢复它。用 $\hat{x}[n]$表示受到污损的信号

$$\hat{x}[n] = x[n], \qquad n \neq n_0$$

而 $\hat{x}[n_0]$是实的，但与 $x[n_0]$无关。在下列 3 种情况中的每一种，规定一个实际的算法用于从 $\hat{x}[n]$中真正地或近似地恢复出 $x[n]$。

(a) n_0 的值是已知的。

(b) n_0 的真正值不知道，但知道 n_0 是一个偶数。

(c) 有关 n_0 什么也不知道。

4.55 通信系统往往要求从时分多路复用(TDM)转换到频分多路复用(FDM)。本题考察属于这种系统的一个简单例子。要研究的系统的方框图如图 P4.55－1 所示。TDM 的输入假设是如下的相间样本序列：

$$w[n] = \begin{cases} x_1[n/2], & n \text{ 为偶整数} \\ x_2[(n-1)/2], & n \text{ 为奇整数} \end{cases}$$

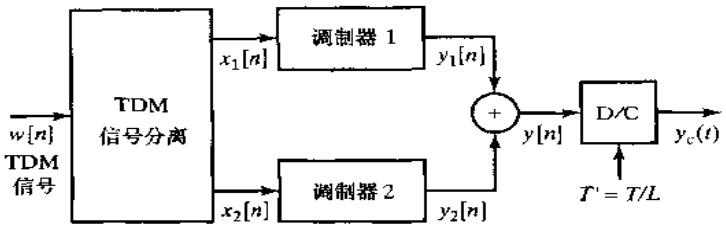


图 P4.55 - 1

假定序列 $x_1[n]=x_{c1}(nT)$和 $x_2[n]=x_{c2}(nT)$分别由无混叠采样连续时间信号 $x_{c1}(t)$和 $x_{c2}(t)$而得到。也就是说假定这两个信号有相同的最高频率 Ω_N，而采样周期是 $T=\pi/\Omega_N$。

(a) 画一个产生 $x_1[n]$和 $x_2[n]$作为输出的系统方框图，也就是用简单的运算得到一个用于 TDM 信号分离的系统。说明一下你的系统是否是线性、时不变、因果和稳定的。第 k 个调制器($k=1$ 或 2)由图 P4.55 - 2 方框图所定义。低通滤波器 $H_l(e^{j\omega})$(对两个信道是相同的)增益为 L，截止频率为 π/L，而高通滤波器 $H_k(e^{j\omega})$增益为 1，截止频率为 ω_k，调制器频率满足

$$\omega_2=\omega_1+\pi/L \text{ 和 } \omega_2+\pi/L\leqslant\pi \qquad (\text{假设 } \omega_1>\pi/2)$$

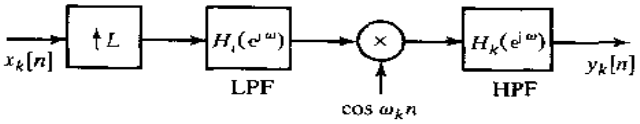


图 P4.55 - 2

(b) 求 ω_1 和 L，使得在理想 D/C 转换之后(采样周期为 T/L)，$y_c(t)$的傅里叶变换除了在频率范围

$$2\pi\times10^5\leqslant|\Omega|\leqslant2\pi\times10^5+2\Omega_N$$

内其余都是零。设 $\Omega_N=2\pi\times5\times10^3$。

(c) 假设两个原输入信号的连续时间傅里叶变换如图 P4.55 - 3 所示。画出在该系统中每一点的傅里叶变换。

(d) 基于(a)－(c)的解答，讨论一下该系统如何能推广到处理 M 个等带宽的信道。

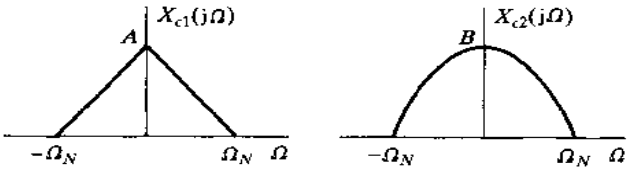


图 P4.55 - 3

4.56 在 4.8.1 节曾讨论过为避免混叠而采用预滤波的方法。实际上，抗混叠滤波器不可能是理想的。然而，这个非理想的特性至少可以部分地用接在 C/D 转换器输出 $x[n]$之后的离散时间系统来补偿。

考虑一下图 P4.56 - 1 中的两个系统。抗混叠滤波器 $H_{ideal}(j\Omega)$和 $H_{aa}(j\Omega)$如图P4.56 - 2所画出 $H(e^{j\omega})$，使得两序列 $x[n]$和 $w[n]$是一样的。

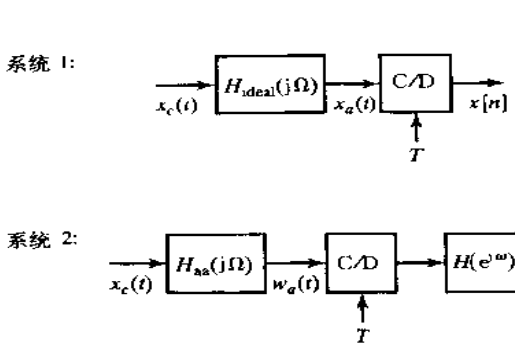


图 P4.56－1

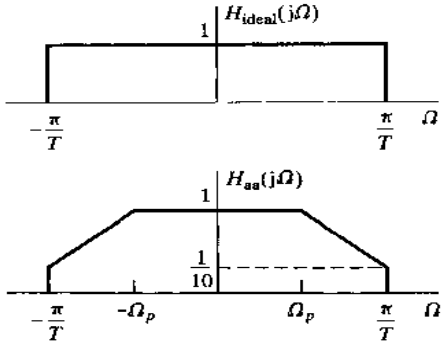


图 P4.56－2

4.57 在 4.8.2 节讨论过，为了在一台数字计算机上处理序列，必须要将该序列的幅度量化到一组离散电平上。这种量化可以用输入序列 $x[n]$通过一个量化器 $Q(x)$来表示，该量化器的输入输出关系如 4.48 所示。

正如在 4.8.3 节中讨论到的，若量化阶 Δ 与输入序列电平的变化相比是小的话，那么就能假设量化器的输出 $y[n]$具有如下形式：

$$y[n] = x[n] + e[n]$$

这里 $e[n] = Q(x[n]) - x[n]$，而 $e[n]$是一个平衡随机过程，其一阶概率密度在 $-\Delta/2$ 和 $\Delta/2$ 之间均匀分布，样本之间不相关，与 $x[n]$也不相关，以至对于全部 m 和 n，$\mathscr{E}\{e[n]x[m]\} = 0$。

令 $x[n]$是一个均值为零，方差为 σ_x^2 的平稳白噪声过程。

(a) 求 $e[n]$的均值、方差和自相关序列。

(b) 信号量化噪声比 σ_x^2/σ_e^2 是什么？

(c) 量化信号 $y[n]$现要用单位脉冲响应为 $h[n] = \frac{1}{2}[a^n + (-a)^n]u[n]$的数字滤波器过滤，求由于输入量化噪声在输出端产生的噪声方差和在输出端的信噪比。

在某些情况下可能要用非线性的量化阶，例如对数间隔的量化阶。这可以把均匀量化加到输入的对数上来完成，如图 P4.57 所示，这里 $Q[\cdot]$是一个如图 4.48 所给出的均匀量化器。这时，若假定 Δ 与该序列 $\ln(x[n])$的变化相比是小的话，那么就能假设该量化器的输出是

$$\ln(y[n]) = \ln(x[n]) + e[n]$$

于是

$$y[n] = x[n]\exp(e[n])$$

对于小的 e，就能用 $(1 + e[n])$来近似 $\exp(e[n])$，这样

$$y[n] \simeq x[n](1 + e[n]) = x[n] + f[n] \qquad \text{(P4.57)}$$

(P4.57)式特地用来描述对数量化的效果。现假设 $e[n]$是一个平稳随机过程，样本到样本之间不相关，与信号 $x[n]$独立，并且在 $\pm\Delta/2$ 之间具有一阶概率密度均匀分布。

(d) 求由(P4.57)式所定义的加性噪声 $f[n]$的均值、方差和自相关序列。

(e) 信号量化噪声比 σ_x^2/σ_f^2 是什么？注意，在这种情况下，σ_x^2/σ_f^2 与 σ_x^2 无关。因此，在我们假定的限制



图 P4.57

内，信号量化噪声比是与输入信号电平无关的，而对于线性量化，σ_y^2/σ_e^2直接决定于σ_x^2。

(f) 现在要用单位脉冲响应为 $h[n]=\frac{1}{2}[a^n+(-a)^n]u[n]$的数字滤波器对量化的信号 $y[n]$进行滤波，求由于输入量化噪声在输出端产生的噪声方差和在输出端的信噪比。

4.58 图 P4.58-1 示出一个系统，在该系统中两个连续时间信号相乘，然后将乘积在奈奎斯特率下采样而得一个离散时间信号，也即 $y_1[n]$是在奈奎斯特率下对 $y_c(t)$取得的样本。信号 $x_1(t)$是带限到 25kHz ($X_1(j\Omega)=0, |\Omega|\geq 5\pi\times 10^4$)，$x_2(t)$带限到 2.5kHz ($X_2(j\Omega)=0, |\Omega|\geq(\pi/2)\times 10^4$)。

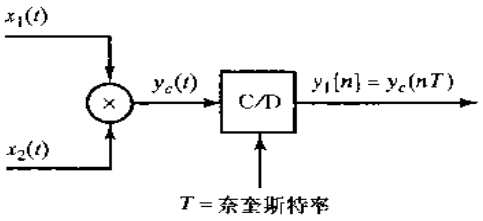


图 P4.58-1

在某些情况下(比如数字传输)，连续时间信号已在它们各自的奈奎斯特率下被采样，而相乘又要在离散时间域被完成，或许在相乘之前或(和)之后还有另外的处理，这就如图 P4.58-2 所示。系统 A,B 和 C 中的每一个要么是一个恒等系统，要么是用图 4.58-3 中所给出的这些模式的一个或几个予以实现。

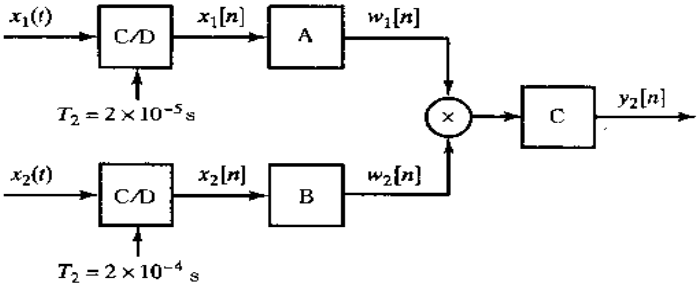


图 P4.58-2

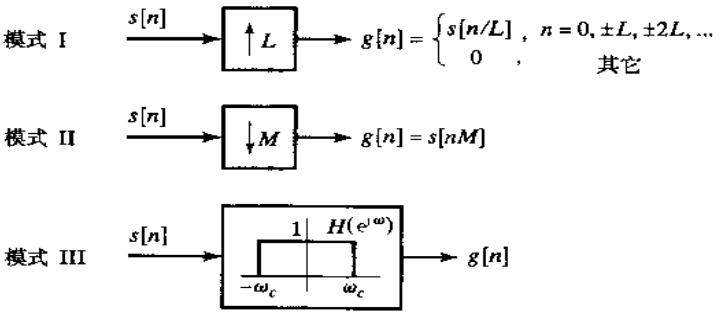


图 P4.58-3

对 3 个系统 A,B 和 C 中的每一个，要么指明该系统是一个恒等系统，或者是图P4.58-3中一个或几个模式的适当互联；同时也要指出全部有关的参数 L,M 和 ω_c。这些系统 A,B 和 C 应该构成以使 $y_2[n]$正比于 $y_1[n]$，即

$$y_2[n]=ky_1[n]=ky_c(nT)=kx_1(nT)\times x_2(nT)$$

并且这些样本是在奈奎斯特率下的样本，也即 $y_2[n]$不代表 $y_c(t)$的过采样或欠采样。

4.59 假设 $s_c(t)$是一个语音信号，其连续时间傅里叶变换 $S_c(j\Omega)$示于图 P4.59－1。由示于图 P4.59－2 的系统得到一个离散时间序列 $s_r[n]$，其中 $H(e^{j\omega})$是截止频率为 ω_c，增益为 1 的理想离散时间低通滤波器，如图 2.17 所示。信号 $s_r[n]$将用作一个语音编码器的输入，该编码器仅在代表语音的离散时间样本上才正确地工作，这些样本是在 8kHz 的采样率下采样得到的。试选择 L，M 和 ω_c 的值，以使产生对语音编码器正确的输入信号 $s_r[n]$。

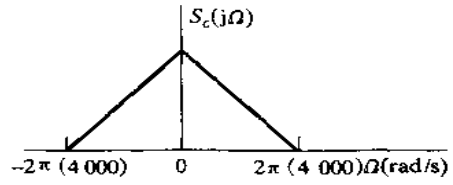


图 P4.59－1

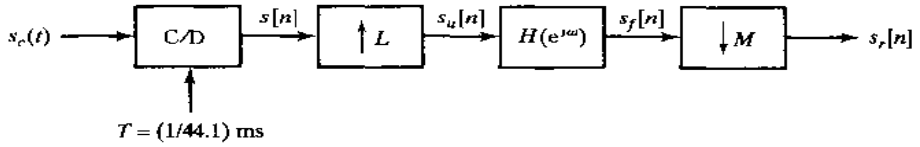


图 P4.59－2

4.60 在许多音频应用中，必须要在采样率 $1/T=44$kHz 下采样一个连续时间信号 $x_c(t)$。图 P4.60－1 示出一个直接的系统以获得所要求的样本，其中包括一个连续时间抗混叠滤波器 $H_{a0}(j\Omega)$。在许多应用中，采用示于图 P4.60－2 的“4 倍过采样”系统代替通常的图 P4.60－1 系统。在图 P4.60－2系统中，

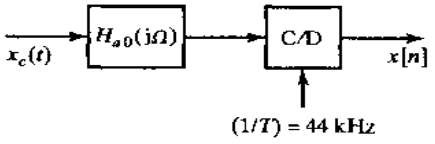


图 P4.60－1

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\pi/4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

是一个理想低通滤波器，而

$$H_{a1}(j\Omega)=\begin{cases}1, & |\Omega|\leqslant\Omega_p\\ 0, & |\Omega|>\Omega_s\end{cases}$$

其中 $0\leqslant\Omega_p\leqslant\Omega_s\leqslant\infty$

假定 $H(e^{j\omega})$是理想的，求出对抗混叠滤波器最低的一组特性要求，也即最小的 Ω_p 和最大的 Ω_s，以使得图 P4.60－2 的整个系统等效于图 P4.60－1 的系统。

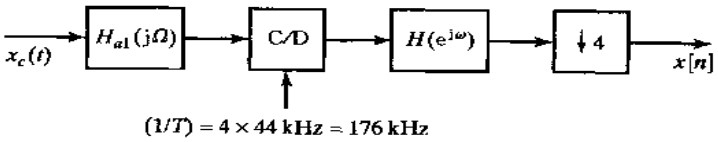


图 P4.60－2

4.61 本题将要考虑示于图 P4.61 的用噪声成形量化的“双积分”系统。在该系统中，

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ 和 } H_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

抽取滤波器的频率响应是

$$H_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/M \\ 0, & \pi/M \leqslant |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

代表量化器的噪声源 $e[n]$假定是一个零均值的白噪声(常数功率谱)信号,在幅度上是均匀分布的,噪声功率 $\sigma_e^2 = \Delta^2/12$。

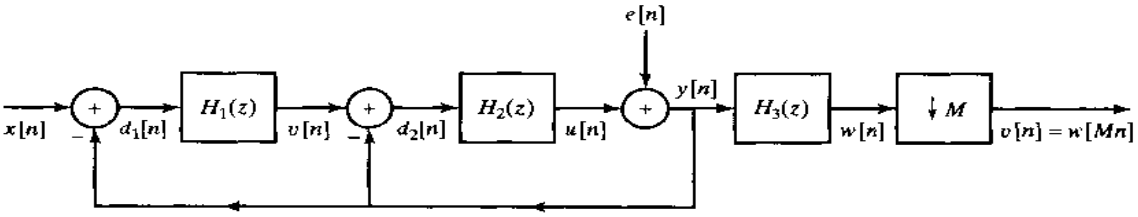


图 P4.61

(a) 利用 $X(z)$和 $E(z)$求 $Y(z)$的式子。这一部分假定 $E(z)$存在。从 z 变换关系证明 $y[n]$可以表示成 $y[n] = x[n-1] + f[n]$,这里 $f[n]$是由噪声源 $e[n]$产生的输出。$f[n]$和 $e[n]$之间的时域关系是什么?

(b) 现在假设 $e[n]$是由上面(a)所描述的白噪声信号,利用(a)中的结果证明,噪声 $f[n]$的功率谱是

$$P_{ff}(e^{j\omega}) = 16\sigma_e^2 \sin^4(\omega/2)$$

在信号 $y[n]$中的噪声分量的总噪声功率(σ_f^2)是什么? 在同一坐标轴上画出 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内的功率谱 $P_{ee}(e^{j\omega})$和$P_{ff}(e^{j\omega})$。

(c) 现在假设 $X(e^{j\omega}) = 0, \pi/M < \omega \leqslant \pi$,证明 $H_3(z)$的输出是 $w[n] = x[n-1] + g[n]$。简单说说 $g[n]$是什么。

(d) 求在抽取滤波器输出端噪声功率 σ_g^2 的表示式。假定 $\pi/M \ll \pi$,也即 M 很大,这样就可以用小角度近似式以简化积分的求值。

(e) 在抽取器之后,输出是 $v[n] = w[Mn] = x[Mn-1] + q[n]$,这里 $q[n] = g[Mn]$。现在假设 $x[n] = x_c(nT)$(即$x[n]$是采样一连续时间信号而得到)。$X_c(j\Omega)$必须要满足什么条件才能使 $x[n-1]$毫无变化地通过这个滤波器? 试用$x_c(t)$表示输出 $v[n]$中的"信号分量"。在输出中噪声的总功率 σ_q^2 是什么? 对输出端的噪声功率谱给出一个表达式,并在同一坐标轴上画出 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内的 $P_{ee}(e^{j\omega})$和 $P_{qq}(e^{j\omega})$。

4.62 对于带有高阶反馈回路的 Sigma-Delta(Σ-Δ)过采样的 A/D 转换器来说,稳定性成为一个值得注意的问题。称之为 MASH 的另一种方法实现高阶噪声成形仅有一阶反馈。二阶 MASH 噪声成形的结构示于图 P4.62-2,本题将对它进行分析。

图 P4.62-1 是一阶(Σ-Δ)噪声成形系统,其中量化器效应用加性噪声信号 $e[n]$表示。在图中噪声$e[n]$是明显地作为系统的第二个输出表示的。假设输入 $x[n]$是一个零均值广义平衡随机过程,同时也假设 $e[n]$是零均值、白色、广义平稳随机过程,并有方差为 σ_e^2。$e[n]$与 $x[n]$不相关。

(a) 对于图 P4.62-1 的系统,输出 $y[n]$有一个仅由 $x[n]$产生的分量 $y_x[n]$和一个仅由 $e[n]$产生的分量 $y_e[n]$,即 $y[n] = y_x[n] + y_e[n]$。

(i) 利用 $x[n]$求 $y_x[n]$。

(ii) 求 $y_e[n]$的功率谱密度 $P_{y_e}(\omega)$。

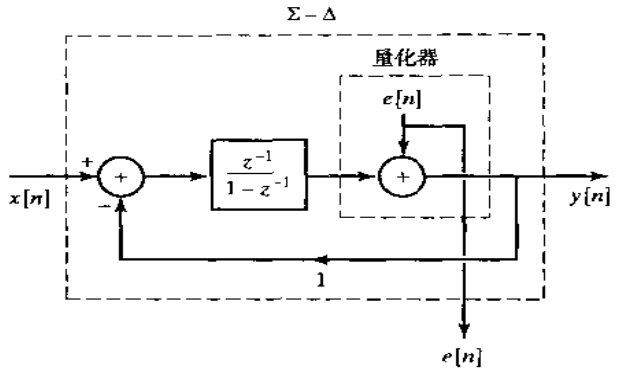


图 P4.62－1

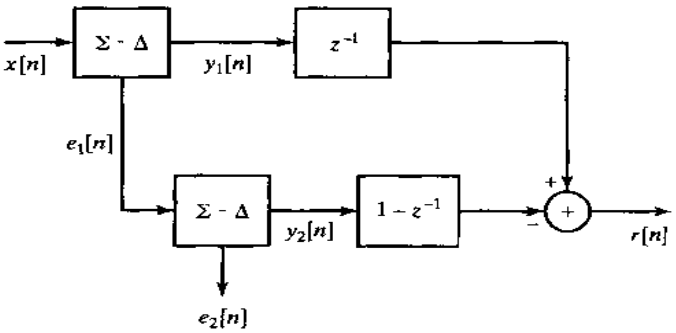


图 P4.62－2

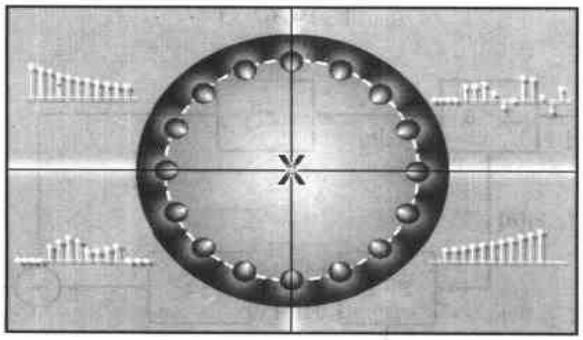
(b) 现在将图 P4.62－1 的系统接入图 P4.62－2 的结构中去，这就是 MASH 系统的结构。应当注意，$e_1[n]$和 $e_2[n]$都是在(Σ－Δ)噪声成形系统中的量化器产生的噪声信号。系统输出 $r[n]$有一个仅由 $x[n]$产生的分量 $r_x[n]$和一个仅由量化噪声产生的分量 $r_e[n]$，也即 $r[n]=r_x[n]+r_e[n]$。假设 $e_1[n]$和 $e_2[n]$都是零均值、白色和广义平稳的，方差都为 σ_e^2。也假设 $e_1[n]$与 $e_2[n]$不相关。

(i) 利用 $x[n]$求 $r_x[n]$。

(ii) 求 $r_e[n]$的功率谱密度 $P_{r_e}(\omega)$。

第5章

线性时不变系统的变换分析



5.0 引言

在第2章我们建立了离散时间信号与系统的傅里叶变换表示，第3章又把这种表示推广到z变换。这两章都是把重点放在变换本身及其性质上，而对它们在线性时不变系统(LTI)分析中的应用仅作了简要的介绍。这一章要更为详细地建立利用傅里叶变换和z变换来表示和分析LTI系统。本章内容是第6章要讨论的LTI系统实现和第7章LTI系统设计的基础。

正如在第2章中所得到的，一个LTI系统在时域完全由系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 所表征。对于一个给定的输入 $x[n]$，其输出 $y[n]$ 是通过如下卷积和给出的：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k] \tag{5.2}$$

另一方面，如在2.7节所讨论的，因为频率响应和单位脉冲响应是直接通过傅里叶变换联系起来的，所以，若频率响应存在(即收敛)，那么频率响应也完全等同地给出了LTI系统的特性。在第3章，还建立了作为傅里叶变换的一种推广——z变换，并给出了一个LTI系统输出的z变换 $Y(z)$ 与输入的z变换 $X(z)$ 是通过系统单位脉冲响应的z变换 $H(z)$ 在某个适当的收敛域内用下式关联的：

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{5.2}$$

$H(z)$ 称为**系统函数**。因为z变换和序列构成唯一的一对，因此任何LTI系统也就完全由它

的系统函数(假定收敛)所表征。

在这一章中将会看到,由于从频率响应和系统函数能够容易推出系统响应的很多性质,所以它们在 LTI 系统的分析和表示中是极为有用的。

5.1 LTI 系统的频率响应

一个 LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$在 2.6 节是定义为系统对于复指数输入(特征函数)$e^{j\omega n}$的复增益(特征值)。再者,在 2.9.6 节又得出:一个序列的傅里叶变换代表着作为复指数线性组合的一种分解,所以系统输入和输出的傅里叶变换由下式所联系:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \tag{5.3}$$

式中 $X(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$分别是系统输入和输出的傅里叶变换。若利用极坐标形式来表示频率响应,则系统的输入和输出的傅里叶变换的幅度和相位由下式联系:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \cdot |X(e^{j\omega})| \tag{5.4a}$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \tag{5.4b}$$

$|H(e^{j\omega})|$称为系统的**幅度响应**或**增益**,而$\angle H(e^{j\omega})$则称为系统的**相位响应**或**相移**。

由(5.4a)式和(5.4b)式所表示的幅度和相位上的影响,如果将输入信号以一种有用的方式变化,这就是所需要的;如果以一种有害的方式变化,这就是不需要的。在后一种情况下,我们就往往把 LTI 系统对信号的影响分别称为**幅度**和**相位失真**。

5.1.1 理想频率选择性滤波器

(5.4a)式一个重要的含意是:如果$|H(e^{j\omega})|$在某些频率上是很小的话,那么在输出中输入的这些频率分量就受到抑制。傅里叶分量的这种抑制是好还是不好,取决于具体的问题。例 2.19 通过某些理想频率响应的定义已对频率选择性滤波器形成了一般概念。例如,理想低通滤波器就定义为离散时间线性时不变系统具有如下频率响应特性:

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{5.5}$$

当然,它是周期的,周期为 2π。理想低通滤波器选取信号的低频分量,而阻止高频分量通过。相应的单位脉冲响应如例 2.22 所给出为

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.6}$$

相应地,**理想高通滤波器**定义为

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ 1, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{5.7}$$

因为 $H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$,它的单位脉冲响应是

$$H_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin\omega_c n}{\pi n} \tag{5.8}$$

理想高通滤波器在频率 $\omega_c < |\omega| \leqslant \pi$ 内无失真通过,而对 ω_c 以下频率不予通过。其它的理想频率选择性滤波器已在例 2.19 中定义过。

理想低通滤波器是非因果的,它的单位脉冲响应从 $-\infty$ 延伸到 $+\infty$。因此,用递推或非递

推的方法计算理想低通或高通滤波器的输出都是不可能的，也就是说，这个系统不是在**计算上可实现的**。

由(5.5)式定义的理想低通滤波器的另一个重要性质是其相位响应都是零。倘若不是零的话，由滤波器选出的低频带内也将有相位失真。本章稍后将会明白，对理想频率选择性滤波器的因果近似必须有非零的相位响应。

5.1.2 相位失真和延迟

为了明了一个线性系统相位的影响，首先考虑理想延迟系统。其单位脉冲响应是

$$h_{\mathrm{id}}[n] = \delta[n - n_d] \tag{5.9}$$

而频率响应是

$$H_{\mathrm{id}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_d} \tag{5.10}$$

或

$$|H_{\mathrm{id}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = 1 \tag{5.11a}$$

$$\angle H_{\mathrm{id}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = -\omega n_d, \qquad |\omega| < \pi \tag{5.11b}$$

频率响应是周期的，周期为 2π。目前假定 n_d 是整数。

在很多应用中，延迟失真被认为是相位失真的一种很轻微的形式，因为它的影响只是在序列时间上的移位。往往这种时间上的移位是无关紧要的，或者在一个较大系统中利用引入其它部分的延迟很容易地给予补偿掉。因此，在设计近似理想滤波器或其它线性时不变系统时，往往愿意接受线性相位响应而不是零相位响应作为一种理想模型。例如，一个具有线性相位的理想低通滤波器定义为

$$H_{\mathrm{lp}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_d}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{5.12}$$

它的单位脉冲响应是

$$h_{\mathrm{lp}}[n] = \frac{\sin\omega_c(n - n_d)}{\pi(n - n_d)}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{5.13}$$

类似地，可以定义出具有线性相位的其它理想频率选择性滤波器。这些滤波器都有所要求的分隔输入信号中频带的效果，以及使输出延迟 n_d 的附加效果。然而，应该注意无论 n_d 有多大，理想低通滤波器总是非因果的。

相位特性线性程度的一种方便的度量是**群延迟**。群延迟的基本概念是与相位在一个窄带信号上的效果有关。具体地说，考虑一个系统其频率响应为 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，对窄带输入 $x[m] = s[n]\cos(\omega_0 n)$ 的系统输出。因为已假定 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 仅在 $\omega = \omega_0$ 附近为非零，系统的相位效果在 $\omega = \omega_0$ 附近可以近似为如下的线性近似式：

$$\angle H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \simeq -\phi_0 - \omega n_d \tag{5.14}$$

利用这一近似就能证明(见习题 5.57)：对 $x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n)$ 的响应 $y[n]$ 就近似为 $y[n] = |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})| s[n - n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d)$。结果，一个傅里叶变换集中在 ω_0 附近的窄带信号 $x[n]$ 的包络 $s[n]$ 的延迟就由在 ω_0 处相位特性斜率的负值给出。在考虑 ω_0 附近的 $\angle H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 用(5.14)式来线性近似时，必须认为相应响应是 ω 的连续函数。以这种方式给定的相位响应将记作 $\arg[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$，并称之为 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 的**连续相位**。

利用相位表示成 ω 的连续函数，一个系统的群延迟就可以定义为

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\{\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})]\} \tag{5.15}$$

群延迟偏离某一个常数就表明相位特性的非线性程度。

例 5.1　衰减和群延迟的效果

作为说明群延迟效果的一个例子，现考虑一滤波器其频率响应的幅度和群延迟如图 5.1 所示，而图 5.2 则是某输入信号及其频谱。图 5.3 就是所得到的输出信号。值得注意的是输入信号由 3 个顺序出现的窄带脉冲所组成，其频率分别在 $\omega=0.85\pi$，$\omega=0.25\pi$ 和 $\omega=0.5\pi$。因为该滤波器在 $\omega=0.85\pi$有相当大的衰减，所以在那个频率的脉冲在输出中就没有明显的存在。同时，因为在 $\omega=0.25\pi$和 $\omega=0.5\pi$ 的群延迟分别近似约为 200 个样本和 50 个样本，所以在 $x[n]$中的第 2 组脉冲大约延迟 200 个样本，而第 3 组脉冲大约延迟 50 个样本，这就是在图 5.3 中所看到的情况。

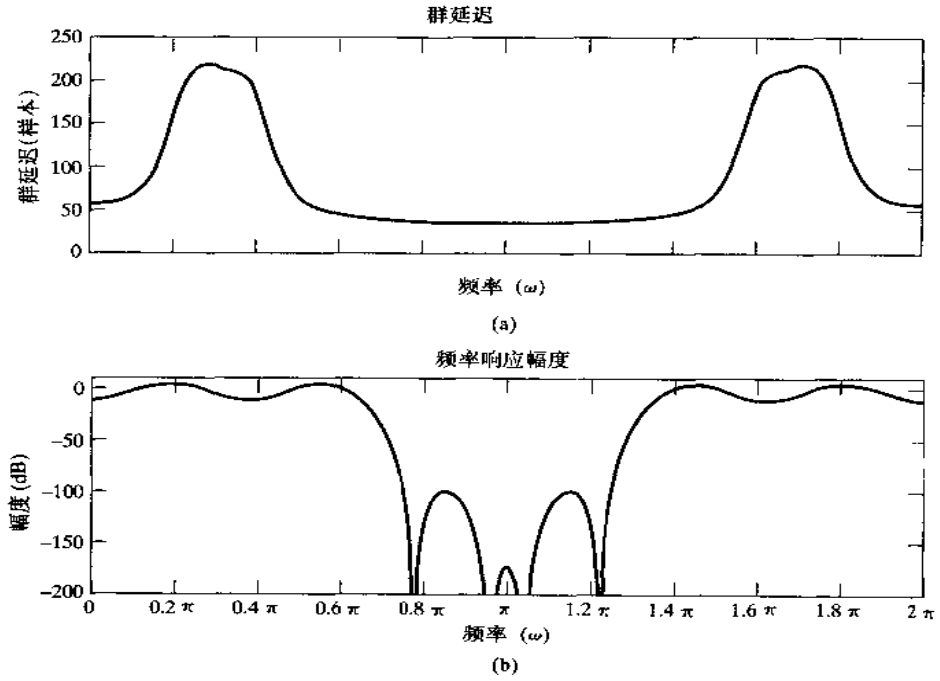


图 5.1　例 5.1 的滤波器频率响应的幅度和群延迟

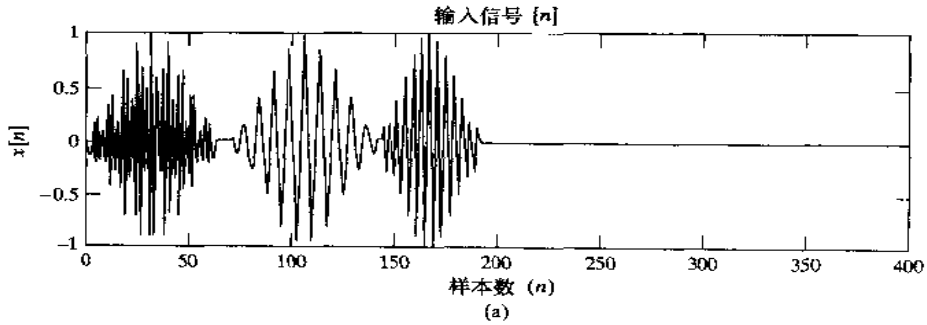
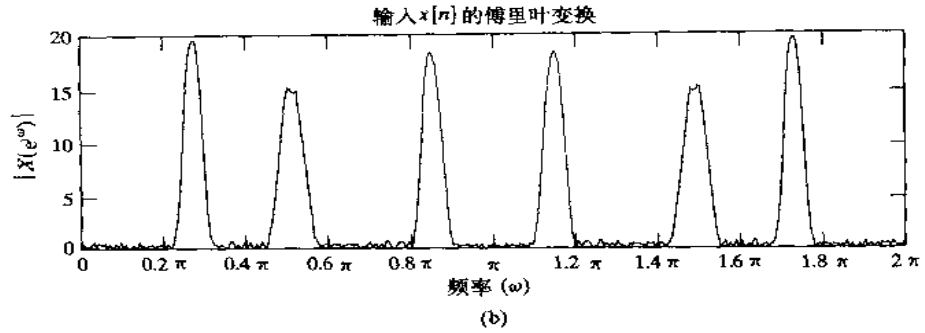


图 5.2　例 5.1 的输入信号及其傅里叶变换幅度



(b)

图 5.2(续)

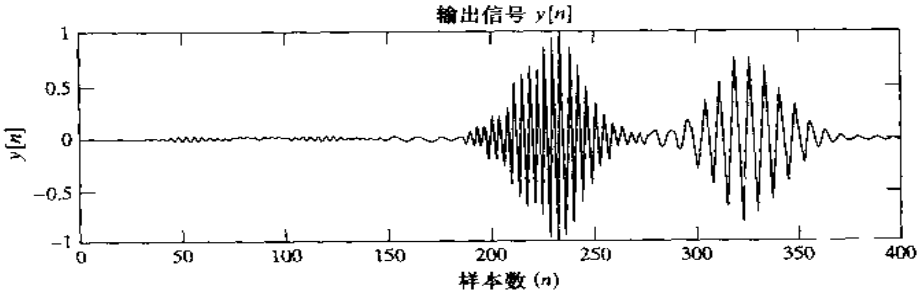


图 5.3 例 5.1 的输出信号

5.2 用线性常系数差分方程表征系统的系统函数

虽然在概念上理想频率选择性滤波器是有用的,但是它们不能用有限的计算来实现。因此,考虑一类能用来近似实现理想频率选择性滤波器的系统是有益的。

在 2.5 节曾考虑过其输入输出满足如下线性常系数差分方程的一类系统:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{5.16}$$

已经证明,若进一步假定系统是因果的,就可用该差分方程递推地计算出输出。如果辅助条件相应于初始松弛的话,该系统就是因果、线性和时不变的。

输入和输出满足线性常系数差分方程的 LTI 系统的性质和特征最好是经由 z 变换来确立。将(5.16)式两边进行 z 变换,并利用线性性质 3.4.1 节和时不变性质 3.4.2 节可得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

或等效为

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z) \tag{5.17}$$

根据(5.2)式和(5.17)式,对于一个其输入和输出满足(5.16)式差分方程的系统,可得其系统函数有如下代数形式:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{5.18}$$

由于(5.16)式是由一组延迟项的线性组合构成的,所以(5.18)式是 z^{-1}的多项式之比。当然(5.18)式也可以重新写成以 z 而不是 z^{-1}为幂的多项式,但一般都不这样做。同时,将(5.18)式表示成如下的因式形式往往也很方便:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})} \tag{5.19}$$

分子因式$(1 - c_k z^{-1})$中的每一项都在 $z = c_k$ 提供一个零点和在 $z = 0$ 提供一个极点。相类似,分母因式$(1 - d_k z^{-1})$中的每一项在 $z = 0$ 贡献一个零点和 $z = d_k$ 贡献一个极点。

差分方程与系统函数相应的代数表达式之间有一个直接的关系。具体地说,(5.18)式分子多项式与(5.16)式右边($b_k z^{-k}$项对应于$b_k[n-k]$)有相同的系数,而(5.18)式分母多项式与(5.16)式左边($a_k z^{-k}$项对应于$a_k y[n-k]$)有相同的系数。因此,给定(5.18)式形式的系统函数或者(5.16)式那样的差分方程中的任一个,都能直接求得另一个。

例 5.2　二阶系统

假设一线性时不变系统的系统函数是

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4} z^{-1}\right)} \tag{5.20}$$

为了求得满足该系统输入输出的差分方程,可以将 $H(z)$的分子和分母各因式乘开,而得到表示成(5.18)式的形式:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + a^{-2}}{1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{3}{8} z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.21}$$

于是

$$\left(1 + \frac{1}{4} z^{-1} - \frac{3}{8} z^{-2}\right) Y(z) = (1 - 2z^{-1} + z^{-2}) X(z)$$

其差分方程就是

$$y[n] + \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{3}{8} y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \tag{5.22}$$

注意,一旦很好理解这种对应关系的话,勿需经由代数步骤而可以直接由(5.21)式导得(5.22)式(反之亦然)。

5.2.1　稳定性和因果性

为了从(5.16)式得到(5.18)式,我们曾假设系统是线性和时不变的,这样就可能应用(5.2)式。但是,有关稳定性或因果性并未作进一步假设。与此相应,从差分方程固然可以得出系统函数的代数表达式,但没有给出收敛域。这就是说,$H(z)$的收敛域不是由(5.18)式的导出来确定的。因为要求使(5.17)式成立就是要求 $X(z)$和 $Y(z)$有重合的收敛域。正如在第 2 章已经看到的,这与差分方程不能唯一地确定一个线性时不变系统的单位脉冲响应这一

点是一致的。对于(5.18)式或(5.19)式的系统函数，有几种收敛域的选择。对一个给定的多项式之比，收敛域的每一种可能选择都将导致不同的单位脉冲响应，但它们全都对应于同一个差分方程。然而，若假定系统是因果的，那么 $h[n]$ 就必须是一个右边序列，因此 $H(z)$ 的收敛域位于最外面极点的外面。另外，若假定系统是稳定的，那么由 2.4 节讨论，单位脉冲响应必须绝对可加，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{5.23}$$

因为(5.23)式在 $|z|=1$ 时与下述条件一致：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]z^{-n}| < \infty \tag{5.24}$$

所以稳定性条件就等效于 $H(z)$ 的 ROC 包括单位圆。

例 5.3　ROC 的确定

考虑一输入输出通过下述差分方程联系的 LTI 系统：

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n] \tag{5.25}$$

依据以上讨论，$H(z)$ 就为

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})} \tag{5.26}$$

$H(z)$ 的零极点图如图 5.4 所示。有 3 种可能的 ROC 可供选择。若系统是因果的，那么 ROC 就在最外面极点的外面，即 $|z|>2$。这时系统是不稳定的，因为 ROC 不包括单位圆。若假定系统是稳定的，那么 ROC 必定是 $\frac{1}{2}<|z|<2$。第三种情况就是 ROC 选为 $|z|<\frac{1}{2}$，这时系统既不稳定，也不是因果的。

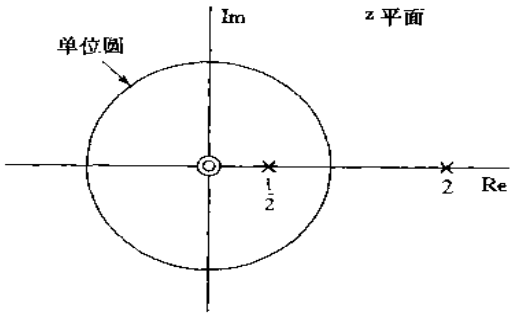


图 5.4　例 5.3 的零极点图

正如在例 5.3 中看出的，因果性和稳定性不一定是互为兼容的要求。要使输入输出满足(5.16)式差分方程的线性时不变系统既因果又稳定，相应系统函数的 ROC 必须是位于最外面极点的外面，又包括单位圆。很显然，这就等于要求该系统函数的全部极点都在单位圆内。

5.2.2　逆系统

对于一个系统函数为 $H(z)$ 的线性时不变系统，其对应的逆系统定义为：系统函数为 $H_i(z)$ 的逆系统与 $H(z)$ 级联后，总的系统函数是 1，即

$$G(z) = H(z)H_i(z) = 1 \tag{5.27}$$

这意味着

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} \tag{5.28}$$

(5.27)式的等效时域条件就是

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n] \tag{5.29}$$

由(5.28)式，该逆系统的频率响应若存在，就是

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})} \tag{5.30}$$

也即 $H_i(e^{j\omega})$是 $H(e^{j\omega})$的倒数。该逆系统的对数幅度、相位和群延迟都是原系统相应函数的负值。不是所有的系统都有一个逆系统。例如，理想低通滤波器就没有一个逆系统。这等于说，没有任何办法去恢复被理想低通滤波器置到零的那些位于截止频率以上的频率分量。

很多系统就有它们的逆系统，并且具有有理系统函数的一类系统给出了一种非常有用而有趣的例子。考虑

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})} \tag{5.31}$$

其零点在 $z = c_k$，极点在 $z = d_k$，以及另外可能的在 $z = 0$ 和 $z = \infty$的零点和/或极点。那么

$$H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})} \tag{5.32}$$

这就是说，$H_i(z)$的极点就是 $H(z)$的零点；反之亦然。产生的问题是：$H_i(z)$的收敛是什么？答案应由(5.29)式表示的卷积定理给出。要使(5.29)式成立，$H(z)$和 $H_i(z)$的收敛域必须重合。如果 $H(z)$是因果的，它的收敛域就是

$$|z| > \max_k |d_k| \tag{5.33}$$

因此，任何适当的与(5.33)式给出的区域重合的收敛域就是 $H_i(z)$的有效收敛域。现用几个简单的例子来说明若干可有性。

例 5.4　一阶系统的逆系统

令 $H(z)$是

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1}}$$

ROC 是 $|z| > 0.9$。$H_i(z)$就应是

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

因为 $H_i(z)$只有一个极点，它的 ROC 只有两种可能，即 $|z| > 0.5$ 和 $|z| < 0.5$。很明显，唯有选 $|z| > 0.5$才能与 $|z| > 0.9$ 重合。因此，该逆系统的单位脉冲响应就是

$$h_i[n] = (0.5)^n u[n] - 0.9(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

这里，该逆系统既是因果的，又是稳定的。

例 5.5　在 ROC 内有一个零点的系统的逆系统

假设 $H(z)$是

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.5}{1 - 0.9z^{-1}}, \quad |z| > 0.9$$

逆系统函数就是

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.9z^{-1}}{z^{-1} - 0.5} = \frac{-2 + 1.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$$

同前，有两种可能的收敛域：$|z|<2$ 和 $|z|>2$。然而，在这一情况下，两种区域都与 $|z|>0.9$ 重合，所以两者都是有效的逆系统。对 ROC $|z|<2$ 的单位脉冲响应是

$$h_{i1}[n] = 2(2)^n u[-n-1] - 1.8(2)^{n-1}u[-n]$$

而对 ROC $|z|>2$ 的单位脉冲响应是

$$h_{i2}[n] = -2(2)^n u[n] + 1.8(2)^{n-1}u[n-1]$$

可以看出，$h_{i1}[n]$是稳定而非因果的，$h_{i2}[n]$是因果的但不稳定。

例 5.4 和例 5.5 的明显推广是，若 $H(z)$是零点在 c_k，$k=1$，…，M，的一个因果系统，那么当且仅当 $H_i(z)$的收敛域为

$$|z| > \max_k |c_k|$$

时，其逆系统一定是因果的。如果也要求逆系统是稳定的，那么 $H_i(z)$的收敛域必须包括单位圆。因此，就必须是

$$\max_k |c_k| < 1$$

这就是说全部 $H(z)$的零点必须在单位圆内。因此，当且仅当 $H(z)$的零点和极点都在单位圆内时，一个稳定因果的线性时不变系统也有一个稳定因果的逆系统。这样的系统称为**最小相位系统**，我们将在 5.6 节对它作更为详细的讨论。

5.2.3 有理系统函数的单位脉冲响应

求 z 反变换的部分分式展开技术(3.3.2 节)能应用到系统函数 $H(z)$上，以得到具有如(5.19)式所表示的有理系统函数的系统单位脉冲响应的一般表示式。任何具有一阶极点的、以 z^{-1}为幂给出的有理函数可以表示成如下形式：

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \tag{5.34}$$

式中第一个求和的这些项是用分母除以分子的长除法求得，并且仅当 $M \geqslant N$ 时才有这些项。第二个和式中的系数 A_k 可以用(3.41)式得到。如果 $H(z)$有多重极点，它的部分分式展开就有(3.44)式的形式。如果系统假定是因果的，那么 ROC 就位于(5.34)式全部极点的外边，这样就可得

$$h[n] = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r] + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^n u[n] \tag{5.35}$$

式中第一个求和仅当 $M \geqslant N$ 才存在。

在讨论 LTI 系统时，区分两类系统是有用的。在第一种情况下，至少有一个 $H(z)$的非零极点未被某个零点抵消。这时，至少有一项是具有 $A_k(d_k)^n u[n]$这种形式，$h[n]$就不会是有限长，即在某一有限区间外不是零。因此这类系统就称为**无限脉冲响应** IIR 系统。下面例子讨论一个简单的 IIR 系统。

例 5.6 一阶 IIR 系统

考虑一个因果系统，其输入输出满足下列差分方程：

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{5.36}$$

凭观察该系统函数就是

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{5.37}$$

图 5.5 示出 $H(z)$的零极点图。收敛域是$|z| > |a|$，那么对于稳定的条件就是$|a| < 1$。$H(z)$的反变换是

$$h[n] = a^n u[n] \tag{5.38}$$

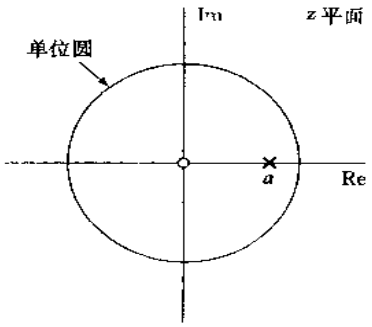


图 5.5　例 5.6 的零极点图

第二类系统是 $H(z)$除 $z = 0$ 外，没有任何极点，即(5.16)式和(5.18)式中 $N = 0$。因此，不可能进行部分分式展开。$H(z)$就只是一个如下 z^{-1}的多项式：

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{5.39}$$

(假设 $a_0 = 1$，并未失去一般性。) 在这种情况下，$H(z)$除了一个常数因子外就完全由它的零点所确定。由(5.39)式，$h[n]$凭直观就能看出是

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n - k] = \begin{cases} b_n, & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{5.40}$$

这时，单位脉冲响应在长度上是有限的，也即在某一有限区间之外为零。因此这类系统就称为**有限脉冲响应**(FIR)系统。应当注意到，对 FIR 系统而言，(5.16)式的差分方程与卷积和是一致的。即

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n - k] \tag{5.41}$$

例 5.7 给出一个 FIR 系统的简单例子。

例 5.7　一个简单的 FIR 系统

考虑一个单位脉冲响应，它是例 5.6 单位脉冲响应的截断，为

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

那么，系统函数就是

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - az^{-1}} \tag{5.42}$$

因为分子的零点是在

$$z_k = a e^{j2\pi k/(M+1)}, \quad k = 0, 1, \cdots, M \tag{5.43}$$

式中 a 假设为正实数，在 $z = a$ 的极点就被一个零点所抵消。当 $M = 7$ 时，零极点图如图 5.6 所示。

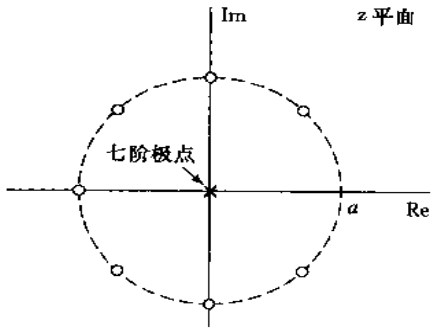


图 5.6　例 5.7 的零极点图

该线性时不变系统的输入和输出所满足的差分方程就是离散卷积

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} a^k x[n - k] \tag{5.44}$$

然而，由(5.42)式可推得输入和输出也满足下列差分方程：

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] - a^{M+1} x[n - M - 1] \tag{5.45}$$

这两个等效的差分方程由(5.42)式中 $H(z)$的两种等效形式产生。

5.3 有理系统函数的频率响应

如果一个稳定的线性时不变系统有一个有理的系统函数(即若其输入和输出满足(5.16)式的差分方程),那么,它的频率响应(系统函数在单位圆上的求值)就具有如下形式:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} \tag{5.46}$$

这就是说,$H(e^{j\omega})$是变量 $e^{-j\omega}$的多项式之比。

为了确定与这样的系统频率响应有关的幅度、相位和群延迟,将 $H(e^{j\omega})$用 $H(z)$的零极点来表示是很有用的。将 $z=e^{j\omega}$代入(5.19)式就得到如下表达式:

$$H(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k e^{j\omega})} \tag{5.47}$$

由(5.47)式可得$|H(e^{j\omega})|$为

$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^{M} |1 - c_k e^{j\omega}|}{\prod_{k=1}^{N} |1 - d_k e^{-j\omega}|} \tag{5.48}$$

有时考虑系统函数的幅度平方而不是幅度会更方便些。幅度平方函数是

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega})$$

式中 * 记作复数共轭。对于以(5.47)式表示的 $H(e^{j\omega})$就有

$$|H(e^{j\omega})| = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k e^{-j\omega})(1 - c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k e^{-j\omega})(1 - d_k^* e^{j\omega})} \tag{5.49}$$

从(5.48)式可见,$|H(e^{j\omega})|$就是 $H(z)$中全部零点因式在单位圆上求值的幅度乘积被全部极点因式在单位圆上求值的幅度乘积所除。在实际应用中常常把这些乘积变换为相应项的和,这可以用 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$代替$|H(e^{j\omega})|$来完成。(5.48)式的对数式是

$$20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = 20\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \sum_{k=1}^{M} 20\log_{10}|1 - c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^{N} 20\log_{10}|1 - d_k e^{-j\omega}| \tag{5.50}$$

函数 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$称为 $H(e^{j\omega})$的**对数幅度**,以 dB(dB)表示;有时这个量又称作以 dB 计的**增益**,即

$$\text{增益(dB)} = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| \tag{5.51}$$

注意:0dB 相应于$|H(e^{j\omega})| = 1$,而$|H(e^{j\omega})| = 10^m$ 就是 $20m$ dB。另外,$|H(e^{j\omega})| = 2^m$ 近似为 $6m$ dB。当$|H(e^{j\omega})| <$时,$20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$是负的。例如,在频率选择性滤波器的阻带内就是这种情况。通常的定义是

$$\text{衰减(dB)} = -20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = -\text{增益(dB)} \tag{5.52}$$

因此，当幅度响应小于 1 时，衰减就是一个正数。例如，在某一频率衰减为 60 dB 指的是在该频率 $|H(e^{j\omega})|=0.001$。

将(5.4a 式)的幅度以 dB 表示的另一个优点是在该式两边取对数后就完成

$$20\log_{10}|Y(e^{j\omega})| = 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| + 20\log_{10}|X(e^{j\omega})| \tag{5.53}$$

所以，以 dB 计的频率响应与输入傅里叶变换幅度的对数相加就得到输出傅里叶变换幅度的对数。如果用(5.53)式代替(5.4a)式，那么幅度和相位两者的效果都是相加的。

有理系统函数的相位响应有

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^{M}\angle[1-c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^{N}\angle[1-d_k e^{-j\omega}] \tag{5.54}$$

与(5.50)式一样，零点因式提供的是加号，而极点因式提供的则是减号。

有理系统函数的群延迟是

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^{N}\frac{d}{d\omega}(\arg[1-d_k e^{-j\omega}]) - \sum_{k=1}^{N}\frac{d}{d\omega}(\arg[1-c_k e^{-j\omega}]) \tag{5.55}$$

式中 arg[]代表连续相位。一种等效的表示方式是

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^{N}\frac{|d_k|^2 - \text{Re}\{d_k e^{-j\omega}\}}{1+|d_k|^2 - 2\text{Re}\{d_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^{M}\frac{|c_k|^2 - \text{Re}\{c_k e^{-j\omega}\}}{1+|c_k|^2 - 2\text{Re}\{c_k e^{-j\omega}\}} \tag{5.56}$$

按照(5.54)式所写出的这些项中的每一相位都是不确定的。因为对每个 ω 值来说，每一项加上 2π 的任何整倍数都不会改变复数的值。但是，群延迟的表示式则只涉及连续相位的微分。

当计算复数的相角时，可在计算器上用反正切键，或者用计算机的子程序，就可以得到相角的主值。$H(e^{j\omega})$相位的主值记为 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$，这里

$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leqslant \pi \tag{5.57}$$

其它任何可给出函数 $H(e^{j\omega})$的正确复数值的相角都能用主值表示为

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega) \tag{5.58}$$

式中 $r(\omega)$是某个正的或负的整数，对每个 ω 值 $r(\omega)$可以是不相同的。类似地，在计算(5.54)式中任何一项时，一般都是求主值的。

如果用主值来计算作为 ω 函数的相位响应，那么 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$就可能是一个不连续函数。由于取主值的关系所带来的不连续性将有 2π rad 的跳变。图 5.7(a)说明的就是连续相位函数$\arg[H(e^{j\omega})]$及其在 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 范围内所画出的主值 $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$。图 5.7(a)所画的相位函数超出 $-\pi$ 到 $+\pi$ 的范围，而图 5.7(b)所示的主值则有 2π 的跳变。这是由于为了将相位曲线移到主值范围，就必须在某个区域减去 2π 的整倍数所造成的。图 5.7(c)示出对应(5.58)式中的 $r(\omega)$值。

现在考虑当用主值来计算(5.54)式中对相位的单个贡献时，不难看出

$$\text{ARG}[H(e^{j\omega})] = \text{ARG}\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^{M}\text{ARG}[1-c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^{N}\text{ARG}[1-d_k e^{-j\omega}] \tag{5.59}$$

式中 r 是某一整数，在每个 ω 值可能都不相同。一般来说，由于相角和主值并不等于单个相角主值的和，所以就要求有最后一项 $2\pi r$。这一点在讨论倒谱分析和同态系统理论中具有很大的重要性(见 Oppenheim, Schaqer and Stockham, 1968 和 Tribolet, 1977)。然而，在画相位

函数时这不会引起什么问题，因为可以用主值来计算每个零点和极点的相位函数，然后加减适当的 2π 整数倍就可以求得总相位函数的主值，这就如同(5.59)式所指出的那样。

相位函数的主值可以用(5.59)式计算。另外，可以用关系

$$\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] = \arctan\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right] \tag{5.60}$$

式中 $H_R(e^{j\omega})$ 和 $H_I(e^{j\omega})$ 分别是 $H(e^{j\omega})$ 的实部和虚部。然则，当计算(5.15)式群延迟函数时，却是连续相位函数的导数，即 $\arg[H(e^{j\omega})]$ 的导数，这时关心的是

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} \tag{5.61}$$

除去相应于 $+\pi$ 和 $-\pi$ 之间跳变的 $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ 不连续点之外，有

$$\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \frac{d}{d\omega}\{\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]\} \tag{5.62}$$

因此，除去不连续点，群延迟可以从主值的微分求得。同样，群延迟也能用不确定的相位 $\angle H(e^{j\omega})$ 表示为

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}[\angle H(e^{j\omega})] \tag{5.63}$$

不过，(5.63)式应理解为不考虑 $\angle H(e^{j\omega})$ 中 2π 不连续点处所引起的冲激。

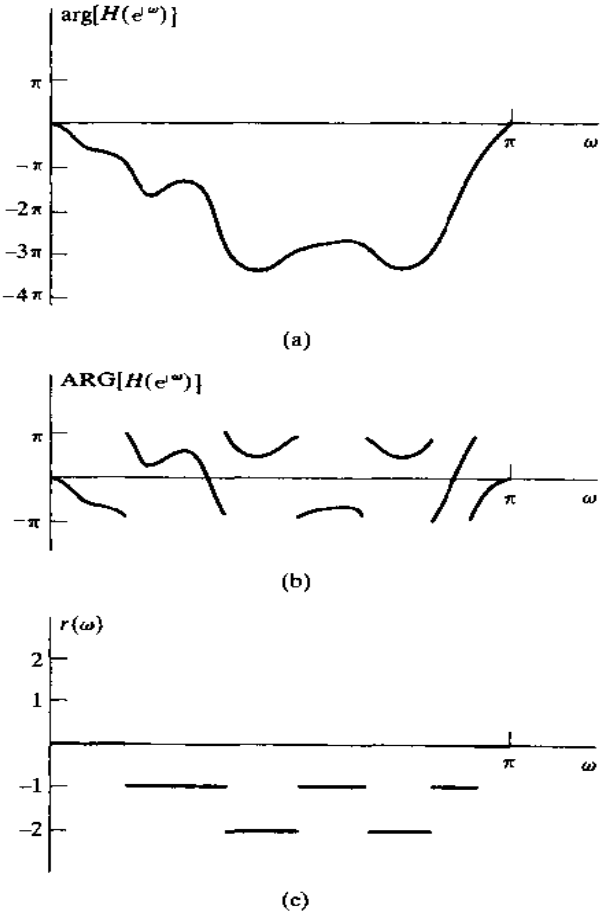


图 5.7 (a) 某一系统函数在单位圆上求值的连续相位曲线；(b) 相位曲线的主值；(c) 为得到 $\arg[H(e^{j\omega})]$，需要在 $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ 上加的 2π 倍数

5.3.1 单个零点或极点的频率响应

(5.50)式、(5.54)式以及(5.56)式分别代表系统函数用 dB 表示的幅度、相位和群延迟，这些都以系统函数每个零极点对它们做出的贡献之和来表示的。为了获得对具有有理系统函数的、稳定的线性时不变系统频率响应的性质有更透彻的认识，首先值得考虑一下单一因式 $(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})$ 的性质，这里 r 和 θ 分别为极点或零点矢量在 z 平面的矢径和相角。该因式可以是在 z 平面内半径为 r，相角为 θ 的一个极点，或者是一个零点所构成的典型项。

该因式的幅度平方是

$$| 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega} |^2 = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) = 1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta) \quad (5.64)$$

因为对任意复数 C,有

$$10\log_{10} | C |^2 = 20\log_{10} | C |$$

以 dB 计的对数幅度就是

$$20\log_{10} | 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega} | = 10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)] \quad (5.65)$$

该因式的主值相位是

$$\mathrm{ARG}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \arctan\left[\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}\right] \quad (5.66)$$

将(5.66)式右边微分(除不连续点外)就得到该因式的群延迟为

$$\mathrm{grd}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} = \frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{| 1 - re^{j\theta}e^{-j\omega} |^2} \quad (5.67)$$

(5.64)式到(5.67)式所表示的函数当然都是 ω 的周期函数,周期为 2π。图 5.8(a)示出在 $r = 0.9$,对几个不同的 θ 值,在一个周期($0 \leqslant \omega < 2\pi$)内(5.65)式作为 ω 的函数的变化。可以注意到,该函数在 $\omega = \theta$ 附近急剧下陷;同时也可以从(5.65)式注意到,当 r 固定不变时,对数幅度就是($\omega - \theta$)的函数,所以随 θ 改变,特性只是在频率轴上的平移。一般来说,(5.65)式的最大

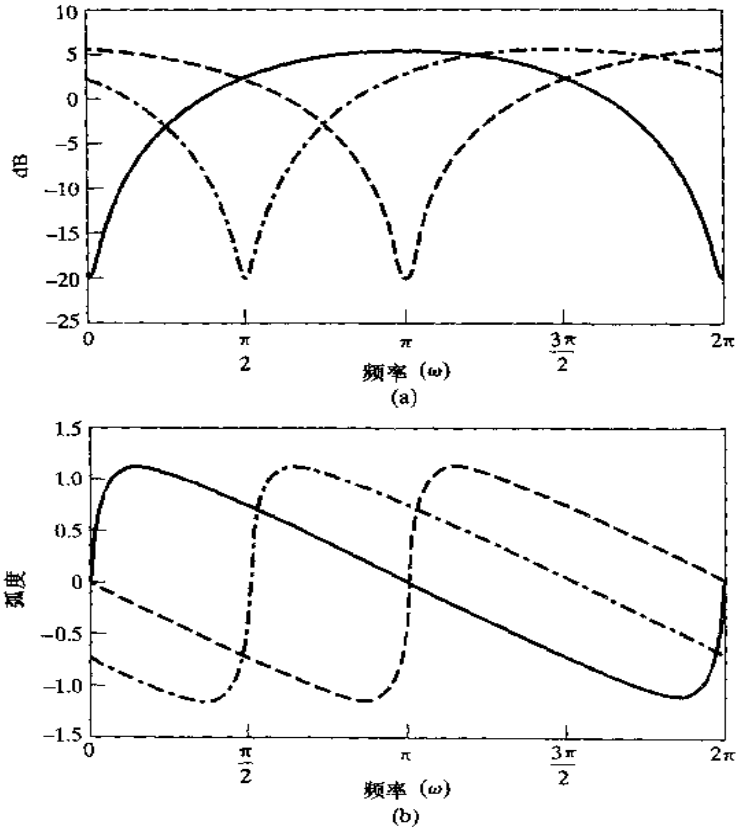
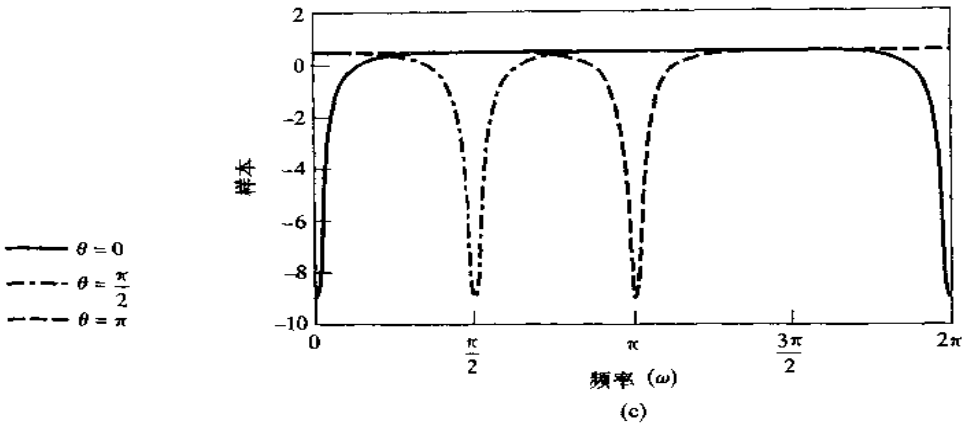


图 5.8 $r = 0.9$ 和 3 种 θ 值时,单一零点的频率响应
(a) 对数幅度; (b) 相位;



(c)

图 5.8(续) (c) 群延迟

值出现在$(\omega-\theta)=\pi$处,且为

$$10\log_{10}(1+r^2+2r)=20\log_{10}(1+r)$$

对于$r=0.9$,该值等于5.57dB。相类似,(5.65)式的最小值出现在$\omega=\theta$上,且是

$$10\log_{10}(1+r^2-2r)=20\log_{10}(1-r)$$

对于$r=0.9$,其值为-20dB。(5.64)式幅度平方函数除了它有一个宽得多的相对值范围外,也会有类似于图5.8(a)那样的形式。所以它的图在同一r值下要更为尖锐些。

图5.8(b)示出(5.66)式作为ω的函数在$r=0.9$和几个θ值下的相位函数特性。应该注意到:在$\omega=\theta$处,相位是零,且对于一定的r,该相位函数只是简单地随θ不同而平移。图5.8(c)是在同样的r和θ情况下,(5.67)式的群延迟函数。可以注意到,相位特性在$\omega=\theta$附近大的正斜率就对应于$\omega=\theta$处群延迟函数大的负峰值。

一种简单的的几何图形对直接从零极点近似画出频率响应函数往往是很有用的。该方法是根据如下事实:频率响应相应于系统函数在z平面单位圆上的求值;以及每个极点和零点因式的复数值都能用在z平面上从极点或零点到单位圆上某一点的矢量来表示。首先用下面一阶系统函数来说明这一过程。

$$H(z)=(1-re^{j\theta}z^{-1})=\frac{(z-re^{j\theta})}{z},\qquad r<1 \tag{5.68}$$

在5.3.2节再考虑高阶的例子。该因式有一个极点在$z=0$和一个零点在$z=re^{j\theta}$,如图5.9所示。在该图上指出的分别是代表复数$e^{j\theta}$,$re^{j\theta}$和$(e^{j\theta}-re^{j\theta})$的3个向量$v_1$,$v_2$和$v_3=v_1-v_2$。利用这些向量,复数

$$\frac{e^{j\omega}-re^{j\theta}}{e^{j\omega}}$$

的幅度就是矢量v_3和v_1的幅度之比,即

$$|r-re^{j\theta}e^{-j\omega}|=\left|\frac{e^{j\omega}-re^{j\theta}}{e^{j\omega}}\right|=\frac{|v_3|}{|v_1|} \tag{5.69}$$

或者,因为$|v_1|=1$,(5.69)式就正好等于$|v_3|$。对应的相位是

$$\begin{aligned}\angle(1-re^{j\theta}e^{-j\omega}) &= \angle(e^{j\omega}-re^{j\theta})-\angle(e^{j\omega})-\angle(v_3)-\angle(v_1)\\ &= \phi_3-\phi_1=\phi_3-\omega\end{aligned}\tag{5.70}$$

一般就将从一个零点到单位圆这样一个向量 v_3 称为零点向量，而从极点到单位圆的向量称为极点向量。因此，某单个零点因式$(1-re^{j\theta}z^{-1})$对于在频率 ω 处幅度函数的贡献就是从该零点到单位圆上 $z=e^{j\omega}$ 点的零点向量 v_3 的长度，当 $\omega=\theta$ 时，该矢量有最小长度。这就是图 5.8(a)在 $\omega=\theta$ 处幅度函数造成尖锐下降的原因。注意到从 $z=0$ 的极点到 $z=e^{j\omega}$ 的极点向量 v_1 总是长度为 1，因此它对幅度响应没有任何影响。(5.70)式说明相位函数等于从零点 $re^{j\theta}$ 到 $z=e^{j\omega}$ 点的零点向量的相角与从极点 $z=0$ 到 $z=e^{j\omega}$ 点的极点向量的相角之差。

图 5.10 示出在 $\theta=\pi$ 情况下的零极点图，并用对于两个不同的 ω 值画出了极点向量和零点向量。很清楚，向量 v_3 的幅度随 ω 从零开始增加而减小，直到 $\omega=\pi$ 达到最小值，这就形成了图 5.8(a)对于应 $\theta=\pi$ 时曲线的形状。图 5.10 中向量 v_3 的相角在最初比 ω 增加得慢一些，所以相位曲线由负的开始，然后由 ω 向 π 接近时，v_3 矢量的相角比 ω 增加要快得多，这就形成了相位函数在 $\omega=\pi$ 附近有陡峭的正斜率。当 $\omega=\pi$ 时，矢量 v_3 和 v_1 的相角相等，所以净相应为零。

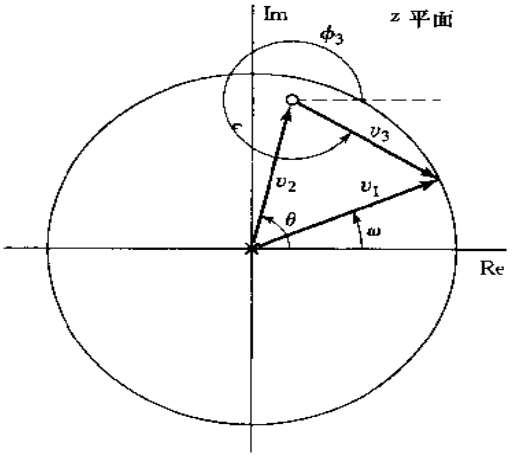


图 5.9 一阶系统函数在单位圆上求值的 z 平面向量 $r<1$

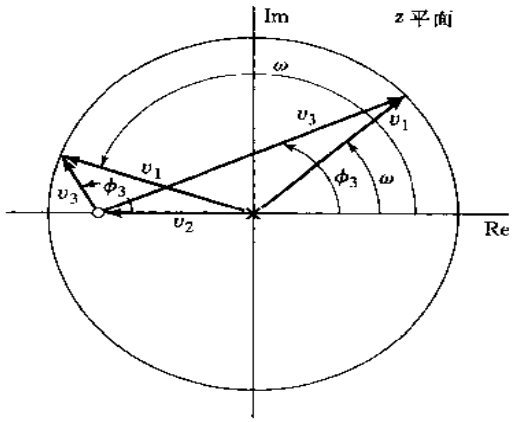


图 5.10 当 $\theta=\pi$，$r<1$ 时，一阶系统函数在单位圆上求值的 z 平面。对两个不同的 ω 值示出极点矢量 v_1 和零点矢量 v_3

一个单个因式$(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})$对频率响应的贡献依赖于 r 的关系示于图 5.11。该图是针对 $\theta=\pi$ 和几个不同的 r 值作出的。图 5.11(a)的对数幅度函数随着 r 接近于 1 而下降得更为陡峭；的确，随着 $r\to1$，在 $\omega=\theta$ 处以 dB 计的幅度趋向于 $-\infty$。图 5.11(b)画出的相应函数在 $\omega=\theta$ 附近有正的斜率，且随着 $r\to1$ 而变为无穷大。因此，对于 $r=1$ 相位函数在 $\omega=\theta$ 有一个 π rad 的跳变，是不连续的。远离 $\omega=\theta$ 处，相位函数的斜率是负的。因为群延迟是相位曲线斜率的负值，所以群延迟在 $\omega=\theta$ 附近是负的，并且随 $r\to1$ 而急剧下降。图 5.11(c)表明，随着频率远离 $\omega=\theta$，群延迟就变成正的，而且相对平坦。当 $r=1$ 时，除 $\omega=\theta$ 这一点外，群延迟处处都是 1/2，而在 $\omega=\theta$ 这一点群延迟无定义。

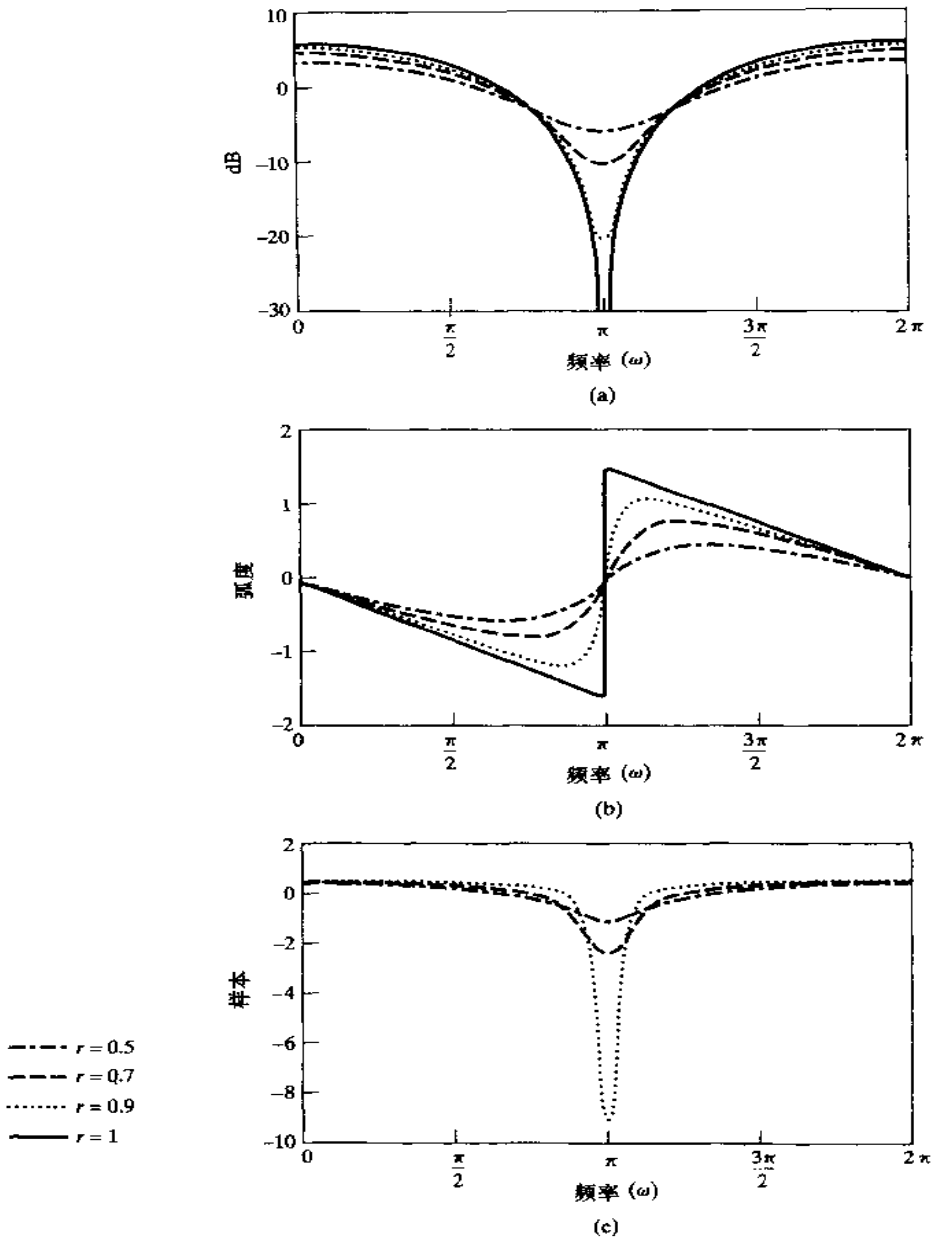


图 5.11　单个零点的频率响应，其中 $\theta=\pi$，$r=1$，0，9，0.7 和 0.5
(a) 对数幅度；(b) 相位；(c) 群延迟($r=0.9$，0.7 和 0.5)

位于单位圆上 $z=-1$ 的零点的几何图形如图 5.12 所示。图中画出了在 $\omega=(\pi-\varepsilon)$和 $\omega=(\pi+\varepsilon)$两个不同频率的向量图。这里 ε 很小。从该图可以看出两点：首先当 ω 接近于零点

向量的相角($\varepsilon \to 0$)时，向量 v_3 的长度趋近于零，因此对频率响应的贡献就是($-\infty$dB)；第二，当 ω 从($\pi-\varepsilon$)到($\pi+\varepsilon$)穿过时，矢量 v_3 的相角突变 π rad。

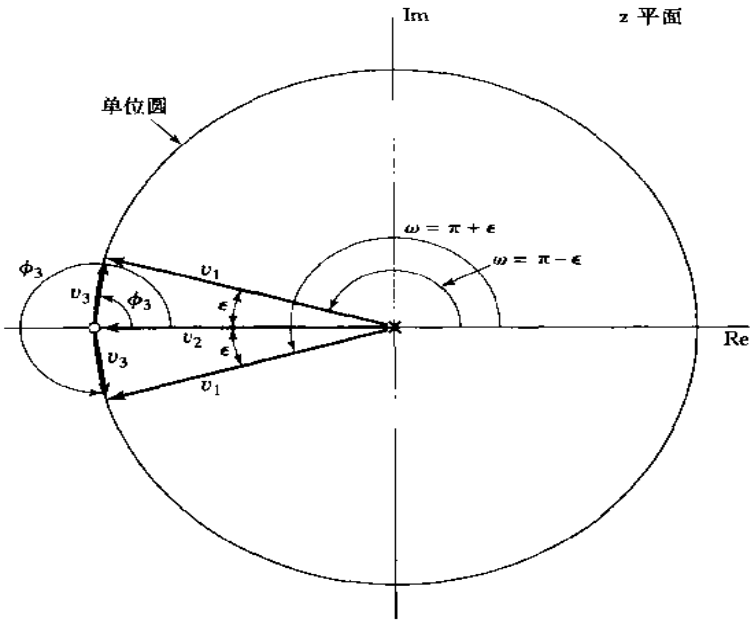


图 5.12　$z=-1$ 零点在靠近 π 的两个不同频率处($\omega=\pi-\varepsilon$ 和 $\omega=\pi+\varepsilon$)的 z 平面向量

图 5.8 和图 5.11 都局限于 $r \leqslant 1$。如果 $r>1$，对数幅度函数的特性与 $r<1$ 时相类似，也就是说，随着 $r \to 1$，特性下降更为陡峭，如图 5.13(a)所示。图 5.13(b)的相位函数表明对全部 $r>1$ 的值，在 $\omega=\theta$ 处都有 2π rad 的跳变。产生这一跳变的原因可以从图 5.14 看出，图中示出对 $\omega=(\pi-\varepsilon)$和 $\omega=(\pi+\varepsilon)$时的各个向量关系。可以看到，极点向量 v_1 的相角就为 ω，且连续从 $\omega=0$ 变化到 $\omega=2\pi$。图 5.14 中零点向量 v_3 的相角用 ϕ_3 标出。如果 ϕ_3 以逆时针为正测定的话，那么由图 5.14 可见，当 ω 从($\pi-\varepsilon$)到($\pi+\varepsilon$)穿过时，ϕ_3 从零跳变到 2π rad。2π rad 的跳变在图 5.13(b)中是显而易见的。这个 2π rad 的跳变也能解释为是由于计算主值相位函数的缘故。也可以把 ϕ_3 在 $\omega=(\pi-\varepsilon)$时看成是正的，而在 $\omega=(\pi+\varepsilon)$时看成是负的。这样理解的话，相角在 $\omega=\theta$ 处就连续的了。然而，因为因式$(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})$总的相角在 $\omega=(\pi+\varepsilon)$处小于 $-\pi$ rad，所以主值也就应如图 5.13(b)所示了。

图 5.13(b)的相位曲线全部为负斜率，因此群延迟函数在 $r>1$ 时，对全部 ω 都为正。这一点从(5.67)式当 $r>1$ 时也很容易看出。

上述讨论和图 5.8，图 5.11 及图 5.13 全部是关于单个因式$(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})$的讨论。若该因式代表的是 $H(z)$的一个零点，那么图 5.8，图 5.11 和图 5.13 对频率响应的贡献均以正的代数符号给出；若该因式代表的是 $H(z)$的一个极点，那么全部将以相反的符号给出。因此，极点 $z=e^{j\omega}$的贡献就是图 5.8 和图 5.11 中曲线的负值。这样，在 $\omega=\theta$ 附近就不是朝零下降($-\infty$dB)，而是幅度函数出现峰值。曲线依赖于 r 的关系和零点时是一样的，也即 r 愈靠近

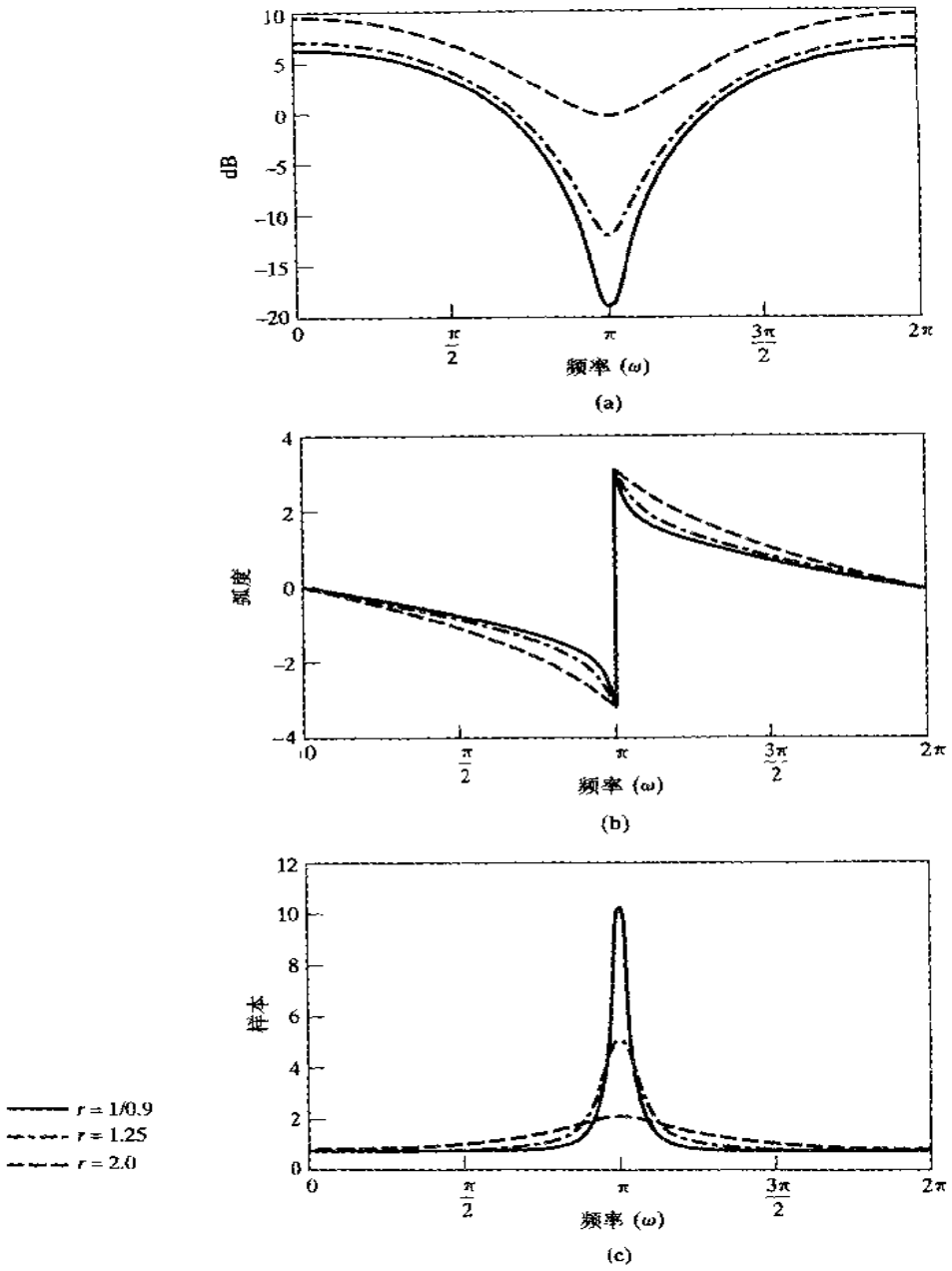


图 5.13　位于单位圆外的单个实零点的频率响应，其中 $\theta=\pi$，$r=1/0.9$，1.25 和 2
(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；(c) 群延迟

1，对幅度函数的贡献峰值就愈突出。当然，对于稳定和因果的系统而言，不会有极点在单位圆以外，也即 r 总是小于 1 的。

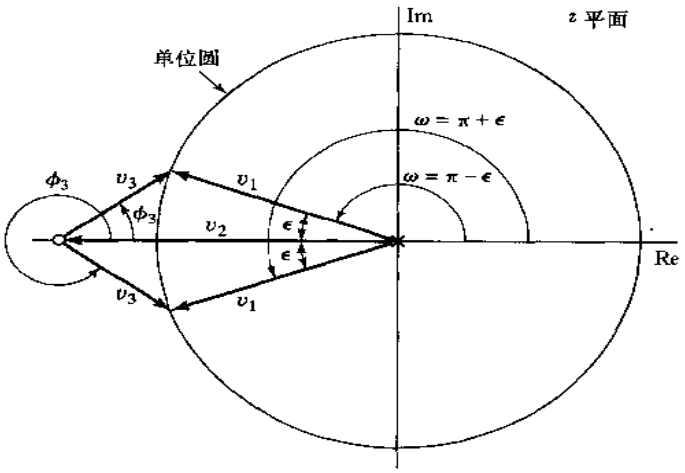


图 5.14　单个零点在单位圆上求值的 z 平面矢量，其中 $\theta=\pi$，$r>1$

5.3.2　多个零极点的例子

这一节将用 5.3.1 节的结果来说明如何确定有理系统函数的系统频率响应。

例 5.8　二阶 IIR 系统

考虑二阶系统

$$H(z)=\frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}} \tag{5.71}$$

该系统的输入输出满足差分方程

$$y[n]-2r\cos\theta y[n-1]+r^2y[n-2]=x[n]$$

利用部分分式展开，具有这个系统函数的因果系统的单位脉冲响应可以证明是

$$h[n]=\frac{r^n\sin[\theta(n+1)]}{\sin\theta}u[n] \tag{5.72}$$

(5.71)式的系统函数有一对极点在 $z=re^{j\theta}$ 和其共轭的 $z=re^{-j\theta}$，在 $z=0$ 有二阶零点，图 5.15 示出其零极点图。由 5.3.1 节的讨论有

$$20\log_{10}|H(e^{j\omega})|=-10\log_{10}[1-r^2-2r\cos(\omega-\theta)]-10\log_{10}[1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)] \tag{5.73a}$$

和

$$\measuredangle H(e^{j\omega})=-\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]-\arctan\left[\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}\right] \tag{5.73b}$$

及

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})]=-\frac{r^2-r\cos(\omega-\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}-\frac{r^2-r\cos(\omega+\theta)}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)} \tag{5.73c}$$

这些函数以 $r=0.9$，$\theta=\pi/4$ 为例都画在图 5.16 上。图 5.15 表示出极点和零点向量 $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$。幅度响应就是零点向量长度(在本例中总是 1)的乘积被极点向量长度乘积相除，这就是

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{|\boldsymbol{v}_3|^2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}=\frac{1}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|} \tag{5.74}$$

当 $\omega \approx \theta$ 时，向量 $v_1 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ 的长度变得很小，并且当 ω 在 θ 周围变化时，变化很显著；而向量 $v_2 = e^{j\omega} - re^{j\theta}$ 的长度当 ω 在 $\omega = \theta$ 周围变化时，仅有些微小的变化。因此，在相角 θ 处的极点对 $\omega = \theta$ 附近的频率响应起主要作用，如图 5.16 所明显看到的。按照对称关系，在 $-\theta$ 处的极点也就对 $\omega = -\theta$ 附近的频率响应起主要作用。

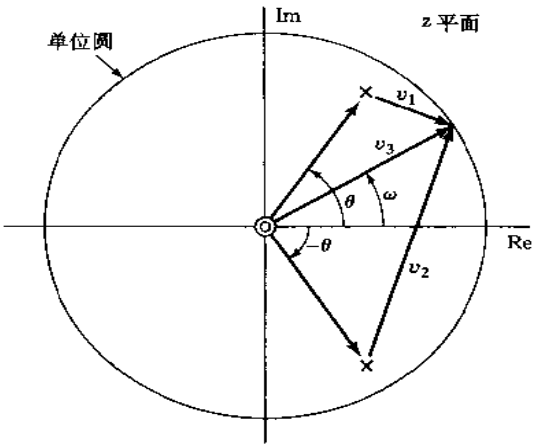


图 5.15　例 5.8 的零极点图

例 5.9　二阶 FIR 系统

考虑一个 FIR 系统，其单位脉冲响应是

$$h[n] = \delta[n] - 2r\cos\theta\delta[n-1] + r^2\delta[n-2] \tag{5.75}$$

系统函数为

$$H(z) = 1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2} \tag{5.76}$$

这就是例 5.8 系统函数的倒数。因此对于这个 FIR 系统频率响应的各种曲线就是图 5.16 各图的负值。应该注意，在颠倒时，极点和零点位置

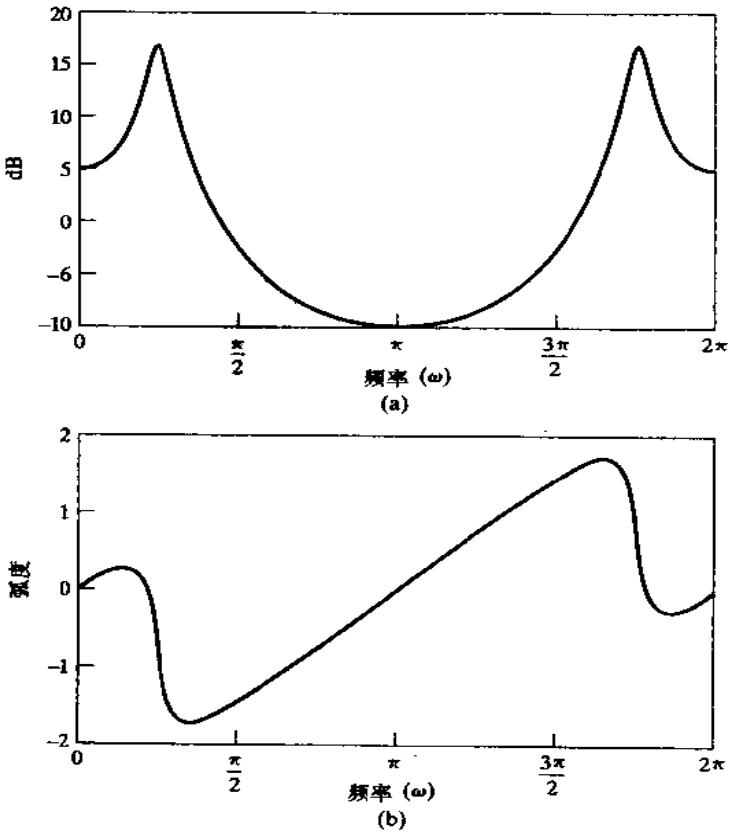


图 5.16　例 5.8 中一对复数共轭极点的频率响应，其中 $r = 0.9$，$\theta = \pi/4$
(a) 对数幅度；(b) 相位；

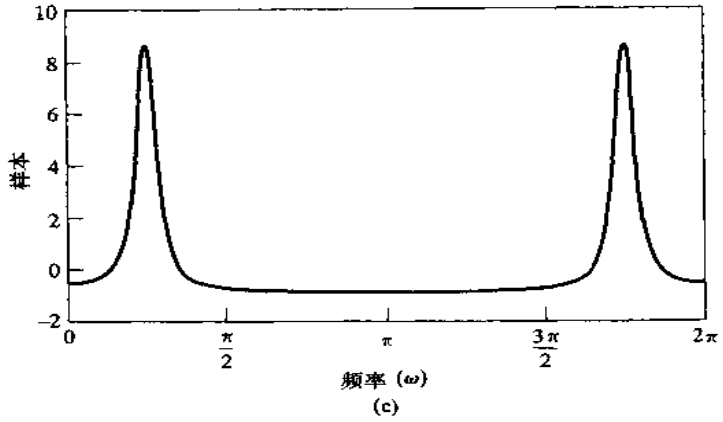


图 5.16(续) (c) 群延迟

也互相交换。

例 5.10 三阶 IIR 系统

在这个例子中要考虑一个低通滤波器,这是用在第 7 章要讨论的一种近似方法设计的。要研究的系统函数是

$$H(z)=\frac{0.056\,34(1+z^{-1})(1-1.016\,6z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.683z^{-1})(1-1.446\,1z^{-1}+0.795\,7z^{-2})} \tag{5.77}$$

系统函数的零点是在

向径	相角
1	π rad
1	±1.037 6 rad(59.45°)

极点在

向径	相角
0.683	0
0.892	±0.625 7 rad(35.85°)

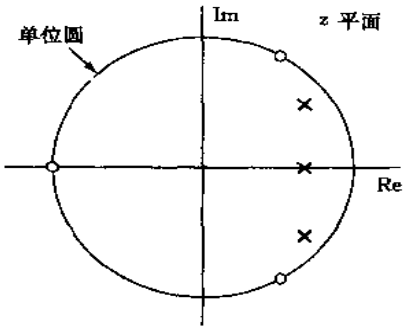


图 5.17 例 5.10 低通滤波器的零极点图

该系统的零点图示于图 5.17。图 5.18 示出该系统的对数幅度、相位和群延迟特性。位于单位圆上 $\omega=\pm1.037\,6$和 π 的这些零点其作用是显而易见的。然而,极点的配置不是要在频率接近极点的相角时得到峰值响应,而是要使得总的对数幅度特性在 $\omega=0$到 $\omega=0.2\pi$(根据对称性,也是从 $\omega=1.8\pi$到 $\omega=2\pi$)的频带内保持接近 0dB,然后很快下降,并大约从 $\omega=0.3\pi$到 1.7π保持在 −25dB 以下。这个例子也启示我们:用极点构成幅度响应,用零点来抑制幅度响应也能实现对频率选择性滤波器响应的有效近似。

在本例中在画相位曲线时看到两种类型的不连续情况。在 $\omega\approx0.22\pi$处有一个 2π 的跳变,这是由于作图时采用主值的关系。在 $\omega=\pm1.037\,6$和 $\omega=\pi$处,有 π 的跳变,这是由于单位圆上的零点造成的。

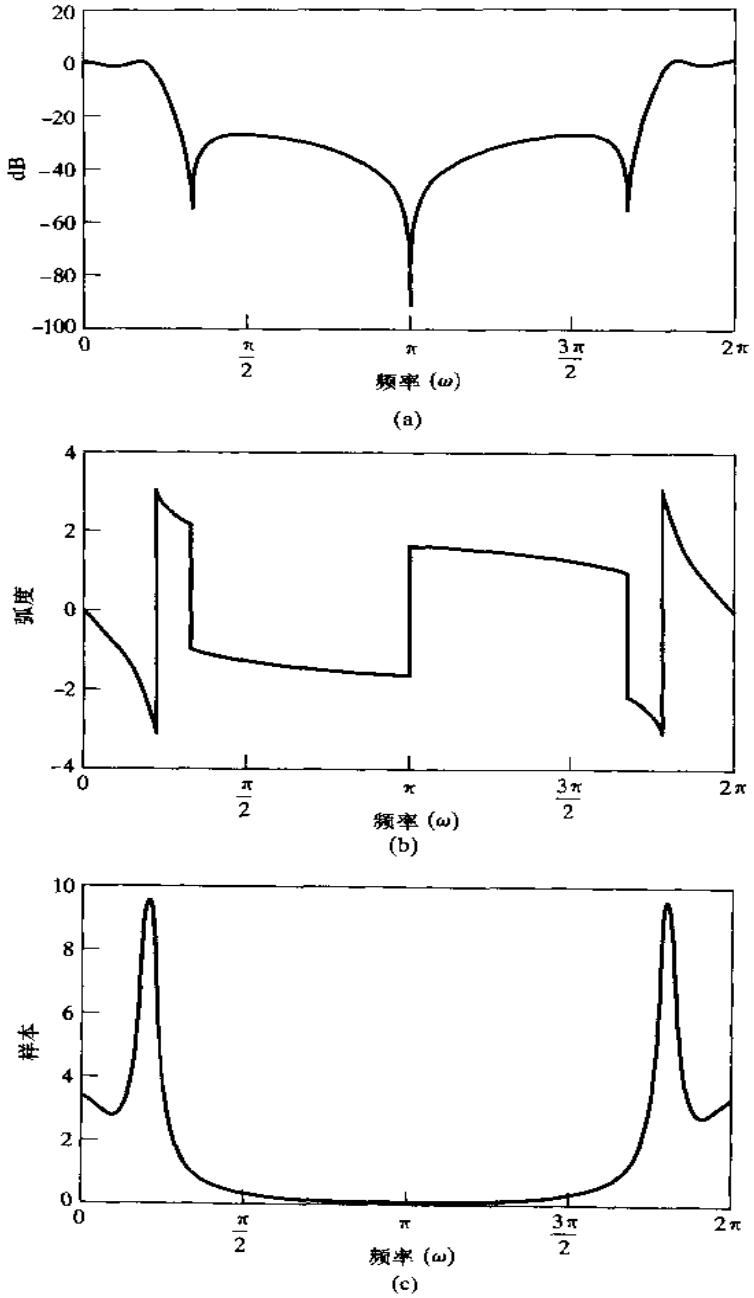


图 5.18　例 5.10 低通滤波器的频率响应
(a) 对数幅度；(b) 相位；(c) 群延迟

5.4 幅度和相位之间的关系

一个线性时不变系统的频率响应是单位脉冲响应的傅里叶变换。一般来说，关于幅度特性的了解并没有给出任何有关相位的信息；反过来也是一样。然而，对于由线性常系数差分方程描述的系统，也即具有有理系统函数的系统，其幅度和相位特性之间有某种制约关系存在。特别是，正如在本节要讨论的，如果频率响应的幅度特性和零极点个数是已知的话，那么与其有关的相位特性仅有有限种选择。相仿，如果零极点个数和相位特性已知的话，那么除了一个幅度加权因子外，也仅有有限个幅度特性可供选取。再者，在称之为最小相位的限制下，频率响应的幅度特性唯一地决定了相位特性；而频率响应的相位特性除去一个幅度加权因子外也决定了幅度特性。

为了阐明在给定系统频率响应的幅度平方特性下，系统函数的可能选择，考虑将 $|H(e^{j\omega})|^2$ 表示成

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(z)H^*(1/z^*)\big|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned} \tag{5.78}$$

由于将系统函数 $H(z)$ 限制为(5.19)式的有理形式，即

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})} \tag{5.79}$$

那么，(5.78)式中 $H^*(1/z^*)$ 就是

$$H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k^* z)} \tag{5.80}$$

这里已假定 a_0, b_0 都是实数。因此(5.78)式就意味着该频率响应的幅度平方就是由下式给定的 z 变换 $C(z)$ 在单位圆上的求值：

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) \tag{5.81}$$

$$= \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})(1-c_k^* z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})(1-d_k^* z)} \tag{5.82}$$

如果已知 $|H(e^{j\omega})|^2$，那么以 z 代替 $e^{j\omega}$ 就能构造出 $C(z)$，由 $C(z)$ 能推出全部可能的 $H(z)$。首先注意到，对于 $H(z)$ 的每个极点 d_k，在 $C(z)$ 中就会有 d_k 和 $(d_k^*)^{-1}$ 的极点存在。类似地，对于 $H(z)$ 中每个零点 c_k，在 $C(z)$ 中就有零点 c_k 和 $(c_k^*)^{-1}$ 存在。因此，$c(z)$ 的零极点是以共轭倒数对的形式出现的，每对中的一个是与 $H(z)$ 相联系的，另一个则与 $H^*(1/z^*)$ 有关。再者，如果每对中的一个是在单位圆内的话，那么另一个(即共轭倒数)就一定在单位圆外。仅有的例外是这两个都在单位圆上，那么它们就在同一位置上。

如果 $H(z)$ 假设是对应于一个因果稳定的系统，那么它的全部极点都必须位于单位圆内。有了这个限制，$H(z)$ 的极点可以从 $C(z)$ 的极点中分离出来。然而，仅凭这一点，$H(z)$ 的零

点还是不能从 $C(z)$的零点中唯一地被确定。从下面的例子就能看到这一点。

例 5.11　具有相同 $C(z)$的系统

考虑两个稳定的系统，它们的系统函数为

$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \tag{5.83}$$

和

$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \tag{5.84}$$

它们的零极点图分别于图 5.19(a)和图 5.19(b)。现在

$$\begin{aligned} C_1(z) &= H_1(z)H_1^*(1/z^*) \\ &= \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})2(1 - z)(1 + 0.5z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})} \end{aligned} \tag{5.85}$$

和

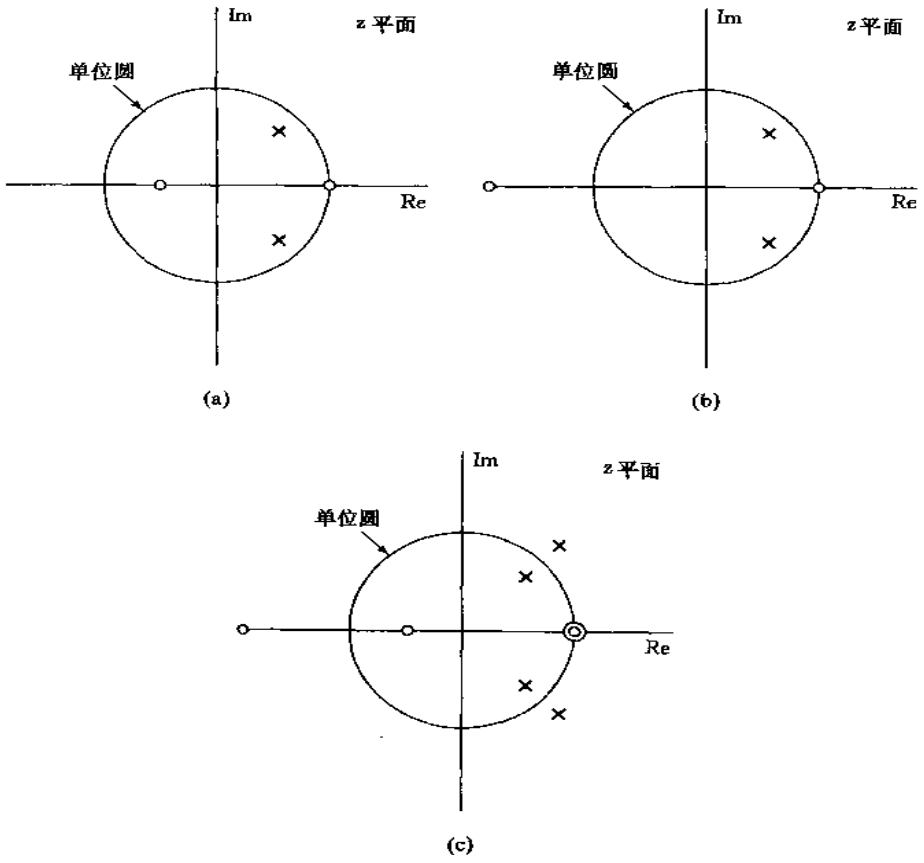


图 5.19　两个系统函数和它们共同的幅度平方函数的零极点图
(a) $H_1(z)$; (b) $H_2(z)$; (c) $C_1(z)$, $C_2(z)$

$$C_2(z) = H_2(z)H_2^*(1/z^*)$$

$$= \frac{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})(1-z)(1+2z)}{(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})} \tag{5.86}$$

由于

$$4(1+0.5z^{-1})(1+0.5z) = (1+2z^{-1})(1+2z) \tag{5.87}$$

所以 $C_1(z)=C_2(z)$。$C_1(z)$和 $C_2(z)$的零极点图示于图 5.19(c)。

例 5.11 的系统函数 $H_1(z)$和 $H_2(z)$仅差在零点的位置不同。在本例中，因式 $2(1+0.5z^{-1})=(z^{-1}+1)$对频率响应幅度平方的贡献与因式$(1+2z^{-1})$的贡献是相同的，所以$|H_1(e^{j\omega})|$和$|H_2(e^{j\omega})|$就相等，然而两个频率响应的相位函数是不同的。

例 5.12　根据图 5.20$C(z)$的零极点，确定与 $H(z)$有关的零极点

假定已给出 $C(z)$的零极点图如图 5.20 所示，现在想要确定与 $H(z)$有关的零极点。每个零极点的共轭倒数对中有一个是与 $H(z)$相联系的，另一个则与 $H^*(1/z^*)$相联系。这些共轭倒数对的零极点是：

极点对 1：　(P_1, P_4)
极点对 2：　(P_2, P_5)
极点对 3：　(P_3, P_6)
零点对 1：　(Z_1, Z_4)
零点对 2：　(Z_2, Z_5)
零点对 3：　(Z_3, Z_6)

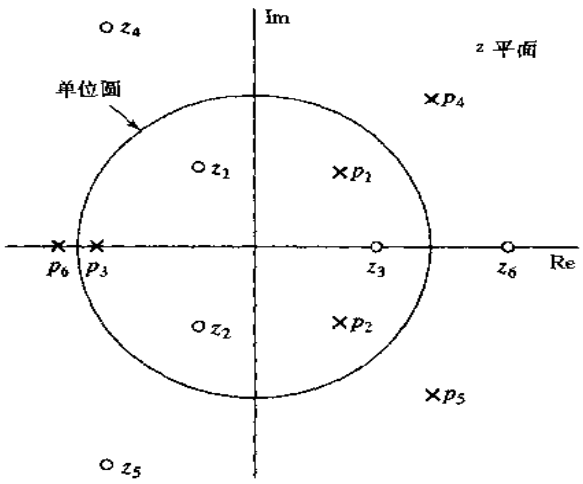


图 5.20　例 5.12 的幅度平方函数的零极点图

已知 $H(z)$对应于一个稳定、因果系统，就必须从每一对中选取位于单位圆内的极点，即 P_1，P_2 和 P_3。在零点上没有这样的约束。然而，若假定在(5.16)式和(5.18)式中的系统 a_k，b_k 都是实数的话，那么这些零点(和极点)要么是实数，否则就以复数共轭成对出现。这样与$H(z)$有关的零点就是

$$Z_3 \text{ 或 } Z_6$$

和

$$(Z_1, Z_2) \text{ 或 } (Z_4, Z_5)$$

因此，对于图 5.20 所示的 $C(z)$零极点图，总共有 4 种不同的具有 3 个极点和 3 个零点的稳定且因果的系统都具有相同的频率响应幅度特性。如果不假定这些系数 a_k 和 b_k 是实数的话，那么选择的可能就更多。再者，如果 $H(z)$的极点和零点数是不加限定的话，$H(z)$的选择就会是无限制的。为了看出这点，假定 $H(z)$有一个如下的因式：

$$\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}}$$

即

$$H(z) = H_1(z)\frac{z^{-1}-a^*}{1-az^{-1}} \tag{5.88}$$

这种形式的因式称为**全通因子**，因为它在单位圆上的幅度响应为 1，有关全通系统将在 5.5 节作详细的讨论。很容易证明

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z)H_1^*(1/z^*) \tag{5.89}$$

这就是说，在 $C(z)$中这些全通因子相抵消，因此不能从 $C(z)$的零极点图中将它们辨别出来。所以，如果$H(z)$的零极点个数不给定的话，那么给定 $C(z)$，$H(z)$的任何选择都能与极点在单位圆内(即$|a|<1$)的任意个数的全通因子级联。

5.5 全通系统

如在例 5.12 讨论中所指出的，具有形式为

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \tag{5.90}$$

的稳定系统函数其频率响应的幅度与 ω 无关。将它写成 $H_{ap}(e^{j\omega})$的形式就能看出这点

$$\begin{aligned} H_{ap}(e^{j\omega}) &= \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\omega}\frac{1 - a^*e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned} \tag{5.91}$$

在(5.91)式中，$e^{-j\omega}$项的幅度为 1，剩下的分子和分母因式是互为复共轭的，因此有相同的幅度，结果就是$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$。这类系统称为**全通系统**，因为系统以恒定增益或衰减通过输入中的全部频率分量。具有实值单位脉冲响应全通系统的系统函数的最一般形式就是像(5.90)式那样的因式的乘积，其复数极点是以共轭成对出现的，即

$$H_{ap}(z) = A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_kz^{-1}}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_kz^{-1})(1 - e_k^*z^{-1})} \tag{5.92}$$

式中 A 是某一正常数，d_k 均为$H_{ap}(z)$的实数极点，而 e_k 代表$H_{ap}(z)$的复数极点。对于因果而稳定的全通系统，$|d_k|<1$ 和$|e_k|<1$。利用系统函数的一般概念，全通系统有 $M = N = 2M_c + M_r$ 个极点和零点。图 5.21 示出一个典型的全通系统零极点图。该图情况下，$M_r = 2$，$M_c = 1$。值得注意，$H_{ap}(z)$的每一个极点都有一个与之配对的共轭倒数零点。

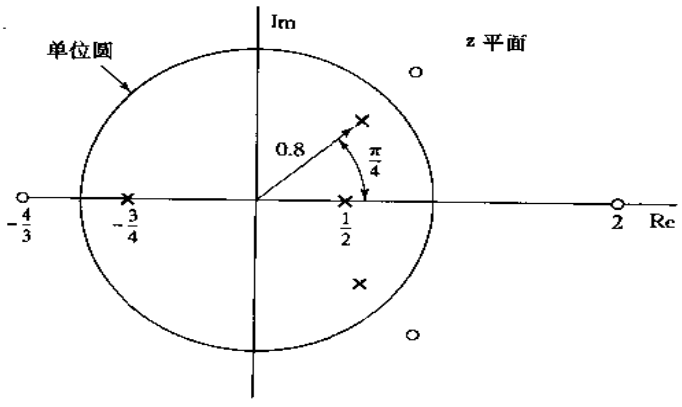


图 5.21 全通系统典型零极点图

一个一般的全通系统的频率响应都能利用由(5.90)式所给出的一阶全通系统的频率响应来表示，对于一个因果全通系统，其中每一个都由单位圆内的单一极点和与该极点成共轭倒数的零点所组成。正如已经证明了的，这样一项的幅度响应是 1，因此以 dB 计的对数幅度就是零。用 $a=re^{j\theta}$ 的极坐标形式表示 a，(5.90)式相位函数是

$$\angle\left[\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right]=-\omega-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right] \tag{5.93}$$

同样，具有极点在 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=re^{-j\theta}$ 的二阶全通系统的相位是

$$\angle\left[\frac{(e^{-j\omega}-re^{-j\theta})(e^{-j\omega}-re^{j\theta})}{(1-re^{j\theta}e^{j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{j\omega})}\right]=-2\omega-2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega-\theta)}{1-r\cos(\omega-\theta)}\right]-$$
$$2\arctan\left[\frac{r\sin(\omega+\theta)}{1-r\cos(\omega+\theta)}\right] \tag{5.94}$$

例 5.13　一阶和二阶全通系统

图 5.22 示出一个其极点在 $z=0.9$ ($\theta=0$, $r=0.9$)和另一个极点在 $z=-0.9$($\theta=\pi$, $r=0.9$)的两个一阶全通系统的对数幅度、相位和群延迟特性曲线。对于这两个系统，极点的矢径都是 $r=0.9$。

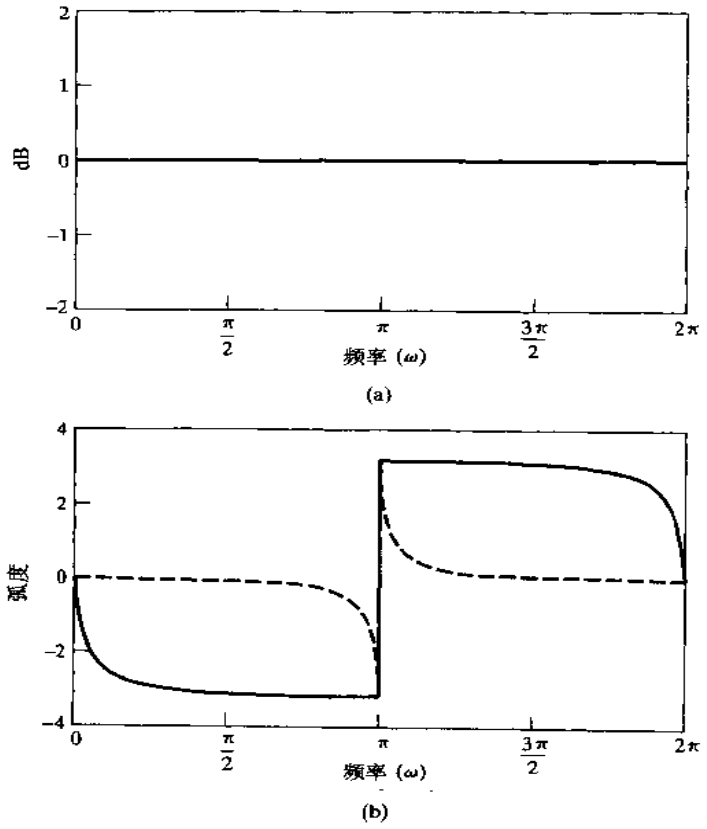


图 5.22　具有实数极点 $z=0.9$(实线)和 $z=-0.9$(虚线)的全通滤波器的频率响应

(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；

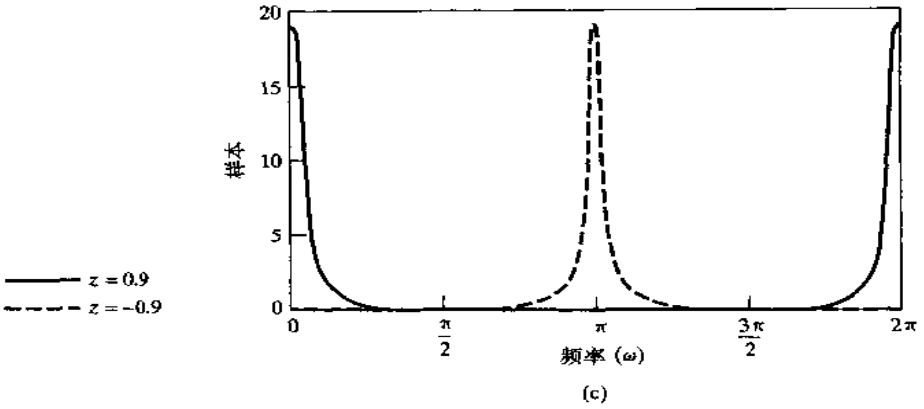


图 5.22(续) (c) 群延迟

同样,图 5.23 示出极点在 $z=0.9e^{\pi/4}$和 $z=0.9e^{j\pi/4}$的二阶全通系统频率响应的各个特性。

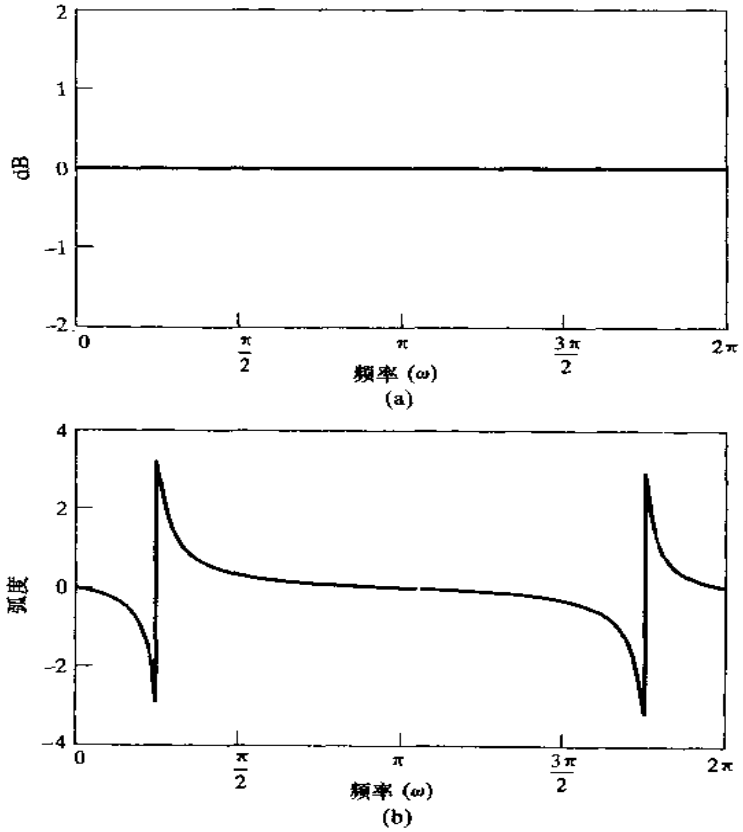
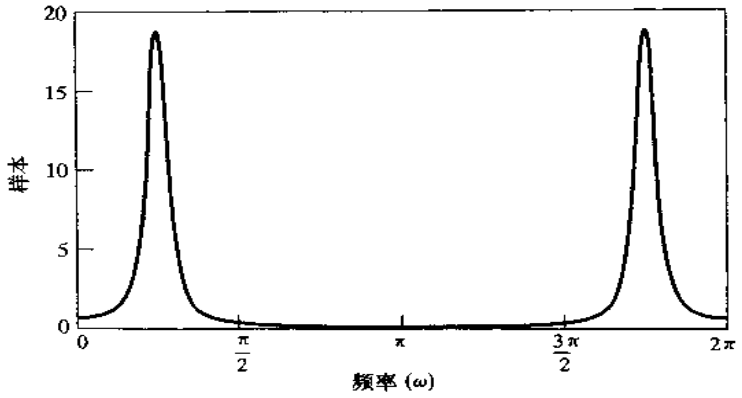


图 5.23 具有极点在 $z=0.9e^{\pm j\pi/4}$的二阶全通系统的频率响应
(a) 对数幅度;(b) 相位(主值);



(c)

图 5.23(续) (c) 样延迟

例 5.13 说明了因果全通系统的一个普遍性质。由图 5.22(b)可见，相位在 $0<\omega<\pi$ 内是正的。类似地，如果在图 5.23(b)中将计算主值而产生的 2π 跳变移去的话，那么所得到的连续相位曲线在 $0<\omega<\pi$ 内也是非正的。因为由(5.92)式给出的更为一般的全通系统只是这样一些一阶和二阶因子的相乘，因此可以得出：因果全通系统的(连续)相位 $\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]$ 在 $0<\omega<\pi$ 内总是非正的。如果画出的是主值的话，就可能不是这样，如图 5.24 所示。这里画出了具有图 5.21 零极点的全通系统的对数幅度、相位和群延迟特性。然而，通过首先考虑群延迟就能证实这一结果。

(5.90)式的简单单极点全通系统的群延迟是由(5.93)式给出的相位特性导数的负值。稍作一点代数运算就能证明

$$\mathrm{grd}\left[\frac{e^{-j\omega}-re^{-j\theta}}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}}\right]=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)}=\frac{1-r^2}{|1-re^{j\theta}e^{-j\omega}|^2} \tag{5.95}$$

因为对一个稳定而因果的全通系统，$r<1$，由(5.95)式可见，由一个单极点的全通因子对群延迟的贡献总是正的。因为高阶全通系统的群延迟就是(5.95)式这些正的项之和，所以因果有理全通系统的群延迟总是正的这一点就应该是确信无疑的了。图 5.22(c)，图 5.23(c)和图 5.24(c)分别是一阶、二阶和三阶全通系统的群延迟，它们都确认了这一点。

全通系统群延迟的正值性就为全通系统相位特性负值提供了一个简单证明的基础，首先注意到

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})]=-\int_0^{\omega}\mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\phi})]d\phi+\arg[H_{ap}(e^{j0})] \tag{5.96}$$

式中 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$。从(5.92)式就有

$$H_{ap}(e^{j0})=A\prod_{k=1}^{M_r}\frac{1-d_k}{1-d_k}\prod_{k=1}^{M_c}\frac{|1-e_k|^2}{|1-e_k|^2}=A \tag{5.97}$$

因此 $\arg[H_{ap}(e^{j0})]=0$，并且因为

$$\mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})]\geqslant 0 \tag{5.98}$$

由(5.96)式就直接得出

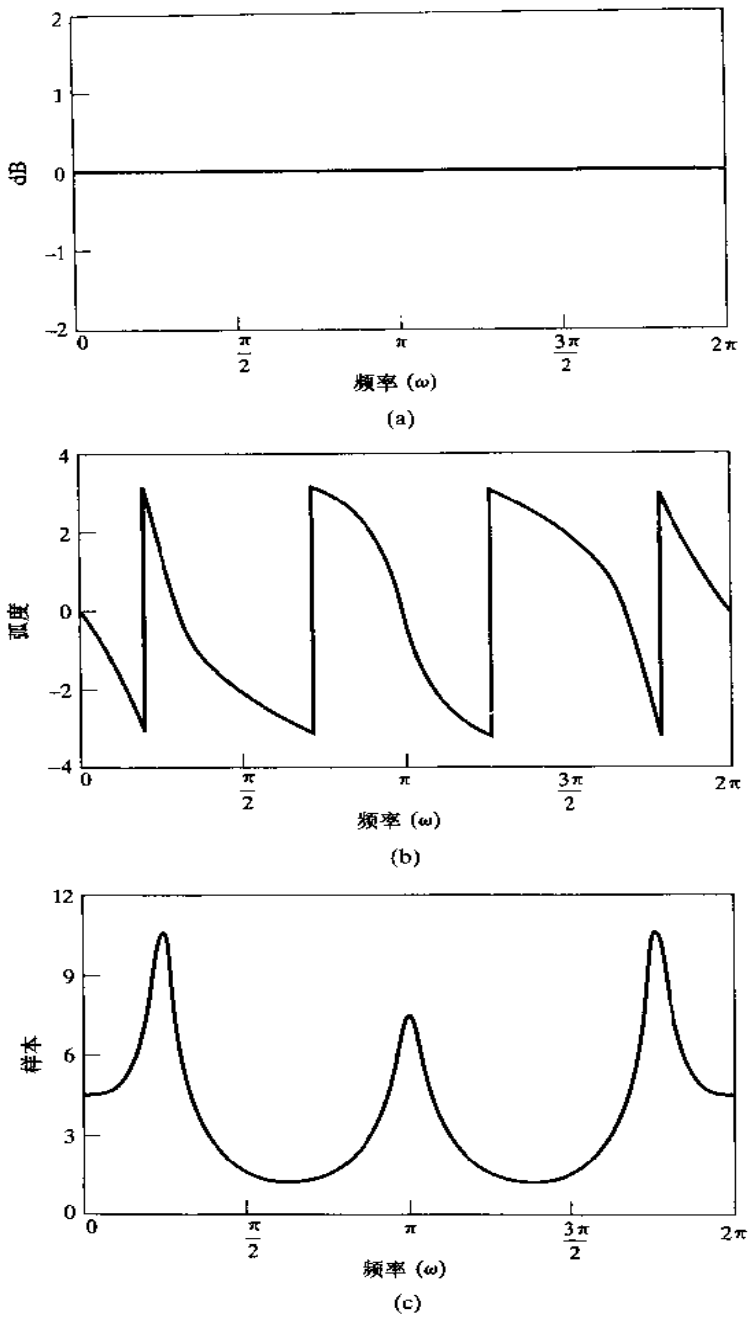


图 5.24　具有图 5.21 零极点图的全通系统频率响应
(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；(c) 群延迟

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi \tag{5.99}$$

群延迟的正值性和连续相位的非正值性都是因果全通系统的重要性质。

全通系统有很多应用。如在第 7 章将看到的，它们可以用作相位（或群延迟）失真的补偿，以及在 5.6 节将看到，它们在最小相位系统理论中是有用的。另外，在把频率选择性低通滤波器变换到其它类型频率选择性滤波器中，以及在获得可变截止频率的频率选择性滤波器中全通系统都是很有用的。这些应用都将在第 7 章讨论并在该章习题中予以应用。

5.6 最小相位系统

在 5.4 节已证明对于一个具有有理系统函数的 LTI 系统，其频率响应的幅度不能唯一表征该系统。如果系统是稳定和因果的，那么其系统函数的极点必须位于单位圆内；但是稳定性和因果性并没有在零点上给出任何限制。对于某些问题，强加其逆系统（系统函数为 $1/H(z)$ 的系统）也是稳定和因果的这样一些附加限制是有用的。如同在 5.2.2 节所讨论的，这样就把零点和极点一样都限制在单位圆内，因为 $1/H(z)$ 的极点就是 $H(z)$ 的零点。这样的系统通常就称为**最小相位系统**。**最小相位**这个名称来自于该系统相位特性的性质，这一点仅由上述定义还不是很明显的。这一点以及另一些将要讨论的基本性质对这类系统来说都是独一无二的，因此它们当中任何一个都可用作这类系统的定义。这些性质将在 5.6.3 节讨论。

如果给出了一个如（5.82）式的幅度平方函数，并且已知该系统是最小相位系统，那么 $H(z)$ 就被唯一确定。它将由位于单位圆内 $C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$ 的全部零极点所组成。[①] 当使用的设计方法仅需确定幅度响应时，这种办法在滤波器设计中常被采纳（见第 7 章）。

5.6.1 最小相位和全通分解

在 5.4 节已表明，仅由频率响应的幅度平方不能唯一地确定系统函数 $H(z)$，因为具有给定频率响应幅度的任何选择都能够与任意全通因子级联而不影响它的幅度。因此，一种与此有关的看法就是：任何有理系统函数[②] 都能表示成

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \tag{5.100}$$

式中 $H_{min}(z)$ 是最小相位系统，$H_{ap}(z)$ 是全通系统。

为了证明这一点，假设 $H(z)$ 有一个零点 $z = 1/c^*$ 在单位圆外，这里 $|c| < 1$，而其余的零极点都在单位圆内，那么 $H(z)$ 就能表示成

$$H(z) = H_1(z)(z^{-1} - c^*) \tag{5.101}$$

这里按定义 $H_1(z)$ 是最小相位系统。$H(z)$ 的一种等效表示式就为

$$H(z) = H_1(z)(1 - cz^{-1})\frac{z^{-1} - c^*}{1 - cz^{-1}} \tag{5.102}$$

因为 $|c| < 1$，所以因式 $H_1(z)(1 - cz^{-1})$ 也是最小相位的，它与 $H(z)$ 的差别仅在于 $H(z)$ 在单位圆外的零点 $z = 1/c^*$ 现被反射到单位圆内与其成共轭倒数的位置 $z = c$ 上。

① 已知假定 $C(z)$ 没有任何极点或零点在单位圆上，严格说来，有极点在单位圆上的系统是不稳定的，从而在实际应用中一般都予以避免。然而，在单位圆上的零点在实际滤波器设计中时有应用。按我们的定义，这样的系统是非最小相移的，但是，甚至在这种情况下仍具有最小相位系统的很多性质。

② 多少是为了方便起见，暂且将讨论局限于因果稳定的系统上，虽然这一结论可适用于更一般的情况。

$(z^{-1}-c^*)/(1-cz^{-1})$这一项就属于全通型。这个例子可以直接推广到包含更多单位圆外零点的情况，因此证明了任何系统函数一般都能表示成

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z) \tag{5.103}$$

这里 $H_{\min}(z)$包含 $H(z)$中位于单位圆内的零极点，再加上与 $H(z)$中单位圆外的零点成共轭倒数的那些零点。$H_{ap}(z)$由全部 $H(z)$中位于单位圆外的零点和与 $H_{\min}(z)$中反射过来的共轭倒数零点相抵消的极点所组成。

利用(5.103)式就可以从一个最小相位系统把其一个或多个位于单位圆内的零点反射到单位圆外与它们成共轭倒数的位置上而形成一个非最小相位系统；或者相反，从一个非最小相位系统把全部位于单位圆外的零点反射到单位圆内与其成共轭倒数的位置上而形成一个最小相位系统。在任一情况下，这个最小相位和非最小相位系统都具有相同的频率响应幅度。

例 5.14　最小相位/全通分解

为了说明一个稳定因果系统分解为一个最小相位系统和一个全通系统的级联，现考虑由下面系统函数给出的两个稳定因果系统：

$$H_1(z) = \frac{(1+3z^{-1})}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

和

$$H_2(z) = \frac{(1+\frac{3}{2}e^{+j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

第 1 个系统函数 $H_1(z)$有一个极点 $z=-\frac{1}{2}$在单位圆内，但有一个零点 $z=-3$在单位圆外。我们需要选择适当的全通系统将这个零点反射到单位圆内。根据(5.101)式有 $c=-\frac{1}{3}$，因此由(5.102)式和(5.103)式，这个全通分量就是

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

而最小相位分量是

$$H_{\min}(z) = 3\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

也即

$$H_1(z) = \left(3\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\right)$$

第 2 个系统函数 $H_2(z)$有两个复数零点在单位圆外和一个实数极点在单位圆内，将 $H_2(z)$分子中的因子 $\frac{3}{2}e^{j\pi/4}$和 $\frac{3}{2}e^{-j\pi/4}$提出就可以将 $H_2(z)$表示成(5.101)式的形式为

$$H_2(z) = \frac{9}{4}\frac{(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

再按(5.102)式的分解得到

$$H_2(z)=\left[\frac{9}{4}\frac{(1+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right]\times\left[\frac{(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1}+\frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1+\frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1+\frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}\right]$$

在第 1 项方括号内就是最小相位系统，而第 2 项就是全通系统。

5.6.2 频率响应的补偿

在很多信号处理范畴内，一个信号已经被某个不合要求的频率响应的 LTI 系统所失真，然后，可能关心的是要用一个补偿系统来处理这个失真了的信号，如图 5.25 所示。例如，在通信信道上传输信号就会发生这种情况。如果能实现完全的补偿，那么 $s_c[n]=s[n]$，也就是说，$H_c(z)$就是 $H_d(z)$的逆系统。然而，如果假定该失真系统是稳定和因果的，并且要求补偿系统也是稳定和因果的，那么只有当 $H_d(z)$是最小相位系统而有一个稳定和因果的逆系统时，这种完全的补偿才有可能。

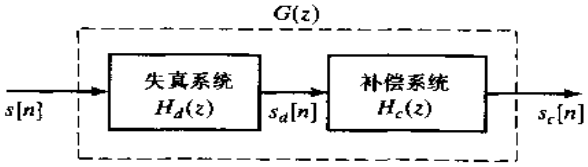


图 5.25 用线性滤波作失真补偿的说明

根据上面的讨论，假定 $H_d(z)$是已知的，或者近似为一个有理系统函数，我们就能把 $H_d(z)$中全部位于单位圆外的零点反射到单位圆内与它们成共轭倒数的位置上而构成一个最小相位系统 $H_{d\min}(z)$。$H_d(z)$和 $H_{d\min}(z)$有相同的频率响应幅度，并且通过一个全通系统 $H_{ap}(z)$而联系在一起，即

$$H_d(z)=H_{d\min}(z)H_{ap}(z) \tag{5.104}$$

选取补偿滤波器为

$$H_c(z)=\frac{1}{H_{d\min}(z)} \tag{5.105}$$

联系 $s[n]$和 $s_c[n]$的总系统函数就是

$$G(z)=H_d(z)H_c(z)=H_{ap}(z) \tag{5.106}$$

即 $G(z)$相当于一个全通系统。结果，就完全补偿了频率响应幅度，而相位响应则有 $\angle H_{ap}(e^{j\omega})$的变化。

下面的例子说明当要补偿的系统是一个非最小相位 FIR 系统时，频率响应幅度的补偿。

例 5.15 FIR 系统的补偿

考虑这个失真的系统函数是

$$H_d(z)=(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})\times(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \tag{5.107}$$

零极点图如图 5.26 所示。因为 $H_d(z)$只有零点（全部极点都在 $z=0$），那么系统就该有一个有限长脉冲响应，因

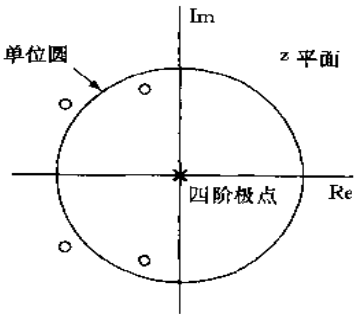


图 5.26 例 5.15 FIR 系统的零极点图

此系统是稳定的；又因为 $H_d(z)$是一个仅有 z 的负幂的多项式，所以系统是因果的。然而，因有两个零点在单位圆外，所以系统是非最小相位的。图 5.27 示出 $H_d(e^{j\omega})$的对数幅度、相位和群延迟特性。

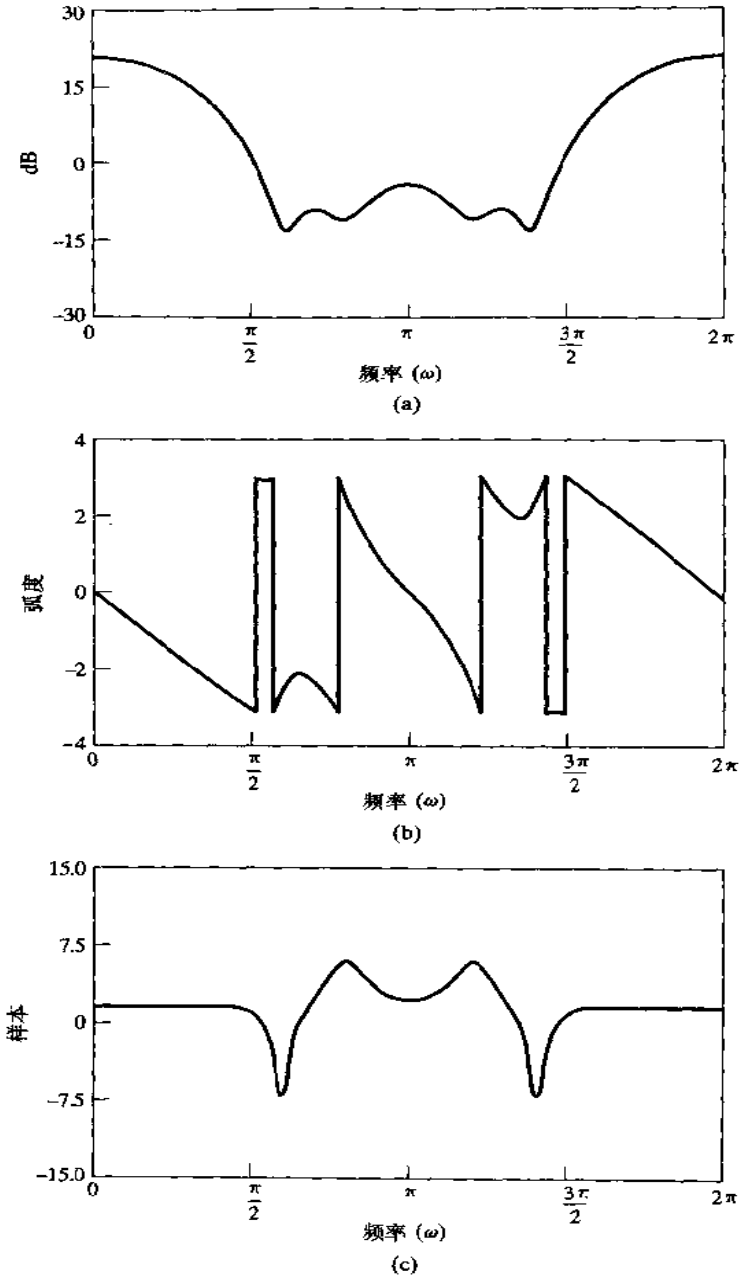


图 5.27　具有图 5.26 零极点图的 FIR 系统的频率响应
(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；(c) 群延迟

将位于 $z=1.25e^{\pm j0.8\pi}$的零点反射到单位圆内共轭倒数的位置上就可得到相应的最小相位系统。如果将 $H_d(z)$表示成

$$H_d(z)=(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1.25)^2\times(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi}) \tag{5.108}$$

那么

$$H_{\min}(z)=(1.25)^2(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})\times(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}), \tag{5.109}$$

与 $H_{\min}(z)$和 $H_d(z)$有关的全通系统就是

$$H_{ap}(z)=\frac{(z^{-1}-0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi})}{(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \tag{5.110}$$

图 5.28 示出 $H_{\min}(e^{j\omega})$的对数幅度、相位和群延迟特性。当然，图 5.27(a)和图 5.28(a)是一样的。图 5.29 示出了 $H_{ap}(z)$的对数幅度、相位和群延迟特性。

应该注意，$H_d(z)$的逆系统在 $z=1.25e^{\pm j0.8\pi}$和 $z=0.9e^{\pm j0.6\pi}$有极点，因此该因果的逆将是不稳定的。最小相位的逆系统就是由(5.109)式给出的 $H_{\min}(z)$的倒数，并且如果这个逆系统要是用在图 5.25 的级联系统中的话，那么总的有效系统函数就是由(5.110)式所给出的 $H_{ap}(z)$。

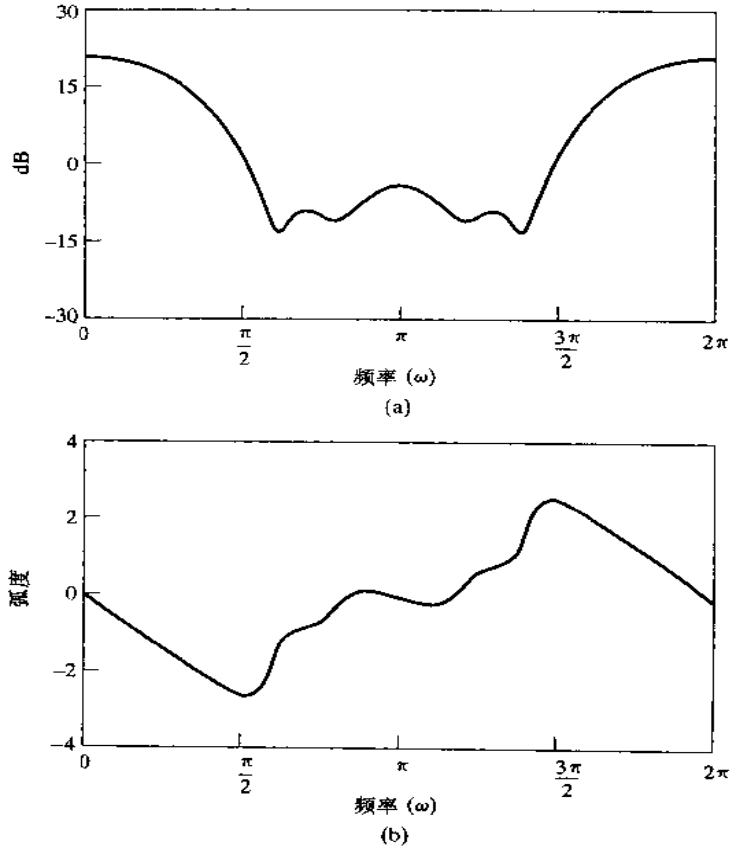
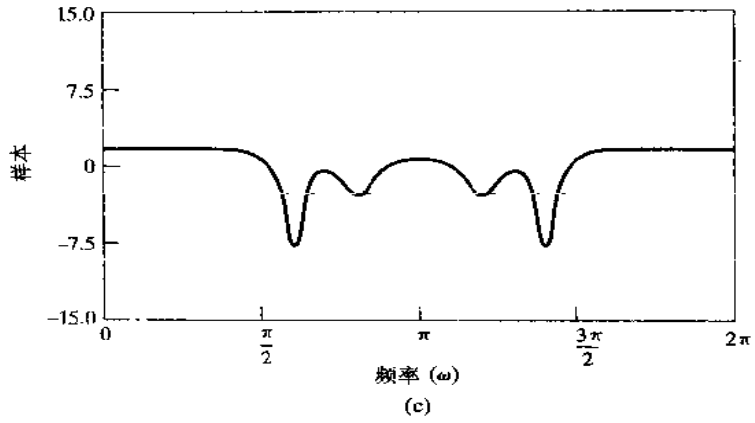
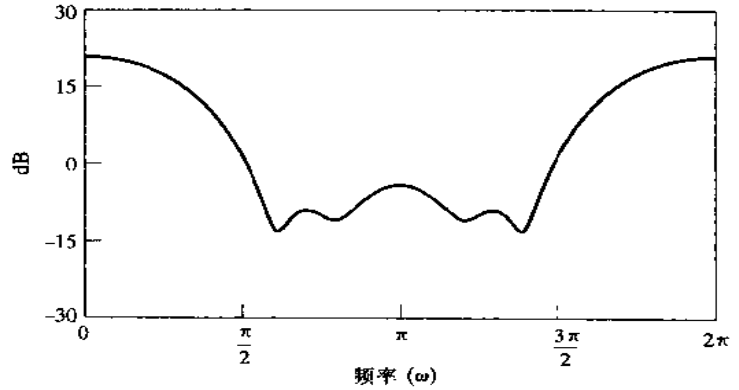


图 5.28 例 5.15 中最小相位系统的频率响应
(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；

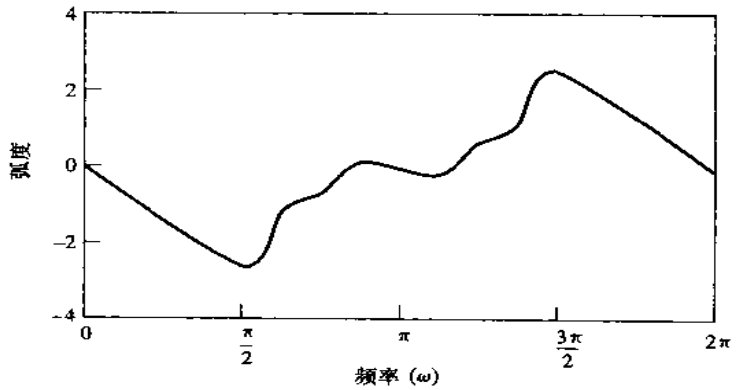


(c)

图 5.28(续) (c) 群延迟



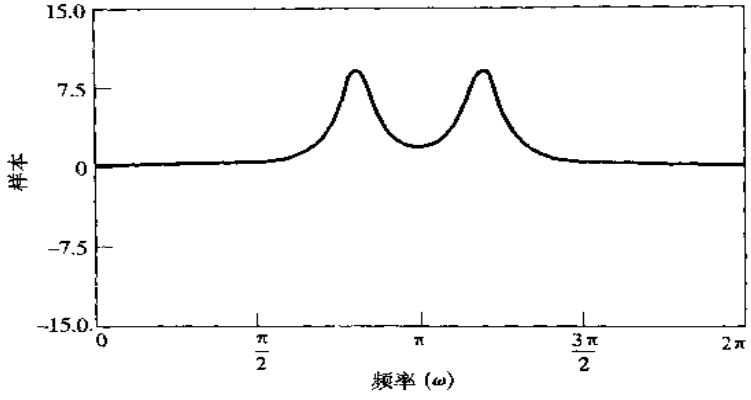
(a)



(b)

图 5.29 例 5.15 全通系统的频率响应(图 5.28 和图 5.29 中相应曲线的和就等于图 5.27 中对应的曲线,相位曲线的和要按模 2π 取)

(a) 对数幅度; (b) 相位(主值);



(c)

图 5.29(续) (c) 群延迟

5.6.3 最小相位系统的性质

我们一直采用"最小相位"这一术语专指这样一些系统，它本身是因果和稳定的，并且也有一个因果和稳定的逆系统。选择这个名称是由于根据上述定义所直接得出的相位函数的性质的缘故，但是不是很明显。这一节将建立相对于所有其它具有相同的频率响应幅度的系统而言，最小相位系统所具有的几个令人感兴趣而重要的性质。

最小相位滞后性质。在例 5.15 中已经提到，术语"最小相位"是用作对全部零极点都在单位圆内的系统的一种描述性名称。根据(5.100)式，任何非最小相位系统的连续相位，即 $\arg[H(e^{j\omega})]$都能表示为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \tag{5.111}$$

因此，对应于图 5.27(b)的主值相位的连续相位就是与图 5.28(b)的最小相位函数有关的连续相位和与图 5.29(b)所示的主值相位有关的全通系统的连续相位之和。正如在 5.5 节所表明的，以及如图 5.22(b)，图 5.23(b)，图 5.24(b)和图 5.29(b)所指出的，一个全通系统的连续相位曲线在 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 内总是负的。因此，将 $H_{\min}(z)$的零点从单位圆内反射到单位圆外其共轭倒数的位置上总是使(连续)相位**减小**，或者说使相位的负值**增加**(这就称之为**相位滞后**函数)。这样，具有幅度响应为 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$，全部零点(当然还有极点)都位于单位圆内的因果稳定的系统对于具有相同幅度响应的所有其它系统而言就具有最小相位滞后函数(对于 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$)。因此，更为确切的术语应是**最小相位滞后**系统，但是**最小相位**是历史上已确立的术语。

为了对最小相位滞后系统理解得更确切些，有必要对 $H(e^{j\omega})$加上在 $\omega = 0$ 时为正这样一个附加的约束，即

$$H(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] > 0 \tag{5.112}$$

注意到，若将 $h[n]$局限为实数序列，那么 $H(e^{j0})$就一定是实数。因为具有单位脉冲响应为 $-h[n]$的系统和单位脉冲响应为 $h[n]$的系统有相同的极点和零点，因此(5.112)式的条件就是必要的。然而乘以 -1 就是将相位改变 π rad。因此，为了除掉这种含混不清，以确保全部零极点都在单位圆内的系统也具有最小相位滞后性质，就必须加上(5.112)式的条件。不

过，这一约束往往没有什么实际意义，因此在 5.6 节开始时所给出的定义虽然没有包括它，还是一般认为对最小相位系统可接受的定义。

最小群延迟性质。例 5.15 说明了零极点全部位于单位圆内的系统的另一性质。首先注意到，具有相同幅度响应系统的群延迟是

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = \mathrm{grd}[H_{\min}(e^{j\omega})] + \mathrm{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \tag{5.113}$$

如果 5.28(c)所示的最小相位系统的群延迟总是小于如图 5.27(c)所示的非最小相位系统的群延迟。正如图 5.29(c)所表明的，这是由于把最小相位系统转化为非最小相位系统的全通系统具有正的群延迟的缘故。在 5.5 节已经证明这是全通系统的一个一般性质；它们对全部 ω 总是有正的群延迟。因此，如果还是考虑全部都有给定幅度响应 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$ 的系统，那么全部零极点都在单位圆内的系统就有最小的群延迟。因此，这类系统一种等同的称法可称为**最小群延迟系统**，但一般不用这个术语。

最小能量延迟性质。例 5.15 中，总共有 4 种具有实单位脉冲响应的因果 FIR 系统都与(5.107)式的系统有相同的频率响应幅度。有关的零极点图如图 5.30 所示，其中图 5.30(d)对应于(5.107)式，而图 5.30(a)对应于(5.109)式的最小相位系统。图 5.31 画出了这 4 种情况的单位脉冲响应。如将图 5.31 的 4 种序列作一比较，就能看到，在序列的最左端最小相位

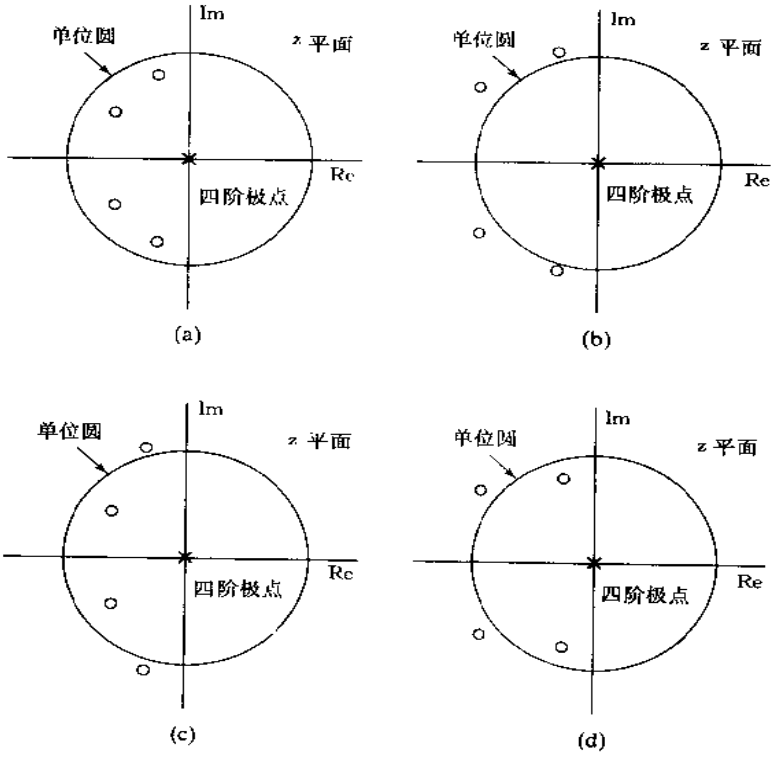


图 5.30　全部具有相同频率响应幅度的 4 种系统，零点都是 $0.9e^{\pm j0.6\pi}$ 和 $0.8e^{\pm j0.8\pi}$ 及其倒数的全部组合

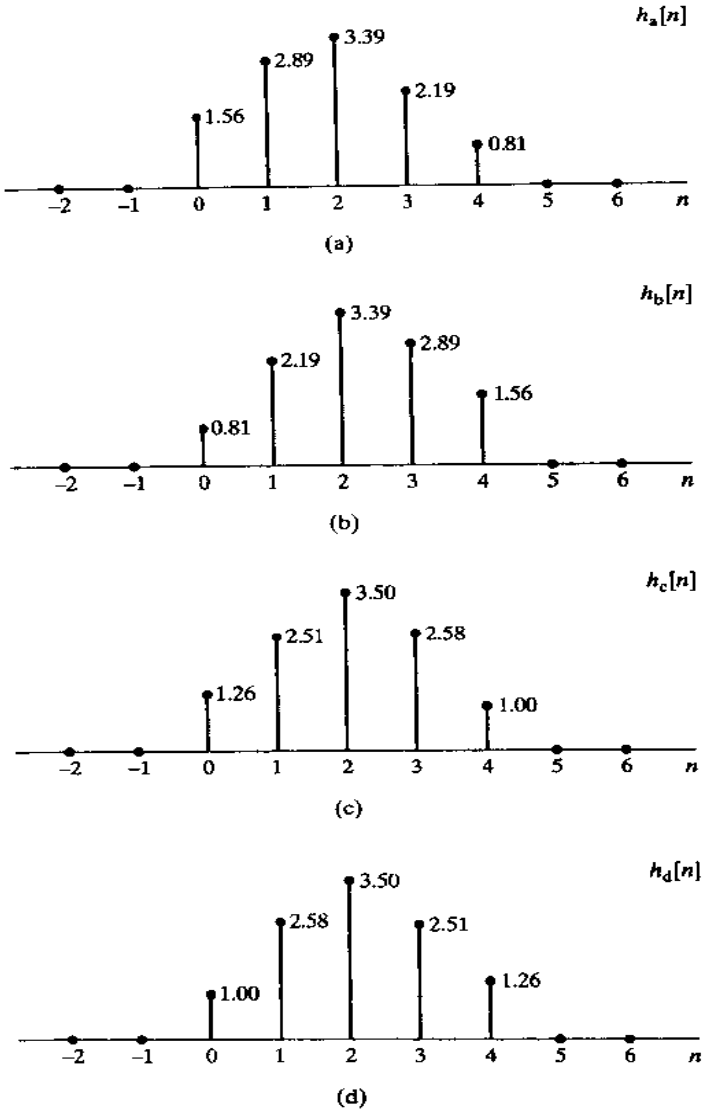


图 5.31　对应于图 5.30 零极点图的各序列

序列比所有其它序列有较大的样本值。对这个例子的确如此，而

$$|h[0]|<|h_{\min}[0]| \tag{5.114}$$

对于具有

$$|H(e^{j\omega})|=|H_{\min}(e^{j\omega})| \tag{5.115}$$

的任何因果稳定序列 $h[n]$都是成立的。习题 5.65 要求对该性质给出证明。

所有幅度响应等于$|H_{\min}(e^{j\omega})|$的单位脉冲响应都和 $h_{\min}[n]$具有相同的总能量，因为根据帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_{\min}(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |h_{\min}[n]|^2 \tag{5.116}$$

如果定义单位脉冲响应的**部分能量**为

$$E[n] = \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \tag{5.117}$$

那么可以证明(见习题 5.66)

$$\sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \leqslant \sum_{m=0}^{n} |h_{\min}[m]|^2 \tag{5.118}$$

对所有属于具有(5.115)式给出的幅度响应的系统的单位脉冲响应 $h[n]$都成立。根据(5.118)式,最小相位系统的部分能量最集中在 $n=0$ 周围,也就是说,最小相位系统的能量在所有相同幅度响应函数的系统中延迟最小。为此,最小相位(滞后)系统也称为**最小能量延迟系统**。简称**最小延迟系统**。延迟性质如图 5.32 所示。图中示出图 5.31 中 4 种序列部分能量的图。对这个例子也可注意到,一般来说这也是正确的,即:最小能量延迟发生在全部零点位于**单位圆内**的系统(也即最小相位系统),而最大能量延迟则发生在全部零点位于**单位圆外**的系统。因此最大能量延迟系统往往也称为**最大相位系统**。

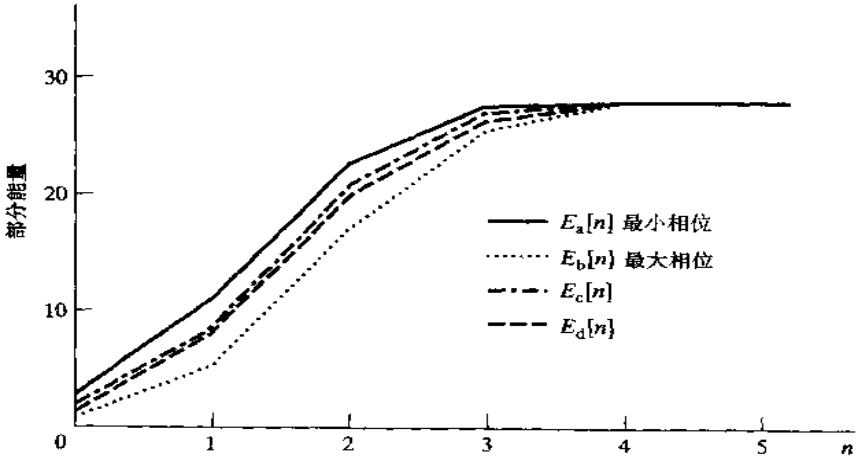


图 5.32 图 5.31 4 种序列的部分能量(注意:$E_a[n]$是对应于最小相位序列 $h_a[n]$,而 $E_b[n]$是对应于最大相位序列 $h_b[n]$)

5.7 广义线性相位的线性系统

在设计滤波器和其它信号处理系统中,很希望在某一频带范围内具有近似的恒定频率响应幅度和零相位特性,以使信号通过这部分频带时不失真。对因果系统而言,零相位是不可能得到的,因此必须容许有某种相位失真。如同在 5.1.2 节看到的,具有整数斜率线性相位的影响就是一种单纯的延迟。另一方面,非线性相位在信号的形状上有很大的影响,即使当频率响

应的幅度是常数时也是这样。因此，在很多情况下，特别希望设计具有真正的或近似线性相位的系统。这一节将通过考虑具有恒定群延迟的一类系统对线性相位和理想时间延迟的概念考虑一个正规和一般的形式。我们还是从重新考虑离散时间系统中延迟的概念着手。

5.7.1 线性相位系统

考虑一个 LTI 系统，其频率响应在一个周期内是

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi \tag{5.119}$$

式中 α 是实数，但不一定是整数。这样的系统是一个“理想延迟”系统，这里 α 是由该系统引入的延迟。可看出该系统有恒定的幅度响应、线性相位和恒定群延迟，即

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \tag{5.120a}$$

$$\measuredangle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega\alpha \tag{5.120b}$$

$$\mathrm{grd}[H_{id}(e^{j\omega})] = \alpha \tag{5.120c}$$

$H_{id}(e^{j\omega})$的傅里叶反变换就是单位脉冲响应，为

$$h_{id}[n] = \frac{\sin\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}, \quad -\infty < n < \infty \tag{5.121}$$

对输入 $x[n]$，该系统的输出是

$$y[n] = x[n] * \frac{\sin\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\frac{\sin\pi(n-k-\alpha)}{\pi(n-k-\alpha)} \tag{5.122}$$

若 $\alpha = n_d$，n_d 为整数，那么根据 5.1.2 节，就有

$$h_{id}[n] = \delta[n-n_d] \tag{5.123}$$

和

$$y[n] = x[n] * \delta[n-n_d] = x[n-n_d] \tag{5.124}$$

这就是说，如果 $\alpha = n_d$ 是一个整数，那么具有线性相位和单位增益的(5.119)式系统只是输入序列移位 n_d 个样本。如果 α 不是整数，那么最直接的解释就是在第 4 章例 4.9 所建立的结果。具体来说就是：(5.119)式系统的一种表示如图 5.33 所示，其中 $h_c(t) = \delta(t-\alpha T)$和 $H_c(j\Omega) = e^{-j\Omega\alpha T}$，使得

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\alpha}, \quad |\omega| < \pi \tag{5.125}$$

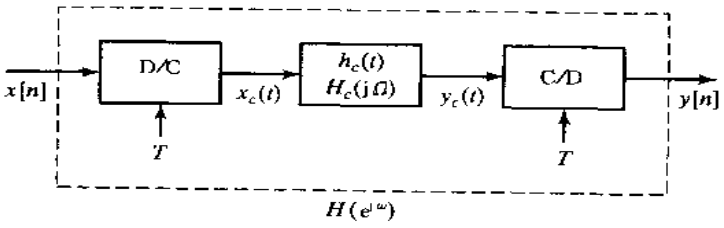


图 5.33 离散时间系统非整数延迟的解释

在这种表示中，T 的选择是没有关系的，可以将它归一化到 1。对 $x[n]$原来是否是经由采样一个连续时间信号得到的，这种表示都是正确的，再次强调这一点是很重要的。按照图 5.33 的表示，$y[n]$就是输入序列带限内插时移后的样本序列，即：$y[n] = x_c(nT-\alpha T)$。(5.119)

式的系统就说成是具有 α 样本的延迟，即使 α 不是整数。如果群延迟 α 是正的，这个时移就是一个时间延迟；若 α 为负，时移则为一个时间超前。

理想延迟系统的讨论，也给出了对具有非恒定幅度响应的线性相位一种有用的解释。例如，考虑一个具有线性相位更为一般的频率响应，即 $|H(e^{j\omega})|$ 为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega\alpha}, \qquad |\omega| < \pi \tag{5.126}$$

(5.126)式可用图 5.34 来解释。序列 $x[n]$ 经零相位频率响应 $|H(e^{j\omega})|$ 所滤波，然后将滤波后的输出“延迟”(整数或非整数)量 α。例如，假定 $H(e^{j\omega})$ 是如下线性相位理想低通滤波器：

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{5.127}$$

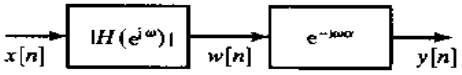


图 5.34 线性相位 LTI 系统作为幅度滤波器和延迟级联的表示

相应的单位脉冲响应就是

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \tag{5.128}$$

注意到，若 $\omega_c = \pi$ 就得到(5.121)式。

例 5.16 具有线性相位的理想低通滤波器

理想低通滤波器的单位脉冲响应阐明了线性相位系统几个很有用的性质。图 5.35(a)示出 $\omega_c = 0.4\pi$ 和 $\alpha = n_d = 5$ 时的 $h_{lp}[n]$。可看到当 α 是整数时，单位脉冲响应对 $n = n_d$ 是对称的，即

$$\begin{aligned} h_{lp}[2n_d - n] &= \frac{\sin\omega_c(2n_d - n - n_d)}{\pi(2n_d - n - n_d)} \\ &= \frac{\sin\omega_c(n_d - n)}{\pi(n_d - n)} \\ &= h_{lp}[n] \end{aligned} \tag{5.129}$$

在这一情况下，可以定义一个**零相位系统**为

$$\hat{H}_{lp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})e^{j\omega n_d} = |H_{lp}(e^{j\omega})|, \tag{5.130}$$

其单位脉冲响应则向左移 n_d 个样本，得到一个偶序列

$$\hat{h}_{lp}[n] = \frac{\sin\omega_c n}{\pi n} = \hat{h}_{lp}[-n] \tag{5.131}$$

图 5.35(b)示出 $\omega_c = 0.4\pi$ 和 $\alpha = 4.5$ 时的 $h_p[n]$。这就属于当线性相位相应于一个整数再加半个样本延迟时的典型情况。和整数延迟情况一样，很容易证明若 α 是一个整数再加 1/2(或者 2α 是整数)，那么

$$h_{lp}[2\alpha - n] = h_{lp}[n] \tag{5.132}$$

这时对称点是 α，它不是整数。因此，由于对称不是对于序列中的一点，所以要将序列移位还能得到一个具有零相位的偶序列就不可能。这就类似于例 4.10 中 M 为奇数的情况。

图 5.35(c)代表第三种情况。这里没有任何对称性可言。这里 $\omega_c = 0.4\pi$ 和 $\alpha = 4.3$。

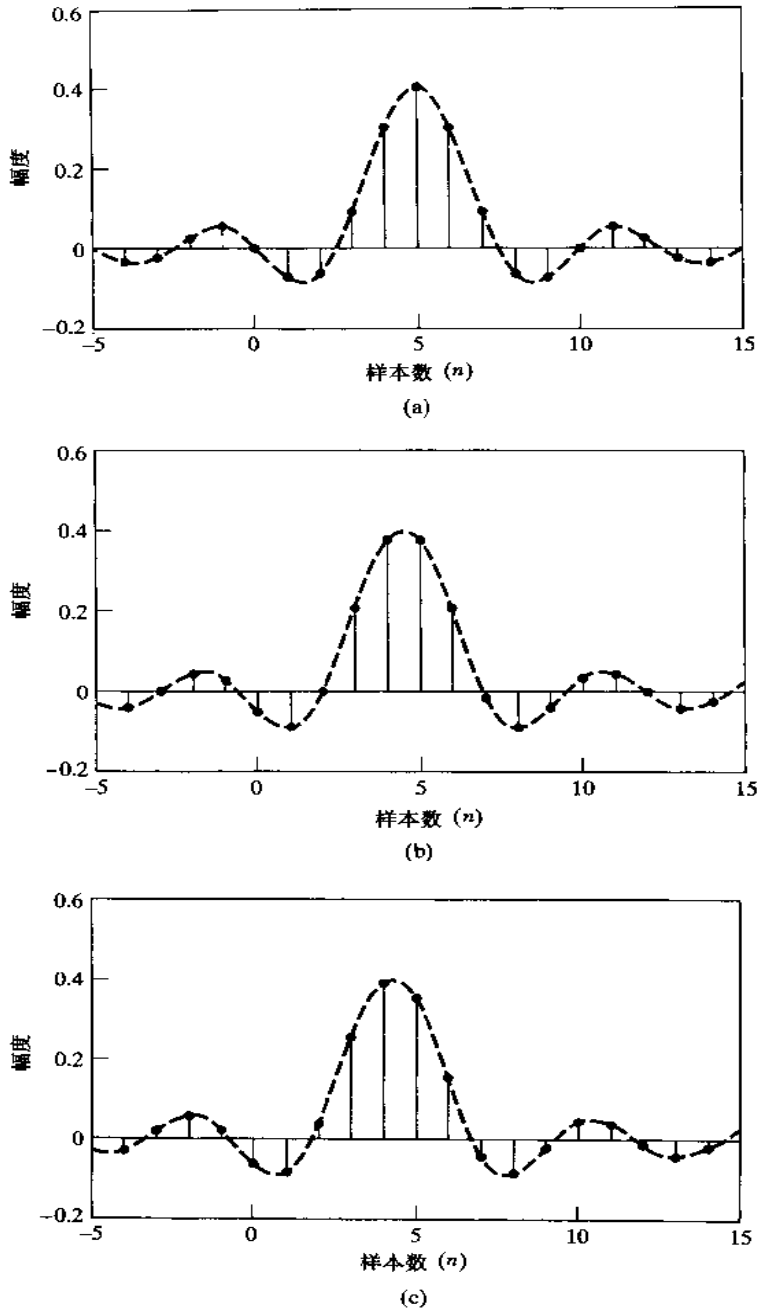


图 5.35　理想低通滤波器单位脉冲响应，$\omega_c = 0.4\pi$
(a) 延迟 $= \alpha = 5$；(b) 延迟 $= \alpha = 4.5$；(c) 延迟 $= \alpha = 4.3$

一般而言，一个线性相位系统具有频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\alpha} \tag{5.133}$$

根据例 5.16 的讨论，如果 2α 是整数(即 α 为整数或整数再加 1/2)，那么相应的单位脉冲响应关于 α 就是偶对称的，即

$$h[2\alpha - n] = h[n] \tag{5.134}$$

如果 2α 不是一个整数，那么单位脉冲响应就不具有对称性。这就如图 5.35(c)所表明的，它说明一个单位脉冲响应不是对称的，但是有线性相位，或等效地说有恒定群延迟。

5.7.2 广义线性相位

在 5.7.1 节讨论中，曾考虑过其频率响应具有(5.126)式的一类系统，即一个实值非负的 ω 函数和一个线性相位项 $e^{-j\omega\alpha}$ 相乘。对于这种形式的频率响应，$H(e^{j\omega})$ 的相位完全与线性相位因子 $e^{-j\omega\alpha}$ 相联系，即 $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega\alpha$，因此这类系统就称为线性相位系统。在例 4.10 的滑动平均中(4.67)式的频率响应是 ω 的实值函数乘以线性相位项，但是这个系统严格来说不是线性相位系统，因为在一些频率处，因式

$$\frac{1}{M+1}\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$

是负的，这一项就对总的相位增添了 π rad 的附加相位。

线性相位系统的很多优点也适用于具有(4.67)式频率响应的系统，因此把线性相位的定义和概念稍许加以推广是有意义的。具体来说，如果系统的频率响应能表示成

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta} \tag{5.135}$$

就说该系统是一个**广义线性相位系统**。这里 α 和 β 都是常数，而 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实(可能有正负)函数。对(5.127)式的线性相位系统和例 4.10 的滑动平均滤波器来说，$\beta=0$。然而，对例 4.5 的带限微分器来说，具有(5.135)式的形式，其中 $\alpha=0$，$\beta=\pi/2$ 和 $A(e^{j\omega})=\omega/T$。

具有(3.135)式频率响应的系统称为广义线性相位系统，因为这类系统的相位由常数项加上线性函数 $-\omega\alpha$ 所组成，也即，$-\omega\alpha+\beta$ 是一个直线方程。然而，如果不顾及在整个 $|\omega|<\pi$ 的频带或者部分频带内由于附加了固定相位项而带来的不连续性的话，那么这类系统也能用恒定群延迟来表征。这就是具有

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\} = \alpha \tag{5.136}$$

的这类系统具有更一般的线性相位形式为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - \omega\alpha, \qquad 0 < \omega < \pi \tag{5.137}$$

式中 β 和 α 都是实常数。

回想一下在 5.7.1 节曾指出，线性相位系统的单位脉冲响应在 2α 为整数时，对 α 可以具有对称性。为了理解这一点在广义线性相位系统中的含意，导出一个对恒定群延迟系统 $h[n]$，α 和 β 都必须满足的方程是有用的。这一方程的导出是注意到对恒定群延迟系统其频率响应能表示为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A(e^{j\omega})e^{j(\beta-\alpha\omega)} \\ &= A(e^{j\omega})\cos(\beta-\omega\alpha) + jA(e^{j\omega})\sin(\beta-\omega\alpha) \end{aligned} \tag{5.138}$$

或者等效地有

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n \tag{5.139}$$

这里已假定 $h[n]$是实的。$H(e^{j\omega})$相位的正切可以表示为

$$\tan(\beta - \omega\alpha) = \frac{\sin(\beta - \omega\alpha)}{\cos(\beta - \omega\alpha)} = \frac{-\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin\omega n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos\omega n}$$

交叉相乘并用三角恒等式合并有关项可以得到下面的方程：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin(\omega(n-\alpha) - \beta) = 0, \quad \text{对全部 } \omega \tag{5.140}$$

这个方程对于具有恒定群延迟系统是关于 $h[n]$，α 和 β 的一个必要条件。它必须对所有 ω 都成立。它不是一个充分条件，并且由于它的隐含性，也没有告诉我们如何去找一个线性相位系统。例如，可以证明满足(5.140)式的一组条件是

$$\beta = 0 \text{ 或 } \pi \tag{5.141a}$$

$$2\alpha = M = \text{整数} \tag{5.141b}$$

$$h[2\alpha - n] = h[n] \tag{5.141c}$$

用 $\beta=0$，或 π，(3.140)式就变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\sin[\omega(n-\alpha)] = 0 \tag{5.142}$$

从此式可以证明，如果 2α 是整数的话，(5.142)式中各项就能配对，以使得组成的每一对对全部 ω 都恒为零。这组条件本就隐含着相应的频率响应具有(5.135)式的形式，只是这里 $\beta=0$ 或 π，以及 $A(e^{j\omega})$是 ω 的偶(当然是实)函数。

另外，如果 $\beta=\pi/2$ 或 $3\pi/2$，那么(5.140)式变成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\cos[\omega(n-\alpha)] = 0 \tag{5.143}$$

并且能够证明

$$\beta = \pi/2 \text{ 或 } 3\pi/2 \tag{5.144a}$$

$$2\alpha = M = \text{整数} \tag{5.144b}$$

$$h[2\alpha - n] = -h[n] \tag{5.144c}$$

对于全部 ω 都满足(5.143)式。(5.144)式就意味着频率响应具有(5.135)式的形式，这时 $\beta=\pi/2$ 和 $A(e^{j\omega})$是 ω 的奇函数。

应该注意，(5.141)式和(5.144)式给出了两组条件，它们都保证了广义线性相位或恒定群延迟特性。但是，正如在图 5.35(c)已经看到的，也存在其它的满足(5.135)式的系统而不具有这些对称条件。

5.7.3 因果广义线性相位系统

如果系统是因果的，那么(5.140)式就变成

$$\sum_{n=0}^{\infty} h[n]\sin[\omega(n-\alpha) + \beta] = 0, \quad \text{对任意 } \omega \tag{5.145}$$

因果性和(5.141)式、(5.144)式的条件意味着

$$h[n] = 0, \qquad n < 0 \text{ 和 } n > M$$

这就是说，如果系统单位脉冲响应的长度为$(M+1)$，并满足(5.141c)式或(5.144c)式，那么因果的FIR系统就具有广义线性相位。具体来说，若

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{5.146a}$$

那么就能证明

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{5.146b}$$

式中$A_e(e^{j\omega})$是ω的实、偶和周期函数。同样，若

$$h[n] = \begin{cases} -h[M-n], & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{5.147a}$$

那么就有

$$H(e^{j\omega}) = jA_0(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} = A_0(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2+j\pi/2} \tag{5.147b}$$

式中$A_0(e^{j\omega})$是ω的实、奇和周期函数。应该注意在两种情况下，单位脉冲响应的长度都是$(M+1)$个样本。

(5.146a)式和(5.147a)式对保证具有广义线性相位的因果系统都是充分条件。然而它们都不是必要条件。Clements and Pease(1989)已经证明因果的无限长脉冲响应也能够具有广义线性相位的傅里叶变换。但是，相应的系统函数不是有理的，因此系统不能用差分方程来实现。

FIR线性相位系统频率响应表达式在滤波器设计和理解这类系统的某些性质上是有用的。在导出这些表达式时，会发现能得出明显不同的一些表达式。这取决于对称的形式和M是偶数还是奇数而定。为此，定义4种类型的FIR广义线性相位系统一般是有用的。

Ⅰ类FIR线性相位系统。 Ⅰ类系统是定义为具有下面对称单位脉冲响应特性的系统：

$$h[n] = h[M-n], \qquad 0 \leqslant n \leqslant M \tag{5.148}$$

其中M为偶整数。延迟$M/2$也是整数，频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \tag{5.149}$$

按(5.148)式对称条件，可以将(5.149)式中的和式变换成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k]\cos\omega k\right) \tag{5.150a}$$

这里

$$a[0] = h[M/2] \tag{5.150b}$$

$$a[k] = 2h[(M/2)-k], \qquad k = 1, 2, \cdots, M/2 \tag{5.150c}$$

于是，由(5.150a)式可见$H(e^{j\omega})$具有(5.146b)式的形式，特别是相应于(5.135)式中的β不是0就是π。

Ⅱ类FIR线性相位系统。 Ⅱ类系统有(5.148)式的对称单位脉冲响应特性，这里M为奇整数。这时$H(e^{j\omega})$可表示为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\left\{\sum_{k=1}^{(M+1)/2} b[k]\cos\left[\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \tag{5.151a}$$

式中

$$b[k] = 2h[(M+1)/2-k], \qquad k = 1,2,\cdots,(M+1)/2 \tag{5.151b}$$

$H(e^{j\omega})$还具有(5.146b)式的形式,其延迟为 $M/2$。这时就是一个整数加上半个样本间隔的延迟,而相应于(5.135)式中的 β 是 0 或是 π。

Ⅲ类 FIR 线性相位系统。如果系统有如下反对称单位脉冲响应特性:

$$h[n] = -h[M-n], \qquad 0 \leqslant n \leqslant M \tag{5.152}$$

其中 M 为偶整数,那么 $H(e^{j\omega})$就具有

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega M/2}\left[\sum_{k=1}^{M/2} c[k]\sin\omega k\right] \tag{5.153a}$$

这里

$$c[k] = 2h[(M/2) - k], \quad k = 1, 2, \cdots, M/2 \tag{5.153b}$$

这里 $H(e^{j\omega})$具有(5.147b)式的形式,其延迟为 $M/2$,是一个整数,而相应于(5.13)式中的 β 是 $\pi/2$ 或是 $3\pi/2$。

Ⅳ类 FIR 线性相位系统。如果单位脉冲响应特性仍是(5.152)式的反对称,而 M 为奇整数,那么

$$H(e^{j\omega}) = je^{-j\omega M/2}\left\{\sum_{k=1}^{(M+1)/2} d[k]\sin\left[\omega\left(k - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} \tag{5.154a}$$

这里

$$d[k] = 2h[(M+1)/2 - k], \quad k = 1, 2, \cdots, (M+1)/2 \tag{5.154b}$$

与Ⅲ类系统的情况相同,$H(e^{j\omega})$具有(5.147b)式的形式,其延迟为 $M/2$,是一个整数再加上半个样本间隔的延迟,而相应于(5.135)式中的 β 就是 $\pi/2$ 或者 $3\pi/2$。

FIR 线性相位系统举例。图 5.36 对 4 种类型的 FIR 线性相应系统都给出了一个例子。有关的频率响应在例 5.17～例 5.20 中给出。

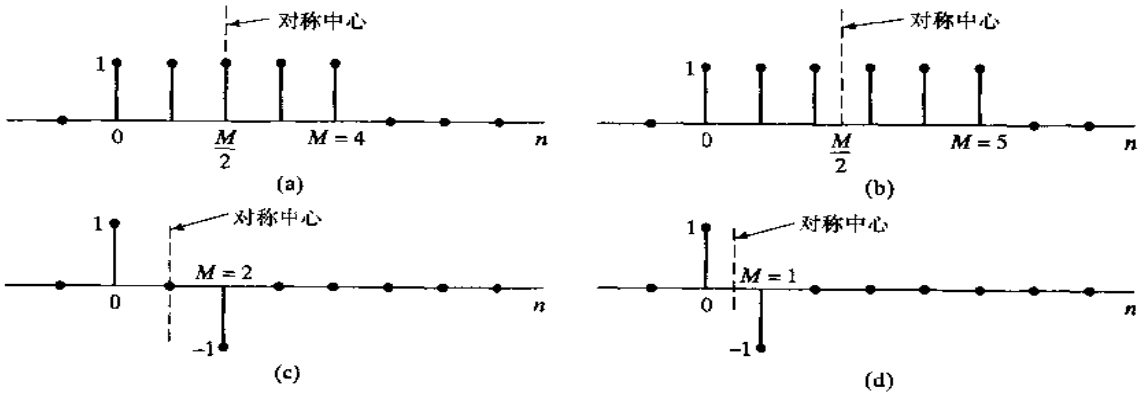


图 5.36 FIR 线性相位系统的例子

(a) Ⅰ类,M 为偶,$h[n]=h[M-n]$; (b) Ⅱ类,M 为奇,$h[n]=h[M-n]$;
(c) Ⅲ类,M 为偶,$h[n]=-h[M-n]$; (d) Ⅳ类,M 为奇,$h[n]=-h[M-n]$

例 5.17 Ⅰ类线性相位系统

如果单位脉冲响应是

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{5.155}$$

如图 5.36(a)所示，该系统满足(5.148)式条件。频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= e^{-j\omega 2}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \tag{5.156}$$

该系统的幅度、相位和群延迟特性如图 5.37 所示。因为 $M=4$ 是偶数，所以群延迟是整数，即 $\alpha=2$。

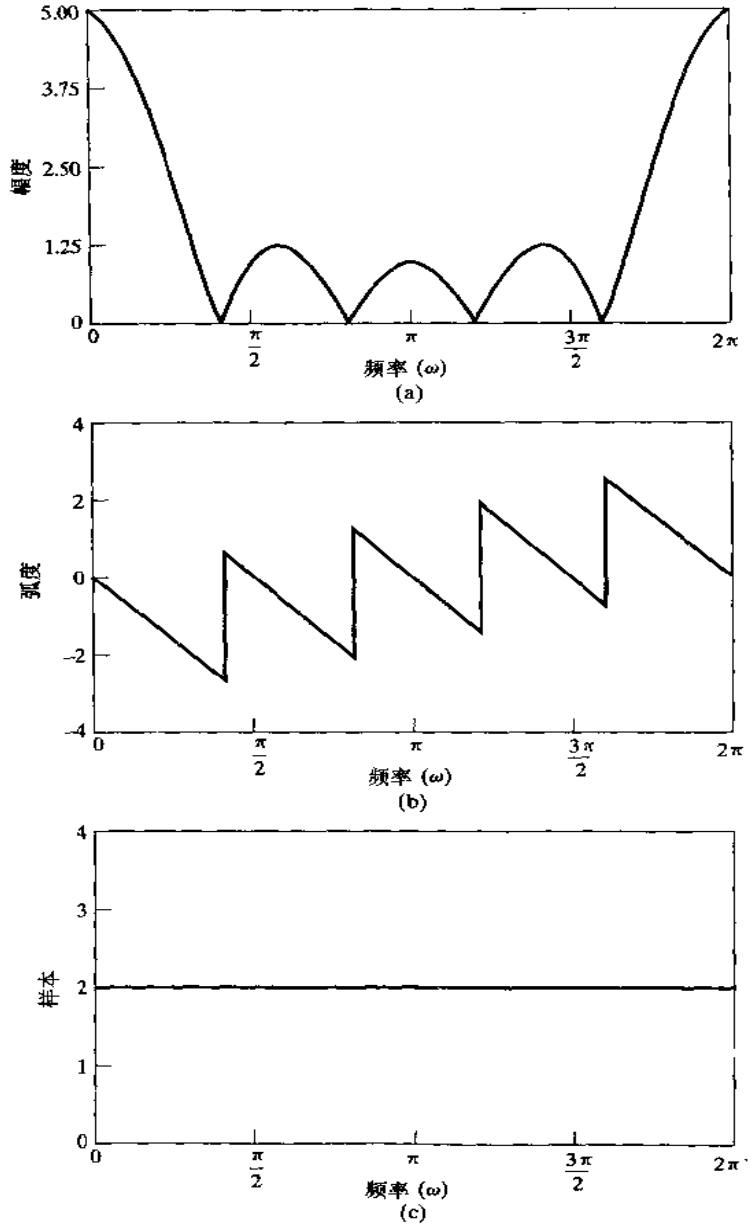


图 5.37 例 5.17 的 I 类系统的频率响应
(a) 幅度；(b) 相位；(c) 群延迟

例 5.18　Ⅱ类线性相位系统

若前例单位脉冲响应的长度延长一个样本，就能得到图 5.36(b)的单位脉冲响应，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 5/2}\frac{\sin(3\omega)}{\sin(\omega/2)} \tag{5.157}$$

系统频率响应如图 5.38 所示。注意，这时群延迟是一个常数为 $\alpha = 5/2$。

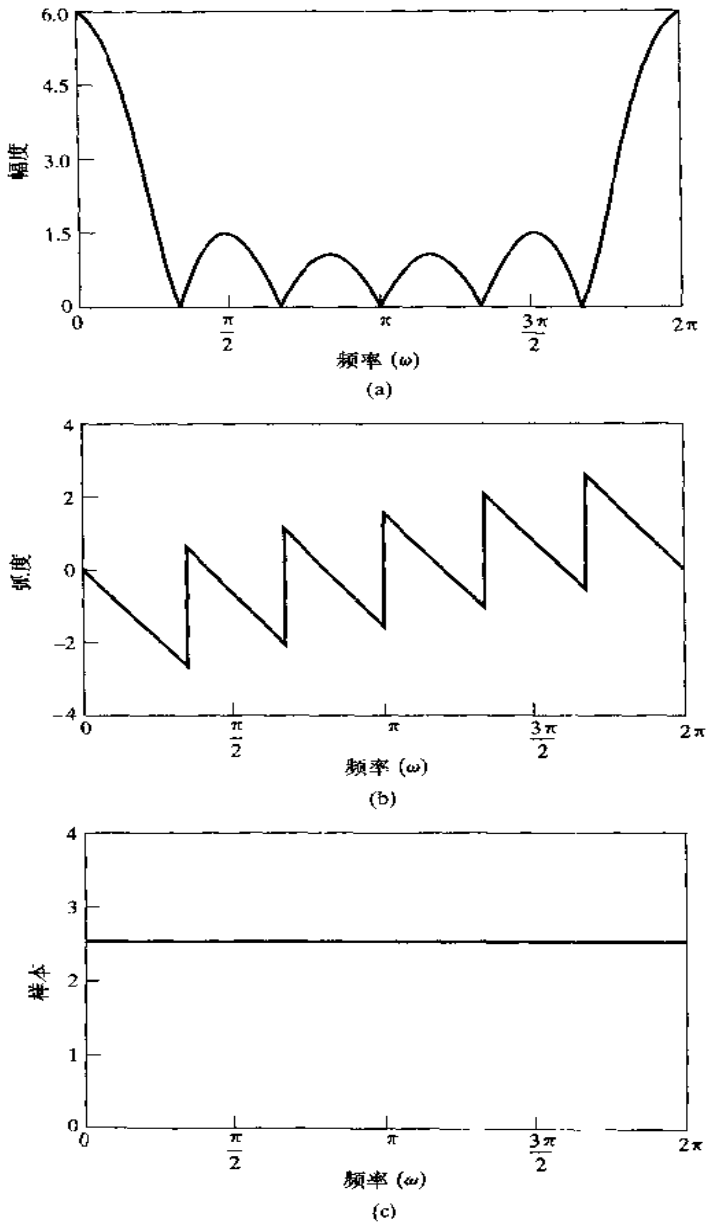


图 5.38　例 5.18 的Ⅱ类系统的频率响应
(a)幅度；(b) 相位；(c)群延迟

例 5.19　Ⅲ类线性相位系统

若系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-2] \tag{5.158}$$

如图 5.36(c)所示，那么

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j2\omega} = j[2\sin(\omega)]e^{-j\omega} \tag{5.159}$$

该例的频率响应特性由图 5.39 给出。注意，这时群延迟是常数且 $\alpha = 1$。

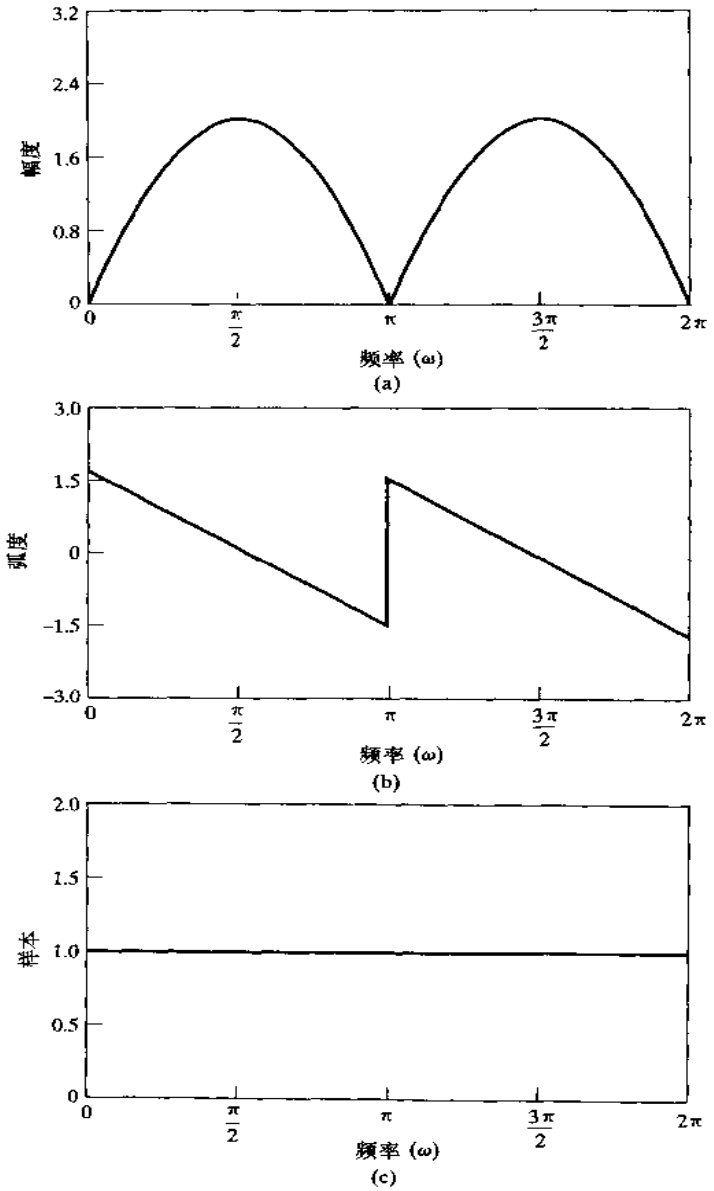


图 5.39　例 5.19 的Ⅲ类系统的频率响应
(a)幅度；(b) 相位；(c)群延迟

例 5.20　Ⅳ类线性相位系统

现在(图 5.36d)单位脉冲响应是

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \tag{5.160}$$

其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = j[2\sin(\omega/2)]e^{-j\omega/2} \tag{5.161}$$

图 5.40 示出该系统的频率响应曲线。注意,群延迟对全部 ω 都是 1/2。

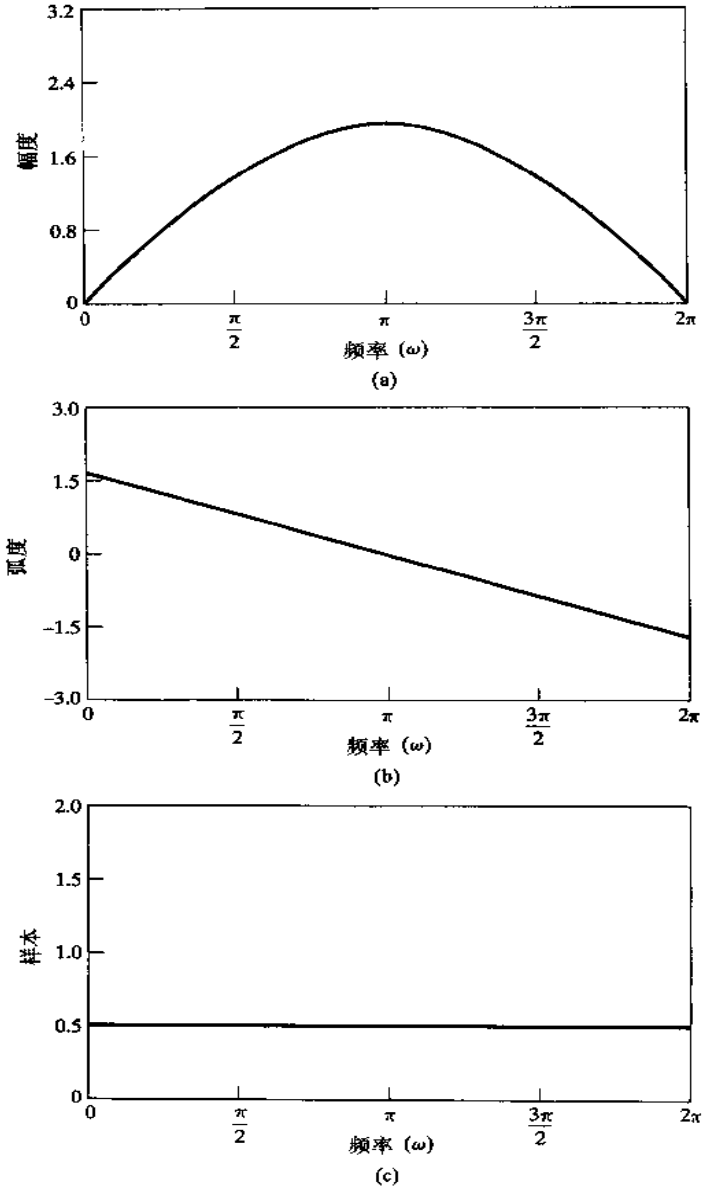


图 5.40　例 5.20 的Ⅳ类系统的频率响应
(a)幅度；(b) 相位；(c)群延迟

FIR 线性相位系统的零点位置。上述各例说明了所有 4 种类型的 FIR 线性相位系统单位脉冲响应和频率响应的特性。考虑一下 FIR 线性相位系统的系统函数零点的位置也是很有启发性的。它们的系统函数是

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} \tag{5.162}$$

在对称情况下(Ⅰ类和Ⅱ类),能用(5.148)式来表示 $H(z)$为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[M-n]z^{-n} = \sum_{k=M}^{0} h[k]z^{k}z^{-M} = z^{-M}H(z^{-1}) \tag{5.163}$$

由(5.163)式得出,如果 z_0 是 $H(z)$的零点,那么

$$H(z_0) = z_0^{-M}H(z_0^{-1}) = 0 \tag{5.164}$$

这意味着:若 $z_0 = re^{j\theta}$是$H(z)$的零点,那么 $z_0^{-1} = r^{-1}e^{-j\theta}$也是$H(z)$的零点。当 $h[n]$为实数且 z_0 是 $H(z)$的零点时,那么 $z_0^{*} = re^{-j\theta}$也一定是$H(z)$的零点,并且按照前述能够推得 $(z_0^{*})^{-1} = r^{-1}e^{j\theta}$也是$H(z)$的零点。因此,当 $h[n]$是实数时,不在单位圆上的每个复数零点一定是一组 4 个如下形式的共轭倒数零点中的一个:

$$(1 - re^{j\theta}z^{-1})(r - re^{-j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{j\theta}z^{-1})(1 - r^{-1}e^{-j\theta}z^{-1})$$

如果 $H(z)$的零点在单位圆上,即 $z_0 = e^{j\theta}$,那么 $z_0^{-1} = e^{-j\theta} = z_0^{*}$,所以单位圆上的零点以如下形式成对出现:

$$(1 - e^{j\theta}z^{-1})(1 - e^{-j\theta}z^{-1})$$

如果 $H(z)$的零点是实数但不在单位圆上,其倒数也一定是 $H(z)$的零点,$H(z)$将有如下因子:

$$(1 \pm rz^{-1})(1 \pm r^{-1}z^{-1})$$

最后,$H(z)$在 $z = \pm 1$ 的零点,因为 ± 1 的倒数和共轭还是 ± 1,所以只能以 $z = \pm 1$ 出现。因此,$H(z)$也可有如下因子:

$$(1 \pm z^{-1})$$

零点在 $z = -1$ 的情况特别重要。根据(5.163)式

$$H(-1) = (-1)^{M}H(-1)$$

如果 M 为偶数,这就是一个简单的恒等式;但若 M 为奇。$H(-1) = -H(-1)$,所以$H(-1)$必须是零。据此,对于 M 为奇数的对称脉冲响应,其系统函数必须有一个零点在 $z = -1$。图 5.41(a)和图 5.41(b)分别表明Ⅰ类(M 为偶)和Ⅱ类(M 为奇)系统典型的零点位置。

如果单位脉冲响应是反对称的(Ⅲ类和Ⅳ类),那么遵循上面得出(5.163)式的办法,可以证明有

$$H(z) = -z^{-M}H(z^{-1}) \tag{5.165}$$

这个式子可以用来说明对于反对称情况,$H(z)$的零点也和对称情况下的零点一样受到约束。然而,在反对称情况下,$z = 1$ 和 $z = -1$ 都具有特殊的意义。若 $z = 1$,(5.165)式就变成

$$H(1) = -H(1) \tag{5.166}$$

于是 $H(z)$必须有 $z = 1$ 的零点,不论 M 为偶还是为奇。若 $z = -1$,(5.165)式给出

$$H(-1) = (-1)^{-M+1}H(-1) \tag{5.167}$$

这时,若$(M-1)$为奇(M 为偶),$H(-1) = -H(-1)$,所以 $z = -1$ 在 M 为偶数时必须是$H(z)$的零点。图 5.41(c)和图 5.41(d)分别示出Ⅲ类和Ⅳ类系统典型的零点位置。

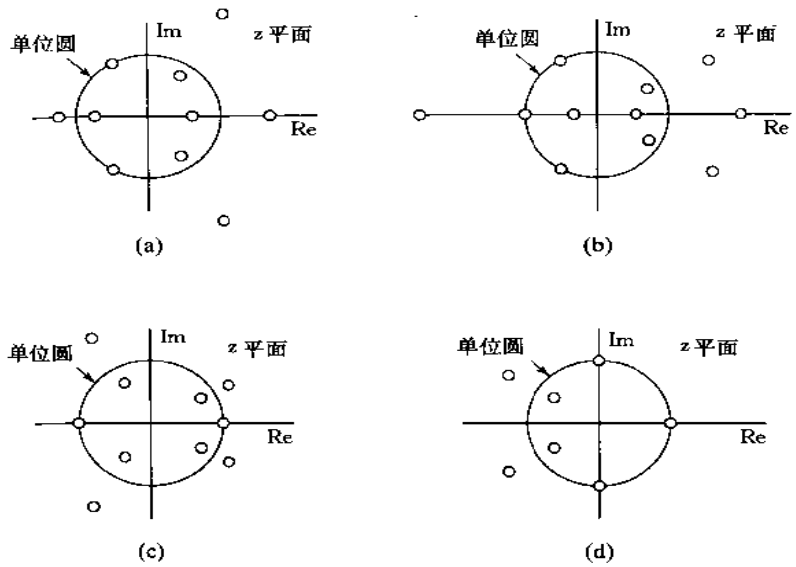


图 5.41　线性相位系统典型零极点图
(a) Ⅰ类；(b) Ⅱ类；(c) Ⅲ类；(d) Ⅳ类

有关在零点上的这些约束在设计 FIR 线性相位系统中是很重要的，因为它们在能够实现的频率响应类型上强加了一些限制。例如，当用一个对称脉冲响应来逼近一个高通滤波器时，M 就不应该选为奇数。因为 M 为奇，频率响应就必须在 $\omega=\pi(z=-1)$强制为零。

5.7.4　FIR 线性相位系统与最小相位系统的关系

以上讨论表明，所有单位脉冲响应为实的 FIR 线性相位系统，其零点不是在单位圆上就是在共轭倒数的位置上。因此，很容易证明，任何 FIR 线性相位系统的系统函数都能因式分解为最小相位项 $H_{\min}(z)$、最大相位项 $H_{\max}(z)$以及仅包含单位圆上零点的项 $H_{uc}(z)$，即

$$H(z) = H_{\min}(z)H_{uc}(z)H_{\max}(z) \tag{5.168a}$$

这里

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z^{-1})z^{-M_i} \tag{5.168b}$$

M_i 是 $H_{\min}(z)$零点的个数。在(5.168a)式中，$H_{\min}(z)$的全部 M_i 个零点都在**单位圆内**，而 $H_{uc}(z)$的全部 M_0 个零点都在**单位圆**上。$H_{\max}(z)$的全部 M_i 个零点都在**单位圆外**。并且从(5.168b)式，它的零点就是 $H_{\min}(z)$零点的倒数。因此，系统函数 $H(z)$的阶就是 $M=2M_i+M_0$。

例 5.21　一个线性相位系统的分解

作为应用(5.168)式的一个简单例子，考虑(5.109)式的最小相位系统函数。该系统函数的频率响应画在图 5.28 上。将(5.168b)式应用于(5.109)式的 $H_{\min}(z)$，求得 $H_{\max}(z)$系统是

$$H_{\max}(z)=(0.9)^2(1-1.111\,1e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-1.111\,1e^{j0.6\pi}z^{-1})\times$$
$$(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})$$

$H_{max}(z)$的频率响应示于图 5.42。现在如果这两个系统级联，那么根据(5.168)式可得总系统是

$$H(z) = H_{min}(z)H_{max}(z)$$

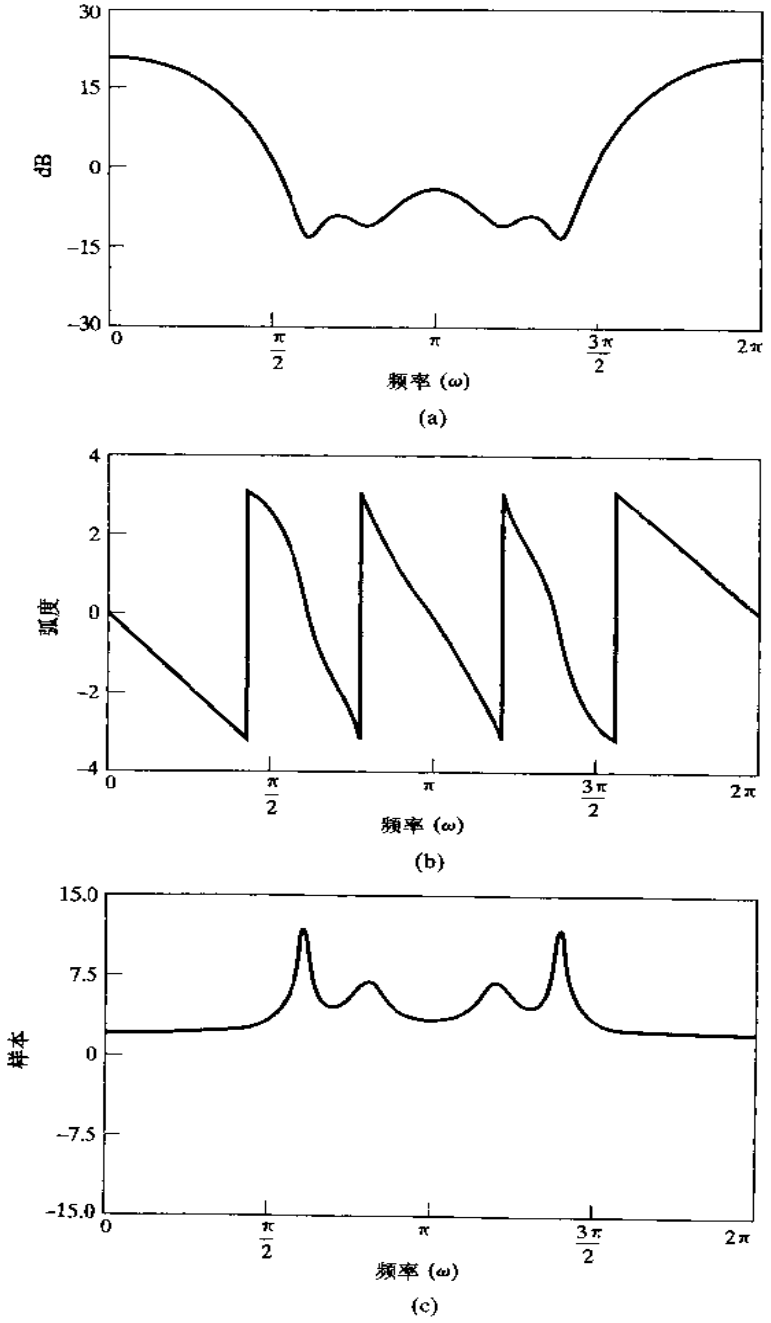


图 5.42　具有与图 5.28 相同幅度的最大相位系统的频率响应
(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；(c) 群延迟

它具有线性相位。分别将两个系统的对数幅度、相位和群延迟函数相加，就得到该复合系统的频率响应。因此

$$20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = 20\log_{10}|H_{min}(e^{j\omega})| + 20\log_{10}|H_{max}(e^{j\omega})|$$
$$= 40\log_{10}|H_{min}(e^{j\omega})| \tag{5.169}$$

类似地

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{max}(e^{j\omega}) \tag{5.170}$$

由(5.168b)式就有

$$\angle H_{max}(e^{j\omega}) = -\omega M_i - \angle H_{min}(e^{j\omega}) \tag{5.171}$$

和

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega M_i$$

这里 $M_i = 4$ 是 $H_{min}(z)$的零点个数。以同样的方法，将 $H_{min}(e^{j\omega})$和 $H_{max}(e^{j\omega})$的群延迟函数组后给出

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = M_i = 4$$

图 5.43 给出了复合系统频率响应的图。应该注意，这些曲线就是图 5.28 和图 5.42 对应特性的和。

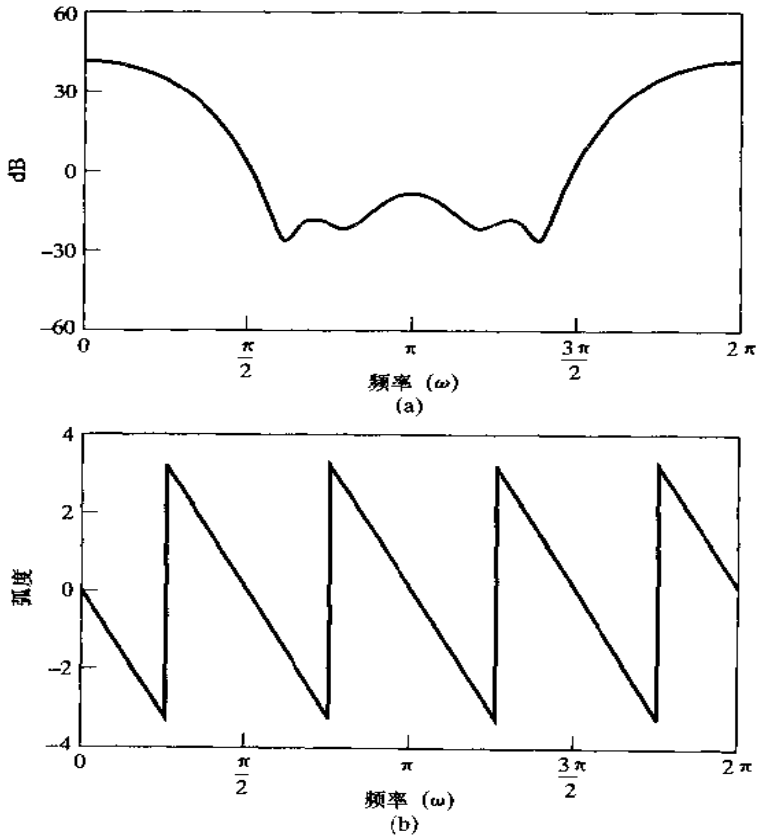


图 5.43 最大相位系统与最小相位系统级联的频率响应，得到一个线性相位系统
(a) 对数幅度；(b) 相位(主值)；

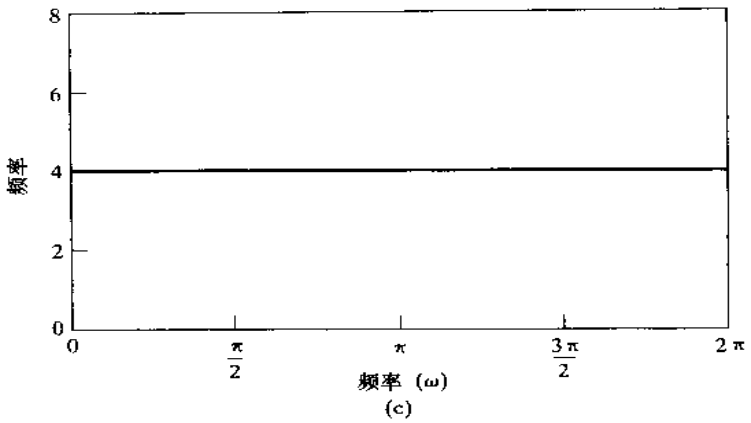


图 5.43(续) (c) 群延迟

5.8 小结

这一章我们建立并研究了利用傅里叶变换和 z 变换方法来表示和分析 LTI 系统。对 LTI 系统变换分析的重要性直接来自这一结果:复指数是这类系统的特征函数,并且有关的特征值就对应于系统函数或系统频率响应。

LTI 系统中特别重要的一类是由线性常系数差分方程表征的系统。变换分析对分析这类系统是特别有效的,因为傅里叶变换或 z 变换都把一个差分方程转变为代数方程。尤其是,系统函数是多项式之比,多项式的系数就直接对应于差分方程的系数。这些多项式的根提供了一种有用的利用零极点图的系统表示方法。由差分方程表征的系统其单位脉冲响应可以是无限长的(IIR),或者是有限长的(FIR)。

LTI 系统的频率响应常用幅度和相位或群延迟来表征,其中群延迟是相位特性导数的负值。线性相位往往是欲追求的频率响应特性,因为线性相位是一种相当轻微的的相位失真形式,它只相当于一个位移量。FIR 系统的重要性部分在于:对于给定一组频率响应幅度指标时,它能很容易地设计成具有真正线性相位(或广义线性相位)特性。不过,对于一组给定的频率响应幅度特性指标来说 IIR 系统更为经济有效。有关两者诸如此类的折衷在第 7 章将给予详细的讨论。

虽然对于 LTI 系统其频率响应幅度和相位之间一般是独立的,但对最小相位系统而言,幅度唯一地确定了相位,而相位除了一个幅度加权因子外,也唯一地确定了幅度特性。非最小相位系统可以用最小相位系统与全通系统的级联组合来表示。傅里叶变换幅度和相位之间的关系将在第 11 章作更详细的讨论。

习　题

基本题(附答案)

5.1　图 P5.1－1 中，$H(e^{j\omega})$为理想低通滤波器。问对输入 $x[n]$和截止频率 ω_c 是否有某种选择，使得输出 $y[n]$是如图 P5.1－2 所示的序列，即

$$y[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 10\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

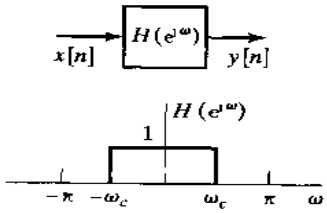


图 P5.1－1

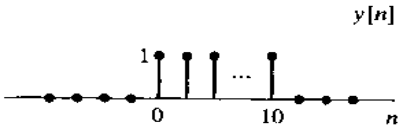


图 P5.1－2

5.2　考虑一个输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$的稳定线性时不变系统，其输入输出满足下面差分方程

$$y[n-1]-\frac{10}{3}y[n]+y[n+1]=x[n]$$

(a) 画出在 z 平在的零极点图。

(b) 求单位脉冲响应 $h[n]$。

5.3　考虑一个线性时不变离散时间系统，其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足下面的二阶差分方程：

$$y[n-1]+\frac{1}{3}y[n-2]=x[n]$$

从以下所列中选出两种该系统可能的单位脉冲响应函数：

(a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n+1]$

(b) $3^{n+1}u[n+1]$

(c) $3(-3)^{n+2}u[-n-2]$

(d) $\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[-n-2]$

(e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[-n-2]$

(f) $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n+1]$

(g) $(-3)^{n+1}u[n]$

(h) $n^{1/3}u[n]$

5.4　当线性时不变系统的输入是

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(2)^{n}u[-n-1]$$

其输出是

$$y[n]=6\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-6\left(\frac{3}{4}\right)^{n}u[n]$$

(a) 求该系统的系统函数。画出 $H(z)$的零极点图并指出收敛域。

(b) 求对所有 n 的系统单位脉冲响应 $h[n]$。

(c) 写出表征该系统的差分方程。

(d) 该系统稳定吗？因果吗。

5.5 考虑一个初始松弛的由线性常系数差分方程描述的系统，该系统的阶跃响应是

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + u[n]$$

(a) 求差分方程。

(b) 求系统的单位脉冲响应。

(c) 确定系统是否稳定。

5.6 关于某一线性时不变系统，下面的信息是已知的：

(i) 系统是因果的。

(ii) 当输入

$$x[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

时，输出的 z 变换为

$$Y(z) = \frac{1 \quad z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$$

(a) 求 $x[n]$ 的 z 变换。

(b) $Y(z)$ 可能的收敛域是什么？

(c) 系统单位脉冲响应有几种可能的选择？

5.7 当线性时不变的输入是

$$x[n] = 5u[n]$$

时，输出为

$$y[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]u[n]$$

(a) 求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 的零极点图，并标出收敛域。

(b) 求对全部 n 值的系统单位脉冲响应。

(c) 写出表征该系统的差分方程。

5.8 有一由下列差分方程描述的因果线性时不变系统：

$$y[n] = \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

(a) 求该系统的系统函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$，画出 $H(z)$ 的零极点图，指出收敛域。

(b) 求系统的单位脉冲响应。

(c) 你应该发现该系是不稳定的，求一个稳定的（非因果）单位脉冲响应，它满足该差分方程。

5.9 考虑一个输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 满足

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

的线性时不变系统。该系统可以是或不是稳定的和/或因果的。

根据与该差分方程相联系的零极点分布，确定 3 种可能的系统单位脉冲响应。证明每种可能都满足该差分方程。具体指出哪一种相应于一个稳定的系统，哪一种相应于因果系统。

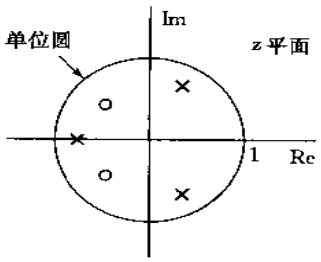


图 P5.10

5.10 若一个线性时不变系统的系统函数有如图 P5.10 所示的零极点，并且系统是因果的，问其逆系统 $H_1(z)$，这里 $H(z)H_i(z) = 1$，也能既是因果的又是稳定的吗？明确说明你的回答是正确的。

5.11 一线性时不变系统的系统函数有如图 P5.11 的零极点图。说明下列说法是对还是错，或者由已给出的信息无法确定。

(a) 系统是稳定的。

(b) 系统是因果的。

(c) 如果系统是因果的，那么一定是稳定的。

(d) 如果系统是稳定的，那么就一定有一个双边的单位脉冲响应。

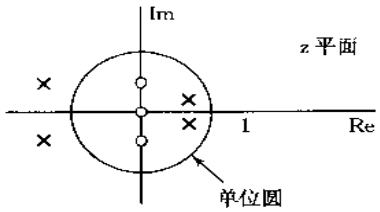


图 P5.11

5.12 有一离散时间因果系统，其系统函数为

$$H(z)=\frac{(1+0.2z^{-1})(1-9z^{-2})}{(1+0.81z^{-2})}$$

(a) 该系统是因果的吗？

(b) 求一个最小相位系统 $H_1(z)$和一个全通系统 $H_{ap}(z)$的表达式，以使

$$H(z)=H_1(z)H_{ap}(z)$$

5.13 图 P5.13 示出 4 种不同的 LTI 系统的零极点图，根据这些图，陈述一下是否每一系统都是全通系统。

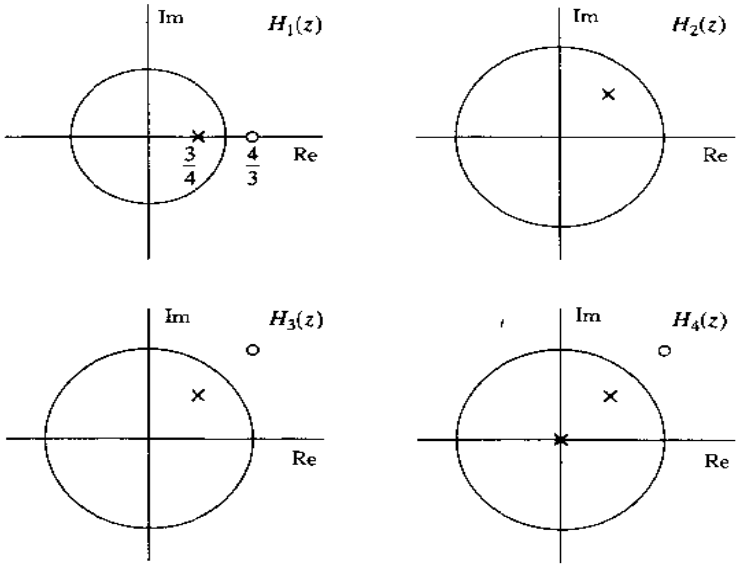


图 P5.13

5.14 对下列每个序列确定 $0<\omega<\pi$ 内的群延迟：

(a)
$$x_1[n]=\begin{cases}n-1, & 1\leqslant n\leqslant 5\\ 9-n & 5<n\leqslant 9\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(b)
$$x_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n-1|}+\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

5.15 考虑这样一类离散时间滤波器，其频率响应具有形式为

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega}$$

其中 $|H(e^{j\omega})|$是 ω 的实且非负函数，而 α 是一个实常数。如在 5.7.1 节讨论过的，这类滤波器称为线

性相位滤波器。。

同时考虑频率响应具有如下形式的离散时间滤波器：

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实函数，α 是一个实常数，而 β 也是一个实常数。如在 5.7.2 节讨论过的，这类滤波器称为**广义线性相位滤波器**。

对图 P5.15 中的每个滤波器，判定是否是广义线性相位滤波器。若是，那么求 $A(e^{j\omega})$，α 和 β，并指出它是否也是线性相位滤波器。

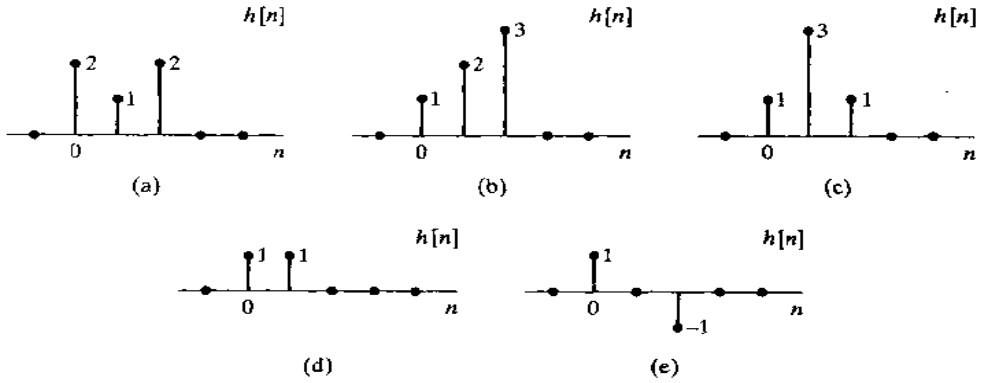


图 P5.15

5.16 图 P5.16 画出某一特定 LTI 系统频率响应的连续相位 $\arg[H(e^{j\omega})]$，其中

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\alpha\omega, \quad |\omega| < \pi$$

α 为一正整数。

该系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 是一个因果序列吗？如果这个系统肯定是因果的，或肯定不是因果的，请给出证明。如果该系统的因果性不能由图 P5.16 确定，请给出一个非因果序列和一个因果序列，它们均有上面的相位响应 $\arg[H(e^{j\omega})]$。

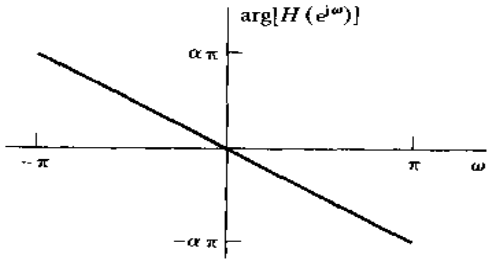


图 P5.16

5.17 对下面每一个系统函数，说说是否是最小相位系统，并陈述理由：

$$H_1(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$H_2(z)=\frac{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{2}{3}z^{-1})(1+\frac{2}{3}z^{-1})}$$

$$H_3(z)=\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}$$

$$H_4(z)=\frac{z^{-1}(1-\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-\frac{j}{2}z^{-1})(1+\frac{j}{2}z^{-1})}$$

5.18 对下面每个系统函数 $H_k(z)$，给出相应的最小相位系统函数 $H_{\min}(z)$，使之两个系统有相同的频率响应幅度，即 $|H_k(e^{j\omega})|=|H_{\min}(e^{j\omega})|$

(a) $$H_1(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

(b) $$H_2(z)=\frac{(1+3z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

(c) $$H_3(z)=\frac{(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{4}{3}z^{-1})}$$

5.19 图 P5.19 示出若干不同 LTI 系统的单位脉冲响应，求与每个系统有关的群延迟。

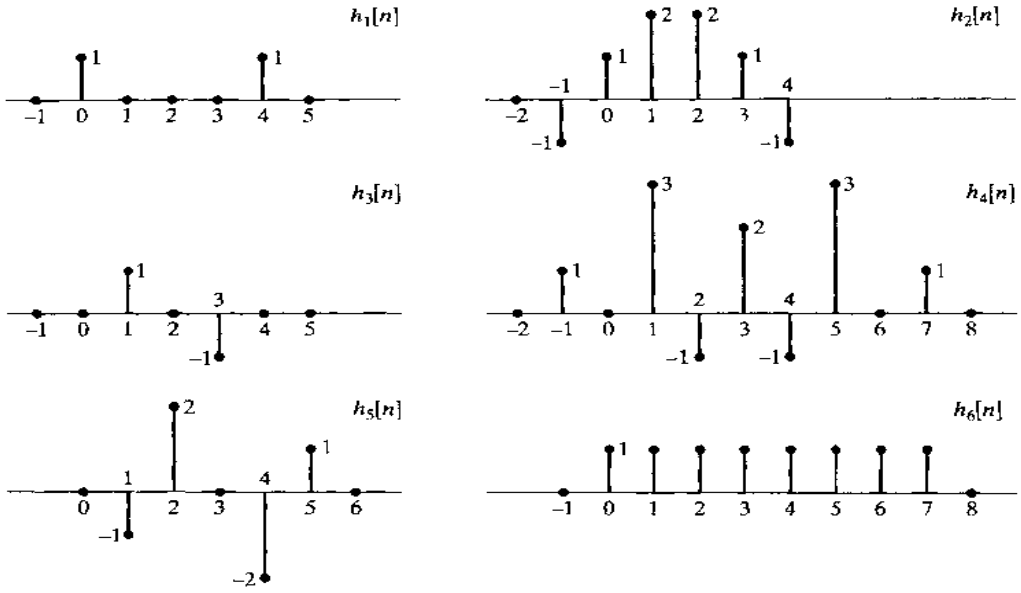


图 P5.19

5.20 图 P5.20 只是示出几个不同系统函数的零点位置，对每个图，陈述一下是否这个系统函数能够是一个由实系数线性差分方程实现的广义线性相位系统。

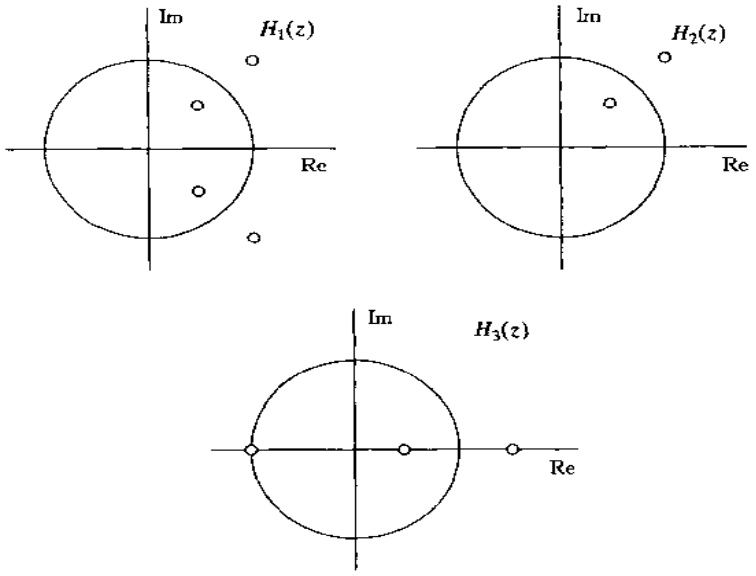


图 P5.20

基本题

5.21 设 $h_{lp}[n]$为某理想低通滤波器的单位脉冲响应，该滤波器带内增益为 1，截止频率为 $\omega_c = \pi/4$。图 P.21示出 5 个系统，其中每一个都等效为一种理想 LTI 频率选择性滤波器。对图 P5.21 中第一个系统画出其等效响应，并用 ω_c 标注出通带边缘频率，并指出它们是否属于低通、高通、带通、带阻或多频带滤波器。

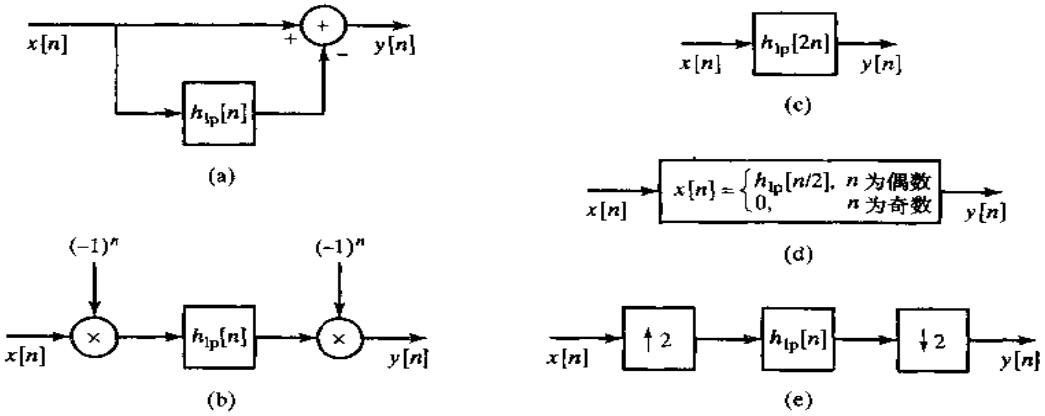


图 P5.21

5.22 考虑一因果线性不变系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

这里 a 是实数。

(a) 写出该系统关于输入输出的差分方程。

(b) a 值在什么范围系统是稳定的?

(c) 对于 $a=1/2$,画出零极点图,并将收敛域涂上阴影线。

(d) 求系统单位脉冲响应 $h[n]$。

(e) 证明该系统是全通系统,也即频率响应幅度为一常数,同时给出该常数值。

5.23 (a) 对于在 5.7.3 节曾经讨论过的 4 种类型因果线性相位 FIR 滤波器中的每一种,试问是否频率响应在 $\omega=0$ 和/或 $\omega=\pi$ 点上也施加了有关对称性的任何约束。

(b) 对于以下列出的每种滤波器,指出四种 FIR 滤波器类型中的哪些可以用来逼近所要求的滤波器:

低通

带通

高通

带阻

微分器

5.24 设 $x[n]$是一个因果的 N 点序列,其在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 以外为零。当 $x[n]$是由差分方程

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-2]-\frac{1}{4}x[n]$$

表示的因果 LTI 系统的输入时,输出 $y[n]$也是一个因果 N 点的序列。

(a) 证明:由这个差分方程所描述的因果 LTI 系统代表一个全通滤波器。

(b) 已知

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2=5$$

求

$$\sum_{n=0}^{N-1}|y[n]|^2$$

5.25 下面的说法是对还是错?

对于一个非因果的系统而言,具有一个正的恒定群延迟,即 $\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})]=\tau_0>0$,是不可能的。如果这个说法是对的,请给出一个简要的论证说明它是成立的。如果此说法不对,请给出一个反例。

5.26 考虑 z 变换

$$H(z)=\frac{rz^{-1}}{1-(2r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}},\qquad |z|>r$$

首先假定 $\omega_0\neq 0$。

(a) 画出一张带标注的零极点图,并求 $h[n]$。

(b) 当 $\omega_0=0$ 时,重做(a)。这就是所谓的临界衰减系统。

5.27 单位脉冲响应为 $h_1[n]$的 LTI 系统是一个截止频率 $\omega_c=\pi/2$ 的理想低通滤波器,系统的频率响应是 $H_1(e^{j\omega})$。假设一个新的 LTI 系统。其单位脉冲响应 $h_2[n]$从 $h_1[n]$求得为

$$h_2[n]=(-1)^n h_1[n]$$

画出频率响应 $H_2(e^{j\omega})$

深入题

5.28 一个因果线性时不变系统的系统函数有如图 P5.28 所示的零极点图。同时已知当 $z=1$ 时,$H(z)=6$。

(a) 求 $H(z)$。

(b) 求系统单位脉冲响应 $h[n]$。

(c) 求在下列输入时的系统响应：

(i) $x[n]=u[n]-\frac{1}{2}u[n-1]$

(ii) 经采样下面连续时间信号得到的序列 $x[n]$：

$$x(t)=50+10\cos 20\pi t+30\cos 40\pi t$$

采样频率为 $\Omega_s=2\pi(40)$ rad/s

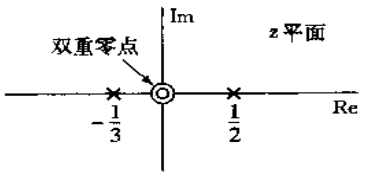


图 P5.28

5.29 已知一个线性时不变系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{21}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}$$

已经知道系统是不稳定的，且单位脉冲响应是双边的。

(a) 求系统的单位脉冲响应 $h[n]$。

(b) 由上(a) 求得的单位脉冲响应可以分别表示成因果和反因果的单位脉冲响应 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 之和，求相应的系统函数 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$。

5.30 一个序列 $x[n]$ 先经过某一线性时不变系统 $H(z)$ 处理后，再以 2 减采样得到 $y[n]$ 如图 P5.30-1 所示。$H(z)$ 的零极点如图 P5.30-2 所示。

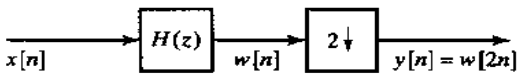


图 P5.30-1

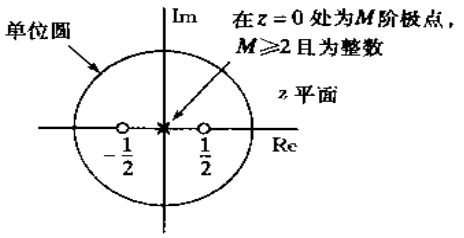


图 P5.30-2

(a) 求出并画出系统 $H(z)$ 的单位脉冲响应 $h[n]$。

(b) 第二个系统如图 P5.30-3 所示。这里序列 $x[n]$ 先按 2 经时间压缩，然后再通过 LTI 系统 $G(z)$ 得到 $r[n]$。问对任意输入而言，是否能选择一个 $G(z)$ 而有 $y[n]=r[n]$。若没有，请明确说明为什么；若有，请给出 $G(z)$。如果答案与 M 有关，请说明是怎样的关系(M 限为大于或等于 2 的整数)。



图 P5.30-3

5.31 考虑一个线性时不变系统，其系统函数 $H(z)$ 是

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-3z^{-1})}$$

(a) 假设系统已知是稳定的，求当输入 $x[n]$ 为阶跃序列时的输出 $y[n]$。

(b) 假设 $H(z)$ 的收敛域包括 $z=\infty$，当 $x[n]$ 为如图 P5.31 所示时，求 $n=2$ 的 $y[n]$。

(c) 假定想用一个单位脉冲响应为 $h_i[n]$ 的 LTI 系统来处理 $y[n]$，以便从 $y[n]$ 中恢复 $x[n]$，求 $h_i[n]$。问 $h_i[n]$ 与 $H(z)$ 的收敛域有关吗？



图 P5.31

5.32 某一稳定的 LTI 系统的傅里叶变换是纯实数且如图 P5.32 所示。问该系统是否有一个稳定的逆系统？

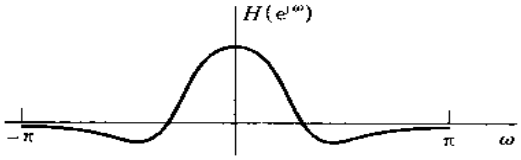


图 P5.32

5.33 序列 $x[n]$是某一 LTI 系统在输入为 $s[n]$时的输出。该系统由下面差分方程描述：

$$x[n] = s[n] \quad e^{8a}s[n-8] \tag{P5.33-1}$$

这里 $0<a$。

(a) 求系统函数

$$H_1(z) = \frac{X(z)}{S(z)}$$

并画出它的零极点图，指出它的收敛域。

(b) 希望用一个线性时不变系统从 $x[n]$中恢复出 $s[n]$，求系统函数

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

以使得 $y[n]=s[n]$。找出 $H_2(z)$全部可能的收敛域，并对每一种收敛域，说明该系统是否是因果的和稳定的。

(c) 求所有可能的单位脉冲响应 $h_2[n]$，而有

$$y[n] = h_2[n] * x[n] = s[n] \tag{P5.33-2}$$

(d) 对上面(c)中所确定的全部 $h_2[n]$，当 $s[n]=\delta[n]$，$y[n]=\delta[n]$时，通过直接计算式(P5.33-2)中的卷积给予讨论。

注意：如同在习题 4.7 中讨论过的，式(P5.33-1)代表多径信道的一个简单模型。由(b)和(c)所确定的系统就相应于补偿系统以校正多径失真。

5.34 考虑一个 LTI 系统，单位脉冲响应 $h[n]$是

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

输入 $x[n]$在 $n<0$ 是零，但一般对 $0\leqslant n\leqslant\infty$可以不是零。要想计算 $0\leqslant n\leqslant 10^9$ 的输出 $y[n]$，特别想要比较一下在这个区间内为了求得 $y[n]$，采用 FIR 滤波器和采用 FIR 滤波器的效果。

(a) 求将输入 $x[n]$和 $y[n]$联系起来的 IIR 系统的线性常系统差分方程。

(b) 求最短长度 LTI 的 FIR 滤波器的脉冲响应，其输出 $y_1[n]$在 $0\leqslant n\leqslant 10^9$ 内与 $y[n]$相同。

(c) 给出与上面(b)的 FIR 滤波器有关的线性常系统差分方程。

(d) 比较利用(a)和(c)的线性常系数差分方程得到 $0\leqslant n\leqslant 10^9$ 内 $y[n]$所要求的算术运算(乘法和加法)的次数。

5.35 考虑一个因果的、其系统函数为 $H(z)$和实单位脉冲响应的 LTI 系统，$H(z)$在 $z=e^{j\omega}$上的求值如图 P.35 所示。

(a) 说明从图 P5.35 所能推断出的有关零极点位置的全部信息，并细心地画出 $H(z)$的零极点图。

(b) 有关单位脉冲响应的长度能说些什么？

(c) 说明 $\angle H(e^{j\omega})$是否线性。

(d) 说明系统是否稳定。

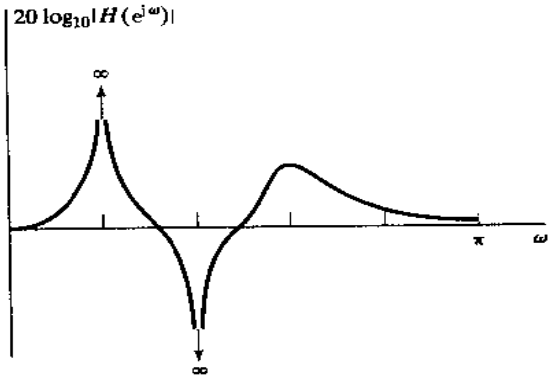


图 P5.35

5.36 一个因果的线性时不变系统，其系统函数为

$$H(z)=\frac{(1-1.5z^{-1}-z^{-2})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.7jz^{-1})(1-0.7jz^{-1})}$$

(a) 写出满足系统输入输出关系的差分方程。

(b) 作零极点图，并指出该系统函数的收敛域。

(c) 画出 $|H(e^{j\omega})|$。

(d) 关于系统，下列说法是对还是错：

(i) 系统是稳定的。

(ii) 对于大的 n，单位脉冲响应趋于某一常数。

(iii) 频率响应幅度在近似 $\omega=\pm\pi/4$ 处有一峰值。

(iv) 系统有稳定和因果的逆系统。

5.37 考虑一个具有如下 z 变换的因果序列 $x[n]$：

$$X(z)=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{6}z^{-1}\right)}$$

α 为何值时，$\alpha^n x[n]$ 才是一个实的最小相位序列？

5.38 考虑一线性时不变系统，其系统函数是

$$H(z)=(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.6\pi}z^{-1})$$

(a) 求出全部因果系统函数，它们都具有与 $H(z)$ 相同的频率响应幅度，并且它们的单位脉冲响应都是实值的，与 $H(z)$ 的脉冲响应具有相同的长度（总共有 4 种不同的这样的系统函数）。直接确认哪一个是最小相位的，哪一个是最大相位的（可包括某个延迟）。

(b) 求出(a)中这些系统函数的单位脉冲响应。

(c) 对(b)中的每一序列，计算并画出 $0\leqslant n\leqslant 5$ 的

$$E[n]=\sum_{m=0}^{n}(h[m])^2$$

指出哪个图对应于最小相位系统。

5.39 图 P5.39 示出 8 种不同的有限长序列。每种长度都为 4 点。对全部 8 种序列其傅里叶变换的幅度都是一样的。这些序列中的哪一个其 z 变换的全部零点是在单位圆内？

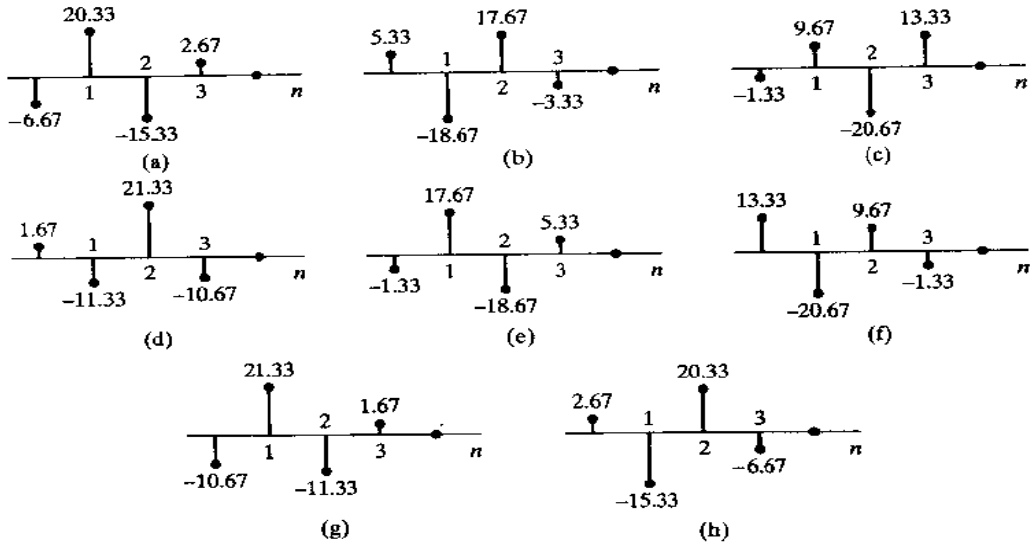


图 P5.39

5.40 图 P5.40 中每一零极点图，连同给出的收敛域一起，描述了系统函数为 $H(z)$的一个线性时不变系统。

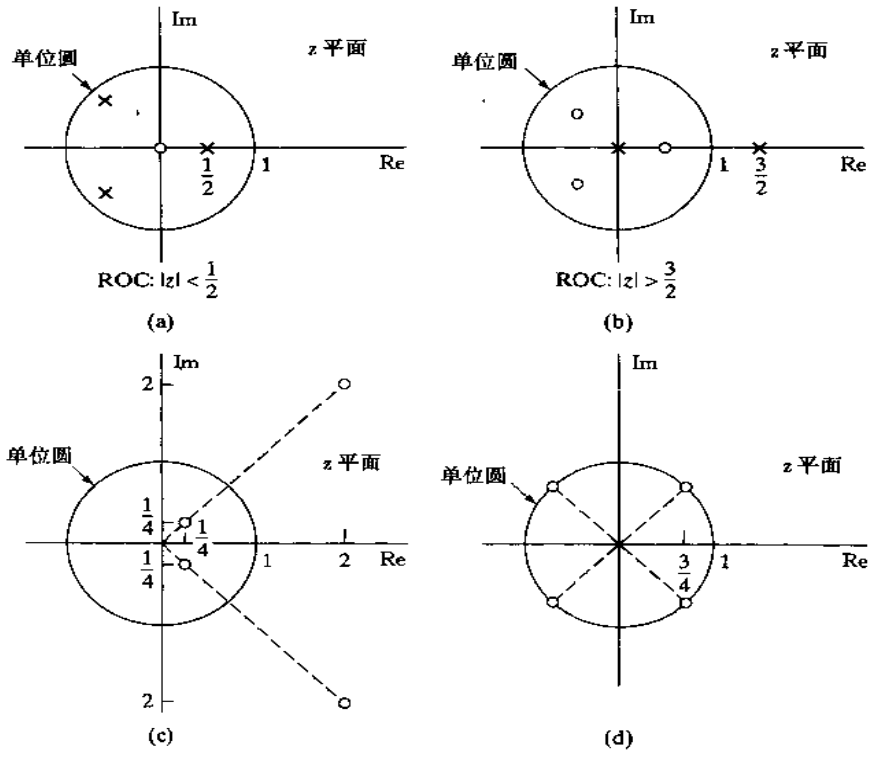


图 P5.40

在每种情况下，试问下述说法中哪一个是对的。用一种简单明了的陈述或一个相反的例子说明你的回答是正确的。

(i) 系统有零相位或广义线性相位。

(ii) 系统有稳定的逆系统 $H_i(z)$。

5.41 图 P5.41－1 示出两种不同的 3 个系统的互联单位脉冲响应 $h_1[n]$，$h_2[n]$和 $h_3[n]$如图 P5.41－2 所示。试问是否系统 A 和/或系统 B 有广义线性相位。

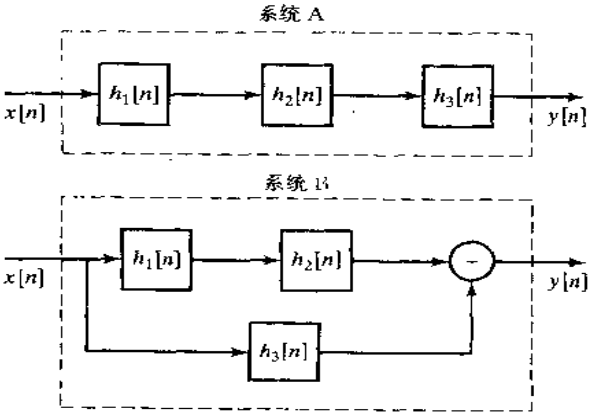


图 P5.41－1

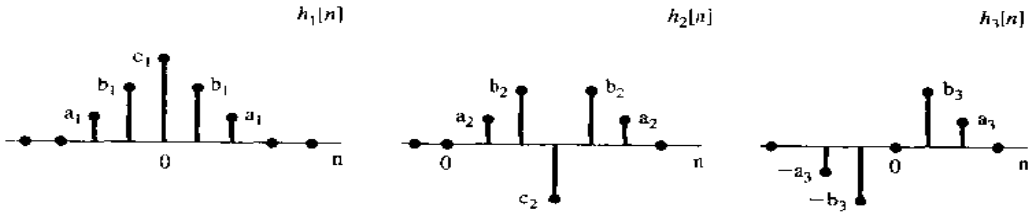


图 P5.41－2

5.42 图 P5.42 的总系统是一个具有频率响应为 $H(e^{j\omega})$、单位脉冲响应为 $h[n]$的离散时间线性时不变系统。

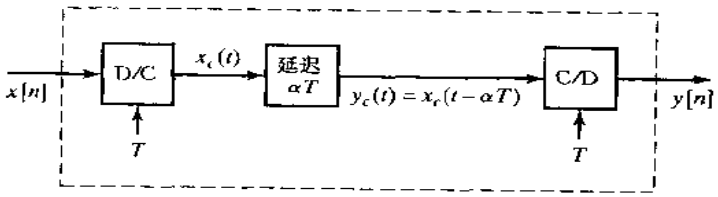


图 P5.42

(a) $H(e^{j\omega})$可以表示为

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{j\phi(\omega)}$$

其中 $A(e^{j\omega})$为实，求出并画出 $A(e^{j\omega})$和 $\phi(\omega)$，$|\omega|<\pi$。

(b) 对下列 α，画出 $h[n]$：

(i) $\alpha=3$

(ii) $\alpha=3\frac{1}{2}$

(iii) $\alpha=3\frac{1}{4}$

(c) 考虑一离散时间线性时不变系统，其

$$H(e^{j\omega})=A(e^{j\omega})e^{j\alpha\omega},\ |\omega|<\pi$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 为实，在下列 α 情况下，关于 $h[n]$ 的对称性能说些什么？

(i) α 一整数。

(ii) $\alpha=M/2$，M 为奇整数。

(iii) 一般 α。

5.43 考虑一类 FIR 滤波器，它具有：$h[n]$ 为实；在 $n<0$ 和 $n>M$，$h[n]=0$，且有下列对称性质之一：

$$\text{对称：}h[n]=h[M-n]$$

$$\text{反对称：}h[n]=-h[M-n]$$

该类滤波器全部都具有广义线性相位，也即有如下形式的频率响应：

$$H(e^{j\omega})=A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega+j\beta}$$

其中 $A(e^{j\omega})$ 是 ω 的实函数，α 是实常数，β 也是实常数。

对于下列表格，证明 $A(e^{j\omega})$ 具有所指出的形式，并求出 α 和 β 的值。

类型	对称性	滤波器长度 $(M+1)$	$A(e^{j\omega})$	α	β
Ⅰ	对称	奇	$\sum_{n=0}^{M/2}a[n]\cos\omega n$		
Ⅱ	对称	偶	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2}b[n]\cos\omega(n-1/2)$		
Ⅲ	反对称	奇	$\sum_{n=1}^{M/2}c[n]\sin\omega n$		
Ⅳ	反对称	偶	$\sum_{n=1}^{(M+1)/2}d[n]\sin\omega(n-1/2)$		

下面是几个有用的建议。

- 对Ⅰ类滤波器，首先证明 $H(e^{j\omega})$ 可写成

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{(M-2)/2}h[n]e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{(M-2)/2}h[M-n]e^{-j\omega[M-n]}+h[M/2]e^{-j\omega[M/2]}$$

- 对Ⅲ类滤波器的分析非常类似于Ⅰ类的情况，除一个符号变化和除掉上述项中的一项外。
- 对Ⅱ类滤波器首先写出 $H(e^{j\omega})$ 为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{(M-1)/2}h[n]e^{-j\omega n}+\sum_{n=0}^{(M-1)/2}h[M-n]e^{-j\omega[M-n]}$$

然后从两和式中提出公共因子 $e^{-j\omega(M/2)}$。

- 对Ⅳ类滤波器的分析很类似于对Ⅱ类滤波器所作的处理过程那样进行。

5.44 令 $h_{lp}[n]$ 为 FIR 广义线性相位低通滤波器的单位脉冲响应。FIR 广义线性相位高通滤波器的单位脉冲响应 $h_{hp}[n]$ 可以用下面变换得到

$$h_{hp}[n]=(-1)^n h_{lp}[n]$$

如果决定用这种变换来设计高通滤波器，并希望所求得的高通滤波器是对称的，那么 4 种类型广义线

性相位 FIR 滤波器中的哪一些可以用于该高通滤波器的设计？答案应当考虑全部可能的类型。

5.45 一因果、线性、时不变离散时间系统有系统函数为

$$H(z) = \frac{(1-0.5z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-0.64z^{-2})}$$

(a) 求一个最小相位系统 $H_1(z)$和一个全通系统 $H_{ap}(z)$的表示式，以使

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z)$$

(b) 求另一个不同的最小相位系统 $H_2(z)$和一个广义线性相位 FIR 系统 $H_{lin}(z)$的表示式，以使

$$H(z) = H_2(z)H_{lin}(z)$$

5.46 (a) 一最小相位系统其系统函数 $H_{min}(z)$有

$$H_{min}(z)H_{ap}(z) = H_{lim}(z)$$

这里 $H_{ap}(z)$是全通系统函数，$H_{lin}(z)$是因果广义线性相位系统。关于 $H_{min}(z)$的极点和零点这个式子告诉你什么？

(b) 一个广义线性相应 FIR 系统有单位脉冲响应为实值，且对 $n<0$ 和 $n\geqslant 8$，$h[n]=0$ 和 $h[n]=-h[7-n]$。该系统的系统函数在 $z=0.8e^{\pi/4}$有一零点，另一零点在 $z=-2$。问 $H(z)$是什么？

5.47 考虑一 LTI 系统，其输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$。当系统的输入是

$$x[n] = 5\frac{\sin(0.4\pi n)}{\pi n} + 10\cos(0.5\pi n)$$

时，对应的输出是

$$y[n] = 10\frac{\sin[0.3\pi(n-10)]}{\pi(n-10)}$$

求该 LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$和单位脉冲响应 $h[n]$。

5.48 图 P5.48 示出 3 个不同因果 LTI 系统的零极点图，它们的单位脉冲响应都是实数。指出以下诸性质的哪一些适用于图示中的每个系统：稳定的、IIR，FIR，最小相位、全通、广义线性相位以及对所有 ω 的正值群延迟。

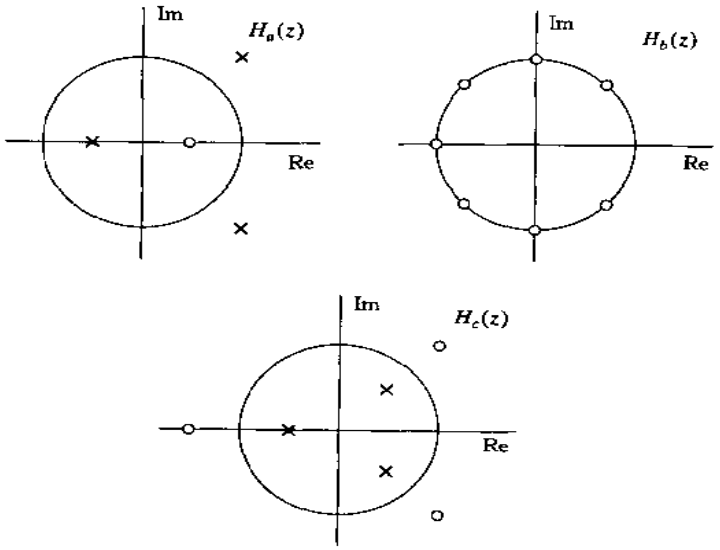


图 P5.48

5.49 设 S_1 是 LTI 系统，其系统函数为

$$H_1(z)=\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}},\qquad |z|>0$$

单位脉冲响应为 $h_1[n]$。

(a) S_1 是因果的吗？为什么？

(b) 令 $g[n]=h_1[n]*h_2[n]$。给出一个 $h_2[n]$，使得 $g[n]$至少有 9 个非零样本，并且 $g[n]$可以认为是具有严格线性相位的因果 LTI 系统的单位脉冲响应，即有$G(e^{j\omega})=|G(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0}$，$n_0$ 为某个整数。

(c) 令 $q[n]=h_1[n]*h_3[n]$。给出一个 $h_3[n]$，使得有

$$q[n]=\delta[n],\qquad 0\leqslant n\leqslant 19$$

5.50 LTI 系统 $H_1(e^{j\omega})$和 $H_2(e^{j\omega})$都是广义线性相位系统，下面系统中的哪一个(如果有的话)也一定是广义线性相位系统？

(a) $G_1(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})+H_2(e^{j\omega})$

(b) $G_2(e^{j\omega})=H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})$

(c) $G_3(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_1(e^{j\theta})H_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

5.51 这个题关心的是具有实值单位脉冲响应 $h[n]$的离散时间滤波器。试判断下列说法是对还是错：如果这个滤波器的群延是一个常数($0<\omega<\pi$)，那么单位脉冲响应一定具有下面两种对称性之一：

$$h[n]=h[M-n]$$

或者

$$h[n]=-h[M-n]$$

这里 M 是整数。

如果你相信这一说法是对的，明确给出你的道理；如果你认为是错的，请给一个反例。

5.52 系统函数 $H_{\mathrm{II}}(z)$代表一个Ⅱ类 FIR 广义线性相位系统，其单位脉冲响应为 $h_{\mathrm{II}}[n]$。这个系统再与一个系统函数为$(1-z^{-1})$的 LTI 系统级联得到第三个系统，其系统函数为 $H(z)$，单位脉冲响应为 $h[n]$。证明：整个系统是一个广义线性相位系统，并确定它是属于何种类型的线性相位系统。

5.53 本题将考虑 3 个不同的 LTI 系统，它们全都是因果的，并有实值单位脉冲响应。对于每个系统还要给出另外的一些信息，利用这些信息，对于每个系统函数的零极点和系统单位脉冲响应的长度，尽可能多地作出说明。

(a) $H_1(z)$有一个极点在 $z=0.9e^{j\pi/3}$，并且当 $x[n]=u[n]$时，$\lim_{n\to\infty}y[n]=0$。

(b) $H_2(z)$有一个极点在 $z=0.8e^{j\pi/4}$，$H_2(z)$具有线性相位又$H_2(e^{j\omega})=-2.5\omega$，并且 $20\log_{10}|H_2(e^{j0})|=-\infty$。

(c) $H_3(z)$有一个极点在 $z=0.8e^{j\pi/4}$，并且对全部 ω 有 $|H_3(e^{j\omega})|=1$。

5.54 一个 z 变换为 $X(z)$的信号 $x[n]$，以下 3 点都是已知的：

(i) $x[n]$是实值序列，并具有最小相位。

(ii) $x[n]$在 $0\leqslant n\leqslant 4$ 之外为零。

(iii) $X(z)$有一零点在 $z=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$和另一零点在 $z=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}$

基于上面给出信息，回答下列问题：

(a) $X(z)$是有理的吗？陈述理由。

(b) 画出 $X(z)$的全部零极点图，并标明 ROC。

(c) 如果 $y[n]*x[n]=\delta[n]$，而 $y[n]$又是右边序列，画出 $Y(z)$的零极点图，并标明它的 ROC

5.55 考虑一个实序列 $x[n]$，它的 DTFT 是 $X(e^{j\omega})$。给出下面信息，确定并画出序列$x[n]$：

1. $x[n]$是一有限长序列。

2. 在 $z=0$，$X(z)$有 5 阶极点而没有零点。$X(z)$可能在其它地方有零点或极点。

3. 解卷绕后的相位函数是

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \begin{cases} -\alpha\omega + \frac{\pi}{2}, & 0 < \omega < \pi \\ -\alpha\omega - \frac{\pi}{2}, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

α 为某个实常数。

4. 序列的群延迟在 $\omega=\pi/2$ 的求值是 2，即

$$\arg[X(e^{j\omega})]_{\omega=\pi/2} = 2$$

5. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x(e^{j\omega})|^2 d\omega = 28$$

6. 若 $y[n]=x[n]*[n]$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})d\omega = 4$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega = 6$$

7. $x(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 0$

8. DTFT 是 $V(e^{j\omega})=\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$的序列 $v[n]$满足 $v[5]=-3/2$

5.56 设 S_1 是一因果稳定的 LTI 系统，其单位脉冲响应为 $h_1[n]$，频率响应为 $H_1(e^{j\omega})$。对于系统 S_1 来说，其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足如下差分方程：

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

(a) 若一 LTI 系统 S_2 有频率响应 $H_2(e^{j\omega})=H_1(-e^{j\omega})$，你判定 S_2 是低通滤波器，带通滤波器或高通滤波器？陈述理由。

(b) 设 S_3 是一因果 LTI 系统，其频率响应 $H_3(e^{j\omega})$有特性为

$$H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1$$

S_3 是最小相位滤波器吗？S_3 可以分属为具有广义线性相位的 4 种类型的 FIR 滤波器之一吗？陈述理由。

(c) 设 S_4 是一稳定但非因果的 LTI 系统，其频率响应为 $H_4(e^{j\omega})$，且输入 $x[n]$和输出 $y[n]$满足如下差分方程：

$$y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] = \beta_0 x[n]$$

式中 α_1，α_2 和 β_0 都是实非零常数。给出一个 α_1 值，一个 α_2 值和一个 β_0 值，使有 $|H_4(e^{j\omega})|=|H_1(e^{j\omega})|$。

(d) 设 S_2 是一 FIR 滤波器，其单位脉冲响应是 $h_5[n]$，频率响应 $H_5(e^{j\omega})$对某个 DTFT $A(e^{j\omega})$有性质为 $H_5(e^{j\omega})=|A(e^{j\omega})|^2$（即 S_5 是一零相位滤波器）。求 $h_5[n]$以使得 $h_5[n]*h_1[n]$是一非因果 FIR 滤波器的单位脉冲响应。

扩充题

5.57 在图 P5.57-1 所示系统中，假定输入 $x[n]$可以表示为

$$x[n] = s[n]\cos(\omega_0 n) \qquad \text{(P5.3)}$$

同时假设 $s[n]$是低通且带宽为相当窄的信号，即 $S(e^{j\omega})=0$，$|\omega|>\Delta$，Δ 非常小以使得 $X(e^{j\omega})$就是在 $\omega=\pm\omega_0$ 附近的窄带信号。

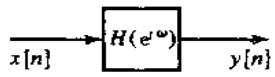


图 P5.57-1

(a) 若$|H(e^{j\omega})|=1$，$\measuredangle H(e^{j\omega})$如图 P5.57－2 所示，证明
$y[n]=s[n]\cos(\omega_0 n-\phi_0)$

(b) 若$|H(e^{j\omega})|=1$，$\measuredangle H(e^{j\omega})$如图 P5.57－3 所示，证明$y[n]=s[n]$可以表示为

$$y[n]=s[n-n_d]\cos(\omega_0 n-\phi_0-\omega_0 n_d)。$$

同时证明 $y[n]$也能等效表示成

$$y[n]=s[n-n_d]\cos(\omega_0 n-\phi_1)$$

式中$-\phi_1$是 $H(e^{j\omega})$在 $\omega=\omega_0$ 时的相位。

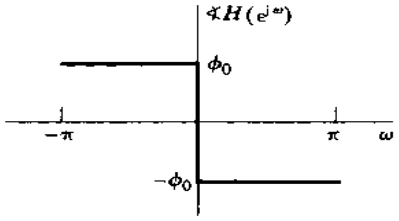


图 P5.57－2

(c) $H(e^{j\omega})$的群延迟定义为

$$\tau_{gr}(\omega)=-\frac{d}{d\omega}\arg[H(e^{j\omega})]$$

而相位延迟定义为 $\tau_{ph}(\omega)=-\left(\frac{1}{\omega}\right)\measuredangle H(e^{j\omega})$。假设$|H(e^{j\omega})|$在 $x[n]$的带内为 1。根据本题(a)和(b)的结果，并在 $x[n]$是窄带的假设下，让明：如果 $\tau_{gr}(\omega_0)$和 $\tau_{ph}(\omega_0)$两者都是整数，那么

$$y[n]=s[n-\tau_{gr}(\omega_0)]\cos\{\omega_0[n-\tau_{ph}(\omega_0)]\}$$

这就表明，对窄带信号 $x[n]$而言，$\measuredangle H(e^{j\omega})$对 $x[n]$的包络 $s[n]$给予的延迟是$\tau_{gr}(\omega_0)$，对载波 $\cos\omega_0 n$ 的延迟是$\tau_{ph}(\omega_0)$。

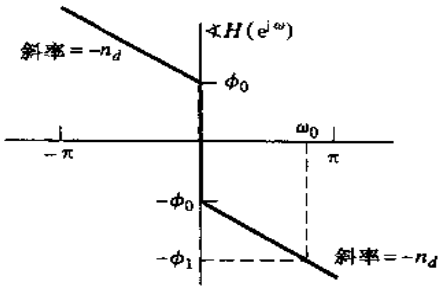


图 P5.57－3

(d) 参照 4.5 节有关序列非整数延迟的讨论，如何解释如果 $\tau_{gr}(\omega_0)$和或/$\tau_{ph}(\omega_0)$不是整数时群延迟和相位延迟的效果？

5.58 序列 $y[n]$是一个 LTI 系统在输人 $x[n]$时的输出，$x[n]$为零均值的白噪声。系统由下面差分方程描述：

$$y[n]=\sum_{k=1}^{N}a_k y[n-k]+\sum_{k=0}^{M}b_k x[n-k],\qquad b_0=1$$

(a) 自相关函数 $\phi_{yy}[n]$的 z 变换 $\phi_{yy}(z)$是什么？

有时关心的是要用一个线性滤波器来处理 $y[n]$，以使得该线性滤波器当输入为$y[n]$时，输出的功率谱是平坦的。这一过程称为 $y[n]$的“白化”，而完成这个任务的线性滤波器就说成是信号 $y[n]$的“白化滤波器”。假设已知自相关函数 $\phi_{yy}[n]$和它的 z 变换$\phi_{yy}(z)$，但不知道系数 a_k 和b_k。

(b) 讨论求该白化滤波器系统函数 $H_w(z)$的步骤。

(c) 该白化滤波器是唯一的吗？

5.59 在很多实际情况下，面对着要恢复被某一卷积过程“污损”了的信号的问题。可以用如图 P5.59－1 所示的线性滤波运算来模仿这个污损过程，这里污损单位脉冲响应如图P5.59－2所示。本题的目的是要考虑从$y[n]$中恢复出 $x[n]$的办法。

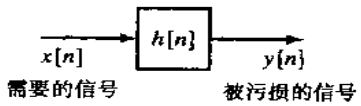


图 P5.59－1

(a) 从 $y[n]$恢复 $x[n]$的一种办法是用逆滤波器，即$y[n]$用频率响应为

$$H_i(e^{j\omega})=\frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

的系统来滤波，这里 $H(e^{j\omega})$是 $h[n]$的傅里叶变换。针对图 P5.59－2 所示单位脉冲响应 $h[n]$，讨论一下涉及实现该逆滤波方法的一些实际问题。讨论务必周全，但也要简明扼要。

(b) 由于涉及逆滤波中的困难，可以建议用下面的办法从 $y[n]$中恢复 $x[n]$：用图 P5.59－3 的系统处

理被污损的序列 $y[n]$，该系统产生一个输出 $w[n]$，从 $w[n]$中可以提取已改善了的 $x[n]$ 的复本。脉冲响应 $h_1[n]$ 和 $h_2[n]$ 如图 P5.59－4 所示。请详细说明该系统的工作原理，特别应仔细说明在什么条件下可以从 $w[n]$ 中完全恢复出 $x[n]$。

[提示：考虑从 $x[n]$到 $w[n]$整个系统的单位脉冲响应。]

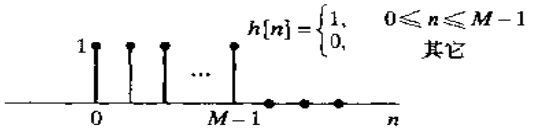


图 P5.59－2

(c) 现在想把这一方法推广到任何有限长污损单位脉冲响应 $h[n]$上去，也即假设为

$$h[n]=0,\quad n<0\text{ 及 }n\geqslant M$$

再进一步假设 $h_1[n]$和图 P5.59－4 相同。$H_2(z)$和

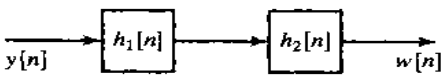


图 P5.59－3

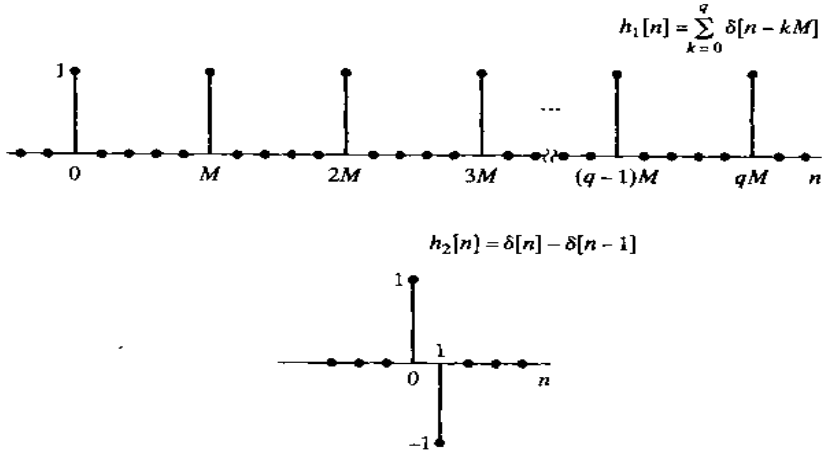


图 P5.59－4

$H(z)$必须有怎样的关系才能工作得和(b)相同？为了使 $H_2(z)$能实现为一个因果系统，$H(z)$必须满足什么条件？

5.60 本题要说明对一个有理 z 变换，因子$(z-z_0)$和因子 $z/(z-z_0^*)$都对相位有相同的贡献。

(a) 令 $H(z)=z-1/a$，a 为实数且$0<a<1$。画出系统的零极点图，包括指出在 $z=\infty$的零极点。求系统的相位∠$H(e^{j\omega})$。

(b) 令 $G(z)$有在 $H(z)$零点的共轭倒数位置上的极点，有 $H(z)$极点的共轭倒数位置上的零点，其中包括在零和∞的那些零极点。画出 $G(z)$的零极点图。求系统的相位∠$G(e^{j\omega})$，并证明它与∠$G(e^{j\omega})$是相同的。

5.61 证明下面两种说法的正确性：

(a) 两个最小相位序列的卷积也是最小相位的。

(b) 两个最小相位序列的和不一定是最小相位的。具体地给出一个最小相位序列和一个非最小相位序列的例子，它们都能作为两个最小相位序列之和而构成。

5.62 一序列 $r[n]$由如下关系所定义：

$$r[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]h[n+m]=h[n]\cdot h[-n]$$

其中 $h[n]$是最小相位序列，而 $r[n]$给出如下：

$$r[n] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3}2^n u[-n-1]$$

(a) 求 $R(z)$并画出它的零极点图。

(b) 求该最小相位序列 $h[n]$(可包括 ± 1 的幅度加权因子)，并求其 z 变换 $H(z)$。

5.63 某一**最大相位序列**是一个稳定序列，其 z 变换的零点和极点都在单位圆外。

(a) 证明最大相位序列是反因果的，即 $n>0$，序列值为零。

FIR 最大相位序列可用包括某一有限量的延迟实现为因果的。具有给定傅里叶变换幅度的有限长因果最大相位序列可以用把一个最小相位序列 z 变换的全部零点反射到单位圆外的共轭倒数的位置上来得到。这就是说，可以将最大相位因果有限长序列的 z 变换表示为

$$H_{\max}(z) = H_{\min}(z)H_{ap}(z)$$

很明显，这个办法保证了 $|H_{\max}(e^{j\omega})| = |H_{\min}(e^{j\omega})|$。现在，一个有限长最小相位序列的 z 变换可以表示为

$$H_{\min}(z) = H_{\min}[0]\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1}), \quad |c_k| < 1$$

(b) 求该全通系统的表示式，使得将 $H_{\min}(z)$的全部零点反射到单位圆外的位置上

(c) 证明 $H_{\max}(z)$可表示为

$$H_{\max}(z) = z^{M}H_{\min}(z^{-1})$$

(d) 利用(c)的结果，用 $h_{\min}[n]$表示最大相位序列 $h_{\max}[n]$。

5.64 对于非最小系统而言，不可能求得一个因果而稳定的逆系统(完全补偿器)。本题要研究一种仅用来补偿非最小相位系统频率响应幅度的办法。

假设一个稳定的具有有理系统函数 $H(z)$的非最小相位线性时不变离散时间系统与一个补偿系统 $H_c(z)$级联，如图 P5.64 所示。

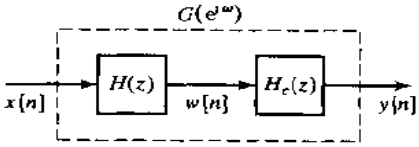


图 P5.64

(a) 应该如何选择 $H_c(z)$，使得 $H_c(z)$本身是稳定和因果的，而且要使整个有效频率响应的幅度是 1？(想一想 $H(z)$总是可以表示成 $H(z) = H_{ap}(z)H_{\min}(z)$。)

(b) 相应的系统函数 $H_c(z)$和 $G(z)$是什么？

(c) 假设

$$H(z) = (1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{-j0.3\pi}z^{-1})$$

求 $H_{\min}(z)$，$H_{ap}(z)$，$H_c(z)$和 $G(z)$，并对每个系统函数画出零极点图。

5.65 令 $H_{\min}(z)$为最小相位序列 $h_{\min}[n]$的 z 变换。若 $h[n]$为某一因果非最小相位序列，其傅里叶变换幅度等于 $|H_{\min}(e^{j\omega})|$，证明

$$|h[0]| < |h_{\min}[0]|$$

(与(5.103)式一起利用初值定理。)

5.66 最小相位序列的重要性质这一就是最小能量延迟性质，即在全部具有相同傅里叶变换幅度函数 $|H(e^{j\omega})|$的因果序列中，量

$$E[n] = \sum_{m=0}^{n}|h[m]|^2$$

当 $h[n]$为最小相位序列时，对全部 $n \geqslant 0$ 为最大。这一结果可以证明如下：令 $h_{\min}[n]$是 z 变换为 $H_{\min}(z)$的最小相位序列。另外，令 z_k 是 $|H_{\min}(z)|$的一个零点，这样 $H_{\min}(z)$可表示成

$$H_{\min}(z) = Q(z)(1 - z_k z^{-1}), \quad |z_k| < 1$$

这里 $Q(z)$还是最小相位。现在考虑另一个序列 $h[n]$，其 z 变换 $H(z)$有

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$$

并且 $H(z)$有一个零点在 $z=1/z_k^*$，而不是在 z_k。

(a) 用 $Q(z)$来表示 $H(z)$。

(b) 用具有 z 变换为 $Q(z)$的最小相位序列 $q[n]$来表示 $h[n]$和 $h_{min}[n]$。

(c) 为了比较这两个序列的能量分布，证明

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{n} |h_{min}[n]|^2 - \sum_{n=0}^{n} |h[n]|^2 = (1-|z|^2)|q[n]|^2$$

(d) 利用(c)的结果，证明

$$\sum_{n=0}^{n} |h[n]|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{n} |h_{min}[n]|^2, \qquad \text{对全部 } n$$

5.67 一个因果全通系统 $H_{ap}(z)$有输入 $x[n]$和输出 $y[n]$。

(a) 若 $x[n]$为实最小相位序列(这也意味着 $n<0$，$x[n]=0$)，利用(5.118)式证明

$$\sum_{k=0}^{n} |x[k]|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} |y[k]|^2 \qquad \text{(P5.67)}$$

(b) 即使 $x[n]$不是最小相位序列，但对 $n<0$ 为零，证明式(P5.67)仍成立。

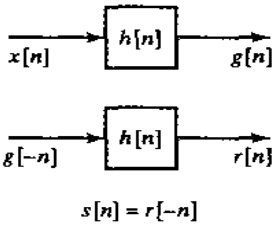


图 P5.68－1

5.68 无论是在连续时间或离散时间滤波器的设计中，往往是逼近一个给定的幅度特性，而不特别顾及相位。例如，标准的低通和带通滤波器的设计方法就是从仅考虑幅度特性而导得的。

在很多滤波问题中，总愿意偏向相位特性是零或线性的。对因果滤波器来说，零相位是不可能的。然而，在许多滤波应用中，滤波器的单位脉冲响应对 $n<0$ 也不必要一定为零，只要处理不要求实时实现就行。

当要求过滤的数据是有限长，且存贮在譬如说计算机的存储器中时，在离散时间滤波中一种常用的技术是将数据向前处理，然后通过同一滤波器再将数据向后处理。

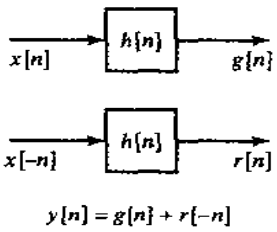


图 P5.68－2

令 $h[n]$是具有任意相位特性的某一因果滤波器的单位脉冲响应。假设 $h[n]$为实，其傅里叶变换为 $H(e^{j\omega})$。令 $x[n]$为要过滤的数据。

(a) **方法** A：滤波过程按图 P5.68－1 所示进行。

1. 求关于 $x[n]$和 $s[n]$的总单位脉冲响应 $h_1[n]$，并证明它有一个零相位特性。

2. 求$|H_1(e^{j\omega})|$，并用$|H_1(e^{j\omega})|$和$\angle H(e^{j\omega})$来表示 $H_1(e^{j\omega})$。

(b) **方法** B：如图 P5.68－2 所示，通过滤波器 $h[n]$处理 $x[n]$得到 $g[n]$。另外，通过$h[n]$向后处理 $x[n]$得到 $r[n]$。输出 $y[n]$ 取为 $g[n]$和 $r[-n]$之和。这一混合运算可以用一个滤波器来表示，该滤波器的输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$，单位脉冲响应为 $h_2[n]$。

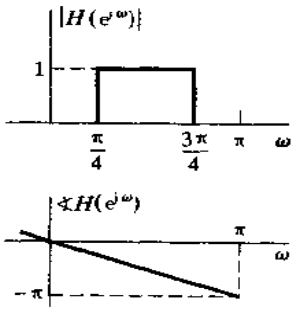


图 P5.68－3

1. 证明该混合滤波器 $h_2[n]$有零相位特性。

2. 求$|H_2(e^{j\omega})|$并用$|H(e^{j\omega})|$和$\angle H(e^{j\omega})$来表示 $H_2(e^{j\omega})$。

(c) 假设给定一有限长序列，要将该序列完成一个带通零相位的滤波运算。另外，假定给定该带通滤

波器的 $h[n]$，其频率响应如图 P5.68－3 所给出。它具有所要求的幅度特性，但是线性相位的。为了达到零相位，可以用方法 A 和 B 的任一种。求出并画出 $|H_1(e^{j\omega})|$ 和 $|H_2(e^{j\omega})|$。从这些结果中，你愿意用哪一种方法来实现所要求的带通滤波？说明为什么。更一般地说，若 $h[n]$ 有所要求的幅度，但是一个非线性相位特性，哪一种方法用来实现零相位特性更为可取？

5.69 试问下面说法是对还是错，如果对，简要陈述理由；如果不对，给出一个反例。

如果系统函数 $H(z)$ 除原点或无穷远点外，到处都可能有极点，那么该系统不可能有零相位或广义线性相位。

5.70 图 P5.70 示出一个实因果线性相位 FIR 滤波器系统函数 $H(z)$ 的零点图，全部指出的零点都代表着这一类因式 $(1-az^{-1})$。对这类因式相应于在 $z=0$ 的极点均未在图中标出。该滤波器在通带内的增益近似为 1。

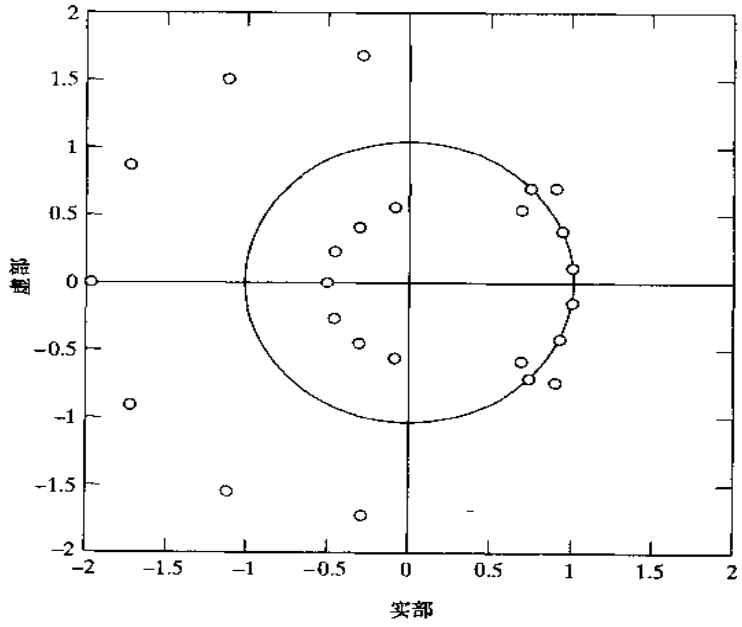


图 P5.70

(a) 其中有一个零点其模为 0.5，相角为 153°，根据这个信息，尽量多地确定其它零点的真正位置。

(b) 系统函数 $H(z)$ 用于图 4.11 所示的连续时间信号的离时间处理系统中，采样率 $T=0.5$ ms。假定连续时间信号 $X_c(j\Omega)$ 是带限的，而且这个采样率也是够高而没有混叠，C/D 和 D/C 的转移时间可忽略不计，请问经由整个系统的时延是多少(用 ms 计)？

(c) 对于(b)中的系统，画出整个系统有效连续时间频率响应 $20\log_{10}|H_{eff}(j\Omega)|$，$0\leqslant\Omega\leqslant\pi/T$，利用给出的信息尽可能准确地画。在频率响应上估计一下 $H_{eff}(j\Omega)=0$ 的频率，并在图中标出。

5.71 一个信号 $x[n]$ 经由一 LTI 系统 $H(z)$ 处理，然后再用因子 2 减采样得到 $y[n]$，如图 P5.71 所示。同时，在同一图中还示出 $x[n]$ 先减采样再用 LTI 系统 $G(z)$ 处理得到 $r[n]$。

(a) 对 $H(z)$(常数除外)和 $G(z)$ 给出一种选取，对任意 $x[n]$ 都有 $r[n]=y[n]$。

(b) 对 $H(z)$ 给出一种选取，使得无法选取 $G(z)$ 而对任意 $x[n]$ 有 $r[n]=y[n]$

(c) 关于 $H(z)$ 尽可能确定一组通用条件，使得有可能选取 $G(z)$ 而对任意 $x[n]$ 有 $r[n]=y[n]$。这组条件不应该与 $x[n]$ 有关。如果你首先建立的条件是通过 $h[n]$ 来表述的，那么用 $H(z)$ 再重新

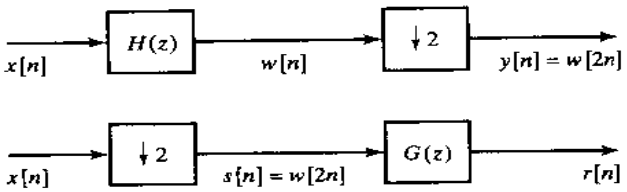


图 P5.71

表述一下。

(d) 对于在(c)中所确立的条件，利用 $h[n]$表示的而有 $r[n]=y[n]$的 $g[n]$是什么?

5.72 考虑一个具有实值单位脉冲响应 $h[n]$的离散时间 LTI 系统，我们想要从该单位脉冲响应的自相关 $c_{hh}[l]$中求得 $h[n]$，或等效地说系统函数 $H(z)$。这个自相关的定义是

$$c_{hh}[l]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]h[k+l]$$

(a) 若系统 $h[n]$是因果和稳定的，你能唯一由 $c_{hh}[l]$恢复 $h[n]$吗? 明确陈述你的理由。

(b) 假定 $h[n]$是因果和稳定的，另外还假定已知系统函数对某有限的 a_k 具有如下形式:

$$H(z)=\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}}$$

你能唯一由 $c_{hh}[l]$ 恢复出 $h[n]$吗? 明确陈述你的理由。

5.73 设 $h[n]$和 $H(z)$记作某一稳定全通 LTI 系统的单位脉冲响应和系统函数，设 $h_i[n]$记为(稳定的)LTI 逆系统的单位脉冲响应。假设 $h[n]$是实序列，证明:$h_i[n]=h[-n]$。

5.74 考虑一个实值序列 $x[n]$，其有 $X(e^{j\omega})=0,\frac{\pi}{4}\leqslant|\omega|\leqslant\pi$。$x[n]$中有一个序列值可能已受到"污损"，而想近似地或准确地恢复它。用 $g[n]$表示受到污损的信号，

$$g[n]=x[n],\ n\neq n_0$$

而 $g[n_0]$是实的，但与 $x[n_0]$无关。在下面两种情况中的每一种，给出一个实际的算法用于从 $g[n]$中完全或近似地恢复出 $x[n]$。

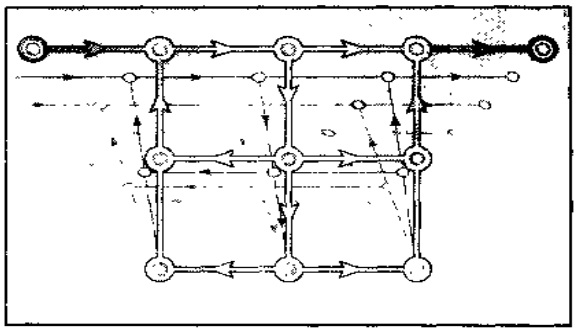
(a) n_0 的准确值不知道，但知道 n_0 是一个奇数。

(b) 有关 n_0 什么也不知道。

5.75 证明:若 $h[n]$是一 N 点的 FIR 滤波器而有 $h[n]=h[N-1-n]$和 $H(z_0)=0$，那么 $H(1/z_0)=0$。这表明偶对称线性相位 FIR 滤波器的零点是互为镜像的。(若 $h[n]$为实，这些零点也一定是实的，或以复数共轭对出现)。

第6章

离散时间系统结构



6.0 引言

正如我们在第5章中已经看到的，具有有理系统函数的线性时不变系统有这样的性质，即其输入和输出序列满足线性常系数差分方程。由于系统函数是单位脉冲响应的 z 变换，而输入和输出满足的差分方程又可以凭直观从系统函数来确定，因此差分方程、单位脉冲响应和系统函数都是线性时不变离散时间系统输入/输出关系的等效表征。当这样的系统用离散时间模拟或数字硬件给予实现时，就必须将差分方程或系统函数表示转换为一种以所需要的技术能给予实现的算法或结构。在本章中将会看到，由线性常系数差分方程描述的系统能够用由加法、乘以系数和延迟等基本运算的互联所组成的结构来表示，至于它的真正实现则决定于所用的技术。

作为与差分方程有关的运算的说明，现在考虑由下列系统函数描述的系统：

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a| \tag{6.1}$$

该系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1] \tag{6.2}$$

被输入和输出序列满足的一阶差分方程是

$$y[n] - ay[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \tag{6.3}$$

因为该系统单位脉冲响应为无限长，因此用离散卷积来实现该系统是不可能的。然而，(6.3)式可以重新写成

$$y[n] = ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1] \tag{6.4}$$

这就为利用前一个输出 $y[n-1]$、当前的输入样本 $x[n]$和前一个输入样本 $x[n-1]$递推计算出在任意时间 n 的输出给出了一种算法基础。在 2.5 节曾经讨论过，若进一步假设初始松弛条件(若已知 $x[n]=0, n<0$，则 $y[n]=0, N<0$)，并利用(6.4)式作为递推公式，从过去的输出值和当前及过去的输入值计算输出，那么系统就一定是线性和时不变的。类似的过程也能适用于更为一般的 N 阶差分方程的情况。然而，由(6.4)式给出的算法以及对高阶差分方程的推广对于实现一个特定的系统而言就不是唯一的运算算法，并且往往它是最不可取的算法。将会看到，在输入序列 $x[n]$和输出序列 $y[n]$之间有无限多种运算结构可以实现相同的关系。

本章以下部分将要考虑线性时不变离散时间系统实现中的一些重要论题。首先给出代表线性、时不变和因果系统的线性常系数差分方程的运算结构或网络的方框图和信号流图描述。利用结合代数运算和方框图表示的处理，可以导出实现一个因果、线性和时不变系统的许多基本等效结构。对于系数和变量的无限精度表示，对它们的输入/输出特性来说，尽管两种结构可能是等效的，但是当数值精度是有限时，它们在性能上可能有很大的差异，这就是对研究不同实现结构感兴趣的主要原因。系统系数有限精度表示的影响，以及在中间计算过程中截断和舍入效应均在本章的稍后部分给予考虑。

6.1 线性常系数差分方程的方框图表示

利用重复计算由差分方程得出的递推公式来实现线性时不变离散时间系统就要求有输出、输入和中间序列的延迟值。这些序列值的延迟意味着需要存储过去的序列值。同时，也必须给出将延迟的序列值乘以系数的方法以及相加所得结果的方法。因此，对实现线性时不变离散时间系统所需的基本单元就是加法器、乘法器和存储延迟序列值的存储器。这些基本单元的互联可以很方便地用图 6.1 所示的基本符号所组成的方框图来表示。图 6.1(a)代表相加两个序列的方法。一般方框图表示中，一个加法器可以有任意多个输入个数。然而几乎在所有实际实现中，加法器仅有两个输入。本章全部方框图都明确指出是按图 6.1(a)所示的限制输入个数的加法器。图 6.1(b)描述的是序列乘一常数，而图 6.1(c)则是序列延迟一个样本。在数字实现中可以用提供每一单位延迟要求的存储寄存器来实现延迟运算。在模拟离散时间实现中，例如开关电容滤波器，延迟是用电荷存储器件来实现的。图 6.1(c)中单位延迟系统是用其系统函数 z^{-1}表示的。大于一个样本的延迟可以在图 6.1(c) 中用系统函数 z^{-M}表示，这里 M 为样本延迟的个数。然而，延迟 M 个样本的真正实现一般是用级联 M 个单位延迟来完成。在用集成电路实现时，这些单位延迟可以构成一个移位寄存器，它由输入信号的采样率来定时。在软件实现中，M

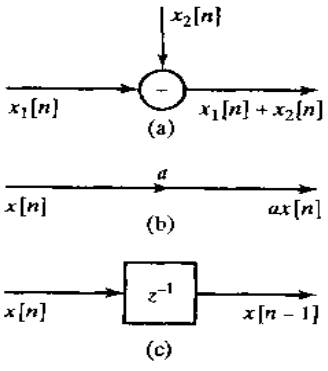


图 6.1 方框图符号
(a)两序列相加；(b)序列乘以常数；(c)单位延迟

个级联的单位延迟可按M个顺序存储寄存器予以实现。

例 6.1　一个差分方程的方框图表示

作为用图 6.1 的基本单元表示的差分方程的例子，考虑下面二阶差分方程：

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] \tag{6.5}$$

相应的系统函数是

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \tag{6.6}$$

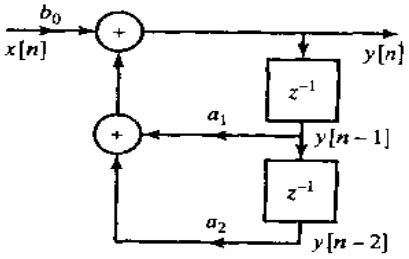


图 6.2　差分方程方框图表示的例子

根据(6.5)式，该系统统实现的方框图表示如图 6.2 所示。这样的方框图给出了实现该系统的一种运算算法的形象化表示。当该系统是在一台通用计算机或数字信号处理(DSP)芯片实现时，如图6.2所示的网络结构就能用作实现该系统的编程基础。如果系统是用离散元件或者作为一个整体由 VLSI 技术来实现的话，那么，该方框图就是决定该系统硬件结构的基础。在两种情况下，图 6.2 的方框图明确表明必须为延迟变量(本例中为 $y[n-1]$，$y[n-2]$)和差分方程的系数(本例为 a_1，a_2 和 b_0)提供存储。再者，由图6.2 可见，计算一个输出序列值 $y[n]$是先形成乘积$a_1y[n-1]$和 $a_2y[n-2]$，把它们相加，然后把结果再和$b_0x[n]$相加。因此，图 6.2 方便地描绘出有关运算算法的复杂性、算法的步骤以及为实现该系统所要求的硬件数量。

可以将例 6.1 推广到高阶差分方程为①

$$y[n] - \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k] \tag{6.7}$$

相应的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{6.8}$$

利用输出序列的过去值和输入序列的当前值与过去值的线性组合重新将(6.7)式对 $y[n]$写成递推公式就得出关系

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.9}$$

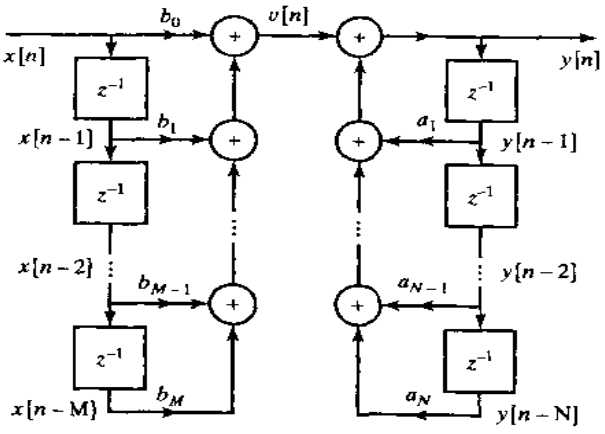


图 6.3　N 阶差分方程的方框图表示

图 6.3 的方框图是(6.9)式的一种直接的形象化表示。更仔细些，它表示如下一对差分方程：

① 前面各章对一般 N 阶差分方程都用的是

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

本书剩下部分都采用更为方便的(6.7)式，这里 $y[n]$的系数归一化到 1，而有关延迟输出的系数在移到右边以后，如(6.9)式所示，都以正号出现。

$$v[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.10a}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] + v[n] \tag{6.10b}$$

假定加法器为两个输入，就意味着以一种给定的次序来完成相加。这就是说，图 6.3 表明乘积 $a_N y[n-N]$ 和 $a_{N-1}y[n-N+1]$ 必须先计算出，然后相加，再将所得的和加到 $a_{N-2}y[n-N+2]$ 上去，依此类推。在 $y[n]$ 已经算出来之后，延迟变量必须更新，这就是将 $y[n-N+1]$ 移到原保存 $y[n-N]$ 的寄存器中，$y[n-N+2]$ 移到原保存 $y[n-N+1]$ 的寄存器中，依此类推。

一个方框图可以不同方式重新组织或变化而不改变总的系统函数。每一种适当的重排就代表了实现同一系统的不同运算算法。例如，图 6.3 的方框图可以看成两个系统的级联，其中第一个表示由 $x[n]$ 计算出 $v[n]$，而第二个则表示由 $v[n]$ 计算出 $y[n]$。因为这两个系统都是线性时不变系统(假定延迟寄存器初始松弛)，那么两个系统在级联中的次序就可以交换成如图 6.4 所示，而不会影响总的系统函数。图 6.4 中，为了方便起见已假定 $M=N$。很清楚，这并不丧失一般性，因为如果 $M \neq N$，只是图 6.4 中某些系数 a_k 或 b_k 为零而已，其方框图也就相应简化。

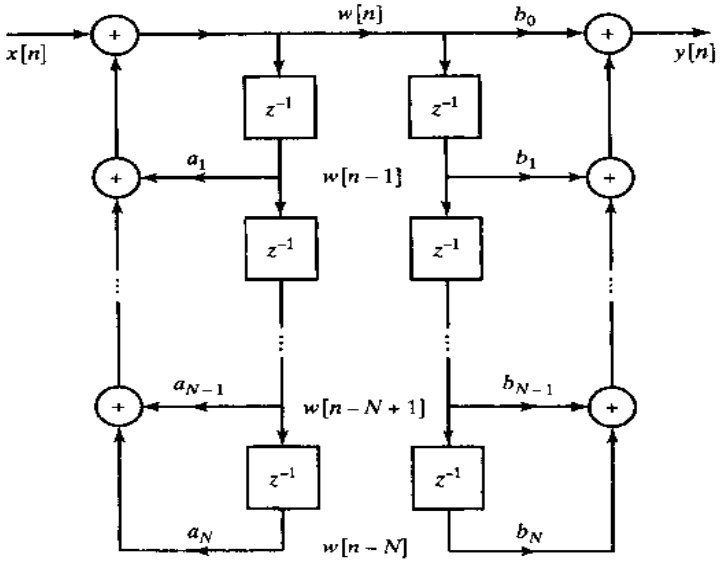


图 6.4　图 6.3 方框图的重新安排：为方便设 $M=N$；若 $M \neq N$ 时，某些系数为零

利用(6.8)式的系统函数 $H(z)$，图 6.3 可以看作是 $H(z)$ 通过如下分解的一种实现：

$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1-\sum_{k=0}^{N} a_k z^{k}}\right)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) \tag{6.11}$$

或等效为下面一对方程：

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)X(z) \tag{6.12a}$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}\right)V(z) \tag{6.12b}$$

另一方面，图 6.4 则将 $H(z)$表示成

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)\left(\frac{1}{1 - \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}\right) \tag{6.13}$$

或等效为如下方程：

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}\right)X(z) \tag{6.14a}$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)W(z) \tag{6.14b}$$

在时域，图 6.4 以及等效的(6.14a)式和(6.14b)式可以用下面这对差分方程来表示：

$$w[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k w[n-k] + x[n] \tag{6.15a}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k] \tag{6.15b}$$

图 6.3 和图 6.4 的方框图有几个重要的差别。在图 6.3 中，先实现由 $H_1(z)$表示的 $H(z)$的零点，接着实现由 $H_2(z)$表示的 $H(z)$的极点。在图 6.4 中，是先实现极点，再接着实现零点。理论上讲，实现的次序并不影响总的系统函数。但是将会看到，当差分方程是用有限精度运算时，在理论上两个等效的系统之间可能存在着显著的差异。另一重要之处是关于在两个系统中延迟单元的个数。正如所画出来的，图 6.3 和图 6.4 都有总数为$(M+N)$个延迟单元。然而，注意到在图 6.4 的方框图中，将完全相同的信号 $w[n]$存储在两个延迟单元链中而能予以重画，这样这两个延迟单元链就能合并成一个链如图 6.5 所示。

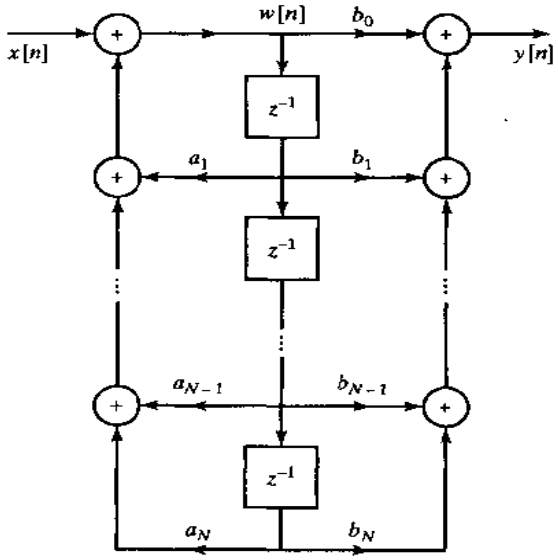


图 6.5　图 6.4 延迟单元的合并

图 6.5 中延迟单元的总数少于图 6.3 或图 6.4 中延迟单元的个数，并且事实上这是实现具有(6.8)式所给的系统函数的系统所要求的最少个数。一般要求延迟的最小个数就是(M,N)中的最大值。具有最少延迟单元数目的实现通常就称为**规范型**实现。图 6.3 的非规范型方框图称为 N 阶差分方程的**直接Ⅰ型**

实现，因为它就是满足输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的差分方程的一种直接实现，该差分方程能凭观察可以直接从系统函数写出来。图 6.5 常称**直接Ⅱ型或规划型**实现。了解了图 6.5 是由(6.8)式所给出 $H(z)$ 的一种合适的实现结构之后，我们就可以直接在系统函数和方框图(或等效的差分方程)之间以一种直截了当的方式实现相互转换。

例 6.2　一个 LTI 系统的直接Ⅰ型和直接Ⅱ型实现

考虑 LTI 系统，其系统函数为

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.9z^{-2}} \tag{6.16}$$

将该系统函数与(6.8)式作比较，可得 $b_0=1, b_1=2, a_1=+1.5$ 和 $a_2=-0.9$，所以由图 6.3，就能用图 6.6 所示的直接Ⅰ型方框图来实现这个系统。参照图 6.5，我们也能用图 6.7 所示的直接Ⅱ型实现这个系统函数。在这两种情况下都注意到，在方框图的反馈支路中的系数与在(6.16)式中对应于 z^{-1} 和 z^{-2} 系数有相反的正负号。虽然这个符号上的变化有时会弄混淆，但是关键是要记住：在差分方程中这些反馈系数 $\{a_k\}$ 总是与它们在系统函数中有相反的正负号。同时也注意到，在实现 $H(z)$ 中，直接Ⅱ型仅需要两个延迟单元，比直接Ⅰ型少一个。

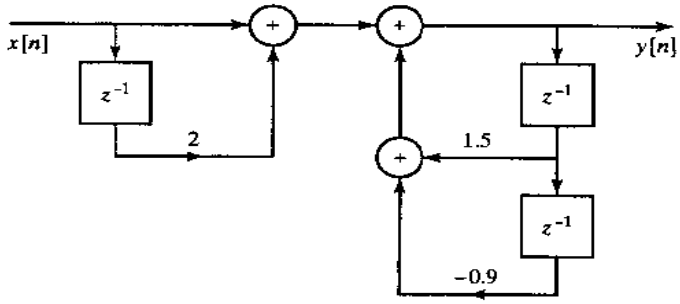


图 6.6　(6.16)式的直接Ⅰ型实现

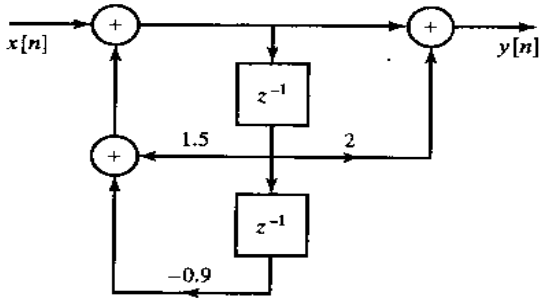


图 6.7　(6.16)式的直接Ⅱ型实现

在上述讨论中，对于实现由(6.8)式系统函数表示的线性时不变系统建立了两种等效的方框图。这些代表实现同一系统不同运算算法的方框图是根据系统线性和系统函数的代数性质的处置而得到的。的确，因为表示线性时不变系统的基本差分方程是线性的，所以只要将差分方程的变量做线性变换就可以得到差分方程的等效集。因此，任何给定系统都存在无数个等

效实现。在6.3节将用类似于本节的方法对于实现由(6.8)式给出的系统函数的系统建立另外几个重要而有用的等效结构。在讨论这些结构类型以前，引入信号流图作为另一种表示差分方程的方框图是方便的。

6.2 线性常系数差分方程的信号流图表示

差分方程的信号流图表示除去几个符号上的差别以外，其本上与方框图表示是相同的。形式上，一个信号流图就是连接节点的有向支路的一个网络。与每个节点有关的是一个变量或节点值。与节点 k 有关的值可以记作 w_k，或者，对数字滤波器来说，因为节点变量一般就是序列，常常就明确用符号 $w_k[n]$ 指出。支路 (j,k) 记作由节点 j 出发，到节点 k 终止的一条支路，在支路上用箭头指出从 j 到 k 的方向。这就如图6.8所示。每条支路都有一个输入信号和一个输出信号。从节点 j 到支路 (j,k) 的输入信号是节点值 $w_j[n]$。在线性信号流图中(我们仅考虑这类信号流图)，某一支路的输出就是该支路输入的线性变换。最简单的例子就是常数增益，即该支路的输出只是支路输入乘以常数。由支路所代表的线性运算一般是在靠近指明支路方向的箭头处指出，对于常数相乘的情况，该常数就简单地在紧靠箭头处表明。如果支路运算没有明确指出，就说明是一条传输为1的支路，或恒等变换。按定义，在图中每个节点的节点值就是进入该节点的全部支路的输出之和。

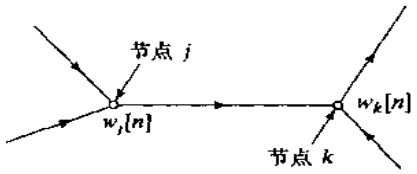


图6.8 信号流图中节点和支路的例子

为了完善信号流图符号的定义，现定义两类特殊的节点。**源节点**就是那些没有流进支路的节点。源节点用来表示外部输入或注入到流图内的信号源。**汇节点**是那些仅有流进支路的节点。汇节点用来从一个流图中提取输出。源节点、汇节点和简单的支路增益都图示在图6.9的信号流图中。由图6.9所表示的线性方程如下：

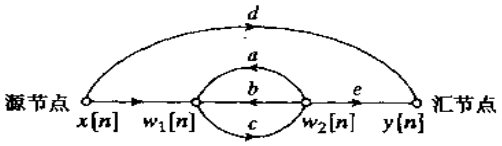


图6.9 表示源节点和汇节点的信号流图举例

$$
\begin{aligned}
w_1[n] &= x[n] + aw_2[n] + bw_2[n] \\
w_2[n] &= cw_1[n] \\
y[n] &= dx[n] + ew_2[n]
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

相加、乘以常数和延迟是实现线性常系数差分方程要求的基本运算。因为这些都是线性运算，因此就有可能采用信号流图符号为实现线性时不变离散时间系统描述算法。如何将刚才讨论的信号流图概念应用到差分方程的表示上去，现作为一个例子考虑一下图6.10(a)的方框图，这是系统函数为(6.1)式的系统的直接Ⅱ型实现。相应该系统的信号流图如图6.10(b)所示。在差分方程的表示中，节点变量都是序列。图6.10(b)中，节点0是源节点，其值由输入序列 $x[n]$ 确定；而节点5是汇节点，它的值记作 $y[n]$。注意到源节点和汇节点都是用单位增益支路连接到该图的其余部分中去以明确表示该系统的输入和输出。很明显，节点3和节点5有同样的值。图6.10(b)中，除一条支路(延迟支路(2,4))外全部支路都可以用简单的支路增益来表示，也就是说支路输出信号是支路输入乘以常数。延迟在时域中不能用

支路增益来表示。然而，单位延迟的 z 变换表示就是乘以因子 z^{-1}。如果用相应的 z 变换方程来表示差分方程，那么全部支路都可以用它们的系统函数来表征。这种情况下，每一支路增益就是 z 的函数；例如，单位延迟支路就有增益 z^{-1}。按惯例，在信号流图中以序列而不是序列的 z 变换来表示变量。然而为了简化符号，就用支路增益 z^{-1} 表示一条延迟支路，不过应理解成这样一条支路的输出是其输入延迟一个序列值。按这一约定图 6.10(b)的图就如图 6.11 所示。图 6.11 代表的方程如下：

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n] \tag{6.18a}$$

$$w_2[n] = w_1[n] \tag{6.18b}$$

$$w_3[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_4[n] \tag{6.18c}$$

$$w_4[n] = w_2[n-1] \tag{6.18d}$$

$$y[n] = w_3[n] \tag{6.18e}$$

将图 6.10(a)和图 6.11 作一比较就可以看出，在方框图中的支路和信号流图中的支路之间有着直接的对应关系。事实上，这两者之间的重大差别在于：信号流图中的节点既代表分支点，又是加法器；而在方框图中，对加法器则用了一种专用符号。方框图中的一个分支点在信号流图中是用这样的节点表示的，该节点仅有一条流入支路和一条或更多条流出支路。在方框图中的一个加法器在信号流图中是用这样一个节点来表示的，该节点有两条(或更多条)流入支路。因此，信号流图作为差分方程的图形表示是完全与方框图等效的，但是画起来要简单些。和方框图一样，信号流图也能对它们进行图形上的处理以对某一给定系统性质得到更为透彻的了解。当用信号流图表示离散时间系统时，有大量的信号流图理论可直接应用(Mason and Zimmermann, 1960; Chow and Cassignol, 1962 和 Phillips and Nagle, 1995)。虽然我们主要地是利用信号流图的图形价值，但是也将使用信号流图的某些理论来考查实现线性系统的一些替代结构。

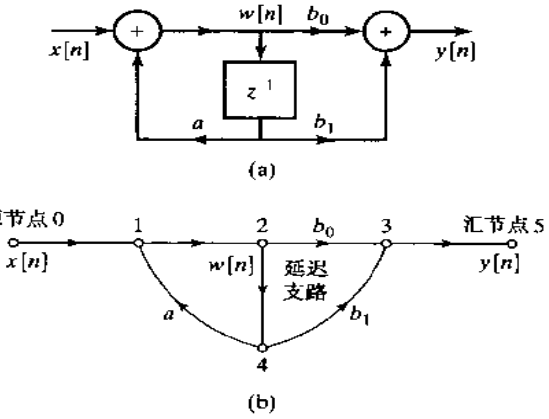


图 6.10 (a) 一阶数字滤波器的方框图表示；(b) 相应于方框图(a)的信号流图结构

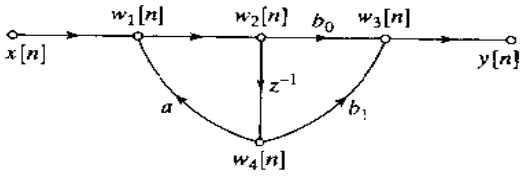


图 6.11 延迟支路用 z^{-1} 表示的图 6.10(b)的信号流图

(6.18a)～(6.18e)式定义了一种输入序列 $x[n]$ 计算线性时不变系统输出的多步算法。这个例子说明了在 IIR 系统实现中一般遇到的数据先后次序关系这样一类问题。(6.18a)～(6.18e)不能用任意次序计算。在(6.18a)式和(6.18c)式中要求相乘和相加，而(6.18b)和(6.18e)只是给变量以重新命名。(6.18d)式代表示系统存储器的“更新”。它就是把代表

$w_4[n]$的存储寄存器中的内容用 $w_2[n]$的值代替而给予实现，但是这必须始终如一地在所有其它式子计算以前或以后来完成。在这种情况下，初始松弛条件也要加上，即定义 $w_2[-1]=0$ 或 $w_0[0]=0$。很明显，除了最后两个方程可以互换，或者(6.18d)式能够始终首先被求出来以外，(6.18a)～(6.18e)式必须要用给出的次序计算。

信号流图代表一组差分方程，其每一个方程都是针对网络每个节点列出的。在图 6.11 的情况下，可以很容易地消去一些变量而得到如下一对方程：

$$w_2[n] = aw_2[n-1] + x[n] \tag{6.19a}$$

$$y[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_2[n-1] \tag{6.19b}$$

这就是(6.15a)式和(6.15b)式的形式。由于延迟变量的反馈，当用时域变量处理时要对一个流图的差分方程进行处置往往是困难的。在这种情况下，用 z 变换表示来处理总是可能的，这时全部支路都是简单的增益。习题 6.1 到 6.26 说明利用流图的 z 变换分析，以得到差分方程的等效集合。

例 6.3　从一个流图确定系统函数

为了说明从一个流图确定系统函数中 z 变换的应用，现考虑图 6.12。在这个图中的流图不是用直接型给出的，因此，凭直接观察这个流图不能写出系统函数。然而，利用其它节点变量对每一节点值写出一个方程就能够写出由该流图所代表的差分方程组。这 5 个方程是：

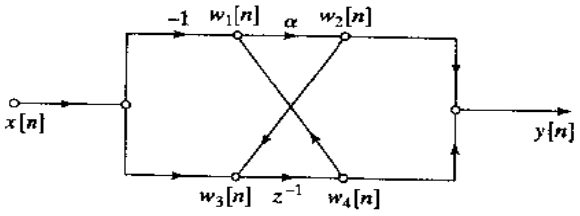


图 6.12　不是用标准的直接型给出的流图

$$w_1[n] = w_4[n] - x[n] \tag{6.20a}$$

$$w_2[n] = aw_1[n] \tag{6.20b}$$

$$w_3[n] = w_2[n] + x[n] \tag{6.20c}$$

$$w_4[n] = w_3[n-1] \tag{6.20d}$$

$$y[n] = w_2[n] + w_4[n] \tag{6.20e}$$

这些方程就是以该流图所描述的形式被用来实现的系统方程。(6.20a)～(6.20e)式可用下面 z 变换式表示为：

$$W_1(z) = W_4(z) - X(z) \tag{6.21a}$$

$$W_2(z) = aW_1(z) \tag{6.21b}$$

$$W_3(z) = W_2(z) + X(z) \tag{6.21c}$$

$$W_4(z) = z^{-1}W_3(z) \tag{6.21d}$$

$$y(z) = W_2(z) + W_4(z) \tag{6.21e}$$

将(6.21a)式代入(6.21b)式和(6.21c)式代入(6.21d)式后，从这组方程中就能消去 $W_1(z)$和 $W_3(z)$，得到：

$$W_2(z) = a(W_1(z) - X(z)) \tag{6.22b}$$

$$W_4(z) = z^{-1}(W_3(z) + X(z)) \tag{6.22d}$$

$$y(z) = W_2(z) + W_4(z) \tag{6.22e}$$

由(6.22a)式和(6.22b)式可解出 $W_2(z)$和 $W_4(z)$为：

$$W_2(z) = \frac{a(z^{-1}-1)}{1-az^{-1}}X(z) \tag{6.23a}$$

$$W_4(z) = \frac{z^{-1}(1-a)}{1-az^{-1}}X(z) \tag{6.23b}$$

将(6.23a)式和(6.23b)式代入(6.22c)式，得出

$$Y(z)=\left(\frac{\alpha(z^{-1}-1)+z^{-1}(1-\alpha)}{1-\alpha z^{-1}}\right)X(z)=\left(\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}\right)X(z) \tag{6.24}$$

因此，图 6.12 流图的系统函数是

$$H(z)=\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \tag{6.25}$$

系统的单位脉冲响应就为

$$h[n]=\alpha^{n-1}u[n-1]-\alpha^{n+1}u[n]$$

该系统函数所对应的直接Ⅰ型流图如图 6.13 所示。

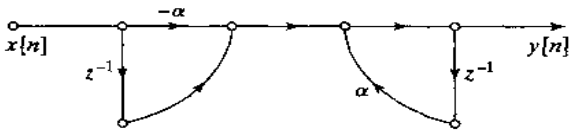


图 6.13　与图 6.12 等效的直接Ⅰ型流图

例 6.3 说明 z 变换如何将涉及反馈并由此而求解困难的一组时域方程转换为能用代数方法求解的一组线性方程。这个例子也说明不同的流图表示确定了需要不同的计算资源数量的计算算法。将图 6.12 和图 6.13 作一比较可见，原来的实现仅需要一个乘法和一个延迟(存储)单元，而直接Ⅰ型实现就需要两个乘法和两个延迟单元，就是直接Ⅱ型实现也只能减少一个延迟单元，而仍然需要两个乘法单元。

6.3　IIR 系统的基本结构

在 6.1 节为实现具有(6.8)式系统函数的线性时不变系统，我们介绍了两种不同的结构。这一节将介绍这些系统的信号流图表示，并且还将建立其余几个常用的等效信号流图网络结构。在讨论中将会更加清楚：对任何给定的有理系统函数，有各种各样等效差分方程或网络结构存在。在这些众多的不同结构中进行选择的一种考虑是计算的复杂性。例如，在一些数字实现中，最少个数的常数乘法器和最少个数的延迟支路往往是最受欢迎的。这是因为乘法一般在数字硬件中是耗时和耗费的运算，而每个延迟单元都相应于一个存储寄存器。结果，常数乘法器的减少就意味着速度的提高，而延迟单元数量的减少就意味着要求的存储器减少。

其它的更为巧妙的一些权衡在 VLSI 实现中会遇到，在那里芯片尺寸往往是重要的一项指标。在这种实现中，芯片中数据传送模式化和简单性也常常是所追求的。在多处理器实现中，最重要的考虑往往是关于算法的可分割性和处理器之间的通信要求。另一个主要的考虑是有限寄存器长度和有限精度运算的影响。这些影响决定于运算是以何种方式组织的，也即决定于信号流图的结构。有的时候又希望利用某种结构，这种结构虽不具有最少个数的乘法器和延迟单元，但这种结构对有限寄存器长度的影响有较低的灵敏度。

这一节将建立最常用的实现一个线性时不变 IIR 系统的几种形式以及得出它们的流图表示。

6.3.1 直接型

在 6.1 节中曾经得到一个线性时不变系统的直接Ⅰ型(图 6.3)和直接Ⅱ型或规范型(图 6.5)结构的方框图表示,系统的输入和输出满足如下差分方程:

$$y[n] - \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.26}$$

并具有如下有理系统函数:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} \tag{6.27}$$

在图 6.14 中图 6.3 的直接Ⅰ型结构是用信号流图的约定来给出的。而图 6.15 则是图 6.5 直接Ⅱ型结构的信号流图表示。为了方便起见,再次设 $N = M$。应该注意,已经画出的信号流图都是每个节点不多于两个输入。在信号流图中一个节点本可以有任意多的输入,但是正如

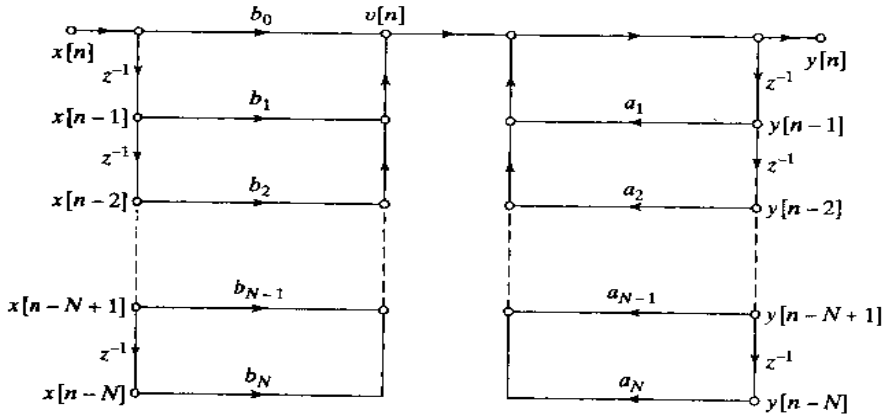


图 6.14 N 阶系统直接Ⅰ型结构的信号流图

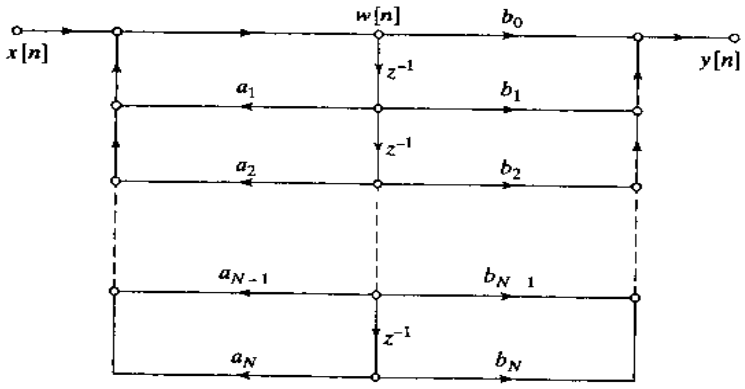


图 6.15 N 阶系统直接Ⅱ型结构的信号流图

早先已指出的，两个输入的约定对用流图实现差分方程的计算是更加与编程和硬件结构密切联系的。

例 6.4　举例说明直接Ⅰ型和直接Ⅱ结构

考虑一系统函数为

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}} \tag{6.28}$$

因为在直接型结构中的系数直接对应于分子和分母多项式中的系数(考虑(6.27)式分母中的负号)，所以就能直接参照图 6.14 和图 6.15 画出这些结构，对本例两种直接型结构分别如图 6.16 和 6.17 所示。

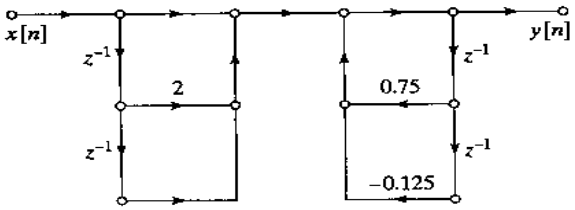


图 6.16　例 6.4 直接Ⅰ型结构

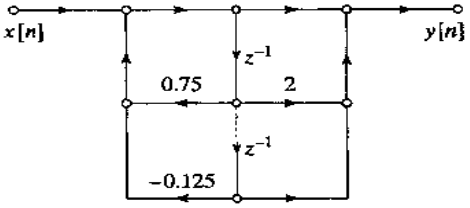


图 6.17　例 6.4 直接Ⅱ型结构

6.3.2　级联型

直接型结构可以将系统函数 $H(z)$写成如(6.27)式那样以变量 z^{-1}的多项式之比直接求得。如果将分子和分母多项式因式分解，就可以将 $H(z)$表示成

$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1-f_kz^{-1})\prod_{k=1}^{M_2}(1-g_kz^{-1})(1-g_k^*z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1-c_kz^{-1})\prod_{k=1}^{N_2}(1-d_kz^{-1})(1-d_k^*z^{-1})} \tag{6.29}$$

式中 $M=M_1+2M_2$，$N=N_1+2N_2$。在这种表示式中，一阶因子表示实零点在 f_k 和实极点在 c_k，而二阶因子表示复数共轭零点在 g_k 和 g_k^*，复数共轭极点在 d_k 和 d_k^*。当(6.27)式全部系数都是实数时，这代表了最一般的零极点分布情况。(6.29)式提出了由一阶和二阶系统级联组成的一种结构。这种结构在子系统组成的选择上和子系统级联的先后次序上有很大的自由度。然而，实际上往往追求的是利用最小存储和计算的级联实现。对许多实现形式都有利的一种标准结构是将一对实因子和一对复数共轭对都配成二阶因子，这样(6.29)式就能表示成

$$H(z)=\prod_{k=0}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_2z^{-2}} \tag{6.30}$$

式中 $N_s=\lfloor(N+1)/2\rfloor$是不大于$(N+1)/2$ 的最大整数。在将 $H(z)$写成这种形式时，已经假定 $M<N$，并且实极点和实零点均已组合成对。同样，如果有奇数的实极点，系数 a_{2k}中之一将为零。这些单个的二阶节可以用任意一种直接型结构来实现；然而，先前的讨论指出，要用最少乘法次数和最少延迟单元个数来实现一个级联结构，就应在每个二阶节采用直接Ⅱ型结构，图 6.18 示出一个六阶系统应用 3 个直接Ⅱ型二阶节的级联结构。按直接Ⅱ型二阶节级联表示的差分方程具有如下形式：

$$y_0[n]=x[n] \tag{6.31a}$$

$$w_k[n]=a_{1k}w_k[n-1]+a_{2k}w_k[n-2]+y_{k-1}[n], \quad k=0,1,\cdots,N \tag{6.31b}$$

$$y_k[n]=b_{0k}w_k[n]+b_{1k}w_k[n-1]+b_{2k}w_k[n-2], \quad k=0,1,\cdots,N \tag{6.31c}$$

$$y[n]=yN_s[n] \tag{6.31d}$$

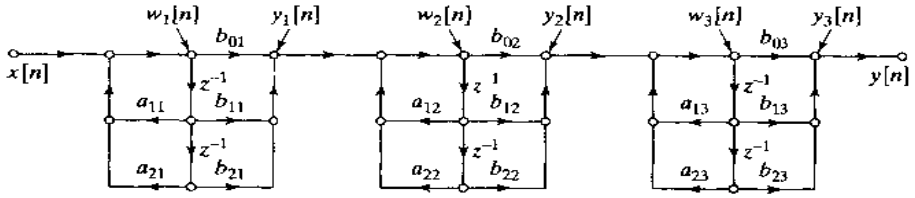


图 6.18　每个二阶子系统用直接Ⅱ型实现的一个六阶系统的级联结构

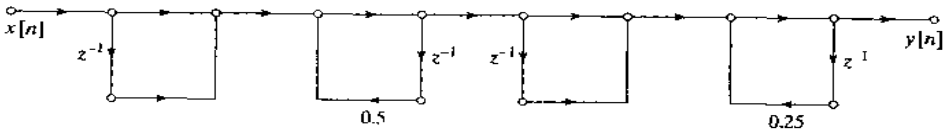
很容易看到，仅就以不同方式将零点和极点配对，以及以不同方式将这些二阶节排序，理论上就能得出许多种等效的系统。确实如此，如果有 N_s 个二阶节，那么就有 $N_s!$（N_s 阶乘）种极点与零点的配对可能和 $N_s!$ 种所得二阶节因子的级联次序，或者总共有 $(N_s!)^2$ 个不同配对和排序可能。当用无限精度运算时，这些虽都具有相同的总的系统函数和相应的输入/输出关系，但是在用有限精度运算时，它们的特性可能是很不一样的，这点将在 6.8 节看到。

例 6.5　举例说明级联型结构

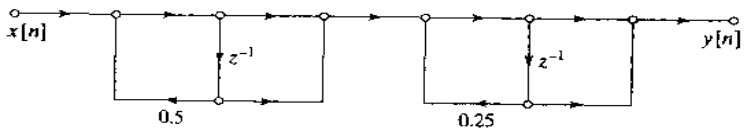
再次考虑(6.28)式的系统函数，因为这是一个二阶系统，所以一个具有直接Ⅱ型二阶节的级联结构就简化到图 6.17 的结构。另外，为了说明级联结构，也能把 $H(z)$ 表示成一阶因子的乘积而采用一阶系统，如下式：

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=\frac{(1+z^{-1})(1+z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})} \tag{6.32}$$

因为全部零极点都是实的，所以用一阶节的级联结构具有实系数。如果极点和/或零点是复数的话，那么仅二阶节才有实系数。图 6.19 示出两种等效的级联结构，两者都有(6.32)式的系统函数。图 6.19 信号流图代表的差分方程能很容易地写出来。习题 6.22 是关于求其它等效系统结构的例子。



(a)



(b)

图 6.19　例 6.5 的级联结构
(a) 直接Ⅰ型子系统；(b) 直接Ⅱ型子系统

关于级联型中系统函数的定义应该做一点最后的注释。按(6.30)式的定义，每一个二阶节都有5个系数乘法器。为比较起见，设(6.27)式的$H(z)$中$M=N$，再假设N为偶数，这样$N_s=N/2$。那么，直接Ⅰ型Ⅱ型结构都有$2N+1$个系数乘法器，而由(6.30)式所建议的级联型结构有$5N/2$个系数乘法器。对于图6.18的六阶系统而言，要求总共有15个乘法器，而等效的直接型则要求总数为13个乘法器。级联型的另一种定义是

$$H(z)=b_0\prod_{k=1}^{N_s}\frac{1+\tilde{b}_{1k}z^{-1}+\tilde{b}_{2k}z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}} \tag{6.33}$$

式中b_0是(6.27)式分子多项式的首项系数，而$\tilde{b}_{ik}=b_{ik}/b_{0k}$，$i=1,2$，和$k=1,2,\cdots,N_s$。$H(z)$的这种形式提出了一种四乘法器二阶节的级联结构，外加一个总增益常数b_0。这种级联形式与直接型结构有相同的系数乘法器个数。在6.8节中将要指出，当用定点运算实现时，常用五乘法器的二阶节，这是因为这样有可能分配系统增益，藉此可以控制在系统中各关键点上信号的大小。当用浮点运算，并且动态范围不会成为一个问题时，用四乘法器的二阶节可用来减少计算量。对单位圆上的零点可以获得进一步简化。在这种情况下，$\tilde{b}_{2k}=1$，每个二阶节仅要求三个乘法器。

6.3.3 并联型

将$H(z)$分子和分母多项式作另一种因式分解，可将有理系统函数(6.27)式或(6.29)式表示成如下部分式展开式：

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N_p}C_kz^{-k}+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1-e_kz^{-1})}{(1-d_kz^{-1})(1-d_k^*z^{-1})} \tag{6.34}$$

式中$N=N_1+2N_2$。如果$M\geqslant N$，那么$N_p=M-N$；否则(6.34)式中第一个和式就不包括。若(6.27)式中的系数a_k和b_k都是实数，那么A_k，B_k，C_k，c_k和e_k这些量都是实数。在这种形式中，系统函数可以看成是由一阶和二阶IIR系统并联的组合，可能还有N_p个简单幅度加权的延迟通道。另外，可以把实极点成对组合起来，$H(z)$又能表示成

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N_p}C_kz^{-1}+\sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k}+e_{1k}z^{-1}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}} \tag{6.35}$$

式中，和级联型一样，$N=\lfloor(N+1)/2\rfloor$是不大于数$(N+1)/2$的最大整数，并且如果$N_p=M-N$是负的，(6.35)式中第一个和式就不存在。图6.20示出$N=M=6$的一个典型例子。用直接Ⅱ型二阶节并联型的一般差分方程是：

$$w_k[n]=a_{1k}w_k[n-1]+a_{2k}w_k[n-2]+x[n],\qquad k=1,2,\cdots,N_s \tag{6.36a}$$

$$y_k[n]=e_{0k}w_k[n]+e_{1k}w_k[n-1],\qquad k=1,2,\cdots,N_s \tag{6.36b}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N_p}C_kx[n-k]+\sum_{k=1}^{N_s}y_k[n] \tag{6.36c}$$

如果$M<N$，那么(6.30c)式中第一个和式就没有。

例6.6 举例说明并联型结构

还是考虑例6.4和例6.5的系统函数。对于并联型，必须将$H(z)$表示成(6.34)式或(6.35)式的形式。如果用二阶节，$H(z)$就是

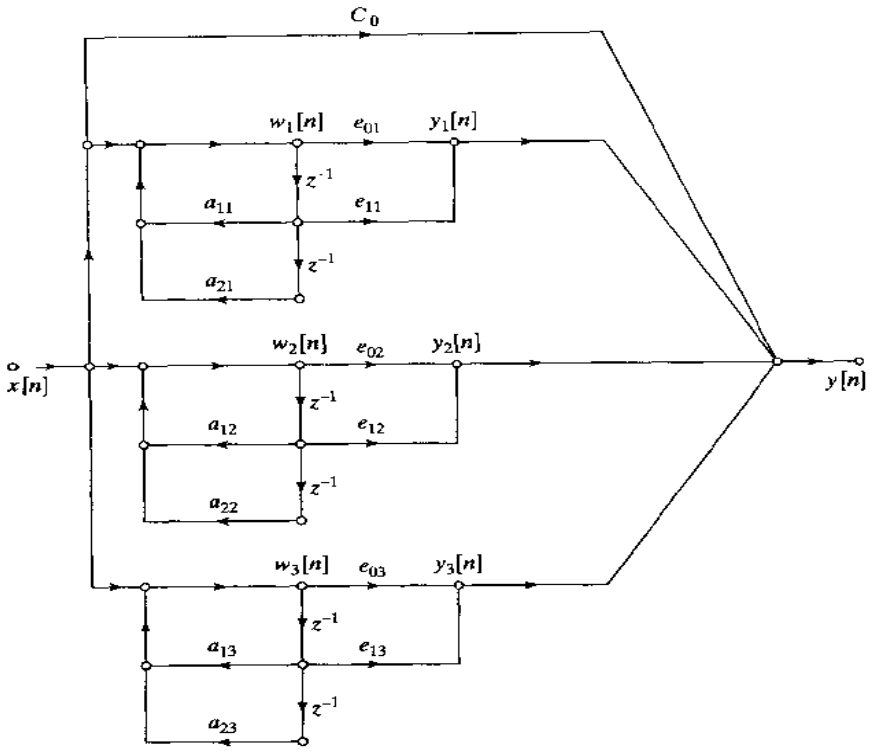


图 6.20　将实极点和复数极点成对组合的 6 阶系统($M=N=6$)的并联型结构

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}=8+\frac{-7+8z^{-1}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-1}} \tag{6.37}$$

该例用二阶节的并联型实现示于图 6.21。

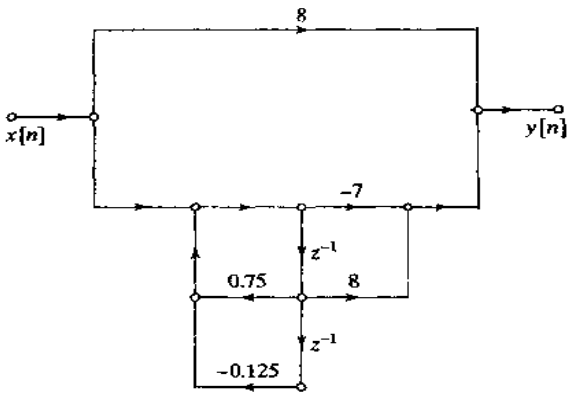


图 6.21　利用一个二阶系统的例 6.6 的并联型结构

由于全部极点都是实数，将 $H(z)$展开成如下形式：

$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0.25z^{-1}} \tag{6.38}$$

就能得到另外一种并联型实现。这种用一阶节的并联型实现如图 6.22 所示。和一般情况相同，由图 6.21 和图 6.22 所表示的差分方程都能直接写出。

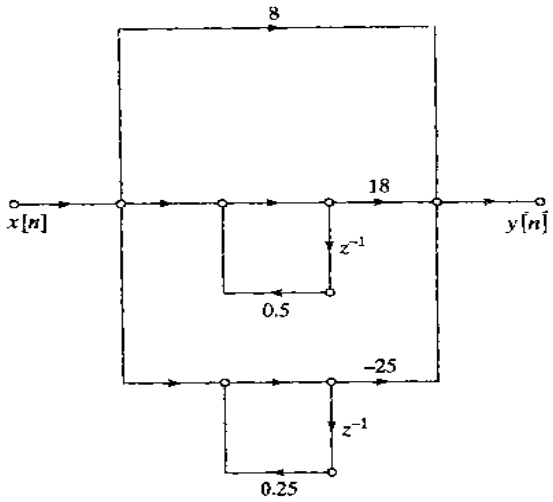


图 6.22　用一阶系统的例 6.6 的并联型结构

6.3.4　IIR 系统中的反馈

本节中全部流图都有反馈回路；也就是说，它们都有一个闭合的路径，该路径从某一节点出发，以箭头方向穿过某些支路又回到那个节点。在流图中这样的结构意味着在回路内某一节点变量直接或间接地决定于它自己。图 6.23(a)示出一个简单的例子，它表示如下差分方程：

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{6.39}$$

为了产生无限长脉冲响应，这类回路是必需要的(但不充分)。如果考虑一个没有反馈回路的网络就能看出这一点。这时从输入到输出的任何路径能通过每个延迟单元仅一次。因此，输入和输出间最长延迟就一定发生在网络中通过全部延迟单元的那条路径上。这样，对于一个没有回路的网络脉冲响应不会比网络中延迟单元的总数还要长。由此可以得出：如果网络没有回路，那么系统函数仅有零点($z=0$ 的极点除外)，并且零点的个数不会多于网络中延迟单元的个数。

再回到图 6.23(a)这个简单例子上来，可以看到，当输入是单位样本序列时，这个单一输入样本在反馈回路中由于乘了一个常数 a，要么以增长幅度($|a|>1$)或以衰减幅度($|a|<1$)持续不断地循环，所以脉冲响应就是 $h[n]=a^n u[n]$。这就是反馈能产生无限长脉冲响应的方式。

如果一个系统有极点，那么对应的方框图或信号流图就一定有反馈回路。另一方面，系统函数既无极点，网络内又无回路对脉冲响应为有限长而言就是充分的了。图 6.23(b)示出的网络具有一个回路，但脉冲响应却是有限长的。这是由于系统函数的极点与一个零点相抵消的缘故；对图 6.23(b)，即

$$H(z) = \frac{1 - a^2 z^{-2}}{1 - az^{-1}} = \frac{(1 - az^{-1})(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})}$$
$$= 1 + az^{-1} \qquad (6.40)$$

该系统的脉冲响应是 $h[n] = \delta[n] + a\delta[n-1]$。这个系统就是属于一般称为**频率采样系统**的 FIR 系统的一个简单例子。在习题 6.30 和习题 6.37 中要更详细地考虑这类系统。

网络中的回路在实现由网络所表示的计算中提出了某些特殊问题。正如已经讨论过的，必须有可能依次计算出网络中的节点变量，以便需要时全部必要的值都可资利用。在某些情况下，没有办法去安排这些计算，以使得信号流图中的节点变量都能依次计算出来。这样的网络是**不可计算的**（Crochieve and Oppenheim. 1975）。图 6.23(c)示出一个简单的不可计算网络。该网络的差分方程是

$$y[n] = ay[n] + x[n] \qquad (6.41)$$

在这种形式中，无法计算 $y[n]$，因为式子右边涉及到要想计算的量。信号流图是不可计算的这一点并不意味着由流图代表的方程是不能解的；事实上，(6.41)式的解就是 $y[n] = x[n]/(1-a)$。它只是指该流图不代表一组差分方程，而这组差分方程是可以逐次求出节点变量的。一个流图可计算性的关键是全部回路都必须至少包含一个单位延迟单元。因此，在处置用流图表示线性时不变系统实现时，必须特别小心不要造成无延迟的回路。习题 6.28 讨论含有一个无延迟回路的系统。习题 7.45 说明如何会引入一个无延迟回路。

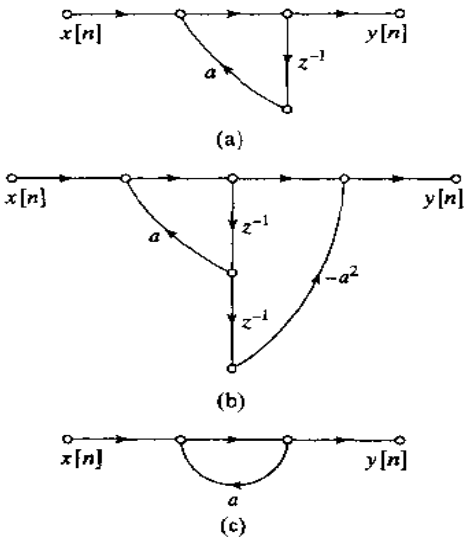


图 6.23 (a) 具有反馈回路的系统；(b) 具有反馈回路的 FIR 系统；(c) 不可计算系统

6.4 转置形式

线性信号流图理论为将信号流图变换成不同的形式，而保持输入和输出间总的系统函数不变给出了各种方法。其中这一称为**流图倒置**或**转置**，用它可以导得一组转置系统结构，这些结构为上一节讨论的结构提供了某些有用的补充。

将网络中所有支路的方向颠倒，但保持支路增益不变，并将输入和输出也颠倒过来，以使得源节点变成汇节点，汇节点变成源节点，这样就完成了一个流图的转置，对单输入/输出系统，若输入和输出节点也互换的话，那么所得流图与原流图具有相同的系统函数。虽然我们将不正式证明这一结果①，但用两个例子来说明确实如此。

例 6.7 没有零点的一阶系统的转置型

对应于图 6.24 中的流图的一阶系统有系统函数

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad (6.42)$$

① 该定理可以直接由信号流图理论中的梅森增益公式得出（Mason and Zimmermann, 1960, Chow and Cassignol, 1962；或 Phillips and Nagle, 1995）。

为了得到该系统的转置形式，将全部支路箭头方向颠倒，将原输入现取为输出，原来的输出现为输入，就得到图 6.25。通常习惯总是将输入放在图的左边，输出放在右边，这样转置网络就成了图 6.26。将图 6.24 和图 6.26 比较一下就可以注意到唯一的差别在于：图 6.24 中是将**延迟**输出序列 $y[n-1]$ 乘以系数 a，而在图 6.26 中则是将 $y[n]$ 乘以系数 a，然后再延迟。因为这两种运算是可以交换的，所以凭直观就能看出：图 6.24 原系统与其相应的转置系统图 6.26 有相同的系统函数。

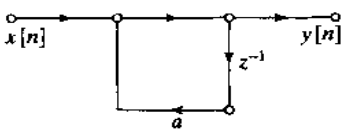


图 6.24　简单一阶系统流图

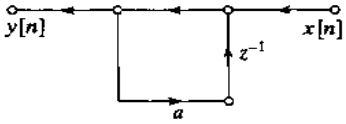


图 6.25　图 6.24 的转置形式

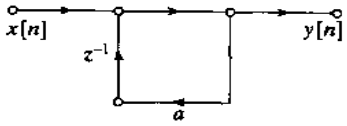


图 6.26　将输入放在左边重画图 6.25 的结构

例 6.7 直接就能看出原系统与它的转置有相同的系统函数。然而，对于更为复杂的图，这一结论往往不是这样显而易见的。现用下例给予说明。

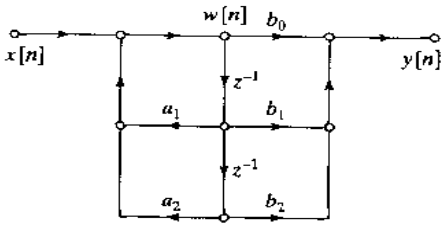


图 6.27　例 6.8 的直接 II 型结构

例 6.8　基本二阶节的转置型

考虑图 6.27 的基本二阶节，该系统的差分方程是：

$$w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n] \tag{6.43a}$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2] \tag{6.43b}$$

其转置流图如图 6.28 所示，它的差分方程是：

$$v_0[n] = b_0 x[n] + v_1[n-1] \tag{6.44a}$$

$$y[n] = v_0[n] \tag{6.44b}$$

$$v_1[n] = a_1 y[n] + b_1 x[n] + v_2[n-1] \tag{6.44c}$$

$$v_2[n] = a_2 y[n] + b_2 x[n] \tag{6.44d}$$

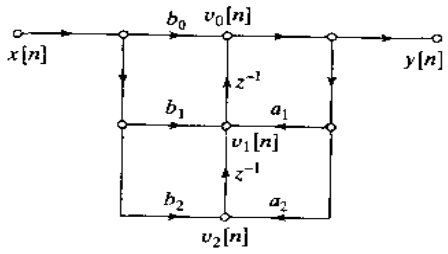


图 6.28　例 6.8 的转置直接 II 型结构

(6.43a)～(6.43b)式和(6.44a)～(6.44d)式是从输入样本 $x[n]$ 构成输出样本 $y[n]$ 的不同方法。这两组差分方程是等效的，这一点不是立刻很清楚的。证明这种等效的一种方法是在两组方程的两边用 z 变换表示，在两种情况下求出比值为 $Y(z)/X(z)=H(z)$，再比较结果。另一种办法是将式(6.44d)代入式(6.44c)，再将所得结果代入式(6.44a)，最后将结果代入式(6.44b)。这个结果就是

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \tag{6.45}$$

因为图 6.27 的网络是直接 II 型结构，容易看出，图 6.27 系统的输入和输出也满足(6.45)式的差分方程。因此，在初始松弛条件下，图 6.27 和图 6.28 的系统是等效的。

转置定理能用于目前已经讨论过的任何结构上去。例如，将它用于图 6.14 的直接 I 型结

构就是图 6.29;类似地,图 6.15 直接Ⅱ型结构的转置结构就是图 6.30。很清楚,如果一个信号流图被转置的话,延迟支路数和系数的个数都保持原样,因此转置后的直接Ⅱ型结构也是一种规范型结构。

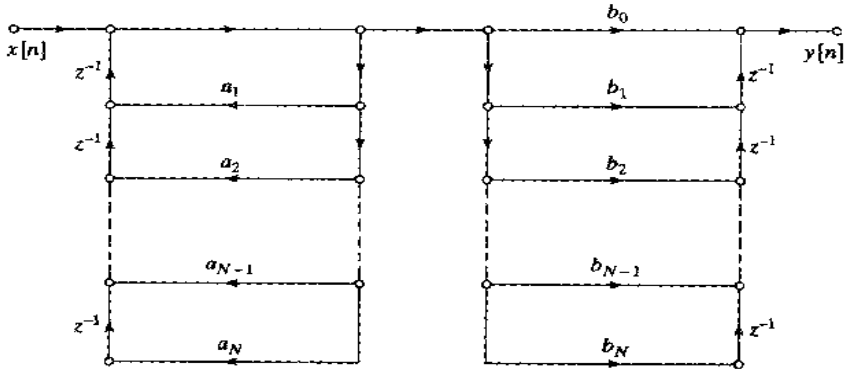


图 6.29　将转置定理应用于图 6.14 的直接Ⅰ型结构得到的一般流图

将图 6.15 与图 6.30 作一比较,一个重要的差别是显然的。直接Ⅱ型结构是首先实现极点,然后实现零点,而转置的直接Ⅱ型结构是先实现零点,再实现极点。在用有限精度数字实现量化存在时,或用离散时间模拟实现噪声存在时,这些差别就显得重要了。

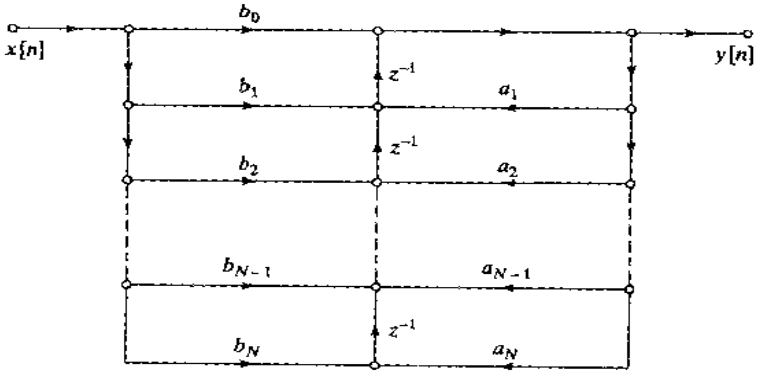


图 6.30　将转置定理应用于图 6.15 的直接Ⅱ型结构得到的一般流图

当将转置定理应用于级联或并联型结构时,单个的二阶系统可以用其转置结构代替。例如,将转置定理应用于图 6.18 就得出 3 个转置直接Ⅱ型节(如 6.8 一样)的级联,其系数与图 6.18 是相同的,但颠倒了级联的次序,类似的结论对于图 6.20 的转置也是一样。

转置定理进一步强调了对于任何给定的有理系统函数而言,存在着无数种实现结构。转置定理为产生新的结构给出了一种简便的方法。在 6.6 节我们将讨论另外几种 IIR 结构,但是,用有限精度运算实现系统的问题已经促使比我们这里讨论的多得多的各种等效结构出现了,因此,我们仅集中在最常用的一些结构上。

6.5 FIR 系统的基本网络结构

6.3 节和 6.4 节讨论的直接型、级联型和并联型结构是 IIR 系统最一般的基本结构。这些结构是建立在系统函数既有极点又有零点的假定前提之上的。虽然对 IIR 系统的直接型和级联型作为一种特例也包括了 FIR 系统，但是对于 FIR 系统还有另外一些特殊形式。

6.5.1 直接型

对因果的 FIR 系统，其系统函数仅有零点(除 $z=0$ 的极点外)，并且因为系数 a_k 全为零，所以(6.9)式的差分方程就简化为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.46}$$

该式可以认为是 $x[n]$与单位脉冲响应的直接卷积，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \begin{cases} b_n, & n = 0,1,\cdots,M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{6.47}$$

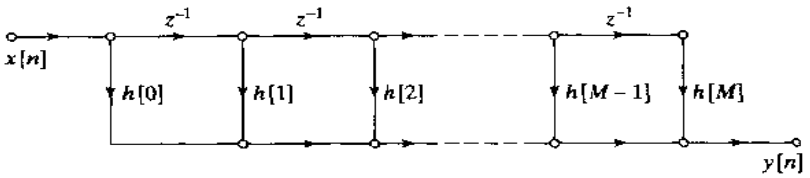


图 6.31 FIR 系统的直接型实现

这样图 6.14 和图 6.15 的直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构就都变成图 6.31 的直接型 FIR 结构。由于延迟单元链跨接图的顶部，这种结构也称为**抽头延迟线**结构，或称**横向滤波器**结构。从图 6.31 可见，沿着这条链每一抽头的信号被适当的系数(脉冲响应值)加权，然后将所得乘积相加就得到输出 $y[n]$。

将转置定理应用于图 6.31，或等效地将图 6.29 或图 6.30 的系数 a_k 都置成零，就可以得出 FIR 的转置直接型，其结果如图 6.32 所示。

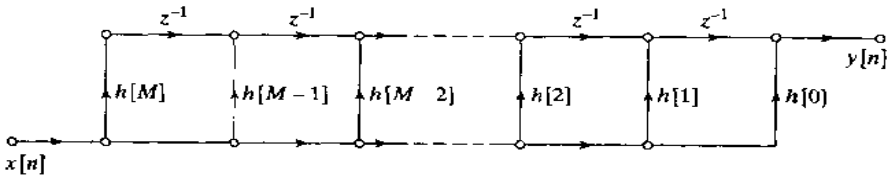


图 6.32 图 6.31 网络的转置

6.5.2 级联型

将多项式系统函数因式化就可得到 FIR 系统的级联型，这就是将 $H(z)$表示为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2} \tag{6.48}$$

这里 $M_s=[(M+1)/2]$是不大于$(M+1)/2$ 的最大整数。如果 M 是奇数，这些系数 b_{2k}中的一个为零，因为 $H(z)$在那种情况下会有奇数实零点。(6.48)式的流图如图 6.33 所示。在形式上它与图 6.18 是一致的，只是系数 a_{1k}和 a_{2k}全是零。图 6.33 中每个二阶节用的都是图6.31的直接接型。另一种选择是用转置直接型的二阶节，或者等效为对图 6.33 应用转置定理。

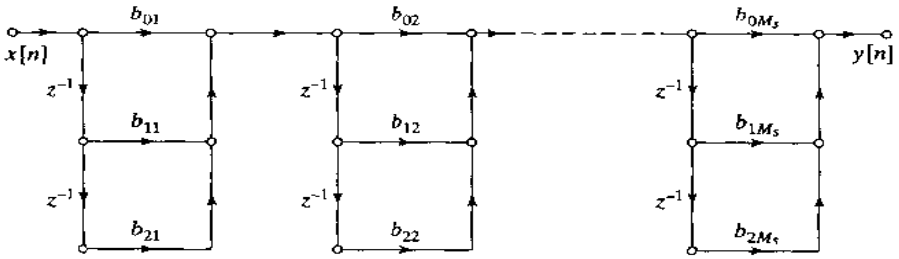


图 6.33　FIR 系统的级联型实现

6.5.3　线性相位 FIR 系统的结构

在第 5 章已证明如果单位脉冲响应满足如下对称条件：

$$h[M-n] = h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \tag{6.49a}$$

或

$$h[M-n] = -h[n], \qquad n = 0,1,\cdots,M \tag{6.49b}$$

因果 FIR 系统就有广义线性相位特性。

有了这两个条件中的任何一个，系数乘法器的数目都能基本上减半。为了看出这点，考虑离散卷积方程的下面运算，假定 M 是偶整数，即对应于Ⅰ类和Ⅲ类系统：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=M/2+1}^{M} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k] \end{aligned}$$

对Ⅰ类系统，用(6.49a)式可得

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2] \tag{6.50}$$

对Ⅲ类系统，用(6.49b)式可得

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) \tag{6.51}$$

对于 M 是奇整数的情况，对Ⅱ类系统对应的方程是

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) \tag{6.52}$$

而对Ⅳ类系统则为

$$y[n]=\sum_{k=0}^{(M-1)/2}h[k](x[n-k]+x[n-M+k]) \tag{6.53}$$

(6.50)～(6.53)式意味着这些结构只有 $M/2+1$，$M/2$ 或 $(M+1)/2$ 个系数乘法器，而不是像图 6.31 的一般直接型结构那样要 M 个系数乘法器。图 6.34 指出的结构就是(6.50)式，而图 6.35 的结构就是(6.52)式。

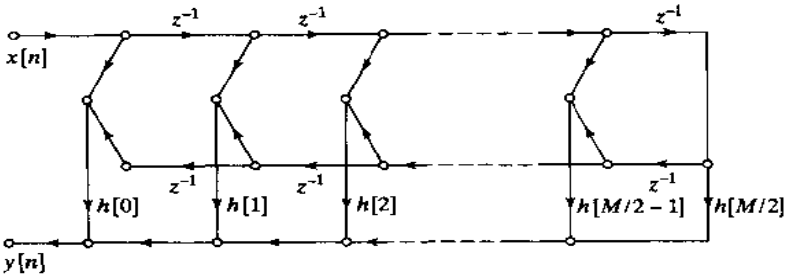


图 6.34　当 M 为偶整数时 FIR 线性相位系统的直接型结构

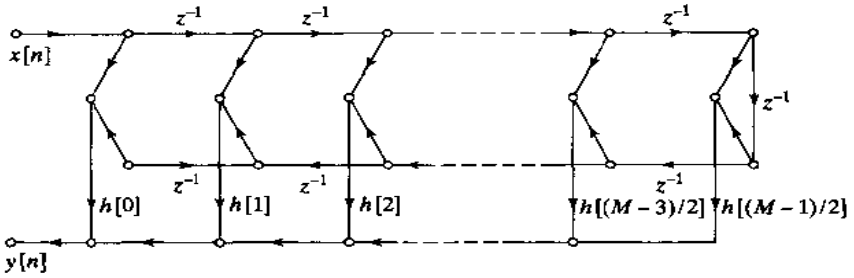


图 6.35　当 M 为奇整数时 FIR 线性相位系统的直接型结构

5.7.3 节有关线性相位系统的讨论已指出，(6.49a)式和(6.49b)式的对称条件导致 $H(z)$ 的零点以镜像成对方式出现。就是说，若 z_0 是 $H(z)$ 的一个零点，那么 $1/z_0$ 也是 $H(z)$ 的一个零点。再者，如果 $h[n]$ 是实数，那么 $H(z)$ 的零点应以复数共轭成对形式出现。结果，不在单位圆上的实零点就以倒数对形式出现。不在单位圆上的复数零点就以 4 个为一组地出现，它们对应于复数共轭及其倒数。如果有一零点在单位圆上，它的倒数也就是它的共轭。这样，在单位圆上的复数零点就可很方便地成对分组。在 $z=\pm1$ 的零点，其倒数和复数共轭都是它们自己。图 6.36 综合出了这 4 种情况，其中在 $z_1, z_1^*, 1/z_1$ 和 $1/z_1^*$ 的零点就是作为 4 个一组。在 z_2 和 $1/z_2$ 的零点就是两个一组，同样在 z_3 和 z_3^* 零点也是成对的一组。在 z_4 的零点就

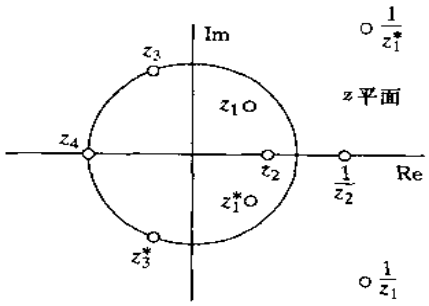


图 6.36　线性相位 FIR 滤波器的零点对称性

是单个的。如果 $H(z)$有如图 6.36 所示的零点，那么它就能分解成一阶、二阶和四阶因子的乘积。这些因子中每一个都是一个多项式，其系数都具有和 $H(z)$的系数相同的对称性；也就是说，每个因子都是一个以 z^{-1}为变量的线性相位多项式。因此，该系统就能够实现为一阶、二阶和四阶系统的级联。例如，对应于图 6.36 零点的系统数可以表示成

$$H(z) = h[0](1 + z^{-1})(1 + az^{-1} + z^{-2})(1 + bz^{-1} + z^{-2}) \times (1 + cz^{-1} + dz^{-2} + czz^{-3} + z^{-4}) \tag{6.54}$$

式中

$$a = (z_2 + 1/z_2),\ b = 2\mathrm{Re}\{z_3\},$$
$$c = -2\mathrm{Re}\{z_1 + 1/z_1\},\ d = 2 + |z_1 + 1/z_1|^2$$

这种表示给出了一种由线性相位基本单元组成的级联结构。能够看出，该系统函数多项式的阶是 $M=9$，而不同系数乘法器的数目是 5。这就与图 6.34 实现的线性相位直接型系统所要求的系数乘法器数目（$(M+1)/2=5$）相同。因此，不用增加乘法器就得到了一个利用短的线性相位 FIR 系统级联的标准结构。

6.6 有限精度数值效应概述

已经看到，一个特定的线性时不变离散时间系统可以用各种不同的运算结构来实现。对简单的直接型结构可供考虑的选择方法之一就是理论上等效的这些不同结构，当用有限数值精度实现时，其特性可以是不相同的。这一节将对在实现离散时间系统中主要的数值问题作一简要介绍。这些有限字长效应的更为详细的分析将在 6.7 节到 6.9 节给出。

6.6.1 数的表示法

在离散时间系统的理论分析中，一般都假定信号值和系统的系数都是用真正的数的系统表示的。然而，用模拟离散时间系统，电路元件的有限精度使得准确地实现系数很困难。同样，当实现数字信号处理系统时，必须把信号和系数用某种数字式的数制来表示，而这些数字式的数制总是有限精度的。大多数数字计算机或专用硬件都采用二进制数制。

有限数值精度问题已经在 4.8.2 节关于 A/D 转换时讨论过。在那里已经指出。从 A/D 转换器来的输出样本是被量化了的，因此可以用定点二进制数来表示。为了在运算中紧凑和简单起见，二进制数位中的一位设为该数的代数符号位。诸如**像原码、反码和补码**这些形式都是可以用的，但补码最常用[①]。一个实数用无限精度的补码可以表示为如下形式：

$$x = X_m\left(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}\right) \tag{6.55}$$

这里 X_m 是任意幅度加权因子，而 b_i 是 0 或 1，b_0 称为**符号位**。若 $b_0=0$，则 $0 \leqslant x \leqslant X_m$，若 $b_0=1$，则 $-X_m \leqslant x < 0$。因此，任何其绝对值小于或等于 X_m 的实数都能用(6.55)式表示。一个任意实数 x 要能准确地用二进制数表示都要求有无限位数。正如在 A/D 转换中看到的，若仅用$(B+1)$位的有限位数，那么(6.55)式的表示式必须修改成

① 有关二进制数制及其相应运算的详细叙述可见（Knuth，1997）的著作。

$$\hat{x} = Q_B[x] = X_m(-b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i})$$
$$= X_m \hat{x}_B \tag{6.56}$$

所得到的这个二进制表示的数已被量化了，使得数之间的最小差是

$$\Delta = X_m 2^{-B} \tag{6.57}$$

在这种情况下，已量化了的数就在 $-X_m \leqslant x < \hat{x}_m$ 范围内。$\hat{x}$ 的小数部分可以用定位符号表示为

$$\hat{x}_B = b_{0\diamond} b_1 b_2 b_3 \cdots b_B \tag{6.58}$$

这里◇代表二进制小数点。

将一个数量化到 $(B+1)$ 位的运算可以按舍入或截尾来完成，但是在任一情况下，量化都是一种非线性无记忆运算。图 6.37(a)和图 6.37(b)分别示出补码运算的舍入和截尾的输入/输出关系，图中对应 $B=2$。在考虑量化效应时，常定义**量化误差**为

$$e = Q_B[x] - x \tag{6.59}$$

对于补码舍入的情况，$-\Delta/2 < e \leqslant \Delta/2$；对补码截尾的情况，$-\Delta < e \leqslant 0$。①

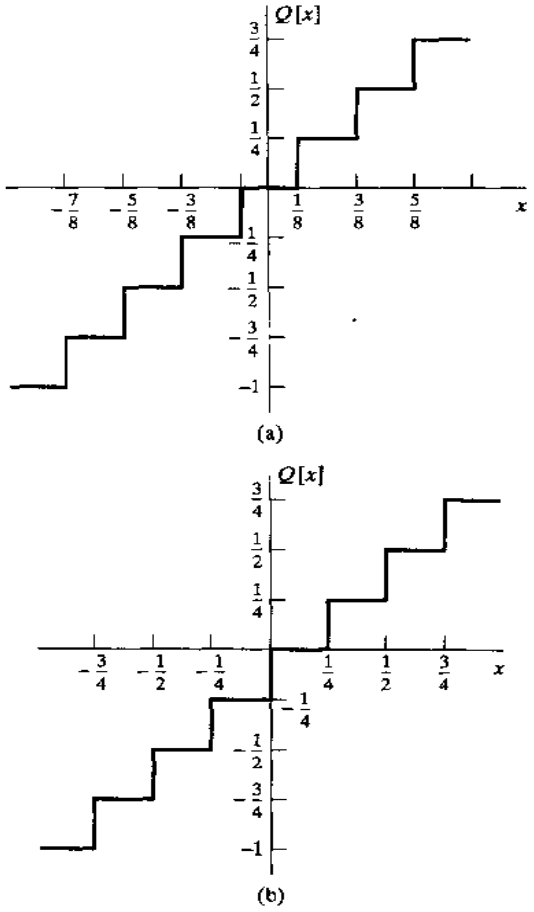


图 6.37 补码表示的非线性关系，$B=2$
(a) 舍入；(b) 截尾

如果一个数大于 X_m（溢出），就必须要以某种方法确定量化结果。在补码运算系统，当两个数相加，其和大于 X_m 时，就会出现这种需要。例如，考虑 4 位的补码数 0111，它的十进制数是 7。若将该数加上数 0001，那么进位就一直传到符号位，结果是 1000，以十进制表示就为 -8。因此，当发生溢出时，所得误差就可能非常大。图 6.38(a)示出的是包括正常的补码运算溢出效果的补码量化器。另一种办法如图 6.38(b)所示，称之为**饱和溢出**或**箝位**。这种处理溢出的方法一般在 A/D 转换时就是这样实现的，而且有时是用专用 DSP 微处理器实现两个补码数相加的。用饱和溢出，在发生溢出时，误差的大小不会突然增加；然而，这种处理溢出的方法的缺点是没有利用补码运算中下述这样一个有趣而有用的特性：**如果几个其和不会溢出的补码数相加，那么即使中间计算中某些和可能有溢出，但这些数的补码累加的结果仍是正确的。**

① 注意(6.56)式也能表示舍入或截尾任何 (B_1+1) 位二进制数表示的结果，这里 $B_1 > B$。这时 Δ 将由 $(\Delta - X_m 2^{-B_1})$ 代替作为量化误差大小的界限。

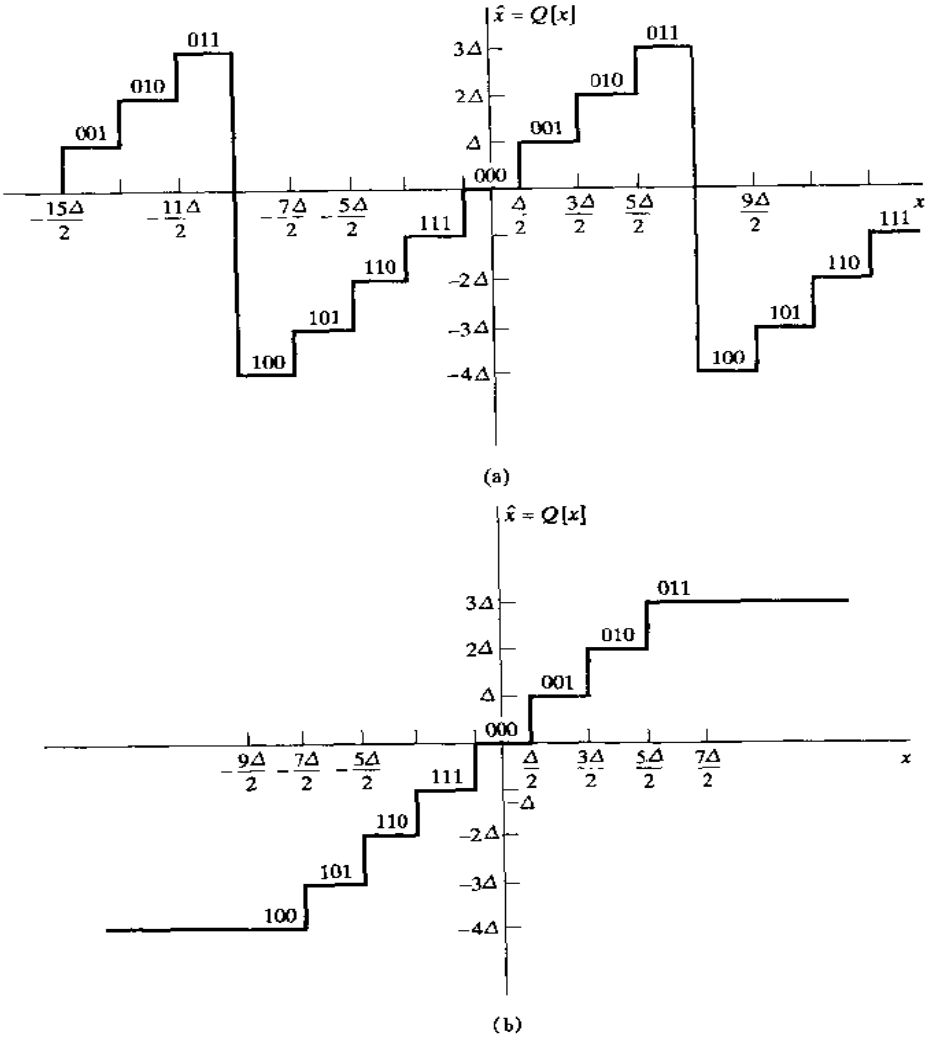


图 6.38　补码舍入
(a) 自然溢出；(b) 饱和溢出

量化和溢出都在数的数字表示中引入了误差。不幸的是要减小溢出而保持位数不变。只有增大 X_m，这样就正比地增大了量化误差。因此，要同时达到较宽的动态范围和较低的量化误差，在二进制数的表示中就必须增加位数。

到目前为止，我们只是简单地提到了量 X_m 是一个任意的幅度加权因子；然而，这个因子有几个有用的解释。在 A/D 转换中，X_m 是作为 A/D 转换器的满量程幅度。在这种情况下，X_m 或许代表系统的模拟部分中某一电压的一个实数。因此 X_m 用作把 $-1 \leqslant \hat{x}_B < 1$ 范围的二进制数与模拟信号幅度联系起来的一个定标常数。

在信号处理实现中，通常假定全部信号变量和系数都是二进制小数。因此，如果将一个

$(B+1)$位的信号变量乘以$(B+1)$位的系数，那么其结果就是$(2B+1)$位的小数，而这个$(2B+1)$位的小数又能很方便地用舍入或截尾最低有效位的方法减少到$(B+1)$位。利用这一约定，量X_m就能认为是一个幅度加权因子，它允许在数值上表示大于1的数。例如，在定点计算中，通常假设每个二进制数都有一个$X_m=2^c$的幅度加权因子。因此，一个$c=2$的值就意味着，该二进制数的小数点是真正位于(6.58)式的二进制字的b_2和b_3之间。通常这个幅度加权因子不是明显地表现出来的，而是隐含在实现的程序或硬件结构中。

关于幅度加权因子X_m的另一种考虑方法就引出**浮点表示法**，这时幅度加权因子的指数c称为**阶**，小数部分$\hat{x}_B$称为**尾数**。在浮点运算系统中，阶和尾数都表示成二进制数。浮点表示为保持既有宽的动态范围，又有小的量化噪声提供了一种方便的方法；然而，量化误差却以稍许不同的方式出现。

6.6.2 在系统实现中的量化

数值量化在线性时不变离散时间系统的实现中以几种方式产生影响。作为一个简单的说明，考虑一下图6.39(a)的方框图，该图示出序列$x[n]$是采样一个带限连续时间信号$x_c(t)$得到的，并作为一个线性时不变系统的输入。该系统函数是

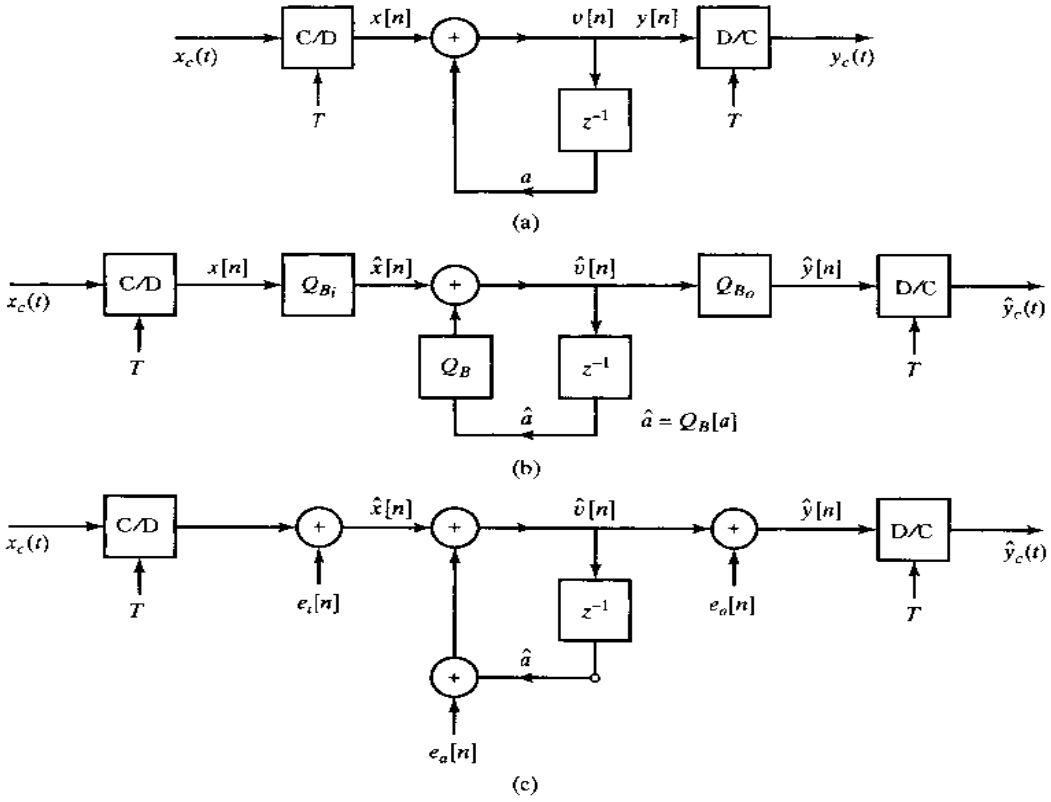


图6.39 一个模拟信号离散时间滤波的实现
(a) 理想系统；(b) 非线性模型；(c) 线性化模型

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \tag{6.60}$$

该系统的输出 $y[n]$又经理想带限内插转换到带限信号 $y_c(t)$。

图 6.39(b)是一个更加实际的模型。在实际装置中,采样是用$(B_i + 1)$位有限精度的 A/D 转换器完成的。系统用$(B+1)$位二进制运算来实现。在图 6.39(a)中系数 a 用$(B+1)$位精度来表示。延迟变量 $\hat{v}[n-1]$也是用$(B+1)$位寄存器存储的,并且当该$(B+1)$位数 $\hat{v}[n-1]$乘以$(B+1)$位数 $\hat{a}$时,其乘积将有$(2B+1)$位长。若假设用的是$(B+1)$位的加法器,则$\hat{a}\hat{v}[n-1]$乘积在它与(B_i+1)位输入样本 $\hat{x}[n]$相加之前必须被量化(也即舍入或截尾)到$(B+1)$位。当 $B_i < B$ 时,(B_i+1)位的输入样本能够放在$(B+1)$位二进制字的任何地方,并具有适当的符号位扩充。不同的选取对应于输入的不同加权。系数 a 已经被量化了,因此即使撇开其它的量化误差,这个系统响应一般不可能是与图 6.39(a)相同的。最后,由该方框图表示的差分方程迭代计算出的$(B+1)$位样本 $\hat{v}[n]$是按(B_0+1)位 D/A 转换器转换为模拟信号的,当 $B_0 < B$ 时,在 D/A 转换之前该输出样本又必须被量化。

虽然图 6.39(b)的模型是准确的,但分析困难。由于量化器以及在加法器中可能的溢出,图 6.39(b)的系统是非线性的。同时,在系统中许多点上都引入了量化误差。这些误差的影响是不可能精确分析的,因为它们与输入信号有关,而一般认为输入信号是未知的。因此,不得不采用几种不同的近似方法来简化这类系统的分析。

对像图 6.39(a)中的系数 a 这样的系统参数量化的影响一般是由在数据转换或在实现差分方程时的量化效应单独来确定的。这就是说,一个系统函数的理想系数先用它们的量化值来代替,然后测试所得到的响应函数,看看量化是否已经将特性破坏到了不能接受的程度。对于图 6.39 的例子,若将实数 a 量化到$(B+1)$位,就必须考虑所得到的系统,其系统函数

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}z^{-1}} \tag{6.21}$$

是否足够接近要求的(6.60)式所给出的系统函数 $H(z)$。因为只有 $2^{(B+1)}$个不的$(B+1)$位二进制数,所以 $H(z)$的极点只能出现在 z 平面实轴上 $2^{(B+1)}$个不同的位置上。在 6.7 节将以更一般的项来讨论这种分析方法。

图 6.39(b)系统的非线性引起了在线性系统中不可能发生的现象。明确地说,譬如这样的系统可能呈现**零输入极限环**现象,借此在输入一直为非零值之后变为零时,输出周期性振荡。极限环既可由量化也可以由溢出引起。虽然这类现象的分析是困难的,但是某些有用的近似结果已经得到。极限环问题将在 6.9 节讨论。

如果在数字实现的设计中谨慎从事的话,能保证溢出很少出现,而量化误差也是小的。在这个条件下,图 6.39(b)的系统表现得很像一个线性系统(带有量化系数)。在该系统中,在发生舍入或截尾的输入点、输出点以及网络内部一些点上都将引入量化误差。因此,就能以图 6.39(c)的线性化模型来代替图 6.39(b)的模型,其中这些量化器由加性噪声源代替(Gold and Rader, 1969; Jackson, 1970a, 1970b)。如果真正知道每个噪声源的话,那么图 6.39(c)就等效于图 6.39(b)。然而,如同在 4.8.3 节讨论过的,如果假定在 A/D 转换中的量化噪声是一个随机噪声模型,那么就可得出一些有用结果。这种办法也能用来分析线性系统数字实现中的运算量化效应。如同在图 6.39(c)中所见,每个噪声源引入一个随机信号,该信号被系统的

不同部分处理，但是因为已假定系统的所有部分都是线性的，所以可以用叠加原理来计算总的影响。在 6.8 节将对几种重要系统说明这种分析方法。

对图 6.39 这个简单的例子，在结构的选择上几乎没有什么灵活性。然而，对高阶系统，已经知道有很大的结构选择余地。某些结构对系数量化的灵敏度比另一些要小一些。类似地，由于不同的结构有不同的量化噪声源，并且由于这些噪声源在系统中又以不同的方式被滤波，所以我们将会发现在理论上等效的一些结构，当用有限精度运算实现它们时，有时会有很大的特性品质差异。

6.7 系数量化效应

线性时不变离散时间系统一般是用来完成某种滤波作用。有关 FIR 和 IIR 滤波器的各种设计方法将在第 7 章讨论。这些设计方法一般都假设某一特定形式的系统函数。滤波器设计过程的结果是某一个系统函数。对该系统函数必须要从无穷多的、理论上等效的实现中选择一种实现结构(一组差分方程)。虽然，在实现中几乎总是关心要求最少的硬件或软件复杂性，但是单独根据这一标准来选择实现结构又常是不可能的。在 6.8 节将会看到，实现结构决定了系统内部产生的量化噪声。同时，某些结构对于系数的波动比另一些要更为灵敏些。正如在 6.6 节所指出的，研究这些问题的标准途径是单独来对待它们。这一节就考虑系统参数量化所产生的影响。

6.7.1 IIR 系统系数量化效应

当对一个有理系统函数或相应的差分方程的系数量化时，系统函数的零极点在 z 平面就会移动到新的位置上去。这就等效于频率响应受到扰动而偏离原来的频率响应。如果系统实现结构对系数的扰动具有高的灵敏度，那么所得到的系统可能就不再满足原设计指标，甚至一个 IIR 系统都可能变成是不稳定的。

对于一般情况，详细的灵敏度分析是很复杂的，况且在数字滤波器实现的具体情况下通常其价值也很有限。利用丰富的仿真工具，通常很容易做到将在实现系统中所用到的差分方程系数量化，然后计算这个频率响应，并将它与期望的频率响应函数作比较。然而，即便在一些具体情况下一般都有必要作系统仿真，但是一般来说研究系统函数是如何受差分方程系数量化影响的仍是值得的。例如，对应于两种直接型结构的系统函数表示式是两个多项式之比

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} \tag{6.27}$$

系数$\{a_k\}$和$\{b_k\}$在两种直接型实现结构中都是理想的无限精度系数。如果将这些系数量化，就得到系统函数为

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} \hat{b}_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{M} \hat{a}_k z^{-k}} \tag{6.27}$$

式中 $\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$ 和 $\hat{b}_k = b_k + \Delta b_k$ 都是量化系数，它们用量化误差 Δa_k 和 Δb_k 代表与原系数的偏差。

现在来研究系数误差是如何影响分母和分子多项式的根的（$H(z)$的极点和零点）。很显然，在多项式中的所有系数误差都会影响每一个多项式的根，因此每个极点和零点都分别受分母和分子多项式中所有量化误差的影响。更具体一点说，Kaiser(1966)证明：若极点（或零点）是紧密集束在一起的话，那么在分母（分子）系数上小的误差对直接型结构就可能会引起极点（零点）大的偏移。因此，如果这些极点（零点）是紧密集束在一起的话（这就对应于一个窄带带通滤波器，或者窄带低通滤波器），那么就能估计到直接型结构的极点对系数量化误差是非常灵敏的。另外，Kaiser 的分析还指出：密集的极点（零点）愈多，灵敏度就愈高。

分别由(6.30)式和(6.35)式给出的级联型和并联型系统函数是由二阶直接型系统的组合组成的。然而，在两种情况中每对复数共轭极点都是独立于其它极点而实现的。因此，在一对特定极点上的误差与系统函数其它极点到该极点对的距离无关。对于级联型结构，对于零点也可以得到相同的结论，因为零点也是作为独立的二阶因子实现的。因此，级联型对系数量化灵敏度一般比等效的直接型实现要小得多。

由(6.35)式可见，并联型系统函数的零点是隐含实现的。它们可以把这些已量化的二阶节合并起来以得到一个公共分母而隐含地得到。因此，一个特定的零点受全部二阶节的分子和分母系数中的量化误差影响。然而，对大多数实际滤波器设计来说，也发现并联型对系数量化的灵敏度比等效的直接型小得多，这是因为二阶节子系统对量化不是非常灵敏的缘故。在很多实际滤波器中，零点往往较宽地分布在单位圆周围，或者在某些情况下它们可能全都位于 $z = \pm 1$ 处。对后者的情况，零点在频率 $\omega = 0$ 和 $\omega = \pi$ 附近主要给出比要求更大的衰减，因此即使零点偏离 $z = \pm 1$，也不至于明显恶化系统特征。

6.7.2 一个椭圆滤波器系数量化的例子

作为阐明系数量化效应，考虑一个带通 IIR 椭圆滤波器，该滤波器设计成满足如下特性：

$$0.99 \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1.01, \qquad 0.3 \leqslant \omega \leqslant 0.4\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.01(\text{即} -40\text{dB}), \qquad \omega \leqslant 0.29\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.01(\text{即} -40\text{dB}), \qquad 0.41\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$

要求一个十二阶的滤波器，以满足这些非常锐截止的窄带指标。

在滤波器设计过程中，级联型的系数是用 32 位浮点精度算出的。这些就被当作“未量化”的系数。表 6.1 给出了这样的 6 个二阶节[按(6.30)式定义]系数。图 6.40(a)示出未量化系统的以dB计的对数幅度响应，而图6.40(b)则示出未量化系统通带内（即$0.3 \leqslant \omega \leqslant 0.4\pi$）的

表 6.1 十二阶椭圆滤波器未量化的级联型系数

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	0.738 409	−0.850 835	0.135 843	0.026 265	0.135 843
2	0.960 374	−0.860 000	0.278 901	−0.444 500	0.278 901
3	0.629 449	−0.931 460	0.535 773	−0.249 249	0.535 773
4	1.116 458	−0.940 429	0.697 447	−0.891 543	0.697 447
5	0.605 182	−0.983 693	0.773 093	−0.425 920	0.773 093
6	1.173 078	−0.986 166	0.917 937	−1.122 226	0.917 937

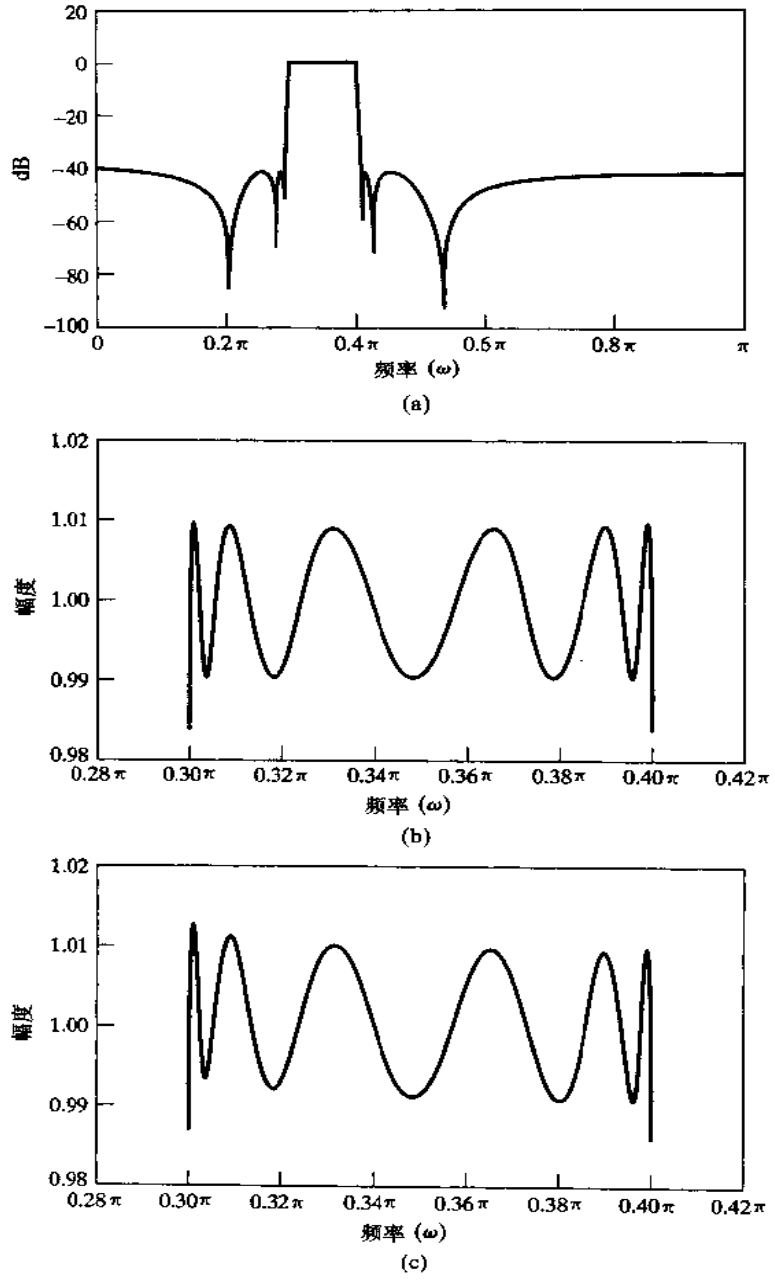
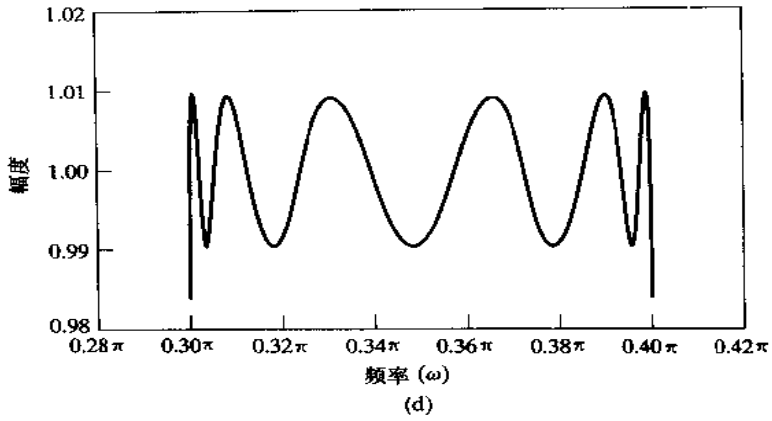


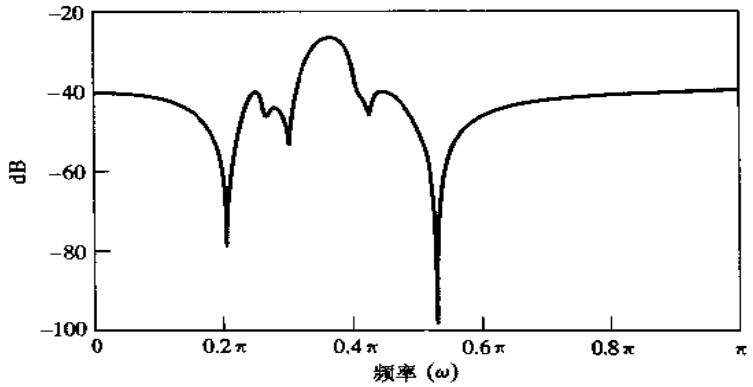
图 6.40　IIR 系数量化举例

(a) 未量化椭圆带通滤波器的对数幅度；(b) 未量化级联型通带内幅度；

(c) 用 16 位系数量化的级联型结构通带内幅度；



(d)



(e)

图 6.40(续)　(d) 用 16 位系数量化的并联结构通带内幅度；
(e) 用 16 位系数量化的直接型对数幅度

幅度响应。

为了说明系数如何量化并如何用定点数来表示，现将表 6.1 中的系数量化到 16 位精度。所得系数如表 6.2 所示。表中定点系数用十进制整数乘以 2 的幂的加权因子给出。将该十进制整数转换为二进制数就可以得出它的二进制表示。在定点实现中，加权因子是以数据移位方式仅隐含地表示的，这种数据移位对于在与其它结果相加以前把结果的二进制小数点对齐是必需的。要注意，这些系数二进制表示的小数点不总是在同一个位置上。例如，凡加权因子为 2^{-15}的所有系数其二进制小数点都在符号位 b_0 和最高的小数位 b_1 之间，如(6.58)式所示。然而，其值不超过 0.5 的数，譬如系数 b_{02}，就可以向左移一位或更多的位①。因此，b_{02}的二进制小数点真正是在符号位的左边。另一方面，其值超过 1，但小于 2 的数，譬如 a_{16}，必须将其二进制小数点右移一位，也即在(6.58)式中 b_1 和 b_2 之间。

图 6.40(c)示出量化后的直接型实现在通带内的幅度响应。这个频率响应在通带内仅仅

① 应用不同的二进制小数点位置在系数上可保持较高的精度，但使得编程或系统结构复杂化。

稍微有些变化。

表 6.2　十二阶椭圆滤波器 16 位量化的级联型系数

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	$24\ 196\times2^{-15}$	$-27\ 880\times2^{-15}$	$17\ 805\times2^{-17}$	$3\ 443\times2^{-17}$	$17\ 805\times2^{-17}$
2	$31\ 470\times2^{-15}$	$-28\ 180\times2^{-15}$	$18\ 278\times2^{-16}$	$-29\ 131\times2^{-16}$	$18\ 278\times2^{-16}$
3	$20\ 626\times2^{-15}$	$-30\ 522\times2^{-15}$	$17\ 556\times2^{-15}$	$-8\ 167\times2^{-15}$	$17\ 556\times2^{-15}$
4	$18\ 292\times2^{-15}$	$-30\ 816\times2^{-15}$	$22\ 854\times2^{-15}$	$-29\ 214\times2^{-15}$	$22\ 854\times2^{-15}$
5	$19\ 831\times2^{-15}$	$-32\ 234\times2^{-15}$	$25\ 333\times2^{-15}$	$-13\ 957\times2^{-15}$	$25\ 333\times2^{-15}$
6	$19\ 220\times2^{-14}$	$-32\ 315\times2^{-15}$	$15\ 039\times2^{-14}$	$-18\ 387\times2^{-14}$	$15\ 039\times2^{-14}$

为了得到其它等效结构，级联型系统函数必须重新安排成某种不同的形式。例如，确定用并联型结构(未量化系统函数按部分分式展开)的话，所得系数仍按前述量化到 16 位精度，其在通带内的频率响应如图 6.40(d)所示。

如果将未量化级联型分子和分母中的二阶因子都乘在一起得到十二阶的分子和分母多项式，并且将所得到的系数都量化到 16 位，并用直接型结构实现，其频率响应的对数幅度如图 6.40(e)所示。在这种情况下，通带内响应实际上已被量化破坏了。将图 6.40(e)与图 6.40(a)比较一下可看出，在通带两边分开较宽的零点(近似在 $\omega=0.2\pi$ 和 0.54π)并未从单位圆上移开。然而，未量化的系统在单位圆上刚好在阻带边缘有一对零点，这些密集零点由于量化而从单位圆上移走，并由此给频率响应总的变坏增添了份量。

6.7.3　量化的二阶节的极点

刚才讨论的这个例子说明了级联型和并联型对系数量化效应的鲁棒性，并且也说明直接型高阶滤波器对系数量化效应是极为灵敏的。由于灵敏度的关系，除了二阶系统以外，直接型是很少采用的。[①] 因为级联型和并联型都能构成与规范直接型要求相同的存储量和相同的、或稍许多一点的计算量，因此这些标准结构使用最为广泛。更复杂的结构对很短字长可能更加鲁棒些，但是与同阶系统相比它们要求显著增加计算量。

甚至对用于实现级联和并联型的二阶系统而言，在改进对系统数量化的鲁棒性上仍有一些灵活性。考虑用直接型实现的一对共轭复数极点，如图 6.41 所示。用无限精度系数，该网络的极点在 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=re^{-j\theta}$ 处。然而，如果系数 $2r\cos\theta$ 和 $-r^2$ 是被量化的话，那么只可能有有限个不同的极点位置。这些极点必须位于 z 平面内的一个网格点上，该网格由同心圆(相应于 r^2 的量化)与垂直线(相应于 $2r\cos\theta$ 的量化)的交点所确定。图 6.42(a)示出一个 4 位量化(3 位加符号位)的这样一个网格；也就是说，r^2 是限在 7 个正值和零上，而 $2r\cos\theta$ 则限在 7 个正值、8 个负值

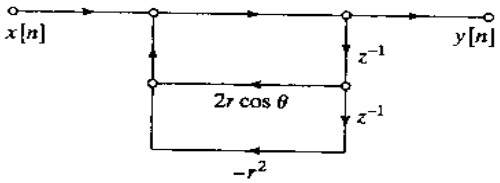


图 6.41　一对复数共轭极点的直接型实现

① 在语音合成中是个例外，在那里十阶和更高阶的系统照例都用直接型实现。因为在语音合成中，系统函数的极点分隔得比较开，所以这是可能的(Rabiner and Schafer. 1978)。

和零上。图 6.42(b)示出由 7 位量化(6 位加符号位)得到的一个较为密集的网格图。图 6.42 的图自然对 z 平面的其它每个象限都是镜像对称的。要注意的是,对直接型来说,网格点在实轴附近要更稀疏一些。因此,位于 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 附近的极点可能比在 $\theta=\pi/2$ 附近的极点偏移要多一些。当然,无限精度极点的位置非常接近这些可能有的量化极点之一总是可能的。这时,不管怎样,量化不会引起什么问题,但是一般来说量化总会使系统特性变坏的。

图 6.43 示出实现 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=re^{-j\theta}$ 极点的另一种二阶结构。这种结构已称为二阶系统的**耦合型**实现(Rader and Gold, 1967)。容易证明。图 6.41 和图 6.43 的系统对无限精度系数而言具有相同的极点。为了实现图 6.43 的系统,必须对 $r\cos\theta$ 和 $r\sin\theta$ 量化。因为这两个量分别是极点位置的实部和虚部,因此量化后的极点位置就是在 z 平面内均匀相间的水平和垂直线的交点。图 6.44(a)和图 6.44(b)分别示出对 4 位和 7 位量化可能的极点位置。在这种情况下,极点位置的密度在整个单位圆内都是均匀分布的。为要获得这个更加均匀的密度所付出的代价是要用两倍的系数乘法器。在某些情况下,对于以减少字长来获取更准确的极点位置,这个外加的计算量可以认为是合理的。

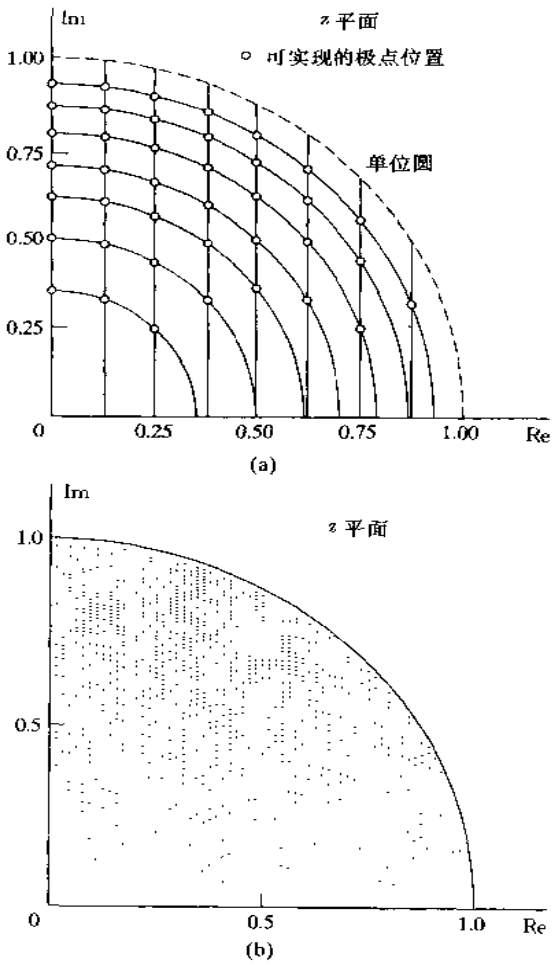


图 6.42 图 6.41 二阶 IIR 直接型系统的极点位置
(a) 4 位系数量化; (b) 7 位量化

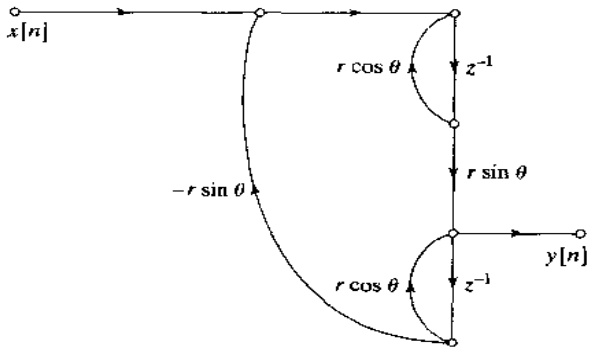


图 6.43 一对复数共轭极点的耦合型实现

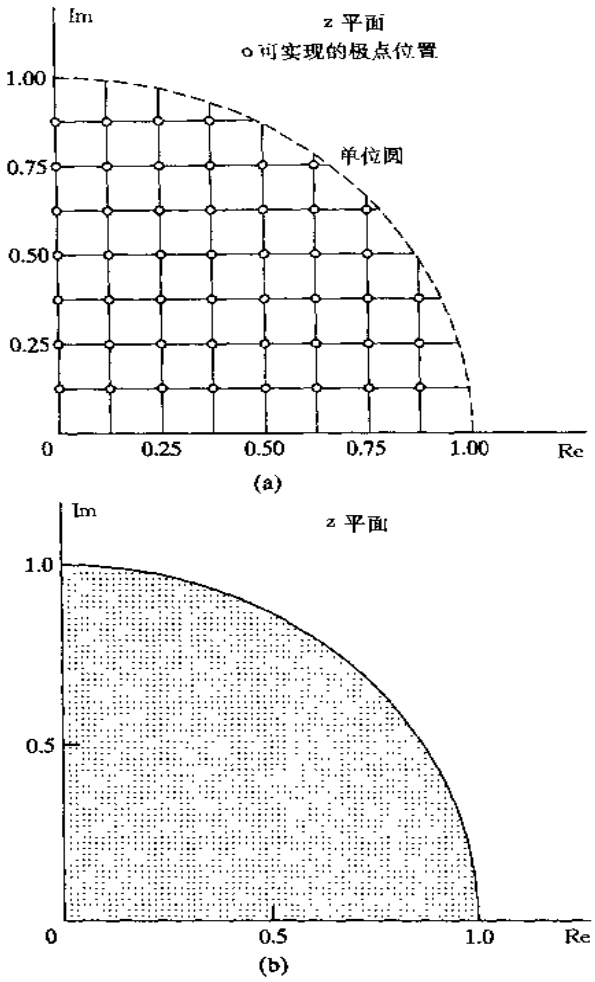


图 6.44　图 6.43 的耦合型二阶 IIR 系统的极点位置
(a) 系数的 4 位量化；(b) 7 位量化

6.7.4　FIR 系统系数量化效应

对于 FIR 系统，必须考虑的仅仅是系统函数零点的位置，因为对因果的 FIR 系统全部极点都在 $z=0$。虽然刚才已经看到直接型结构对高阶 IIR 系统应是避免采用的，但直接型结构对 FIR 系统则是最常用的。为了明白为什么是这样，现将直接型 FIR 系统的系统函数表示成如下形式：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M}h[n]z^{-n} \tag{6.64}$$

现在假定系数 $\{h[n]\}$ 被量化，得到一组新的系数 $\{\hat{h}[n]=h[n]+\Delta h[n]\}$。对已量化系统的系统函数就是

$$\hat{H}[z] = \sum_{n=0}^{M} \hat{h}[n]z^{-n} = H(z) + \Delta H(z) \tag{6.65}$$

式中

$$\Delta H(z) = \sum_{n=0}^{M} \Delta h[n]z^{-n} \tag{6.66}$$

据此，该量化系统的系统函数(因此也就是频率响应)与脉冲响应系数的量化误差是线性相关的。为此，该量化系统可以用图 6.45 来表示。该图指出未量化系统与一个误差系统并联，该误差系统的脉冲响应就是量化误差样本{$\Delta h[n]$}序列，而其系统函数就是相应的 z 变换 $\Delta H(z)$。

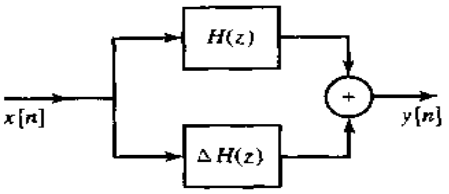


图 6.45　FIR 系统中系数量化的表示

研究直接型 FIR 结构灵敏度的另一种办法是考查零点对单位脉冲响应系数量化误差的灵敏度；当然，这也就是对多项式 $H(z)$的系数灵敏度。如果 $H(z)$的零点是密集在一起的话，那么它们的位置对单位脉冲响应系数的量化误差就有高的灵敏度。广泛采用直接型 FIR 系统的理由是：对大多数线性相位 FIR 滤波器来说，零点在 z 平面内或多或少是均匀铺开的。现用下面例子来说明这一点。

6.7.5　一个最优 FIR 滤波器量化的例子

作为 FIR 情况系数量化效应的一个例子，现考虑一个满足下列指标的线性相位低通滤波器：

$$0.99 \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1.01, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 0.4\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.001(\text{即} -60\text{dB}), \qquad 0.6\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$

这个滤波器是用 parks-Moclellan 设计方法设计的，有关这个设计方法将在 7.4.3 节中讨论。这个特定系统的设计细节在 7.5.1 节中考虑。

表 6.3 给出该系统未量化的脉冲响应系数，以及 16 位、14 位、13 位和 8 位量化的量

表 6.3　一个最优 FIR 低通滤波器(M=27)的未量化和量化系数

系数	未量化	16 位	14 位	13 位	8 位
$h[0]=h[27]$	$1.359\,657\times10^{-3}$	45×2^{-15}	11×2^{-13}	6×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[1]=h[26]$	$-1.616\,993\times10^{-3}$	-53×2^{-15}	-13×2^{-13}	-7×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[2]=h[25]$	$-7.738\,032\times10^{-3}$	-254×2^{-15}	-63×2^{-13}	-32×2^{-12}	-1×2^{-7}
$h[3]=h[24]$	$-2.686\,841\times10^{-3}$	-88×2^{-15}	-22×2^{-13}	-11×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[4]=h[23]$	$1.255\,246\times10^{-3}$	411×2^{-15}	103×2^{-13}	51×2^{-12}	2×2^{-7}
$h[5]=h[22]$	$6.591\,530\times10^{-3}$	216×2^{-15}	54×2^{-13}	27×2^{-12}	1×2^{-7}
$h[6]=h[21]$	$-2.217\,952\times10^{-2}$	-727×2^{-15}	-182×2^{-13}	-91×2^{-12}	-3×2^{-7}
$h[7]=h[20]$	$-1.524\,663\times10^{-2}$	-500×2^{-15}	-125×2^{-13}	-62×2^{-12}	-2×2^{-7}
$h[8]=h[19]$	$3.720\,668\times10^{-2}$	$1\,219\times2^{-15}$	305×2^{-13}	152×2^{-12}	5×2^{-7}
$h[9]=h[18]$	$3.233\,332\times10^{-2}$	$1\,059\times2^{-15}$	265×2^{-13}	132×2^{-12}	4×2^{-7}
$h[10]=h[17]$	$-6.537\,057\times10^{-2}$	$-2\,142\times2^{-15}$	-536×2^{-13}	-268×2^{-12}	-8×2^{-7}
$h[11]=h[16]$	$-7.528\,754\times10^{-2}$	$-2\,467\times2^{-15}$	-617×2^{-13}	-308×2^{-12}	-10×2^{-7}
$h[12]=h[15]$	$1.560\,970\times10^{-1}$	$5\,115\times2^{-15}$	$1\,279\times2^{-13}$	639×2^{-12}	20×2^{-7}
$h[13]=h[14]$	$4.394\,094\times10^{-1}$	$14\,399\times2^{-15}$	$3\,600\times2^{-13}$	$1\,800\times2^{-12}$	56×2^{-7}

化系数。图 6.46 给出了各种情况下系统频率响应的比较。图 6.46(a)是未量化系数频率响

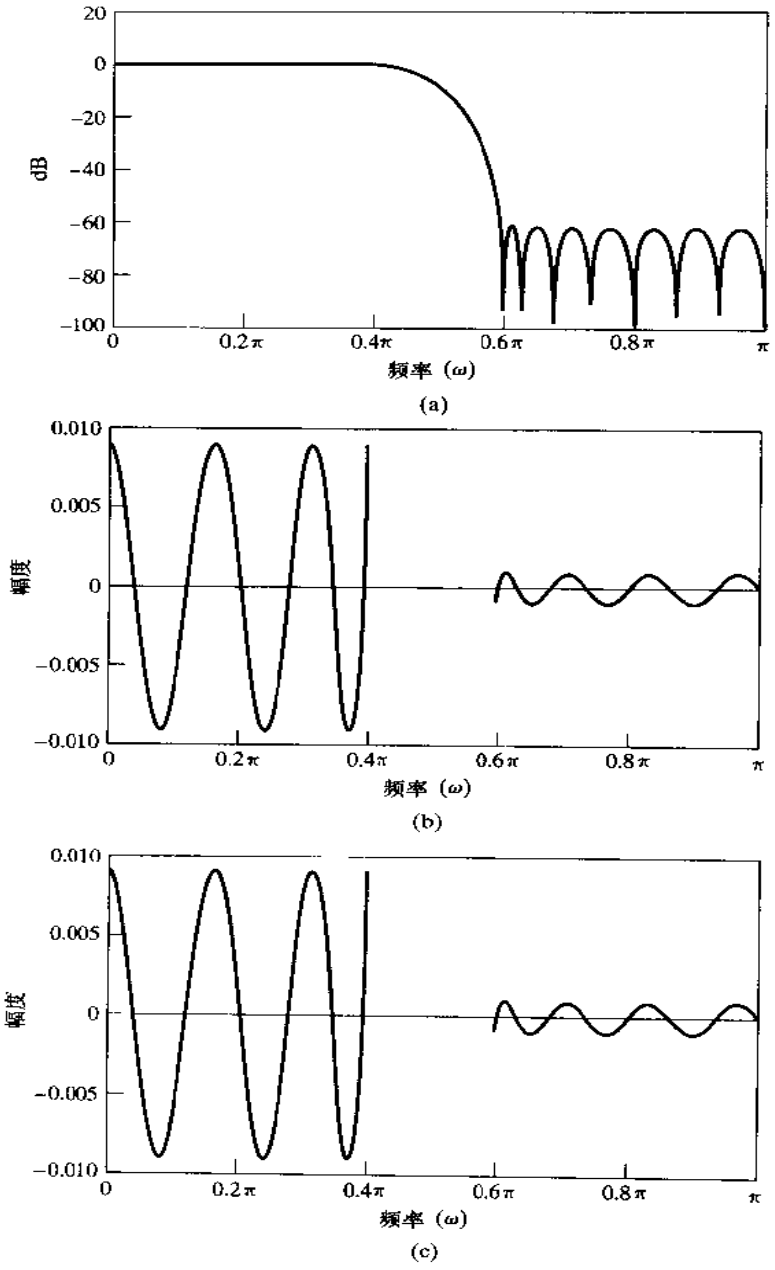
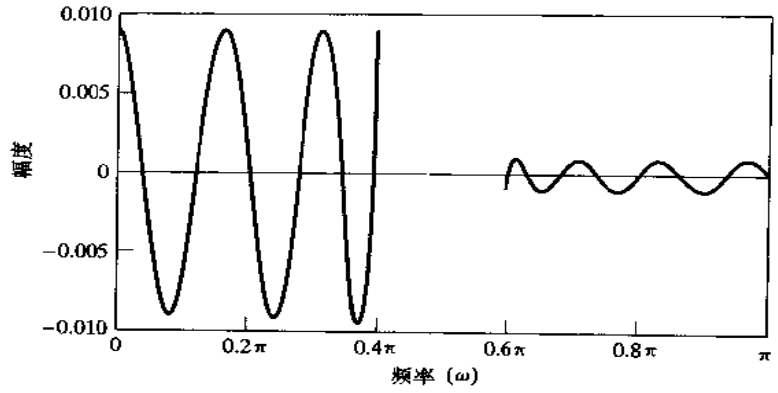


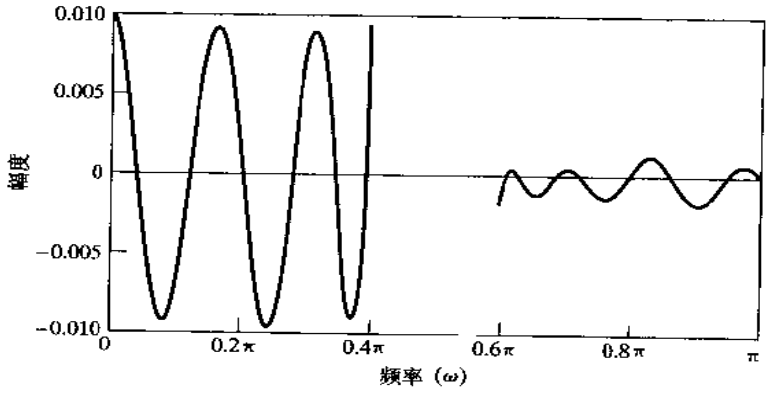
图 6.46　FIR 量化的例子

(a) 未量化情况的对数幅度特性；(b) 未量化情况的逼近误差(在过渡带中不定义误差)；

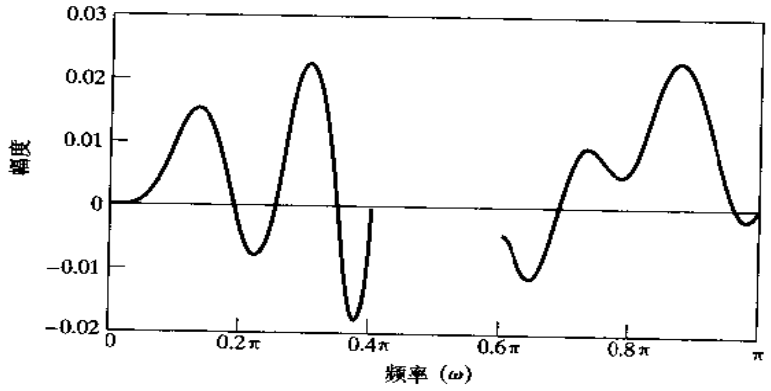
(c) 16 位量化的逼近误差；



(d)



(e)



(f)

图 6.46(续)　(d) 14 位量化的逼近误差;(e)13 位量化的逼近误差;
(f)8 位量化的逼近误差

应以 dB 计的对数幅度特性。图 6.46(b),(c),(d),(e)和(f)分别指的是对于未量化以及按 16

位、14 位、13 位和 8 位量化情况下通带和阻带的逼近误差。(通带为通近于 1 的误差,阻带为逼近于 0 的误差。)由图 6.46 可见,对于未量化情况和用 16 位、14 位量化的情况,系统都能满足指标要求。然而,用 13 位量化,阻带逼近误差就大于 0.001 了;而用 8 位量化,阻带逼近误差超过指标要求 10 倍大。因此,该系统的直接型实现至少要求有 14 位的系数。不过,这并不是一个苛刻的限制,因为 16 位或 14 位系数与很多可用来实现这样一个滤波器的技术工艺是恰好匹配的。滤波器系数在滤波器零点位置上的量化效应如图 6.47 所示。应该注意到,在未量化情况下虽然在单位圆上零点有一些密集,但零点还是在 z 平面铺开的。在单位圆上的零点主要是形成阻带衰减,而不在单位圆上成共轭倒数位置上的零点主要是形成通带特性。注意到对于 16 位量化的示于图 6.47(b)中的零点位置几乎看不出有什么差别,而示于图 6.47(c)中的 13位置化时,在单位圆上的零点已经有了显著地移动。最后,由 8 位量化而示于图 6.47(d)的零点位置看出在单位圆上有几个零点成对地移出单位圆到共轭倒数的位置上。这种零点分布是完全与图 6.46 的频率响应特性一致的。

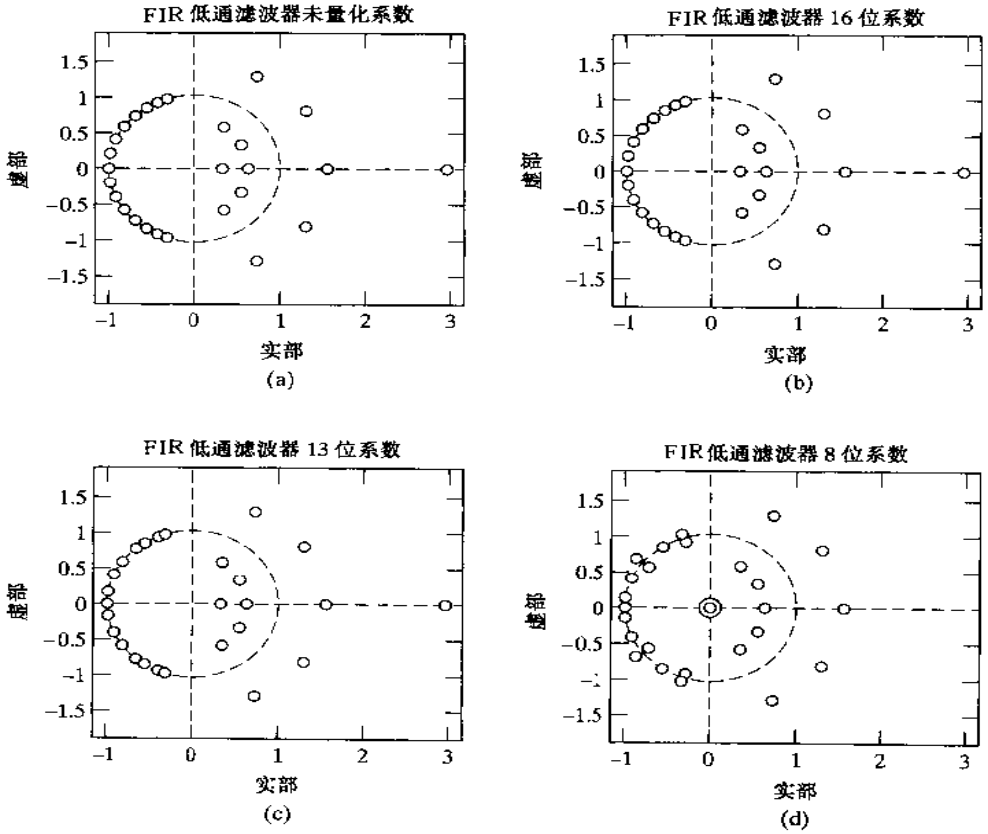


图 6.47 在 $H(z)$零点单位脉冲响应的量化效应
(a) 未量化; (b) 16 位置化; (c) 13 位置化; (d) 8 位量化

对于这个例子最后值得提及的一点是,所有未量化的系数其幅度值都小于 0.5。因此,如果全部系数(因此冲激响应)在量化之前都加倍,那么就能更有效地利用这些可资利用的位数,

在效果上相当于 B 增加了一位。表 6.3 和图 6.46 没有考虑提高精度的这种潜在可能。

6.7.6 线性相位特性的保持

到目前为止,未对 FIR 系统相位响应作任何假设。然而,有可能具有广义线性相位的特性是 FIR 系统的主要优点之一。回想一下,一个线性相位 FIR 系统其脉冲响应不是对称的($h[m-n]=h[n]$)就是反对称的($h[m-n]=-h[n]$)。这些线性相位条件对直接型量化系统是很容易保持住的。因此,在前面子节的例子中所讨论的全部系统都有准确的线性相位,而不管量化的粗糙程度如何。这一点可从在图 6.47 中保持的共轭倒数位置的零点中看出。

从图 6.47(b)可以想到在某些量化很粗的情况下,或者对零点紧靠在一起的高阶系统,用级联型 FIR 系统独立实现较少的零点组或许是值得提倡的。为了保持线性相位,级联中每一节也必须有线性相位。回想一下,一个线性相位系统的零点必须按图 6.36 所示的方式出现。例如,若用$(1+az^{-1}+z^{-2})$的二阶节来实现单位圆上的每对复数共轭零点的话,那么当系数 a 量化时,该零点仅能在单位圆上移动。这就避免了零点从单位圆上移开,从而减小在衰减上的影响。类似地,在单位圆内的实零点以及在单位圆外倒数位置上的零点也会保持为实的。在 $z=\pm 1$ 的零点也能准确地由一阶系统给予实现。若单位圆内的一对共轭复数零点是用二阶系统,而不用四阶系统来实现,那必须确保对每个单位圆内的复数零点也有一个单位圆外的共轭倒数零点存在。这可以用对应于在 $z=re^{j\theta}$ 和 $z=r^{-1}e^{-j\theta}$ 零点的四阶因子表示成

$$1+cz^{-1}+dz^{-2}+cz^{-3}+z^{-4}=(1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2})\frac{1}{r^2}(r^2-2r\cos\theta z^{-1}+z^{-2}) \tag{6.67}$$

这就相应于图 6.48 的子系统。这个系统用同样两个系数 $-2r\cos\theta$ 和 r^2 既实现单位圆内的零点,又实现单位圆外的共轭倒数零点。这样,线性相位条件在量化情况下得以保持。注意到因子$(1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2})$与图 6.41 的二阶直接型 IIR 系统的分母是一致的,因此,量化零点的集合就如图 6.42 所描绘。有关 FIR 系统级联实现的更为详细的内容,可以参阅 Herrmann and Schüssler(1970b)。

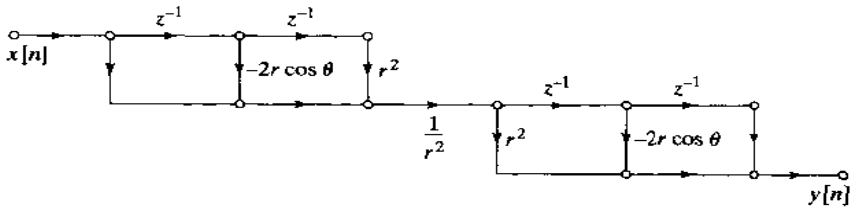


图 6.48 在线性相位 FIR 系统中实现四阶因子的子网络,达到保持线性相位而与系数量化无关

6.8 数字滤波器中舍入噪声效应

用有限精度运算实现的差分方程是非线性系统。虽然一般来说了解这个非线性是如何影响离散时间系统的特性是重要的,但是在关心某一具体系统特性的实际应用中,一般不要求对运算量化效应作精确定分析。的确就像系数量化一样,最有效的途径往往是对系统进行仿真,

并测量它的特性。例如，在量化误差分析中通常一个目的就是选择数字字长，以使得数字系统是所要求线性系统的一个足够准确的实现；与此同时又要求最少的硬件或软件复杂性。当然数字字长只能一位一步地改变，并且正如在 4.8.2 节中已经看到的，字长增加一位，量化误差大小降低一半。因此，数字字长的选择对量化误差分析的不准确性是不灵敏的，分析准确到 30% ~ 40% 往往就够了。为此，很多重要的量化效应都能用线性模型来研究。这一节将建立这样一些模型，并用几个例子来说明它们的应用，唯一的例外是零输入极限环现象，这完全是非线性现象。我们对数字滤波器的非线性研究只限于在 6.9 节对零输入极限环作简要介绍。

6.8.1 直接型 IIR 结构分析

为了介绍基本概念，现考虑一个线性时不变离散时间系统的直接型结构。一种直接 I 型二阶系统的流图如图 6.49(a)所示。对直接 I 型结构的一般 N 阶差分方程是

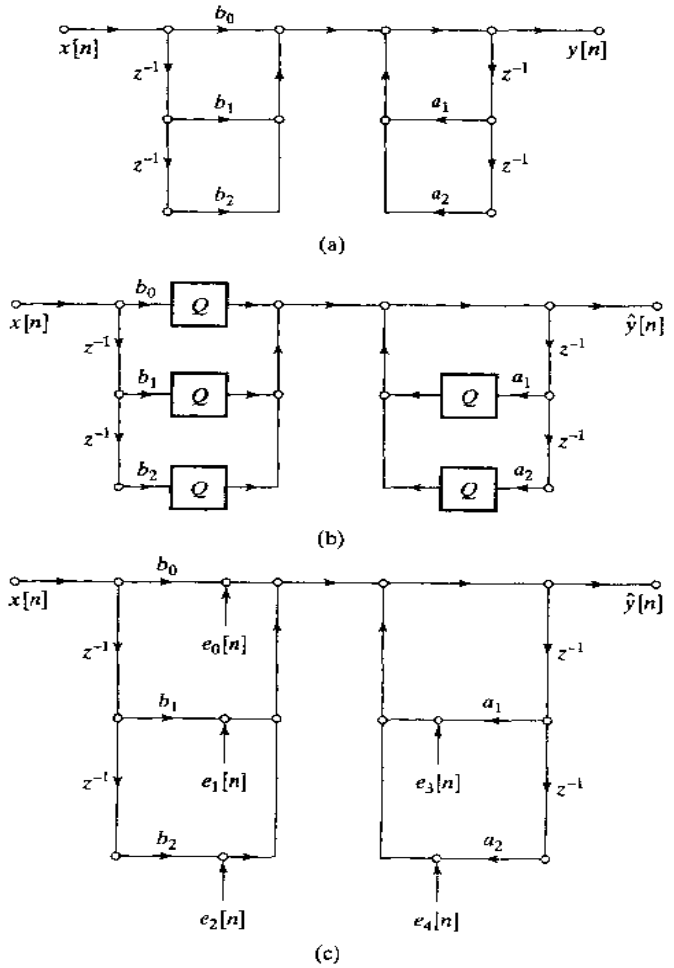


图 6.49 直接 I 型系统模型
(a) 无限精度模型；(b) 非线性量化模型；(c) 线性噪声模型

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.68}$$

其系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \tag{6.69}$$

现假设全部信号值和系数都用$(B+1)$位定点二进制数表示。那么，用$(B+1)$位加法器在实现(6.68)式中，就有必要将$(2B+1)$位长的乘积缩减到$(B+1)$位。因为全部数都是以小数看待的，所以可以用舍入或截尾的方法除掉最低有效B位。这就可以用一个常数乘法器跟着一个量化器来代替图6.49(a)中的每一条常数乘法器支路，如图6.49(b)的非线性模型所示。对应于图6.49(b)的差分方程是非线性方程，为

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{N} Q[a_k \hat{y}[n-k]] + \sum_{k=0}^{M} Q[b_k \hat{x}[n-k]] \tag{6.70}$$

图6.49(c)给出另一种表示，这里量化器用噪声源代替，该噪声源等于每个量化器输出端的量化误差。例如，乘积$bx[n]$的舍入或截尾可以用如下的噪声源表示：

$$e[n] = Q[bx[n]] - bx[n] \tag{6.71}$$

如果这些噪声源真正是已知的话，那么图6.49(c)就完全等效于图6.49(b)。然而，当假设每个量化噪声源具有下列性质时，图6.49(c)才是最有用处的：

1. 每个量化噪声源$e[n]$都是广义平稳白噪声过程。
2. 每个噪声源幅度在一个量化间隔上都是均匀分布的。
3. 每个量化噪声源都与相应量化器的输入、所有其它量化噪声源以及系统的输入**不相关**。

这些假设与4.8节A/D转换分析中所做的假设是一致的。严格来说，这些假设是不可能成立的，因为量化误差直接与量化器的输入有关。对常数或正弦信号来说，这点是显而易见的。然而，实验与理论分析都证明(Bennett, 1948; Widrow, 1956, 1961)：在很多情况中，刚才所描述的模型都给出了像均值、方差和相关函数等统计平均量的准确结论。当输入信号是一个复杂的宽带信号时确实如此，像语音这类信号在全部量化电平之间急剧地变化，并从一个样本变到另一个样本时越过很多量化电平(Gold and Rader, 1969)。这里所提出的简单线性噪声模型允许我们用均值和方差等这些平均量来表征系统所产生的噪声，并确定这些平均量是如何受到系统改变的。

对于$(B+1)$位量化，6.6节已证明，对舍入有

$$-\frac{1}{2}2^{-B} < e[n] \leqslant \frac{1}{2}2^{-B} \tag{6.72a}$$

而对补码的截尾有

$$-2^{-B} < e[n] \leqslant 0 \tag{6.72b}$$

因此，根据上面的第二个假设，对于表示量化误差的随机变量，概率密度函数对舍入是如图6.50(a)所示的均匀概率密度，而对截尾是如图6.50(b)所示的均匀概率密度。对舍入的均值和方差是

$$m_e = 0 \tag{6.73a}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{2B}}{12} \tag{6.73b}$$

对补码截尾，均值和方差是

$$m_e = -\frac{2^{-B}}{2} \tag{6.74a}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12} \tag{6.74b}$$

根据第一个假设，一般来说，一个量化噪声源的自相关序列是

$$\phi_{ee}[n] = \sigma_e^2\delta[n] + m_e^2 \tag{6.75}$$

在舍入情况下今后为了方便都假设 $m_e=0$，所以自相关函数 $\phi_{ee}[n]=\sigma_e^2\delta[n]$，而功率谱是 $\Phi_{ee}(e^{j\omega})=\sigma_e^2$，$|\omega|\leqslant\pi$。这时，方差和平均功率是相等的。在截尾情况下，均值不是零，所以在舍入情况所导得的平均功率结果必须修正；这就是计算出信号的均值，再将均值的平方加到舍入时的平均功率结果上去。

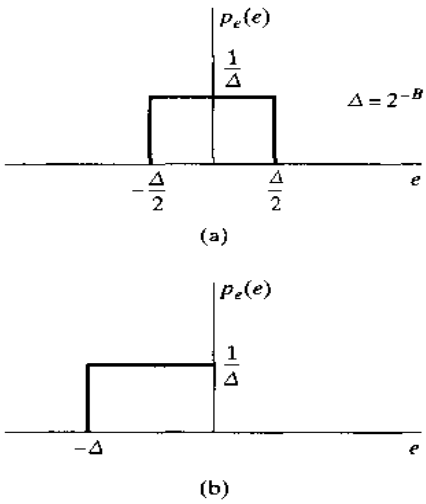


图 6.50　量化误差的概率密度函数
(a) 舍入；(b) 截尾

在图 6.49(c)中每个量化噪声源采用这个模型之后，现在就能着手确定量化噪声对系统输出的效应。为了有助于问题的解决，注意到这一点是有益的，即，图 6.49(c)中全部噪声源都是在实现零点的系统部分和实现极点的系统部分之间有效地引入的。因此，如果在图 6.51 中的 $e[n]$ 是

$$e[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n] + e_3[n] + e_4[n] \tag{6.76}$$

那么图 6.51 就等效于图 6.49(c)。因为已经假设全部噪声源都是与输入独立的，并且也是互相独立的，所以对二阶直接 I 型联合噪声源的方差就是

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e0}^2 + \sigma_{e1}^2 + \sigma_{e2}^2 + \sigma_{e3}^2 + \sigma_{e4}^2 = 5\cdot\frac{2^{-2B}}{12} \tag{6.77}$$

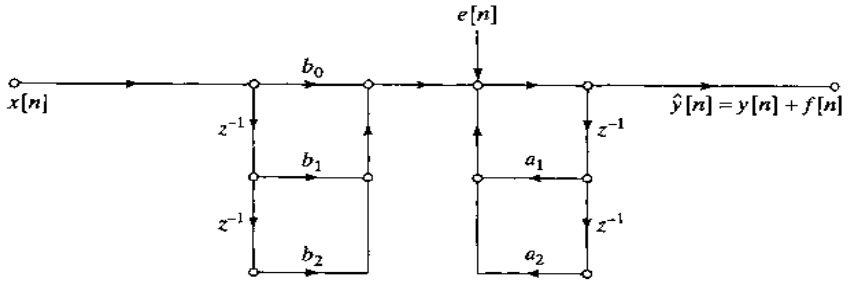


图 6.51　具有联合噪声源的直接 I 型线性噪声模型

而对一般的直接 I 型是

$$\sigma_e^2 = (M+1+N)\frac{2^{-2B}}{12} \tag{6.78}$$

现在，为了得到输出噪声的表示式，从图 6.51 注意到该系统有两个输入 $x[n]$ 和 $e[n]$，

因为现假设系统是线性的，输出 $\hat{y}[n]$就能表示成 $\hat{y}[n]=y[n]+f[n]$，其中 $y[n]$是理想未量化系统对输入序列 $x[n]$的响应，而 $f[n]$是系统对输入 $e[n]$的响应。输出 $y[n]$由(6.68)式的差分方程给出，但因为 $e[n]$是在零点以后、极点以前引入的，所以输出噪声满足下面差分方程：

$$f[n]=\sum_{k=1}^{N}a_k f[n-k]+e[n] \tag{6.79}$$

也就是说，在直接Ⅰ型实现中输出噪声的性质仅仅与该系统的极点有关。

为了确定输出噪声序列的均值和方差，可以利用 2.10 节某些结果。考虑一个系统函数为 $H_{ef}(z)$的线性系统，其输入为白噪声 $e[n]$，相应输出为 $f[n]$。那么，由(2.89)式和(2.90)式，输出的均值是

$$m_f=m_e\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_{ef}[n]=m_e H_{ef}(e^{j\theta}) \tag{6.80}$$

因为对于舍入 $m_e=0$，所以输出的均值一定是零，如果假定是舍入的话就不必关心噪声的均值。由(6.75)式和(2.195)式可得：对于舍入，由于 $e[n]$是零均值的白噪声序列，所以输出噪声的功率谱密度就只是

$$P_{ff}(\omega)=\Phi_{ff}(e^{j\omega})=\sigma_e^2|H_{ef}(e^{j\omega})|^2 \tag{6.81}$$

利用(2.197)式，输出噪声的方差能证明是

$$\sigma_f^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{ff}(\omega)\mathrm{d}\omega=\sigma_e^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_{ef}(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega \tag{6.82}$$

对(2.167)式应用帕斯瓦尔定理，σ_f^2也能表示为

$$\sigma_f^2=\sigma_e^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_{ef}[n]|^2 \tag{6.83}$$

当对应于 $h_{ef}[n]$的系统函数是一个有理函数时(如同在本章所考虑的差分方程形式总是这样)，可以用附录 A 中的(A.66)式求出(6.83)式这样的无限平方的和。

我们将常利用由(6.80)式到(6.83)式所得到的结果来分析线性系统的量化噪声，例如，对图 6.51 的直接Ⅰ型系统，$H_{ef}(z)=1/A(z)$；这就是说，从引入全部噪声源的这一点到输出的系统函数仅由(6.69)式中的系统函数 $H(z)$的极点组成。因此，可以得出：由于内部舍入或截尾造成的总输出方差一般就是

$$\begin{aligned}\sigma_f^2&=(M+1+N)\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\omega)}{|A(e^{j\omega})|^2}\\&=(M+1+N)\frac{2^{-2B}}{12}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_{ef}[n]|^2\end{aligned} \tag{6.84}$$

式中 $h_{ef}[n]$是相应于 $H_{ef}(z)=1/A(z)$的脉冲响应。现用下面例子来说明上面结果的应用。

例 6.9　一阶系统的舍入噪声

假设要实现具有下面系统函数的稳定系统：

$$H(z)=\frac{b}{1-az^{-1}},\quad |a|<1 \tag{6.85}$$

图 6.52 示出实现时的线性噪声模型流图，其中乘积在相加前就被量化。每个噪声源都被脉冲响应为 $h_{ef}[n]=a^n u[n]$的系统(从 $e[n]$输出)滤波。由(6.81)式，输出噪声的功率谱是

$$P_{ff}(\omega)=2\frac{2^{2B}}{12}\left(\frac{1}{1+a^2-2a\cos\omega}\right) \tag{6.86}$$

输出端总噪声方差是

$$\sigma_f^2 = 2\frac{2^{-2B}}{12}\sum_{n=0}^{\infty}|a|^{2n} = 2\frac{2^{-2B}}{12}\left(\frac{1}{1-|a|^2}\right) \quad (6.87)$$

由(6.87)式看出，输出噪声方差随 $z=a$ 的极点向单位圆趋近而增加。因此，当 $|a|$ 接近 1 时，为了保持噪声方差低于某一给定值，必须用更长的字长。下面的例子也说明了这一点。

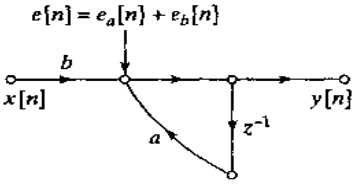


图 6.52 一阶线性噪声模型

例 6.10 二阶系统的舍入噪声

考虑一个稳定二阶直接Ⅰ型系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} \quad (6.88)$$

该系统的线性噪声模型如图 6.49(c)所示，或者等效地为图 6.51 所示，其中 $a_1 = 2r\cos\theta$ 和 $a_2 = -r^2$。在这种情况下，总输出噪声功率可以表示为

$$\sigma_f^2 = 5\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\omega}{|(1 - re^{j\theta}e^{-j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{-j\omega})|^2} \quad (6.89)$$

利用附录 A 中的(A.66)式，求得输出噪声功率为

$$\sigma_f^2 = 5\frac{2^{-2B}}{12}\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2\cos2\theta} \quad (6.90)$$

与例 6.9 一样，随着复数共轭极点接近于单位圆($r\to1$)，总输出噪声方差增加，因此需要更长的字长才能保持方差低于某一给定值。

到目前为止对直接Ⅰ型结构所建立的分析技术也能用到直接Ⅱ型结构上去。对于直接Ⅱ型结构的非线性差分方程是

$$\hat{w}[n] = \sum_{k=1}^{N} Q[a_k\hat{w}[n-k]] + x[n] \quad (6.91a)$$

$$\hat{y}[n] = \sum_{k=0}^{M} Q[b_k\hat{w}[n-k]] \quad (6.91b)$$

图 6.53(a)示出二阶直接Ⅱ型系统的线性噪声模型。在每次相乘之后都引入了一个噪声源，以指出乘积在相加之前已被量化到$(B+1)$位。图 6.53(b)示出了一个等效的线性模型，在这里已经把由极点的实现形成的噪声源移去，并把它们合并为在输入端单一的噪声源 $e_a[n] = e_3[n] + e_4[n]$。同样，由于零点的实现形成的噪声源也把它们合并为单一的噪声源 $e_b[n] = e_0[n] + e_1[n] + e_2[n]$，这就是在输出端直接相加。对于具有 M 个零点和 N 个极点的系统，对舍入($m_e=0$)，由该等效模型直接可得输出噪声的功率谱是

$$P_{ff}(\omega) = N\frac{2^{-2B}}{12}|H(e^{j\omega})|^2 + (M+1)\frac{2^{-2B}}{12} \quad (6.92)$$

输出噪声方差是

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= N\frac{2^{-2B}}{12}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2d\omega + (M+1)\frac{2^{-2B}}{12}\\ &= N\frac{2^{-2B}}{12}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 + (M+1)\frac{2^{-2B}}{12}\end{aligned} \quad (6.93)$$

这就是说，在实现极点中所产生的白噪声被整个系统过滤，而在实现零点中所产生的白噪声被直接加在系统的输出端。在写出(6.93)式时，已经假设在输入端的 N 个噪声源都是独立的，所以它们的和是单个量化噪声源方差的 N 倍。对$(M+1)$个输出端的噪声源也作同样的假

设。这些结果是很容易修正到补码时截尾情况的。从(6.73a)～(6.73b)式和(6.74a)～(6.74b)式可以想到，一个截尾噪声源的方差和舍入噪声源的方差是一样的，但是截尾噪声源的均值不是零。这样，对于总的输出噪声方差的(6.84)式和(6.93)式对于截尾情况也成立。然而，输出噪声会有一个非零的平均值，这个值可用(6.80)式计算出。

将(6.84)式与(6.93)式作一比较表明，直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构在实现相应的差分方程中乘积量化的影响是不同的。一般来说，其它等效结构，如级联型、并联型转置型等与直接型结构任一种相比都有不同的总输出噪声方差。然而，即使(6.34)式和(6.93)式是不同的，也不能说哪个系统一定有最小的输出噪声方差，除非已知系统系数的具体值。换句话说，要说某一种特定的结构形式一定总是产生最小的输出噪声，这是不可能的。

用$(2B+1)$位加法器去累加在两个直接型系统中所要求的乘积的和来改善直接型系统(因此也包括级联型和并联型)的噪声性能是可能的。例如，对直接Ⅰ型实现，可以用如下形式的差分方程：

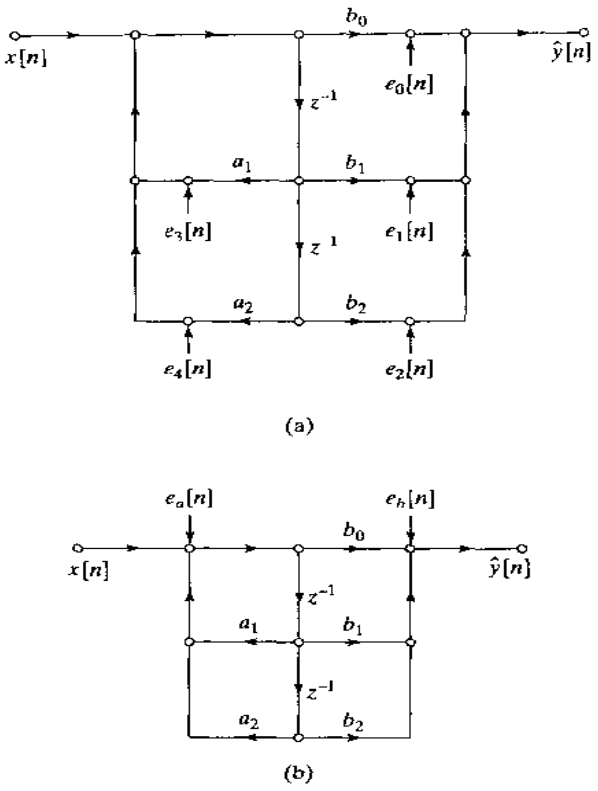


图 6.53 直接Ⅱ型线性噪声模型
(a) 表示单个乘积的量化；(b) 用联合噪声源

$$\hat{y}[n] = Q\Big[\sum_{k=1}^{N} a_k \hat{y}[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\Big] \tag{6.94}$$

这就是说，乘积的和是用$(2B+1)$位或$(2B+2)$位精度累加，并对输出和延迟存储器的存储把这个结果量化到$(B+1)$位。在直接Ⅰ型情况下，这就意味着量化噪声仍然被极点过滤，但在(6.84)式中的因子$(M+1+N)$被1代替。类似地，对直接Ⅱ型实现，(6.91a)～(6.91b)式的差分方程能分别用下式代替：

$$\hat{w}[n] = Q\Big[\sum_{k=1}^{N} a_k \hat{w}[n-k] + x[n]\Big] \tag{6.95a}$$

$$\hat{y}[n] = Q\Big[\sum_{k=0}^{M} b_k \hat{w}[n-k]\Big] \tag{6.95b}$$

这就隐含着在输入和输出端是一个单一的噪声源，所以(6.93)式中的因子N和$(M+1)$都被1代替。因此，使用双倍长度的累加器字(大多数能用的DSP芯片都能提供)能明显减小直接型系统中的量化噪声。

6.8.2 IIR 系统定点实现中的幅度加权

在 IIR 系统实现中利用定点运算的另一个重要考虑是可能有溢出。如果遵循每个定点数都表示一个小数的约定(可能乘一已知加权因子),那么在网络中每个节点必须限制其值小于 1 以避免溢出。若 $w_k[n]$记作第 k 个节点变量的值,$h_k[n]$记作从输入 $x[n]$到节点变量 $w_k[n]$的脉冲响应,那么

$$|w_k[n]| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h_k[m]\right| \tag{6.96}$$

该界限

$$|w_k[n]| \leqslant x_{\max}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k[m]\right| \tag{6.97}$$

可用最大值 $x_{\max}$代替 $x[n-m]$,并根据和的绝对值小于或等于绝对值的和来得出。因此,使得$|w_k[n]| \leqslant 1$ 的充分条件是

$$x_{\max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|} \tag{6.98}$$

该条件对网络中全部节点都要成立。若 $x_{\max}$不满足(6.98)式,那么可在系统的输入端将 $x[n]$乘以标量因子 s,以使得 $sx_{\max}$在网络全部节点上都满足(6.98)式,即

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max\limits_{k}\left[\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|\right]} \tag{6.99}$$

以这种方式给输入幅度加权可保证网络中任何节点绝不会出现溢出。(6.98)式既是必要条件也是充分条件,因为总是存在一个输入使得(6.97)式以等号满足(见 2.4 节讨论稳定性的(2.69) 式)。然而,(6.98)式对大多数信号来说给出的是一个非常有富裕的输入加权因子。

另一种加权方法是假设输入是一个窄带信号,如模型为 $x[n] = x_{\max}\cos\omega_0 n$。这时,节点变量即是

$$w_k[n] = |H_k(e^{j\omega_0})| x_{\max}\cos(\omega_0 n + \measuredangle H_k(e^{j\omega_0})) \tag{6.100}$$

因此,如果

$$\max_{k,|m|\leqslant\pi} |H_k(e^{j\omega})| x_{\max} < 1 \tag{6.101}$$

或者如果输入受如下幅度加权因子加权的话:

$$sx_{\max} < \frac{1}{\max\limits_{k,|m|\leqslant\pi} |H_k(e^{j\omega})|} \tag{6.102}$$

那么对**全部**正弦信号溢出都可避免。

还有另外的办法是加权输入,以使得每个节点变量序列的总能量小于或等于输入序列的总能量。利用施瓦茨不等式和帕斯瓦尔定理可导出合适的加权因子。序列 $w_k[n]$的总能量由下式界定:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |w_k[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})X(e^{j\omega})|^2 d\omega \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{6.103}$$

因此,为了保证 $\sum |w_k[n]|^2 \leqslant \sum |x[n]|^2$,可以将序列 $x[n]$乘以幅度加权因子 s 使得

$$s^2 \leqslant \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_k(e^{j\omega})|^2 d\omega} = \frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2} \tag{6.104}$$

能够证明

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]|^2\right\}^{1/2} \leqslant \max_{k,\omega} |H_k(e^{j\omega})| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_k[n]| \tag{6.105}$$

因此，(6.99)式、(6.102)式和(6.104)式对于一个数字滤波器的输入给出了得到标量因子的3种递减的保守方式。在这3种方式中，(6.104)式一般是最容易用解析求值的，因为平方和可用附录A中给出的部分分式法求值。另一方面，(6.99)式用解析求值是困难的，除非系统很简单。当然，对于已知系数的具体系统，幅度加权因子可以用数值计算脉冲响应或频率响应估计出。

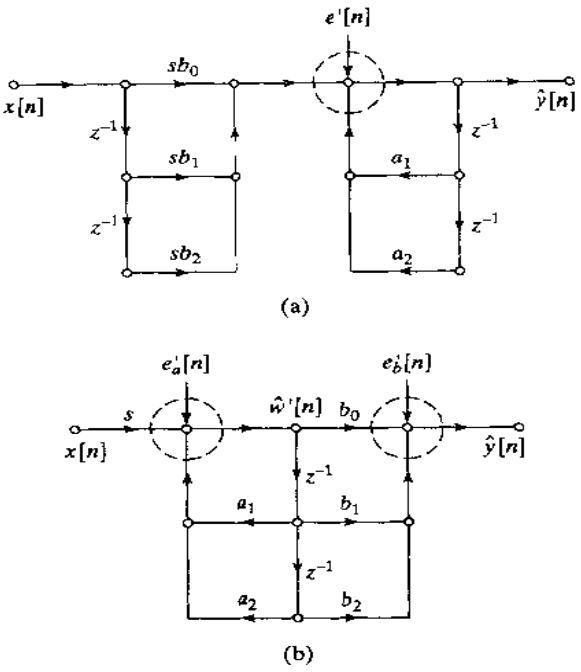


图6.54 直接型系统加权
(a) 直接Ⅰ型；(b) 直接Ⅱ型

如果输入必须向下加权($s<1$)，系统输出端的信噪比将会降低。图6.54示出标量因子在输入端的二阶直接Ⅰ型和直接Ⅱ型系统。对这些系统在确定标量因子时，不必要检查网络中的每个节点。某些节点不代表相加，因此不可能溢出。另一些节点代表部分和。如果用不饱和的补码运算，这样一些节点就能允许溢出，只要某些关键节点不溢出。例如，在图6.54(a)中，可把注意力集中在用虚线圈住的这个节点上。图6.54(a)示出的标量因子是与系数b_k结合在一起的，以使得该噪声源与图6.51中是相同的，也就是说它具有单个量化噪声源5倍的功率。[①] 因为该噪声源还是仅由极点过滤，所以输出噪声功率在图6.51和图6.54(a)中是相同的。然而，图6.54(a)中系统的总的系统函数是$sH(z)$而不是$H(z)$，所以输出$\hat{y}[n]$的未量化分量是$sy[n]$而不是$y[n]$。因为噪声是在幅度加权之后引入，所以在已加权的系统中信号功率对噪声功率的比是图6.51信噪比的s^2倍。如果幅度加权是为了避免溢出，因为$s<1$，信噪比就因加权而下降。

对图6.54(b)的直接Ⅱ型系统而言，同样是正确的。在这个情况下，必须确定出标量因子以避免图6.54(b)中两个圆圈内的节点产生溢出。该系统总增益还是图6.53(b)系统增益的s倍，但是在这个情况下，可能有必要直接实现标量因子以避免左边节点的溢出。这个标量因子将一个附加噪声分量加到$e'_a[n]$上，所以在输入端的噪声功率一般就是$(N+1)2^{-2B}/12$。否则，该噪声源完全和图6.5(b)及图6.54(b)中相同的方法被系统过滤。因此，信号功率乘以

① 这排除单独的加权相乘和量化噪声源。然而，加权(和量化)b_k能改变该系统的频率响应。如果一个单独的输入标量因子是放在图6.54(a)零点实现的前面，那么附加量化噪声源将会通过整个系统$H(z)$加到输出端。

s^2，而输出端噪声功率还是由(6.93)式给出，不过 N 由 $(N+1)$ 代替。如果加权是为了避免溢出的话，信噪比还是要下降。

例 6.11　幅度加权与舍入噪声之间的相互影响

为了说明幅度加权与舍入噪声的相互影响，考虑例 6.9 系统，其系统函数由(6.85)式给出。如果标量因子与系数 b 合并在一起，可得加权系统的流图如图 6.55 所示。假设输入是在 -1 和 $+1$ 之间均匀分布的白噪声。那么总的信号方差就是 $\sigma_x^2 = 1/3$。为了保证在计算 $y[n]$ 时没有溢出，可用(6.99)式计算幅度标量因子为

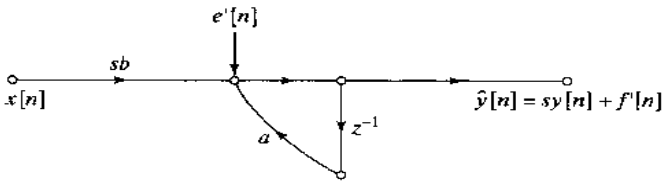


图 6.55　幅度加权的一阶系统

$$s = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b\,|a|^n} = \frac{1-|a|}{|b|} \tag{6.106}$$

输出噪声方差在例 6.9 中已求出为

$$\sigma_f^2 = 2\,\frac{2^{-2B}}{12}\,\frac{1}{1-a^2} = \sigma_f^2 \tag{6.107}$$

输出 $y'[n]$ 的方差就是

$$\sigma_y^{2'} = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{s^2b^2}{1-a^2} = s^2\sigma_y^2 \tag{6.108}$$

因此，信噪比是

$$\frac{\sigma_y^{2'}}{\sigma_f^2} = s^2\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2} = \left(\frac{1-|a|}{|b|}\right)^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_f^2} \tag{6.109}$$

随着系统的极点趋近于单位圆，信噪比下降。这是因为量化噪声被系统放大，而又因为系统的高增益迫使输入向下加权以避免溢出。再次看到，溢出和量化噪声以相反的方式恶化系统性能。

6.8.3　一个级联 IIR 结构的分析例子

本节前面的结果能直接用到由二阶直接型子系统组成的并联或级联结构的分析。在级联型中，加权和量化的相互影响是特别令人感兴趣的。关于级联系统的一般讨论将紧密结合具体例子来进行。

某一椭圆低通滤波器设计成满足以下指标：

$$0.99 \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1.10, \qquad |\omega| \leqslant 0.5\pi$$
$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.01, \qquad 0.56\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

所得系统的系统函数是

$$H(z) = 0.079\,459\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{1+b_{1k}z^{-1}+z^{-2}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}\right) = 0.079\,459\prod_{k=1}^{3}H_k(z) \tag{6.110}$$

其中(6.10)式的系数由表 6.4 给出。注意到在这个例子中 $H(z)$ 的全部零点都在单位圆上，然而一般不必要是这样。

表 6.4　级联型椭圆低通滤波器的系数

k	a_{1k}	a_{2k}	a_{3k}
1	0.478 882	−0.172 150	1.719 454
2	0.137 787	−0.610 077	0.781 109
3	−0.054 779	−0.902 374	0.411 452

图 6.56(a)示出用二阶转置直接Ⅱ型子系统级联的该系统一种可能实现的流图。增益常数 0.079 459 用于使系统的总增益在通带内近似为 1，并且假定这就保证了系统的输出不会溢出。图 6.56(a)示出的增益常数是放在系统的输入端。这种方法立即减小了信号幅度，其后果就是后续的滤波器节必须有高的增益以产生总增益为 1。虽然量化噪声源是在 0.079 459 增益后引入的，但是还是被系统的其余部分同样放大，所以这不是一个好的方案。理想地，小

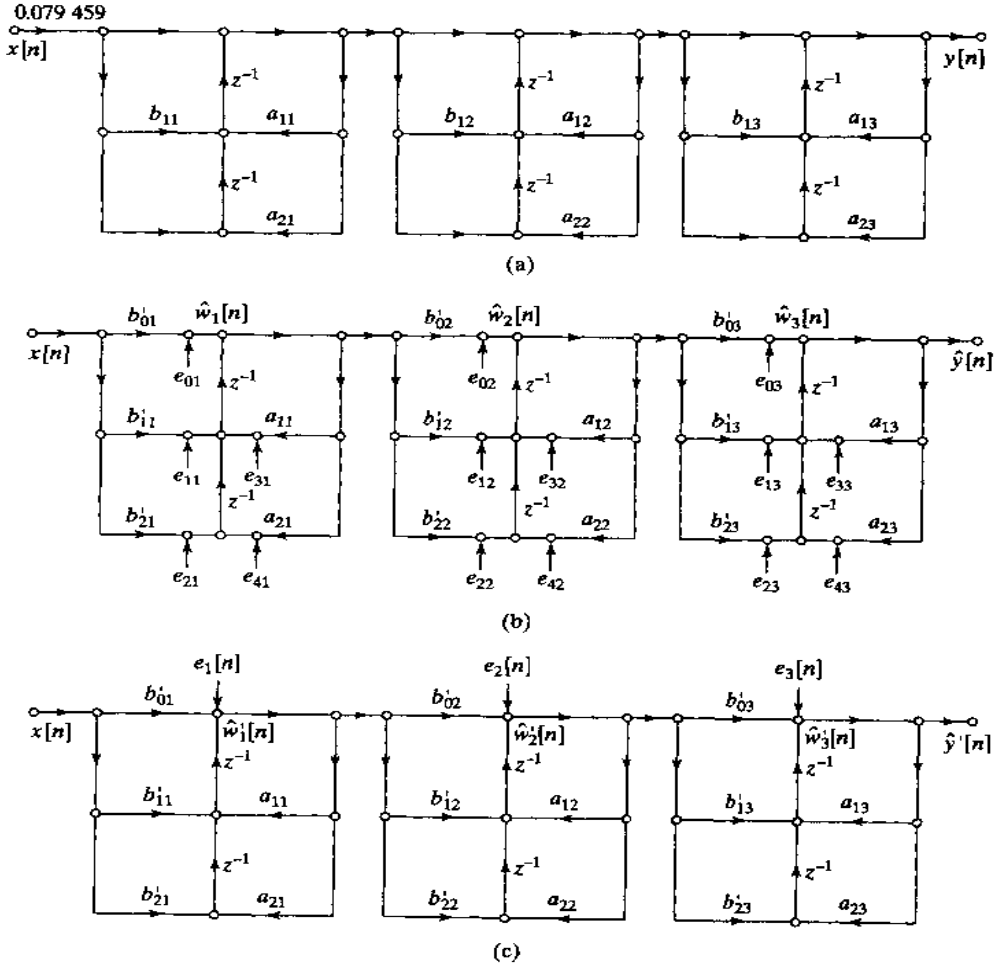


图 6.56　子系统为转置接Ⅱ型的六阶级联系统的模型

(a) 无限精度模型；(b) 表示单个乘法量化的加权系统的线性噪声模型；(c) 联合噪声源的线性噪声模型

于 1 的总增益常数应该放在级联中很后的地方，以使得信号和噪声都同时受到衰减。然而，这就有可能沿级联产生溢出。因此，一种比较好的方法是将增益在系统的 3 个部分之间分配，使得级联中每一级都正好避免溢出。这种分配可以表示成

$$H(z) = s_1 H_1(z) s_2 H_2(z) s_3 H_3(z) \tag{6.111}$$

式中 $s_1 s_2 s_3 = 0.079\,459$，标量因子可以吸收到单个系统函数 $H'_k(z) = s_k H_k(z)$ 分子的系数中去，如下式：

$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \right) = \prod_{k=1}^{3} H'_k(z) \tag{6.112}$$

式中 $b'_{0k} = b'_{2k} = s_k$ 和 $b'_{1k} = s_k b'_{1k} = s_k$。所得加权系统如图 6.56(b)所示。

图 6.56(b)示出代表乘积量化的量化噪声源也是在相加之前。图 6.56(c)示出一个等效的噪声模型，其中认为在某一特定节中的噪声源仅被那个节(以及后面的子系统)的极点过滤。图 6.56(c)也利用了这个事实：延迟的白噪声源仍是白噪声，并且与所有其它的噪声源无关，这样在一个子节中全部 5 个噪声源才能合并为一个噪声源，该噪声源具有单个量化噪声源 5 倍的方差量①。因为噪声源假定都是独立的，所以输出噪声方差就是图 6.56(c)中 3 个噪声源的方差之和。因此，对舍入来说，输出噪声功率谱为

$$P_{ff}(\omega) = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{s_2^2 |H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} + \frac{s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} + \frac{1}{|A_2(e^{j\omega})|^2} \right] \tag{6.113}$$

总输出噪声方差为

$$\sigma_f^2 = 5 \frac{2^{-2B}}{12} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s_2^2 |H_2(e^{j\omega})|^2 s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_1(e^{j\omega})|^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{s_3^2 |H_3(e^{j\omega})|^2}{|A_2(e^{j\omega})|^2} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|A_3(e^{j\omega})|^2} d\omega \right] \tag{6.114}$$

如果可以利用双倍字长累加器，那么可能只需要量化作为图 6.56(b)中延迟单元输入的和。在这种情况下，(6.113)式和(6.114)式的因子 5 就变成 3。再者，如果再用双倍字长的寄存器来实现图 6.56(b)中的延迟单元，那么仅有变量 $\hat{w}_k[n]$ 需要量化，这样每个子系统就仅有一个量化噪声源。这时，(6.113)式和(6.114)式的因子 5 就变成 1。

这些标量因子 s_k 被选择在沿级联系统各点以避免溢出。在这种情况下，将用(6.102)式的加权约定。因此，选择加权常数满足于：

$$s_1 \max_{|\omega| \leqslant \pi} |H_1(e^{j\omega})| < 1 \tag{6.115a}$$

$$s_1 s_2 \max_{|\omega| \leqslant \pi} |H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})| < 1 \tag{6.115b}$$

$$s_1 s_2 s_3 = 0.079\,459 \tag{6.115c}$$

最后一个条件保证了在单位幅度正弦输入时系统输出没有溢出，因为该滤波器的最大总增益为 1。对于表 6.4 的系数，所得加权因子是 $s_1 = 0.186\,447$，$s_2 = 0.529\,236$ 和 $s_3 = 0.805\,267$。

(6.113)式和(6.114)式指出，输出噪声功率谱的形状和总输出噪声方差取决于构成二阶

① 这个讨论可以推广到证明转置直接Ⅱ型具有与直接Ⅰ型系统相同的噪声特性。

节零点与极点的配对方式，以及在级联实现中各二阶节的先后次序。的确，很容易看出，对于 N 个节，有 $N!$ 种零极点配对方式和 $N!$ 种二阶节的级联次序，总共有 $(N!)^2$ 种不同的系统。另外，我们既能选择直接Ⅰ型也能选择直接Ⅱ型（或它们的转置）来实现这些二阶节。在这个例子中，如果想确定具有最低输出噪声方差系统的话，这就意味着有 144 种不同的级联系统可供考虑。对于 5 个级联节，就有 57 600 种不同的系统！很明显，即使对一个低阶系统的完全分析都是一件令人头痛的事，因为像(6.114)式这样的表示式必须对每种配对和级联次序一一求值。Hwang(1974)用了动态规划法和 Liu and Peled(1975)用了一种直接推断的方法来降低计算量。用于设计和分析级联型 IIR 滤波器的 Dehner 程序包括了配对和级联先后次序的最优化结果(DSP Committee, 1979)。

尽管求最佳配对和级联次序很困难，Jackson (1970a, 1970b, 1986)还是发现，应用下面的简单规则几乎总是能得到好的结果：

1．在 z 平面内，最靠近单位圆的极点应该与紧靠它的零点配对。

2．重复应用规则 1 直到全部零点和极点都配对完。

3．所求得的二阶节应该按极点靠近单位圆的程度级联，要么以靠近单位圆递增程度为次序，或者以靠近单位圆递减程度为次序。

这种配对规则是根据如下考虑：具有高的峰值增益的子系统是不希望的，因为它们可能会引起溢出，并且它们还将量化噪声放大。把一个靠近单位圆的极点与其邻近的零点配对就可降低这个节的峰值增益。

规则 3 的一种考虑是由(6.113)式想到的。可以看到某些子系统的频率响应在输出噪声功率谱的式子中出现多于一次。如果不想要输出噪声方差谱在靠近单位圆的极点附近有高的峰值，那么让那个极点的频率响应分量在(6.113)式中不多次出现就是有利的。这就建议将这样一些“高 Q”极点移到级联中开始的地方。另一方面，从输入到网络中某一特殊点的频率响应将涉及到在这个节点之前的子系统频率响应的乘积。因此，为避免在级联的早期阶段过分降低信号电平，应该把靠近单位圆的极点依次放在最后。因此，级联次序问题是依各种考虑而改变的，其中包括总输出噪声方差和输出噪声谱的形状。Jackson (1970a, 1970b)用 L_p 范数对配对和级联次序问题作了定量分析，并给出了一套非常详细的“经验法则”，不用详尽地计算全部可能而得到了好的结果。

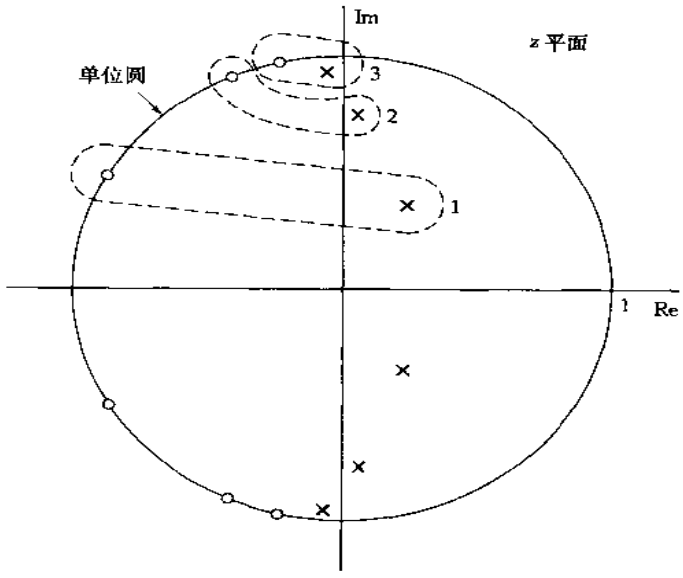


图 6.57　指出零极点配对的图 6.56 的六阶系统的零极点图

本例系统的零极点图如图6.57所示。配对的零极点也已圈出来。在这个情况下，我们已经选择各节的级联次序是从最小峰值频率响应到最大峰值频率响应。图 6.58 说

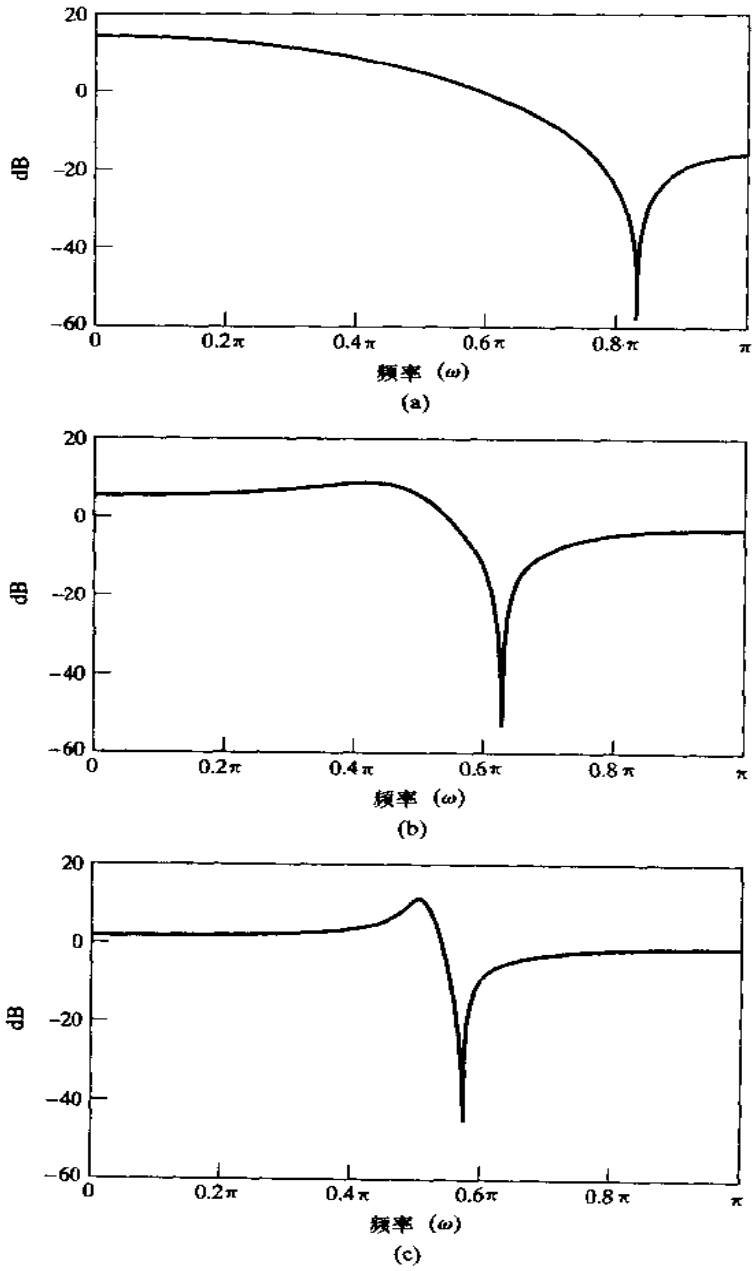
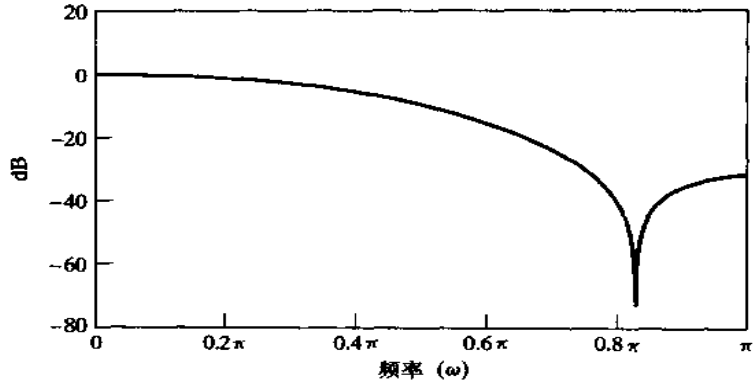
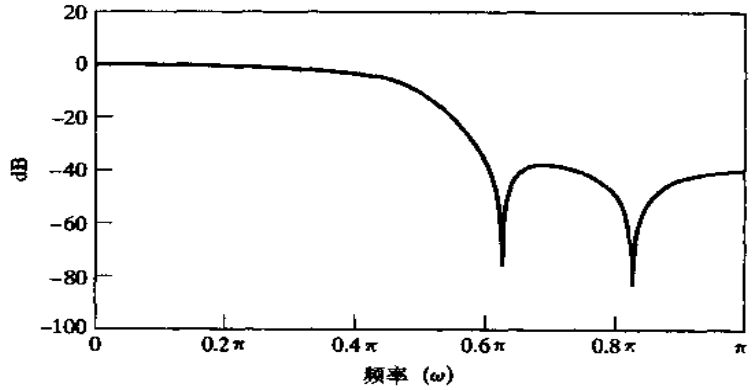


图 6.58　举例系统的频率响应

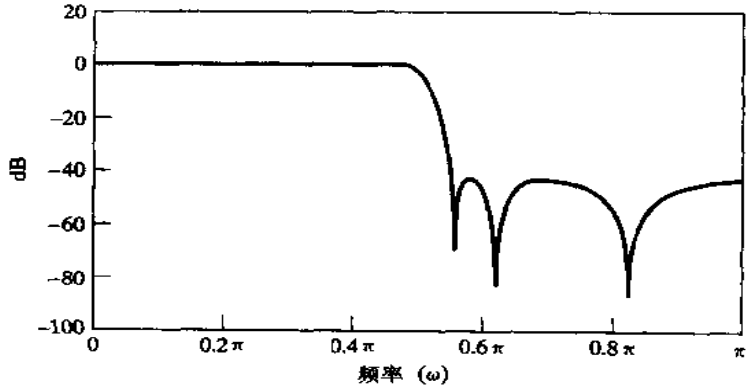
(a) $20\log_{10}|H_1(e^{j\omega})|$；(b) $20\log_{10}|H_2(e^{j\omega})|$；(c) $20\log_{10}|H_3(e^{j\omega})|$



(d)



(e)



(f)

图 6.58(续) (d) $20\log_{10}|H'_1(e^{j\omega})|$；(e) $20\log_{10}|H'_1(e^{j\omega})|H'_2(e^{j\omega})|$；
(f) $20\log_{10}|H'_1(e^{j\omega})H'_2(e^{j\omega})H'_3(e^{j\omega})| = 20\log_{10}|H'(e^{j\omega})|$

明了单个节的频率响应是如何组合成总频率响应的。图 6.58(a)～(c)示出单个未加权子系统的频率响应。图 6.58(d)～(f)示出总频率响应是如何构成的。应该注意到，图 6.58(d)～(f)表明：(6.115a)～(6.115c)式的幅度加权保证了从输入到任何子系统输出的最大增益都小于 1。图6.59中的实线指出按 123 次序(最小峰值到最大峰值)级联时输出噪声的功率谱(这张图已假设 $B+1=16$)。注意，谱的峰值位于最靠近单位圆的极点附近。虚线指出的是当级联节的次序相反(即 321)时，输出噪声的功率谱。因为在第 1 节在低频具有高的增益，所以噪声谱在低频适当地变大，而在峰值周围略微降低。高 Q 极点仍然对级联中第 1 节的噪声源进行过滤，所以它仍然还是趋向于控制着噪声谱。在这种情况下，这两种级联次序的总噪声功率却几乎是相同的。

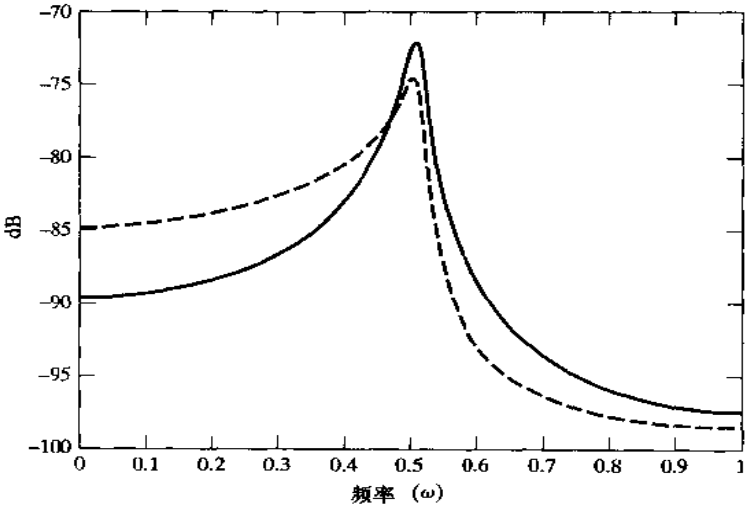


图 6.59　对按 123 次序级联(实线)和 321 次序级联(虚线)时的输出噪声功率谱

刚才讨论的例子表明在级联 IIR 系统定点实现中所引起的问题的复杂性。并联型多少要简单些，因为不发生配对和排序的问题。然而，幅度加权仍然还是需要的，以避免单个二阶子系统以及当各子系统的输出相加产生总输出时出现溢出。因此，已经获得的方法也一定适用于并联型结构。Jackson(1990)详细地讨论了并联型的分析，并得出并联型总输出噪声功率一般可与级联型最好的配对和级联次序结果相媲美。即便如此，级联型还是更为常用，因为常用的 IIR 滤波器其系统函数的零点是在单位圆上，级联型可用较少的乘法器实现，并对零点位置有更好的控制。

6.8.4　直接型 FIR 系统分析

因为作为直接Ⅰ型和直接Ⅱ型 IIR 系统的一种特殊情况，它包括了直接型 FIR 系统(即图 6.14 和图 6.15 中全部 a_k 为零)。因此如果将系统函数的全部极点除掉，并将全部信号流图中的反馈路径都除掉的话，那么 6.8.1 节和 6.8.2 节的结果和分析方法都适用于 FIR 系统。

直接型 FIR 系统就是如下离散卷积：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] \tag{6.116}$$

图 6.60(a)示出该理想未量化的直接型 FIR 系统。图 6.60(b)是该系统的线性噪声模型,假定全部乘积都在相加前量化。这个效果就是要直接在系统的输出端引入$(M+1)$个白噪声源,这样总输出噪声方差就是

$$\sigma_f^2 = (M+1)\frac{2^{-2B}}{12} \tag{6.117}$$

这就是在(6.84)式和(6.93)式中设定 $N-0$ 和 $h_{ef}[n]=\delta[n]$所得到的结果。当用双倍长度累加器时,就仅需要量化输出。因此,(6.117)式的因子$(M+1)$被 1 代替。这就使得双倍长度累加器对实现 FIR 系统来说具有一个很有吸引力的硬件特色。

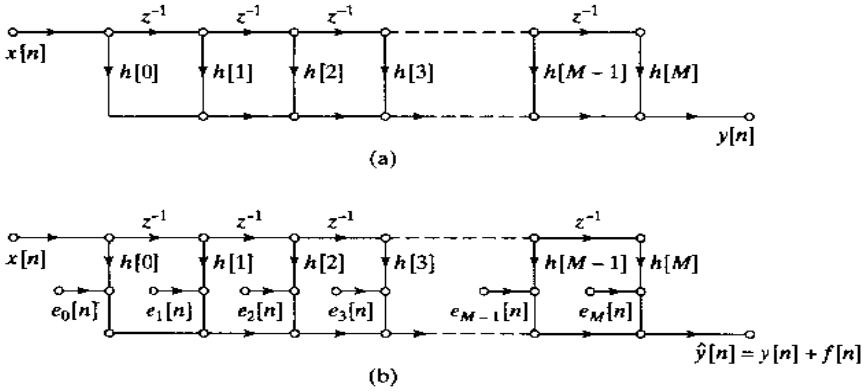


图 6.60 FIR 系统的直接型
(a) 无限精度模型; (b) 线性噪声模型

在定点 FIR 系统直接型实现中溢出也是一个问题。对于补码运算,只需要关心输出的大小,因为图 6.60(b)中所有其它和都是部分和。因此,可将脉冲响应系数加权以减小溢出的可能。6.8.2 节讨论的任何一种方法都可用来确定各标量因子。当然,脉冲响应加权减小了系统增益,因此输出信噪比如在 6.8.2 节讨论的那样也随着下降。

例 6.12 对于 6.7.5 节中的 FIR 系统的幅度加权考虑

考虑 6.7.5 节的系统。该系统的脉冲响应系数由表 6.3 给出,经简单运算可证明,以及由图 6.46(b)可见

$$\sum_{n=0}^{27} |h[n]| = 1.751\,352$$

$$\left(\sum_{n=0}^{27} |h[n]|^2\right)^{1/2} = 0.679\,442$$

$$\max_{|\omega|\le\pi} |H(e^{j\omega})| \approx 1.009$$

这些数都满足(6.105)式的关系。我们看到,所给出的这个系统是被加权以使得理论上对幅度大于 1/1.009=0.991 1 的正弦信号是有可能溢出的;但即使这样,对大多数信号溢出都不大可能。确实如此,因为该滤波器有线性相位,我们可以证明对宽带信号,因为在通带内增益近似为 1,而在其余地方增益都小于 1,那么输出信号应该小于输入信号。

在 6.5.3 节已指出像例 6.12 这种线性相位系统能用一般 FIR 系统大约一半的乘法次数实现。由图 6.34 和图 6.35 的信号流图，这点是显而易见的。在这些情况下应该明白，如果乘积是在相加之前量化的话，那么输出噪声方差也减少一半。然而，利用这样一些结构与直接型比较会涉及到比较复杂的变址算法。大多数 DSP 芯片的结构都把双倍字长的累加器与高效流水线式乘法-累加运算和简单的回路控制结合在一起用于优化直接型 FIR 系统。由于这个原因，即使与能用较少的乘法次数满足频率响应特性指标的 IIR 滤波器相比，直接型 FIR 实现往往还是最有吸引力的了！

6.5.3 节讨论了 FIR 系统的级联实现。6.8.3 节的结果和分析方法也适用于 FIR 系统的级联实现，但是 FIR 系统没有极点，配对和级联次序问题简化到只有级联次序问题。和 IIR 级联系统的情况相同，如果系统是由很多子系统组成的话，全部可能的级联次序分析是非常困难的。Chan and Rabiner (1973b,1973a)研究过这个问题，并由实验发现噪声性能对级联次序相对来说是不灵敏的。他们的结果建议：一个好的级联次序就是从每个噪声源到输出的频率响应是相对平坦，并且峰值增益是小的这样一种级联次序。

6.8.5 离散时间系统的浮点实现

由上面讨论很清楚，定点运算的有限动态范围使得在离散时间系统定点数字实现中有必要仔细地给输入和中间信号电平进行幅度加权。利用浮点数值表示和浮点运算可以基本上不用这种加权。

在浮点表示中一个实数 x 是用二进制数 $2^c\hat{x}_M$ 表示的，其中加权因子的指数部分 c 称为阶，而 $\hat{x}_M$ 是称为**尾数**的小数部分。在浮点运算系统中阶和尾数都是明确表示成定点二进制数的。浮点表示法为保持既有一个宽的动态范围，又有小的量化噪声提供了一种方便的方法；然面，量化误差表现出多少有些不同。浮点运算用调整阶和归一化尾数的方法使得 $0.5 \leqslant \hat{x}_M < 1$ 一般能保持高的精度和宽的动态范围。当浮点数相乘时，其阶相加，而尾数相乘。因此，尾数必须量化。当两个浮点数相加，它们的阶必须调整到相同，这用移动较小的数的尾数二进制小数点的方法来达到。因此相加结果也要量化。如果假设阶的范围是足够的，以致于没有比 2^c 更大的数，那么量化仅影响尾数，但是尾数误差也受到了 2^c 的加权。因此，一个量化的浮点数很方便地表示成

$$\hat{x} = x(1+\varepsilon) = x + \varepsilon x \tag{6.118}$$

按照将量化误差表示成 εx，这就自动地表示了这个事实，即量化误差随信号电平大小起伏而加权。

上面提到的浮点运算性质使离散时间系统浮点实现的量化误差分析复杂化了。首先，噪声源必须既要在每次相乘之后，又要在每次相加之后插入。对比于定点运算，一个重要的结果是执行相乘和相加的次序有时会造成很大的差异。对分析来说更为重要的是不再能认为量化噪声源是白噪声、且与信号无关这些假定是合理的了。事实上，在(6.118)式中，噪声是明确地用信号表示出来的。因此，如果没有对输入信号的性质做出假设，就不能对噪声进行分析。若假设输入是已知的(例如，白噪声)，一种合理的假设是，相对误差 ε 是与 x 无关且是均匀分布的白噪声。

利用这些假设，Sandberg(1967)，Liu and Kaneko(1969)，Weinstein and Wppenheim(1969)

以及 Kan and Aggarwal(1971)等都得出了一些有用的结果。特别是 Weinstein and Oppenheim 比较了一阶和二阶 IIR 系统的浮点和定点实现。他们指出，如果代表浮点尾数的位数等于定点的字长，那么浮点运算在输出端会得到较高的信噪比。对于接近单位圆的极点发现差别要大些。这一点不奇怪！不过，要用额外的位数来表示阶，并且所期望的动态范围愈大，对阶所要求的位数就愈多。实现浮点运算的硬件比定点运算也要复杂得多。因此，利用浮点运算必须增加运算单元的字长和复杂性。它的主要优点是基本上消除了溢出问题，并且如果尾数也足够长的话，量化也不成为一个问题。这就在系统设计和实现中在为简化了。

6.9 IIR 数字滤波器定点实现中的零输入极限环

对于用无限精度运算实现的稳定的 IIR 离散时间系统，若对 n 大于某个 n_0 值，激励变成零且一直保持为零，那么在 $n > n_0$ 的输出一定渐近地衰减到零。对同一个系统，用有限寄存器长度运算实现则输出可能会产生周期性持续无限地振荡，而输入仍保持为零。这种效应常称为**零输入极限环**现象，它就是系统反馈回路中非线性量化或相加溢出所造成的结果。数字滤波器中这种极限环现象是很复杂的，并且分析困难，我们不打算在任何一般意义下处理这一论题。然而，为了说明这个问题，将用两个简单的例子说明这样的极限环是如何发生的。

6.9.1 由于舍入和截尾引起的极限环

在一个迭代差分方程中连续地将乘积舍入或截尾可能产生重复性的输出模式，下面的例子说明这一点。

例 6.13 在一阶系统中的极限环现象

考虑由如下差分方程表征的一阶系统：

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \qquad |a| < 1 \tag{6.119}$$

该系统的信号流图 6.61(a)所示，假定对于储存系数 a、输入 $x[n]$ 和滤波器节点变量 $y[n-1]$ 的寄存器长度是 4 位(即二进制小数点左边一个符号位和右边的 3 位)。由于有限长度寄存器的关系，乘积 $ay[n-1]$ 在与 $x[n]$ 相加之前必须舍入或截断到 4 位。根据(6.119)式代表真正实现的流图如图 6.61(b)所示。假设乘积为舍入，真正的输出 $\hat{y}[n]$ 满足如下非线性差分方程：

$$\hat{y}[n] = Q[a\hat{y}[n-1]] + x[n] \tag{6.120}$$

式中 $Q[\cdot]$ 代表舍入运算。假定 $a = 1/2 = 0_{\diamond}100$，并且输入是 $x[n] = (7/8)\delta[n] = (0_{\diamond}111)\delta[n]$。利用(6.120)式，可以看出，对 $n=0$，$\hat{y}[0] = 7/8 - 0_{\diamond}111$。为了求 $\hat{y}[1]$，将 $\hat{y}[0]$ 乘以 a，得到结果为 $a\hat{y}[0] = 0_{\diamond}011\ 100$，是一个 7 位数，它必须要舍入到 4 位。这个数是 7/16，正好在两个 4 位数量化电平 4/8 和 3/8 之间

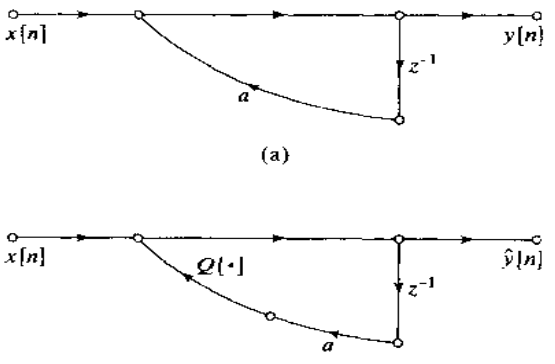


图 6.61

一半的地方。如果在这样的情况下总是选择向上舍入，那么 $0_{\diamond}011100$ 舍入到 4 位即 $0_{\diamond}100=1/2$。因为 $x[1]=0$，那么 $\hat{y}[1]=0_{\diamond}100=1/2$。继续迭代这个差分方程，就给出 $\hat{y}[2]=Q[a\hat{y}[1]]=0_{\diamond}010=1/4$ 和 $\hat{y}[3]=0_{\diamond}001=1/8$。在这两种情况下都不必舍入。然而，为了得到 $\hat{y}[4]$，必须将 7 位数 $a\hat{y}[3]=0_{\diamond}000100$ 舍入到 $0_{\diamond}001$，然后，对 $n\geqslant 3$ 的全部值都得出相同的结果。这个例子的输出序列如图6.62(a)所示。若 $a=-1/2$，也能完成前面的计算，并再次表明输出如图 6.62(b)所示。因此，由于乘积 $a\hat{y}[n-1]$ 的舍入，输出在 $a=1/2$ 时达到一个恒定值 1/8，以及在 $a=-1/2$ 时，输出是在 +1/8 和 −1/8 之间一个周期稳态振荡。这些是一个类似于极点在 $z=\pm 1$ 而不是在 $z=\pm 1/2$ 的一阶系统所得出的周期输出。当 $a=+1/2$ 时，振荡周期是 1，而当 $a=-1/2$ 时，振荡周期是 2。这样的稳态周期输出称为极限环，并且首先被 Blackman(1965)发现，他称这个限制极限环的幅度区间为死带。在本例中，这个死带就是 $-2^{-B}\leqslant\hat{y}[n]\leqslant+2^{-B}$，$B=3$。

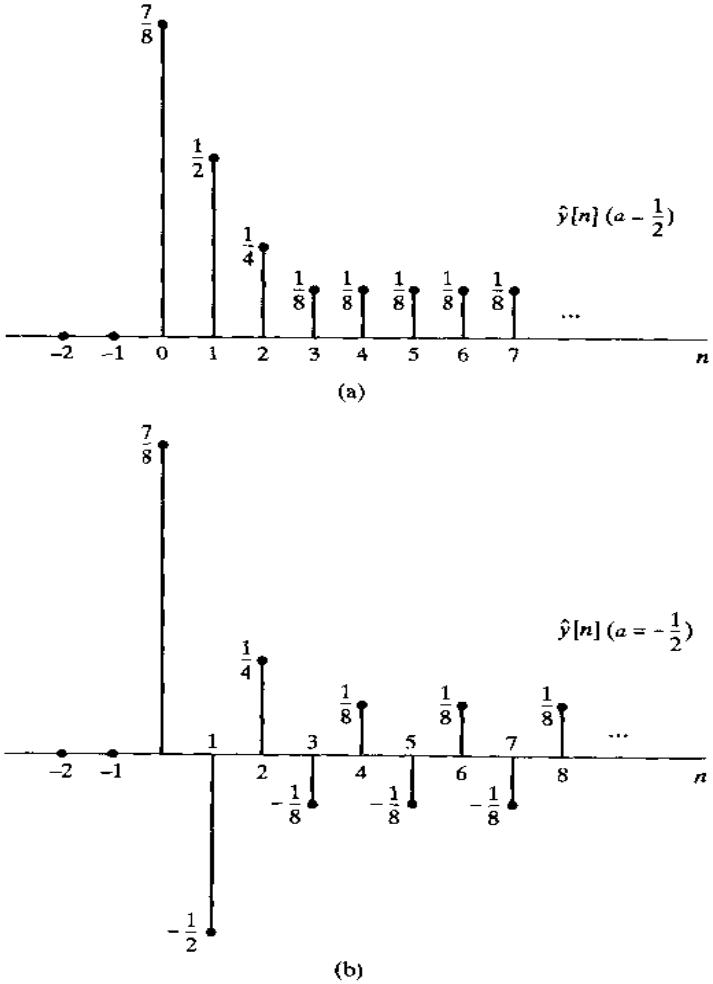


图 6.62　图 6.61 一阶系统的单位脉冲响应
(a) $a=1/2$; (b) $a=-1/2$

上面这个例子已经说明了在一阶 IIR 系统中，由于舍入是有可能产生零输入极限环的。对于截尾情况也能呈现类似的结果。二阶系统也能呈现出极限环现象。在高阶系统并联实现的情况下，当输入为零时，单个二阶系统的输出是独立的。在这种情况下，一个或更多个二阶节都能够对输出求和点提供一个极限环。在级联实现的情况下，仅在第 1 节有零输入，后续各节可以呈现它们自己特性的极限环现象，或者只表现为对前面各节极限环输出的过滤。对用其它滤波器结构实现的高阶系统，极限环现象变得更加复杂，它的分析也非常复杂。

除了给出在数字滤波器中极限环效应的一种解释外，当一个系统的零输入极限环响应是所期望的输出时，前述结果也是有用的。例如，当关注的是信号产生的数字正弦波发生器，或离散傅里叶变换计算中系数的产生时就属于这种情况。

6.9.2 由于溢出而出现的极限环

除了上面讨论的这类极限环外，由于溢出能发生一种更加严重的极限环形式。溢出的效果是在输出端插进了很大的误差，并且在某些情况下，滤波器输出就在大幅度的极限值间振荡。这样的极限环称为**溢出振荡**。Ebert(1969)等人曾详细讨论过由溢出引起的振荡问题。现用下面例子来说明溢出振荡。

例 6.14 二阶系统中的溢出振荡

考虑由下面差分方程实现的二阶系统：

$$\hat{y}[n] = x[n] + Q[a_1\hat{y}[n-1]] + Q[a_2\hat{y}[n-2]] \tag{6.121}$$

式中 $Q[\cdot]$代表字长 3 位加符号位的补码舍入。溢出可以因舍入乘积的补码相加而发生。假定 $a_1 = 3/4 = 0_\diamond 110$，$a_2 = -3/4 = 0_\diamond 010$，并假定 $x[n]$在 $n \geqslant 0$ 一直保持为零。再者，假设 $\hat{y}[-1] = 3/4 = 0_\diamond 110$ 和 $\hat{y}[-2] = -3/4 = 0_\diamond 010$。现在，在 $n = 0$ 的输出是

$$\hat{y}[0] = 0_\diamond 110 \times 0_\diamond 110 + 0_\diamond 010 \times 0_\diamond 010$$

如果用补码运算求该乘积，可得

$$\hat{y}[0] = 0_\diamond 100100 + 0_\diamond 100100$$

并且，如果当一个数是在两个量化电平之间一半的地方时选用向上量化的办法，该补码相加的结果就是

$$\hat{y}[0] = 0_\diamond 101 + 0_\diamond 101 = 0_\diamond 010 = -\frac{3}{4}$$

这时，二进制进位溢出到符号位，因此，把这个正数的和改变成一个负数。重复这一过程就给出

$$\hat{y}[1] = 1_\diamond 011 + 1_\diamond 011 = 0_\diamond 100 = \frac{3}{4}$$

这时，由符号位之和所产生的二进制进位就丢失了。负数的和又映射为一个正数。很明显，$\hat{y}[n]$将一直在 $+3/4$和 $-3/4$ 之间振荡直到输入被加上为止。这样，$\hat{y}[n]$就进入到一个周期的极限环，其周期为 2，而幅度几乎是实现的满量程幅度。

这个例子说明溢出振荡是怎样发生的。高阶系统能呈现出非常复杂的特性，以及出现其它一些频率。对于估计在什么样的差分方程情况下能产生溢出振荡的一些结果也是有的(Ebert et al., 1969)。利用图 6.38(b)的饱和溢出特性可以避免溢出振荡(Ebert al., 1969)。

6.9.3 消除极限环

当一个数字滤波器是处于连续运行的应用情况下，零输入极限环的可能存在是重要的，因为当输入为零时，一般总希望输出趋近到零。例如，假设采样一个语音信号，用某一数字滤波器滤波，然后利用D/A转换器又转换回到声音信号。在这样的情形下，只要输入为零，该滤波器就进入周期的极限环状态是很不希望有的，因为极限环将会产生一个可以听得见的单音。

研究极限环一般问题的一条途径是寻求不支持极限环振荡的各种结构。利用状态空间表示法(Barnes and Fam, 1977; Mills et al., 1978)和模拟系统中与无源性类似的概念(Rao and Kailath, 1984; Fettweis, 1986)，这样的结构已经得到。然而，这些结构一般都比等效的级联或并联型实现要求更多的计算。用增加运算字长，一般能避免溢出。相类似，因为舍入极限环通常是限制在二进制字的最低有效位上，所以增加位数可以用来减小极限环的有效幅度。Claasen(19973)等人也指出，如果用双倍长度累加器，使得量化发生在乘积的累加之后，那么在二阶系统中由于舍入而发生极限环的可能很小。因此，对于极限环问题就要在字长和计算算法复杂性之间求折衷，这就好比在系数量化和舍入噪声之间所做的事情一样。

最后，要指出溢出和舍入所产生的零输入极限环是仅存在于IIR系统中的一种现象。FIR系统不可能支持零输入极限环，因为它们没有反馈路径。FIR系统的输出在输入变成零且一直保持为零后不会迟于$(M+1)$个样本也一定为零。在不能容许极限环振荡的应用场合，这是FIR系统的一个主要优点。

6.10 小结

在这一章，我们已经讨论了实现线性时不变离散时间系统的很多方面的问题。本章的前半部分主要放在基本实现结构上。在介绍方框图和信号流图作为差分方程的图形表示法以后，我们讨论了IIR和FIR离散时间系统的几种基本结构。这些包括直接Ⅰ型、直接Ⅱ型、级联型、并联型和转置型。正如所表明的，这些类型当用无限精度运算实现时全都是等效的。然而，不同的结构在有限精度实现范畴内则有很大的差别。因此，本章剩余部分就放在这些基本结构的数字实现中与有限精度或量化有关的一些问题上。

我们从简单地论述数字数的表示着手，并纵观一下量化效应在采样(第4章已讨论)、离散时间系统系数的表示以及用有限精度运算实现系统中都是重要的。通过几个例子说明了差分方程系数量化效应。该问题的论述是独立于有限精度运算效应的，已表明有限精度运算效应在系统中引入了非线性。我们说明了在某些情况中，这个非线性就是使得系统的输入变成零以后，系统仍可能有持续的极限环振荡的原因。也说明了量化效应可以用独立的随机白噪声源构成的模型来表示，这些噪声源都是从网络内部引入的。对直接型和级联型结构建立了这样的线性噪声模型。在量化效应的全部讨论中最根本的问题就是高的量化精度要求和保持尽可能大的信号幅度范围之间的矛盾。我们看到，在定点实现中，可以牺牲一个而改善另一个，但是为了改善一个而不影响另一个就要求增加用来表示系数和信号幅度的位数。这可以用增加定点字长或者采用浮点表示的方法来实现。

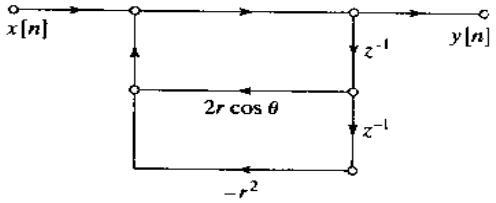
讨论量化效应有两个目的。首先，已经得到的几个结果可用于指导实际系统的设计。我们发现，量化效应在很大程度上取决于所采用的结构和要实现系统的具体参数；并且即使一般需要由系统仿真来求出系统的特性，但在设计过程中，很多已讨论出的结果在作出明智的决策

上仍是有用的。第二，本章这部分内容的同样重要的作用是要说明一种分析的路子，这种分析方法可用于各种数字信号处理算法中研究量化效应。本章的各个例子指出在研究量化效应时一般都是可以这样做的假设和近似的形式。我们将把在本章所建立的分析方法用于第 9 章研究离散傅里叶变换计算中的量化效应分析。

习　题

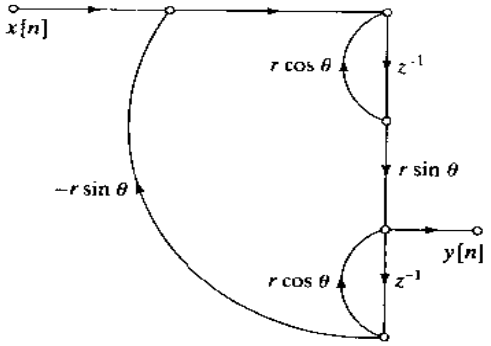
基本题(附答案)

6.1　求图 P6.1 两个网络的系统函数，并证明它们有相同的极点。



网络 1

(a)



网络 2

(b)

图 P6.1

6.2　图 P6.2 代表一个线性常系数差分方程的信号流图，求出 $y[n]$ 关于输入 $x[n]$ 的差分方程。

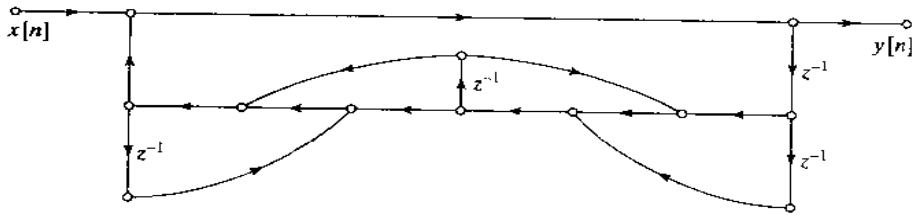
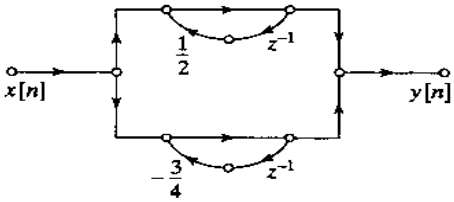
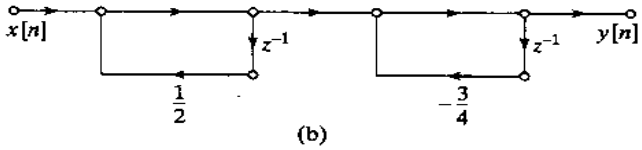


图 P6.2

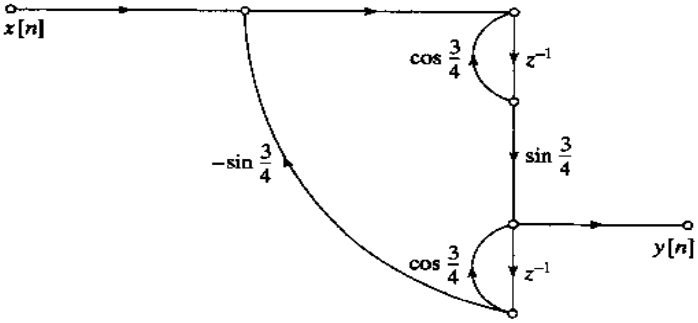
6.3 图 P6.3(a)～(f)示出 6 个系统。试确定最后 5 个(b)～(f)中的哪一个与(a)有相同的系统函数。你应该凭观察就能排除某些可能。



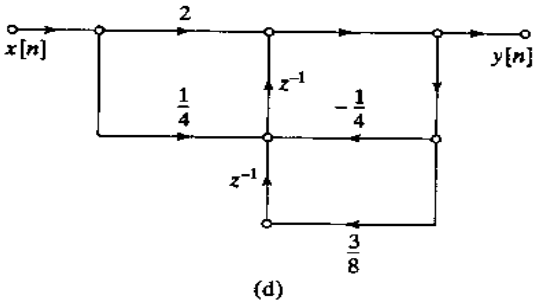
(a)



(b)

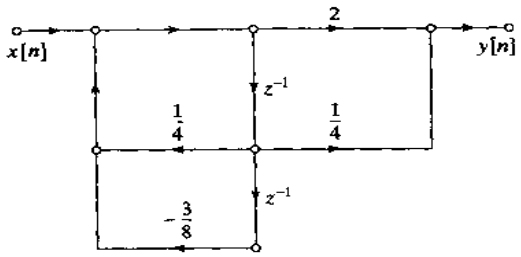


(c)

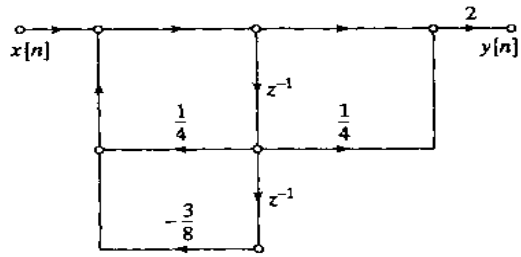


(d)

图 P6.3



(e)



(f)

图 P6.3(续)

6.4 考虑图 P6.3(d)的系统。

(a) 求关联输入和输出 z 变换的系统函数。

(b) 写出输入序列 $x[n]$和输出序列 $y[n]$满足的差分方程。

6.5 一线性时不变系统用图 P6.5 的流图实现。

(a) 写出由该流图所代表的差分方程。

(b) 该系统的系统函数是什么?

(c) 在图 P6.5 的实现中,计算每个输出样本需要多少次实数乘法和实数加法?(假设$x[n]$是实数,且假设乘 1 不计在乘法总次数中。)

(d) 图 P6.5 的实现要求 4 个存储寄存器(延迟单元),用另一种不同的结构,有可能减少存储寄存器个数吗? 若可以,画出其流图,若不行,请解释为什么不能再减少。

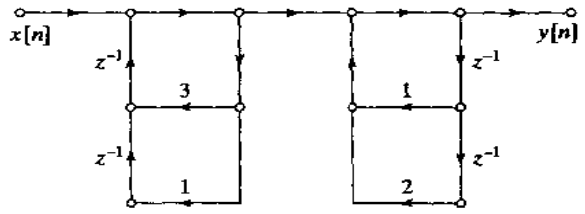


图 P6.5

6.6 求图 P6.6 各系统的单位脉冲响应。

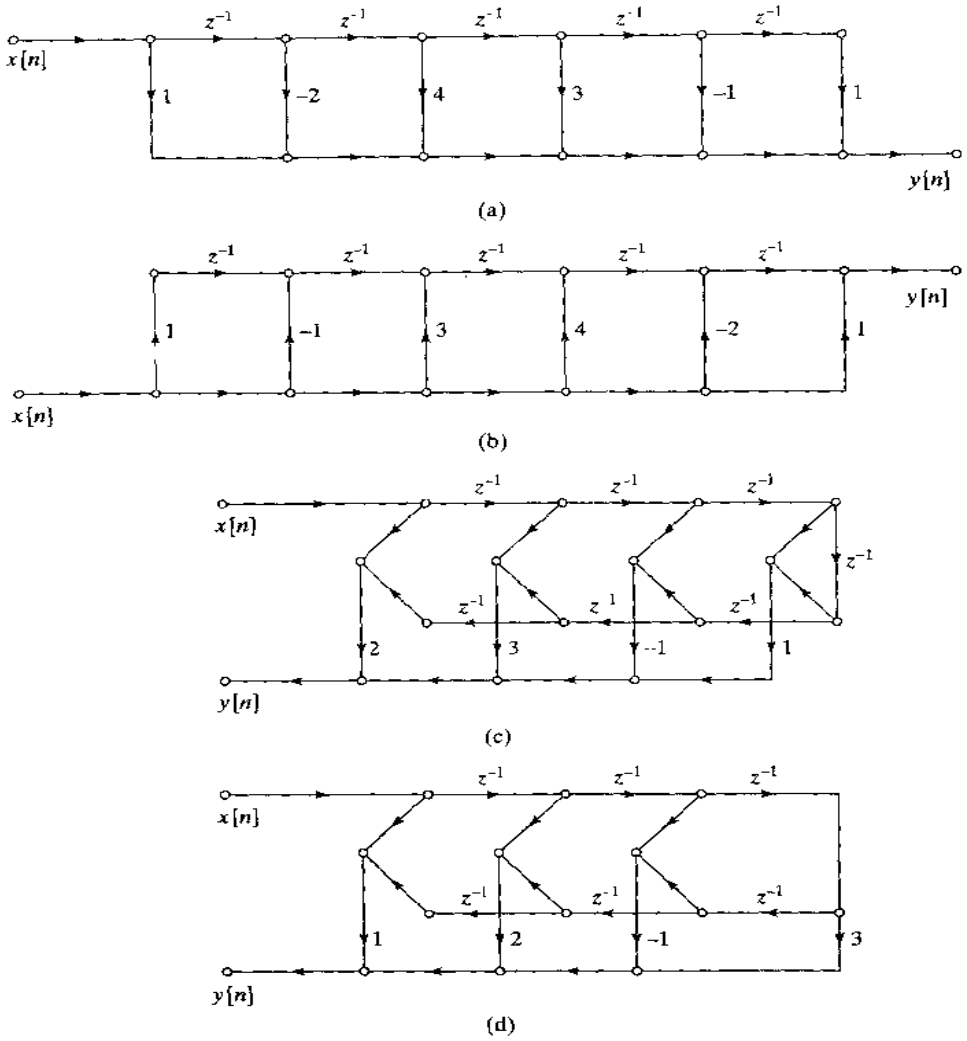


图 P6.6

6.7 设 $x[n]$和 $y[n]$都是 N 点序列($N>3$),且满足如下差分方程:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=x[n-2]-\frac{1}{4}x[n]$$

试画出对应于该差分方程的因果 LTI 系统的直接Ⅱ型信号流图。

6.8 图 P6.8 的信号流图代表某一 LTI 系统,求给出该系统输入 $x[n]$和输出 $y[n]$之间关系的差分方程。按惯例,图中未特别予以标记的支路增益均为 1。

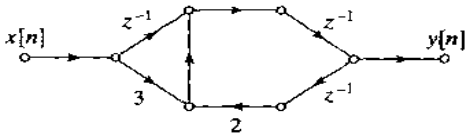


图 P6.8

6.9 图 P6.9 是某一因果离散时间 LTI 系统的信号流图,未给予明确标注的支路增益均为 1。

(a) 求单位脉冲响应在 $n=1$ 时的 $h[1]$值。

(b) 求关联 $x[n]$和 $y[n]$的差分方程。

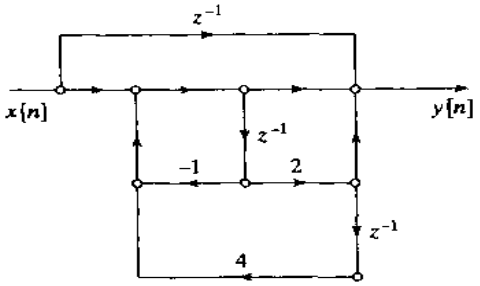


图 P6.9

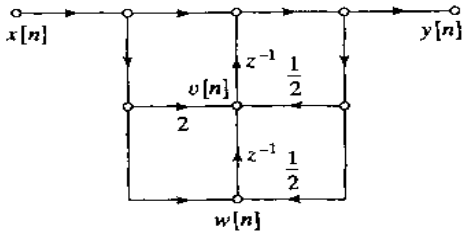


图 P6.10

6.10 考虑图 P6.10 的信号流图。

(a) 利用图中给出的节点变量，写出由该网络所代表的一组差分方程。

(b) 画出由两个一阶系统级联的等效系统的流图。

(c) 这个系统稳定吗？为什么？

6.11 考虑一因果 LTI 系统 S，其单位脉冲响应是 $h[n]$，系统函数为

$$H(z)=\frac{2(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}{z(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

(a) 画出该系统直接Ⅱ型实现的流图。

(b) 画出(a)中流图的转置型。

6.12 对由图 P6.12 流图所描述的线性时不变系统，求关联输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的差分方程。

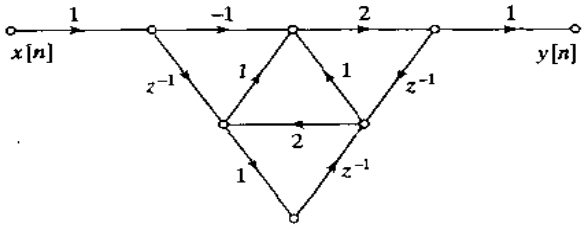


图 P6.12

6.13 画出系统函数为

$$H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

的 LTI 系统的直接Ⅰ型实现的信号流图。

6.14 画出系统函数为

$$H(z)=\frac{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}$$

的 LTI 系统的直接Ⅱ型实现的信号流图。

6.15 画出系统函数为

$$H(z)=\frac{1-\frac{7}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

的 LTI 系统的转置的直接Ⅱ型实现的信号流图。

6.16 考虑图 P6.16 的信号流图。

(a) 画出将转置定理应用于该信号流图所得结果的信号流图。

(b) 确认在(a)中所求得的转置信号流图与图 P6.16 原系统有相同的系统函数 $H(z)$。

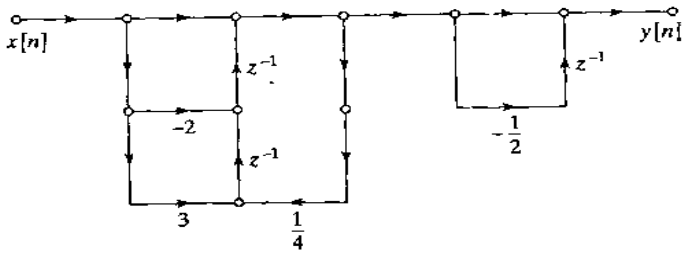


图 P6.16

6.17 考虑一因果 LTI 系统，其系统函数为

$$H(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} - z^{-3}$$

(a) 画出该系统直接型实现的信号流图。

(b) 画出该系统转置直接型实现的信号流图。

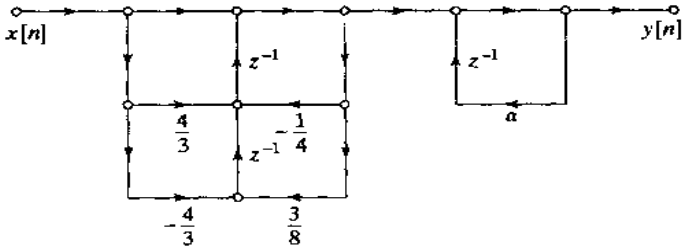


图 P6.18

6.18 对于图 P6.18 信号流图中的参数 a 作某些选择，该流图能用一个二阶直接 II 型信号流图所代替而实现同一个系统函数，请给出这样一种选择 a，以及所得到的系统函数 $H(z)$。

6.19 考虑系统函数为

$$H(z) = \frac{2 - \frac{8}{3}z^{-1} - 2z^{-2}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}z^{-1})}$$

的因果 LTI 系统。画出由一阶转置直接 II 型节的并联组合实现该系统的信号流图。

6.20 有系统函数为

$$H(z) = \frac{(1 + (1 - j/2)z^{-1})(1 + (1 + j/2)z^{-1})}{(1 + (j/2)z^{-1})(1 - (j/2)z^{-1})(1 + (1/2)z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

画出用实系数的二阶转置直接 II 型节的级联实现该系统函数的信号流图。

基本题

6.21 在很多应用中，能产生正弦序列的系统是有用的。一种办法是用单位脉冲响应为 $h[n] = e^{j\omega_0 n}u[n]$ 的系统来实现，因此，$h[n]$ 的实部和虚部就是 $h_r[n] = (\cos\omega_0 n)u[n]$ 和 $h_i[n] = (\sin\omega_0 n)u[n]$。

在实现具有复脉冲响应的系统时，实部和虚部是作为单独的输出分开的。首先写出产生所要求脉冲响应的复数差分方程，然后把它分成实部和虚部，画出实现该系统的流图。所画的流图中仅能有实系数。这种实现有时就称为**耦合型振荡器**，因为当输入由单位样本序列激励时输出就是正弦序列。

6.22 对于系统函数

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

作为一阶系统的级联对该系统画出所有可能实现的流图。

6.23 考虑一因果线性时不变系统，其系统函数为

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{5}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

(a) 对下列每种形式画出系统实现的信号流图：

(i) 直接Ⅰ型；

(ii) 直接Ⅱ型；

(iii) 用一阶和二阶直接Ⅱ型节的级联型；

(iv) 用一阶和二阶直接Ⅱ型节的并联型；

(v) 转置直接Ⅱ型。

(b) 对于上面(a)中(v)的流图，写出差分方程，并证明该系统有正确的系统函数。

6.24 图 P6.24 示出几个流图。求每个流图的转置，并证明在每种情况下，原流图与其转置型流图都有相同的系统函数。

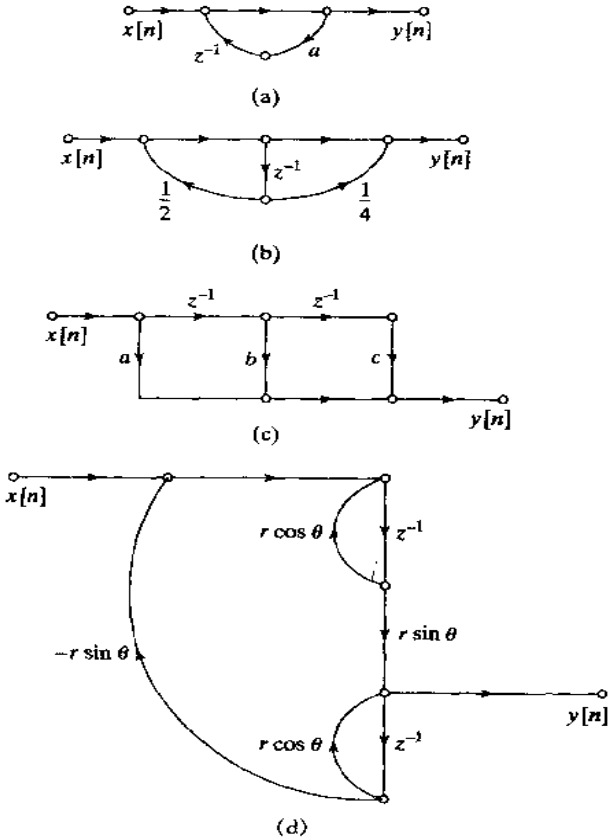


图 P6.24

6.25 考虑图 P6.25 的系统。

(a) 求系统函数 $Y(z)/X(z)$。

(b) 写出输入输出序列满足的差分方程。

(c) 画出一种图 P6.25 系统具有相同输入输出关系，但具有最少可能延迟单元个数的信号流图。

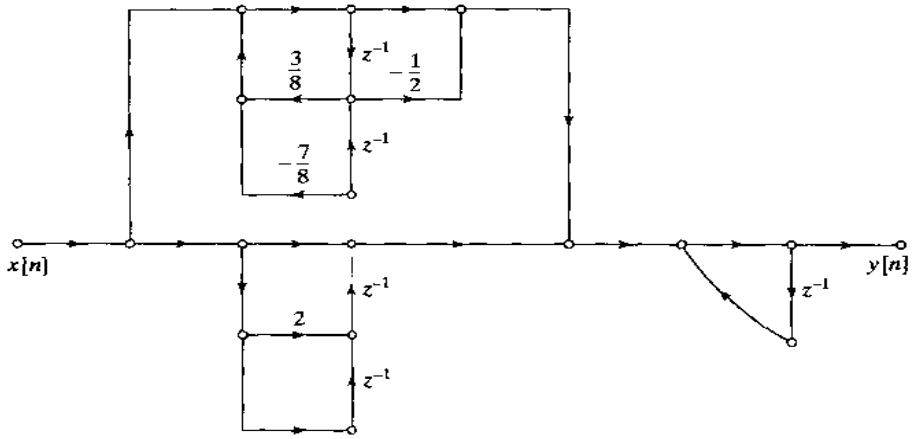


图 P6.25

6.26 一线性时不变系统，其系统函数为

$$H(z)=\frac{0.2(1+z^{-1})^6}{(1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-1})(1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2})(1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2})}$$

现在要用图 P6.26 所示形式的流图实现。

(a) 将图 P6.26 中的全部系数填入，你的答案是唯一的吗？

(b) 在图 P6.26 中选定合适的节点变量，并写出由该图所代表的一组差分方程。

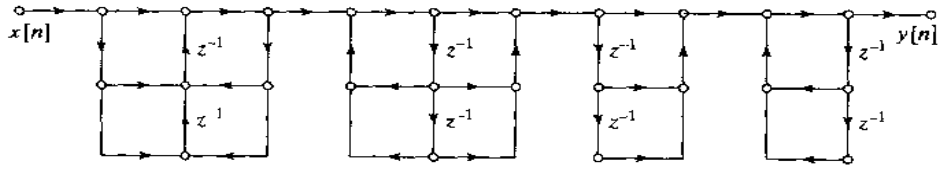
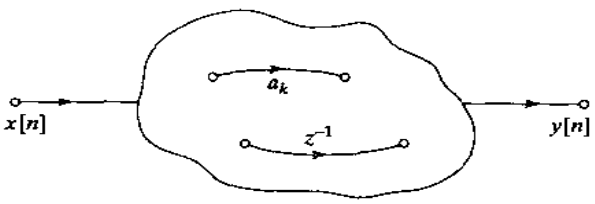


图 P6.26

深入题

6.27 考虑某一由系数乘法器和延迟单元组成的一般信号流图（记作网络 A），如图 P6.27－1所示。如果系统是初始松弛的，其特性完全由它的脉冲响应 $h[n]$表征。现在要将该系统做一些变化以得到一个新的流图（记作网络 A_1），其脉冲响应为 $h_1[n]=(-1)^n h[n]$。

(a) 若 $H(e^{j\omega})$如图 P6.27－2 所示，试画出



网络 A

图 P6.27－1

$H_1(e^{j\omega})$。

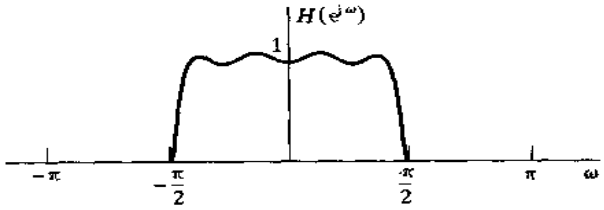


图 P6.27－2

(b) 说明如何用网络 A 的系数乘法器和/或延迟支路的简单变化由网络 A 而形成一个新的网络 A_1，A_1 的脉冲响应就是 $h_1[n]$。

(c) 若网络 A 如图 P6.27－3 所示，说明如何仅用系统乘法器的简单变化把该网络 A 变化为脉冲响应为 $h_1[n]$的网络 A_1。

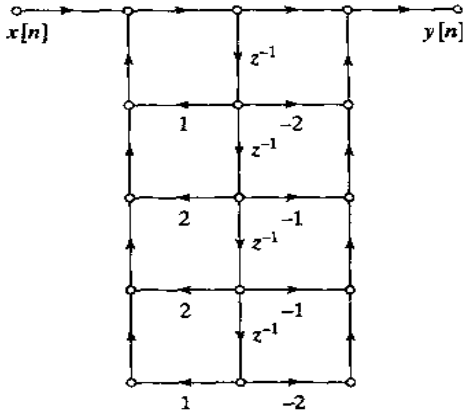


图 P6.27－3

6.28 图 P6.28 的流图是不可计算的；也就是说，用该流图所表示的差分方程不能计算出输出，因为流图中包含了一个没有延迟单元的闭合回路。

(a) 写出图 P6.28 系统的差分方程，并由差分方程求网络的系统函数；

(b) 由系统函数求一个可计算的流图。

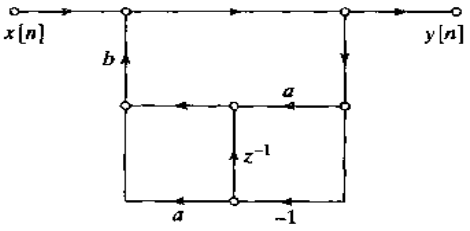


图 P6.28

6.29 一线性时不变系统的单位脉冲响应是

$$h[n]=\begin{cases}a^n, & 0\leqslant n\leqslant 7\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 画出该系统的一种直接型非递推实现流图。

(b) 证明对应的系统函数为

$$H(z)=\frac{1-a^8z^{-8}}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

(c) 画出另一种系统流图，该流图具有与(b)中相同的系统函数，且由 FIR 系统(分子)与 IIR(分母)级

联所组成(设$|a|<1$)。

(d) 在(c)中的实现是递推的还是非递推的？整个系统是 FIR 还是 IIR?

(e) 系统的哪一种实现要求：

(ⅰ) 最多存储器(延迟单元)?

(ⅱ) 最多的运算次数(每输出样本的乘法和加法次数)?

6.30 考虑一 FIR 系统,其单位脉冲响应是

$$h[n]=\begin{cases}\frac{1}{15}(1+\cos[(2\pi/15)]), & 0\leqslant n\leqslant 14\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

该系统是一类称之为频率采样滤波器的一个例子。习题 6.37 将详细讨论这类滤波器,本题只考虑一个特例。

(a) 对 $n_0=n$ 和 $n_0=15/2$,画出该系统的单位脉冲响应。

(b) 证明该系统的系统函数为

$$H(z)=(1-z^{-16})\cdot\frac{1}{15}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}e^{-j2\pi n_0/15}}{1-e^{-j2\pi/15}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}e^{j2\pi n_0/15}}{1-e^{-j2\pi/15}z^{-1}}\right]$$

(c) 证明,若 $n_0=\frac{15}{2}$系统的频率响应可以表示为

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{15}e^{-j\omega 7}\left\{\frac{\sin(\omega 15/2)}{\sin(\omega/2)}+\frac{1}{2}\frac{\sin[(\omega-2\pi/15)15/2]}{\sin[(\omega-2\pi/15)/2]}+\frac{1}{2}\frac{\sin[(\omega+2\pi/15)15/2]}{\sin[(\omega+2\pi/15)/2]}\right\}$$

利用该表示式画出 $n_0=15/2$ 时系统频率响应的幅度。对 $n_0=0$ 求得一个类似的表示式,画出 $n_0=0$ 时的幅度响应。哪一种 n_0 的选取系统具有广义线性相位?

(d) 画出该系统作为系统函数为$(1-z^{-16})$的 FIR 系统和一阶及二阶 IIR 系统的并联组合的级联实现的信号流图。

6.31 考虑图 P6.31-1 的离散时间系统。

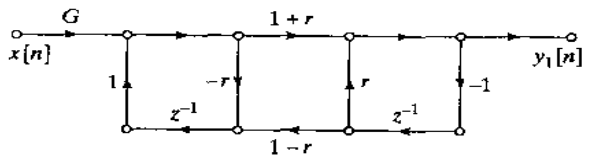


图 P6.31-1

(a) 写出由图 P6.31-1 流图所代表的一组差分方程。

(b) 求图 P6.31-1 系统的系统函数 $H_1(z)=Y_1(z)/X(z)$作为 r 的函数，$-1<r<1$,并求 $H_1(z)$的极点的模和相角。

(c) 将图 P6.31-1 流图中的延迟单元移到顶部支路并改变流向而得到图 P6.31-2 的流图。该系统函数 $H_2(z)=Y_2(z)/X(z)$,与 $H_1(z)$是什么关系?

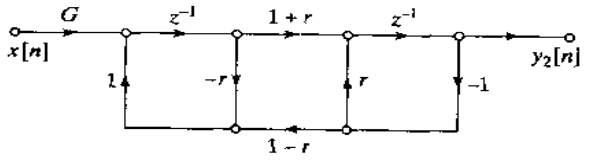
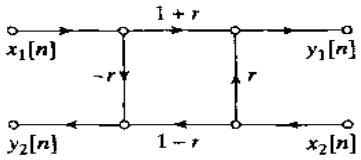


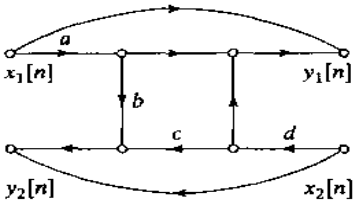
图 P6.31-2

6.32 图 P6.32 的 3 种网络全是同一个两输入/两输出线性时不变系统的等效实现。



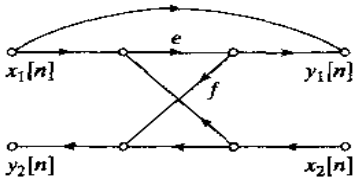
网络 A

(a)



网络 B

(b)



网络 C

(c)

图 P6.32

(a) 写出网络 A 的差分方程。

(b) 利用网络 A 中的 r 求网络 B 的 a，b，c 和 d 值，以使两者等效。

(c) 利用网络 A 中的 r 求网络 C 的 e 和 f 值，以使两者等效。

(d) 网络 B 或 C 为什么可能比网络 A 更为可取，网络 A 比网络 B 或 C 有什么可能的长处？

6.33 考虑一全通系统，其系统函数为

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.54}{1 - 0.54z^{-1}}$$

该系统的一种实现流图如图 P6.33 所示。

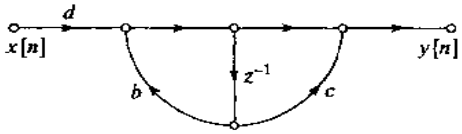


图 P6.33

(a) 求系统 b，c 和 d，以使得图 P6.33 的流图是 $H(z)$ 的一种实现。

(b) 在图 P6.33 网络的实际实现时，系数 b，c 和 d 可能用舍入将真正的值量化到最靠近的 1/10 的值(例如，0.54 舍入到 0.5 和 1.851 8 舍入到 1.9)。所得系统仍为一个全通系统吗？具有系统函数为 $H(z)$ 的全通系统，联系输入和输出的差分方程可以表示为

$$y[n] = 0.54(y[n-1] - x[n]) + x[n-1]$$

(c) 画出一种网络的流图，该流图用两个延迟单元，但仅要求一次乘以常数(不计 ±1)的乘法。

(d) 用已量化的系数，(c)的网络是一个全通系统吗？

(e) 的实现与(a)的实现比较，其主要缺点是要求两个延迟单元。然而，对于高阶系统有必要实现全通系统的级联。对于 N 个全通节的级联，有可能利用由(c)确定的全通节，而只要求 $(N+1)$ 个延迟单元。这可在两节之间共用一个延迟单元来完成。

(e) 考虑系统函数为下式的全通系统：

$$H(z) = \left(\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}\right)$$

画出“级联”实现的流图，该流图中由两节(c)全通节组成。在两节之间共用一个延迟单元。所得

网络应该仅有 3 个延迟单元。

(f) 用量化系数 a 和 b,(e)中的网络还是一个全通系统吗?

6.34 本题中信号流图的全部支路除专门标注外增益均为 1。

(a) 示于图 P6.34-1 系统 A 的信号流图代表一因果 LTI 系统。有可能用更少的延迟单元实现同一个输入输出关系吗?

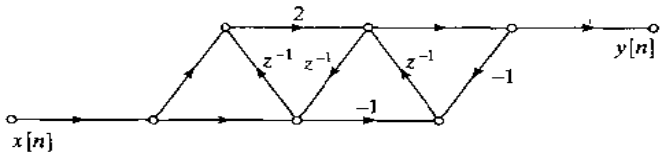


图 P6.34-1

(b) 示于图 P6.34-2 系统 B 与图 6.34-1 的系统有相同的输入输出关系吗? 作出明确地解释。

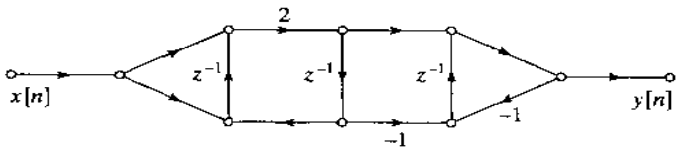


图 P6.34-2

6.35 考虑一全通系统,其系统函数是

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

(a) 画出该系统直接 I 型实现的信号流图。你需要多少延迟单元和乘法器? (不计 ± 1 的相乘)。

(b) 画出该系统只用一个乘法器的信号流图,将延迟单元数做到最少。

(c) 现考虑另一个全通系统,其系统函数是

$$H(z) = \frac{(z^{-1} - \frac{1}{3})(z^{-1} - 2)}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

求出并画出用两个乘法器和 3 个延迟单元的系统信号流图。

6.36 图 P6.36 的信号流图是一因果 LTI 系统的一种实现。

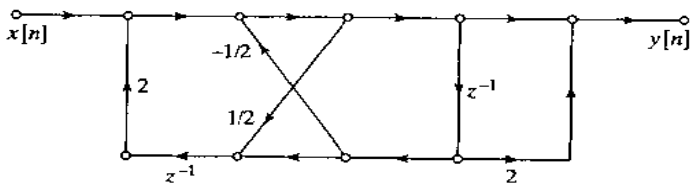


图 P6.36

(a) 画出该信号流图的转置。

(b) 对原系统或它的转置中的任一种求关联输入 $x[n]$ 和输出 $y[n]$ 的差分方程。

(**注意**:这两种结构有相同的差分方程)。

(c) 该系统是 BIBO 稳定吗?

(d) 若 $x[n]=(1/2)^n u[n]$,求 $y[2]$。

扩充题

6.37 在本题中,我们将建立一种称为频率采样滤波器的一类离散时间系统的某些性质。这类滤波器具有如下形式的系统函数:

$$H(z)=(1-z^{-N})\cdot\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\tilde{H}[k]/N}{1-z_k z^{-1}}$$

式中 $z_k=e^{j(2\pi/N)k}$, $k=0,1,\cdots,N-1$。

(a) 该系统函数 $H(z)$可用系统函数为$(1-z^{-N})$的 FIR 系统与一阶 IIR 系统的并联组合的级联来实现。画出这种实现的信号流图。

(b) 证明如上所定义的 $H(z)$是一个$(N-1)$阶的 z^{-1}多项式。为此就需要证明 $H(z)$除 $z=0$ 外没有任何极点,也没有高于$(N-1)$次的 z^{-1}项。这些条件对于该系统单位脉冲响应的长度意味着什么?

(c) 证明单位脉冲响应由下列表示式给出:

$$h[n]=\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{H}[k]e^{j(2\pi/N)n}\right)(u[n]-u[n-N])$$

[**提示**:求出该系统 FIR 和 IIR 部分的脉冲响应,然后将它们卷积以得到总单位脉冲响应。]

(d) 利用洛必达(L'Hôpital)法则证明

$$H(z_m)=H(e^{j(2\pi/N)m})=\tilde{H}[m],\qquad m=0,1,\cdots,N-1$$

这就是说,证明常数 $\tilde{H}[m]$就是系统频响应在等间隔频率 $\omega_m=(2\pi/N)m$, $m=0,1,\cdots,N-1$,上的样本。这类 FIR 系统的名称就来自这一性质。

(e) 一般 IIR 部分的极点 z_k 和频率响应的样本 $\tilde{H}[k]$都是复数。然而,若 $h[n]$是实数,就能找到一种仅涉及实数量的实现。证明:若 $h[n]$是实数且 N 是偶数,那么$H(z)$可以表示为

$$H(z)=(1-z^{-N})\left\{\frac{H(1)/N}{1+z^{-1}}+\frac{H(-1)/N}{1+z^{-1}}+\sum_{k=1}^{(N/2)-1}\frac{2|H(e^{j(2\pi/N)k})|}{N}\cdot\frac{\cos[\theta(2\pi k/N)]-z^{-1}\cos[\theta(2\pi/N)-2\pi k/N]}{1-2\cos(2\pi k/N)z^{-1}+z^{-2}}\right\}$$

式中 $H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$,当 $N=16$ 和 $H(e^{j\omega_k})=0$, $k=3,4,\cdots,14$ 时,画出该系统的信号流图表示。

6.38 在第 4 章已证明离散时间信号的采样率一般能用线性滤波和时间压缩的组合来降低。图 P6.38 示出一个 M 到 1 的抽取器的方框图,它能将采样率降低 M 倍。按照这个模型,线性滤波器工作在高的采样率下。然而,若 M 大的话,滤波器的大部分输出样本将被该压缩器丢弃掉。在某些情况下,有可能采用更为有效的实现。

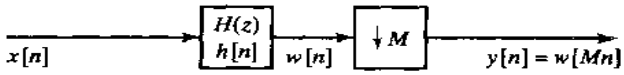


图 P6.38

(a) 假设该滤波器是一个 FIR 系统,其单位脉冲响应 $h[n]=0$, $n<0$ 和 $n>10$。画出图 P6.38 的系统,但是要在给出信息的基础上用一个等效的信号流图代替滤波器$h[n]$。注意:用信号流图来实现 M 到 1 的压缩器是不可能的,所以你还必须像图P6.38那样用一个方框来表示这个压缩器。

(b) 注意到某些支路运算可与压缩运算交换,利用这一点,画出(a)的该系统的更为有效的实现流图。

求在取得输出 $y[n]$ 时所要求的总计算量降低了几分之几?

(c) 现假设图 P6.38 滤波器有如下系统函数:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

画出图 P6.38 中整个系统的直接型实现的流图。用该系统做线性滤波器,每输出样本的总计算量能减少吗?若能,减少几分之几?

(d) 最后,假设图 P6.38 的滤波器有系统函数为

$$H(z) = \frac{1 + \frac{7}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

对该线性滤波器利用下列每一种实现,画出图 P6.38 的整个系统的流图:

(ⅰ) 直接Ⅰ型;

(ⅱ) 直接Ⅱ型;

(ⅲ) 转置直接Ⅰ型;

(ⅳ) 转置直接Ⅱ型。

用与压缩器交换运算的方法,4 种形式中哪一种能更有效地实现图 P6.38 的系统?

6.39 语音产生可以用代表声腔的线性系统模型来表示,该声腔用通过振动声带释放的一股气流激励。语音合成的一种方法涉及到把声腔表示为等长度而有不同横截面的圆柱体声道的连接,如图 P6.39 所示。假设想要用代表气流的体积速度仿真该系统。输入经一小阻碍物——声带耦合到声道。假设输入由左端音量速度变化表示,但在左端行波的边界条件必须是净体积速度为零。这就类似于在一端由电流源驱动而在远端开路的电气传输线,那么传输线中的电流就类似于声道的体积速度,而电压就类似于声压。输出是右端的音量速度。假设每一节都是无耗声波传输线。

在节与节之间每个界面上,入射波 f^+ 以一种系数传到下一节,而反射波 f^- 以不同的系数被反射回来。同理,反射波 f^- 在到达某一界面时也是以一种系数继续向前传,而以另一不同系数被反射回来。具体点说,如果考虑在横截面为 A_1 的声道内某一入射波 f^+ 到达横截面为 A_2 的声道界面,那么入射波以 $(1+r)f^+$ 传播,而以 rf^+ 反射回去,其中

$$r = \frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}$$

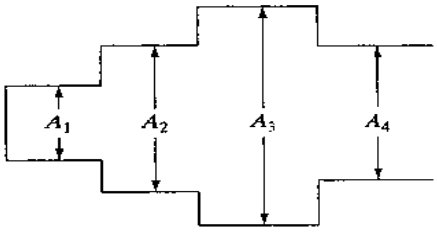


图 P6.39

今考虑每节长为 3.4 cm,在空气中声音速度等于 34 000 cm/s。试画出实现图 P6.39 4 节模型的流图,输出以 20 000 样本/s 采样。

尽管以上冗长的介绍,这仍是一个比较直接的问题。如果你觉得用声道来思考比较困难,你就可以把它当成具有不同特性阻抗的几节传输线。和传输线一样,将这个系统的脉冲响应表示成闭式是困难的。因此,可以根据实际考虑,在每节利用入射和反射波脉冲,直接画出该网络。

6.40 在数字滤波器实现中仿真舍入和截尾效应是将量化变量表示成

$$\hat{x}[n] = Q[x[n]] = x[n] + e[n]$$

式中 $Q[\cdot]$ 记作舍入或截尾到 $(B+1)$ 位,而 $e[n]$ 是**量化误差**。假设量化噪声序列是一个平稳白噪声序列,使有

$$\mathcal{E}\{(e[n] - m_e)(e[n+m] - m_e)\} = \sigma_e^2 \delta[n]$$

并假设噪声序列值的幅度在量化阶 $\Delta = 2^{-B}$ 内均匀分布。对舍入和截尾的一阶概率密度分别如图

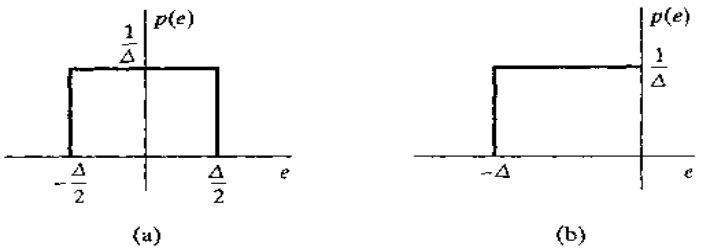


图 P6.40

P6.40(a)和 P6.40(b)所示。

(a) 求舍入噪声的均值 m_e 和方差 σ_e^2。

(b) 求截尾噪声的均值 m_e 和方差 σ_e^2。

6.41 考虑一个具有两个输入的线性时不变系统，如图 P6.41 所示。令 $h_1[n]$和 $h_2[n]$分别是从节点 1 和节点 2 到输出节点 3 的单位脉冲响应。证明：若 $x_1[n]$和 $x_2[n]$不相关，那么相应的输出$y_1[n]$和 $y_2[n]$也不相关。

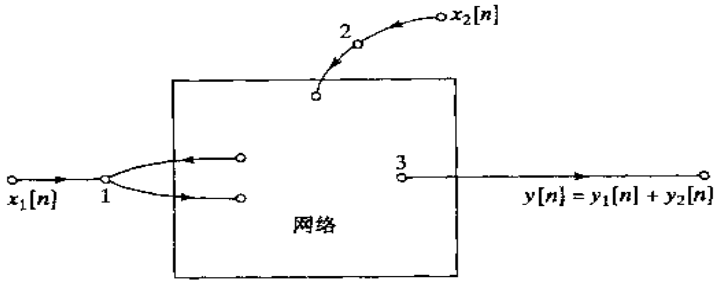


图 P6.41

6.42 图 P6.42 中的网络全都有相同的系统函数。假设在全部计算中都采用定点$(B+1)$位运算实现图 P6.42中的系统，全部乘积在执行相加以前都假设已舍入到$(B+1)$位。

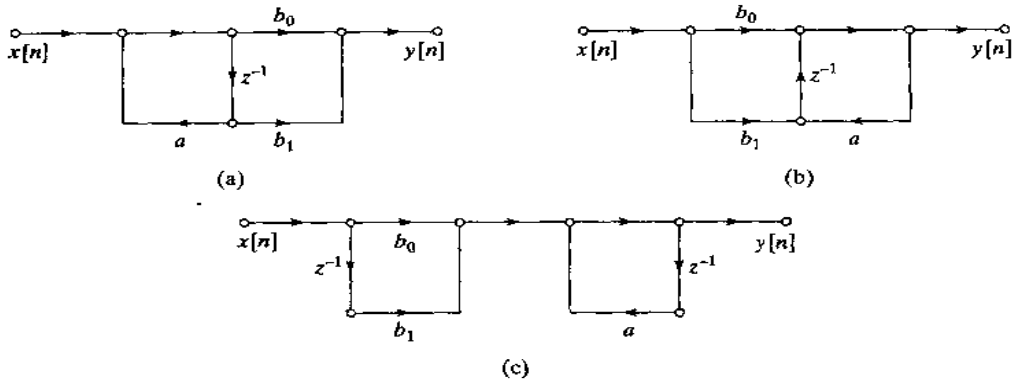


图 P6.42

(a) 对图 P6.42 每一系统画出线性噪声模型。

(b) 图 P6.42 中有两个网络具有相同的由于运算舍入而产生的总输出噪声功率。不用明确地计算输出噪声功率，确定哪两个有相同的输出噪声功率。

(c) 求图 P6.42 每个网络的输出噪声功率，并将结果用单一舍入噪声源功率 σ_B^2 表示。

6.43 图 P6.43-1 示出某一阶系统的流图。

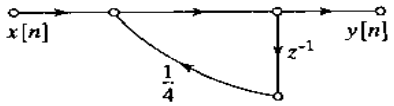


图 P6.43-1

(a) 假设为无限精度运算，求系统对下面输入的响应：

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

对于大 n 值，系统的响应是什么？

现在假设系统用定点运算实现。网络中系数和全部变量都用 5 位寄存器的原码表示。这就是说，全部数都是带符号的小数，表示成

$$b_0b_1b_2b_3b_4$$

其中 b_0,b_1,b_2,b_3 和 b_4 不是 0 就是 1，并且

$$|\text{寄存器值}|=b_12^{-1}+b_22^{-2}+b_32^{-3}+b_42^{-4}$$

若 $b_0=0$，小数是正的；若 $b_0=1$，小数是负的。序列值用某一系数相乘的结果在相加前截断，也即仅保留符号位和 4 位最高有效位。

(b) 计算该量化系统对(a)所给输入的响应，并画出对应于 $0\leqslant n\leqslant 5$，量化和未量化系统的响应。对于大的 n 值，比较这两个响应如何？

(c) 现在考虑图 P6.43-2 的系统，其中

$$x[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(-1)^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

对该系统和输入重做(a)和(b)。

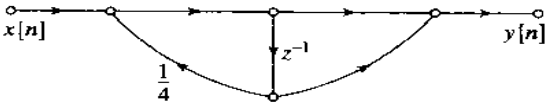


图 P6.43-2

6.44 一因果 LTI 系统有系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{1-1.04z^{-1}+0.98z^{-2}}$$

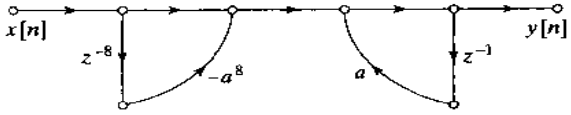
(a) 该系统稳定吗？

(b) 若系数按“四舍五入”舍入，所得到的系统是稳定的吗？

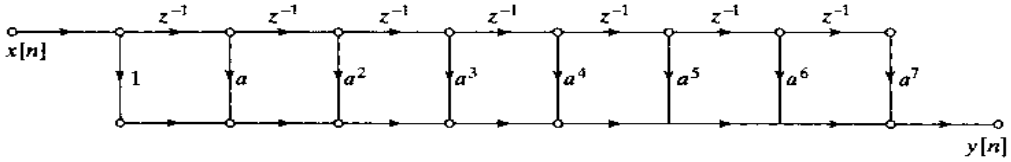
6.45 当用无限精度运算时，图 P6.45 中的两个流图有相同的系统函数。

(a) 证明：从输入 $x[n]$ 到输出 $y[n]$ 两个系统有相同总的系统函数。

(b) 假设上面系统是用补码定点运算实现，并且乘积是在相加完成前被舍入。画出这些信号流图，在



网络 1



网络 2

图 P6.45

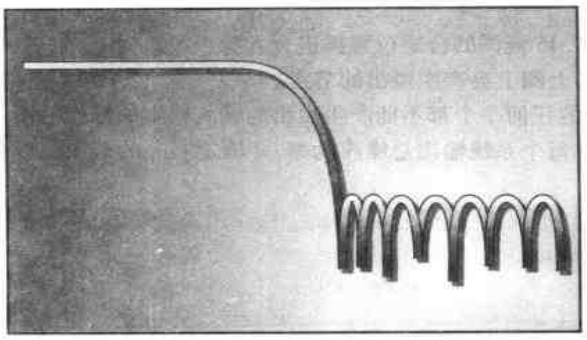
流图中要在图 P6.45 流图的合适位置插进舍入噪声源。

(c) 在(b)部分的流图上圈上会产生溢出的节点。

(d) 求在两个系统中的任何一个都不能产生溢出的输入样本的最大范围。

(e) 假设 $|a|<1$。求每个系统输出总噪声功率,并确定 $|a|$ 的最大值以使网络 1 比网络 2 有较低的输出噪声功率。

第7章 滤波器设计方法



7.0 引言

滤波器是一种特别重要的线性时不变系统。严格地讲，**选频滤波器**这一术语表示一个能让某些频率分量通过而完全拒绝其它频率成分的系统。但是从广义上讲，任何能对某些频率（相对于其它频率来说）进行修正的系统也称为滤波器。虽然在本章的开头着重讨论选频滤波器的设计，但是其中的一些方法是有广泛应用价值的。尽管在许多场合并不限制设计的滤波器一定为因果的，但是在本章中我们还是着重讨论因果滤波器的设计。一般说来，对因果滤波器作一些修正就可以设计和实现非因果滤波器。

滤波器的设计涉及到以下步骤：(1)给出系统所要求特性的技术指标；(2)用因果离散时间系统逼近这些技术指标；(3)实现该系统。虽然这 3 个步骤不是完全独立的，但是我们的注意力主要集中于步骤(2)上，步骤(1)主要取决于应用场合，而步骤(3)则取决于实现滤波器时所用的技术。在实际应用中，所需要的滤波器往往通过数字计算法来实现，并用于对由连续信号经周期采样并接着作 A/D 转换而得到的信号进行滤波。正是由于这个原因，尽管基本的设计方法往往都只与信号和系统的离散时间特性有关，但是人们仍常常把离散时间滤波器称为**数字滤波器**。

当某一离散时间滤波器要使用图 7.1 所示的系统对连续时间信号进行离散时间处理时，往往(但不总是)给出离散时间滤波器和有效的连续时间滤波器在频域的技术指标，尤其对于

像低通、带通和高通滤波器之类的选频滤波器。正如 4.4 节所指出的，如果一个线性时不变离散时间系统正如图 7.1 所示，而输入又是带限的，且采样频率足够高，可避免混叠，则整个系统可以看作是一个线性时不变连续系统，其频率响应为

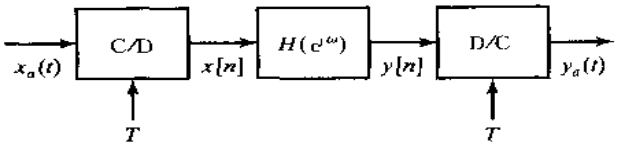


图 7.1　对连续时间信号进行离散时间滤波的基本系统

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases} \tag{7.1a}$$

在这种情况下，可以通过关系式 $\omega = \Omega T$ 直接将有效连续时间滤波器的指标转换为离散时间滤波器的指标。这就是说，$H(e^{j\omega})$在一个周期上的特性可由下式规定：

$$H(e^{j\omega}) = H_{\text{eff}}(j\omega/T), \quad |\omega| < \pi \tag{7.1b}$$

例 7.1 具体说明了这种转换。

例 7.1　离散时间滤波器指标的确定

考虑一个根据图 7.1 的基本框图并用于对连续时间信号进行低通滤波的离散时间滤波器。具体讲，当我们要求当时间频率为 10^4 样本/s($T = 10^{-4}$s)时，图示的整个系统有如下特性：

1. 在频带 $0 \leqslant \Omega \leqslant 2\pi(2\,000)$上增益 $|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ 应当在单位幅度 ± 0.01 之内；

2. 在频带 $2\pi(3\,000) \leqslant \Omega$ 上增益应当不大于 0.001。

这样一组 $|H_{\text{eff}}(j\Omega)|$ 的低通指标绘于图 7.2(a)中，图中的阴影水平线指出允许逼近误差的极限。对于这个特定的例子，参数为

$$\delta_1 = 0.01$$
$$\delta_2 = 0.001$$
$$\Omega_p = 2\pi(2\,000)$$
$$\Omega_s = 2\pi(3\,000)$$

因此本例中，理想的通带增益是单位 1。通带增益在 $1+\delta_1$ 和 $1-\delta_1$ 之间变化而阻带增益范围则为 0 到 δ_2。通常通带阻带最大增益单位为分贝。本例

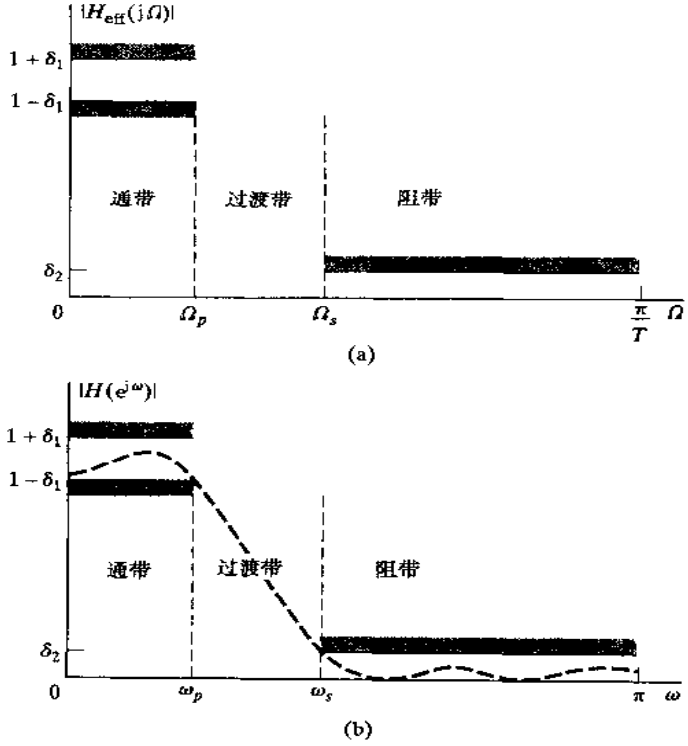


图 7.2　(a) 对于低通滤波器，图 7.1 所示整个系统有效频率响应的技术指标；
(b) 所对应的图 7.1 中离散时间系统的技术指标

中：

理想通带增益(分贝)$=20\log_{10}(1)=0$ dB

最大通带增益(分贝)$=20\log_{10}(1.01)=0.086$dB

最大阻带增益(分贝)$=20\log_{10}(0.001)=-60$dB

由于采样频率为10^4样本/s,根据图7.1中的离散-连续转换器,整个系统的增益在$\Omega=2\pi(5\,000)$时恒等于0。

离散时间滤波器的容限图如图7.2(b)所示。它与图7.2(a)基本相同,只是在图7.2(b)中是作为归一化频率($\omega=\Omega T$)的函数来绘图,且只需绘出$0\leqslant\omega\leqslant\pi$范围内的图形,因为其余部分可由$H(e^{j\omega})$的对称性(假设$h[n]$为实数)和周期性推导出来。由(7.1b)式可得,**通带**内频率响应的幅度必须逼近于1且误差为$\pm\delta_1$,即

$$(1-\delta_1)\leqslant|H(e^{j\omega})|\leqslant(1+\delta_1),\qquad|\omega|\leqslant\omega_p \tag{7.2}$$

其中$\delta_1=0.01$,$\omega_p=2\pi(2\,000)\cdot10^{-4}=0.4\pi$ rad,另一个逼近带是**阻带**,阻带中幅度响应则必须逼近0,且误差小于δ_2,即

$$|H(e^{j\omega})|\leqslant\delta_2,\qquad\omega_s\leqslant|\omega|\leqslant\pi \tag{7.3}$$

本例中,$\delta_2=0.001$,$\omega_s=2\pi(3000)\cdot10^{-4}=0.6\pi$ rad。通带截止频率ω_p和阻带截止频率ω_s可用归一化弧度频率或等效的z平面角度来表示。为了按照这种方法用一个可实现的系统逼近理想低通滤波器,我们必须给出一个非零的带宽为$(\omega_s-\omega_p)$的过渡带,使得幅度响应可以从通带光滑地过渡到带阻,图7.2(b)中的虚线是满足预定技术指标的系统的幅度响应。

在许多应用中被过滤的离散时间信号并不是由连续时间信号得出的,而且若用序列来表示连续时间信号时除了周期采样之外还有许多其它方法。(例如,可参见Steiglitz, 1965以及Oppenheim and Johnson, 1972的论文)此外,在我们所讨论的大部分设计方法中,采样周期对于通道方法没有什么影响。由于这些原因,我们认为滤波器设计问题应当从一组用离散时间频率变量ω表示的所需技术指标开始。因为这些技术指标取决于具体的应用或相互间的关系,所以可从,也可不从图7.1所示框图中的滤波观点来得出这些指标。

实际中所使用的大部分的滤波器的特性都用类似于例7.1的容限图来说明,而且对于相位响应除了隐含的通过稳定性和因果性的要求加以限制外,没有其它限制。例如,因果和稳定的无限脉冲响应(IIR)滤波器之系统函数的极点必须在单位圆内。同样,在设计有限脉冲响应(FIR)滤波器时,往往要加上线性相位的限制。但在设计过程中仍不考虑信号的相位。

若给出一组在图7.2(b)中所示的技术指标,则我们必须确定离散时间线性系统的系统函数,该系统的频率响应应落在预先给定的容限之内,这是一个函数逼近问题。IIR滤波器设计是利用z的有理函数逼近,而FIR滤波器则是多项式逼近。我们将分别讨论适用于IIR滤波器的设计方法和适用于FIR滤波器的设计方法。还将讨论多种同时适用于这两类滤波器的设计方法,范围包括从公式设计方法到算法设计方法,前者是指把设计指标带入设计公式,后者是指用迭代方法得出所需要的解。

7.1 由连续时间滤波器设计离散时间IIR滤波器

设计离散时间IIR滤波器的传统方法是将连续时间滤波器变换成满足预定指标的离散时间滤波器。这是一种合理的方法,其理由如下:

- 连续时间IIR滤波器的设计技巧十分成熟,并已取得许多有用的成果,因此可以方便

地利用这些为连续时间滤波器推导出的设计方法。

• 许多有用的连续时间 IIR 滤波器设计方法有比较简单的完整设计公式。因此，以这种标准的连续时间 IIR 滤波器设计公式为基础的离散时间 IIR 滤波器的设计方法实现起来十分简单。

当完全适用于连续时间 IIR 滤波器的标准逼近方法直接用于离散时间 IIR 滤波器时，并不能得出简单的完整设计公式。

连续时间滤波器设计可以映射成离散时间滤波器的设计，这种方法完全与离散时间滤波器是否用于处理图 7.1 所示连续时间信号的系统无关。我们再次强调指出，离散时间系统的设计方法应首先给出一组**离散时间**技术指标。因此，我们假设这些技术指标已经通过类似例 7.1 的分析或通过一些其它的方法确定了。为了使确定满足给定技术指标的离散时间滤波器时更方便一些，我们将利用连续时间滤波器的逼近方法。的确，当离散时间滤波器用于图 7.1 的框图中时，作为逼近法基础的连续信号时间滤波器的频率响应与有效频率响应之间有很大差别。

利用对原型连续时间滤波器进行变换来设计离散时间滤波器时，连续时间滤波器的技术指标是通过对给定的离散时间滤波器的技术指标加以变换而得到的。连续时间滤波器的系统函数 $H_c(s)$或脉冲响应 $h_c(t)$可以用某一种已有的用于连续时间滤波器设计的逼近方法而得出。在附录 B 中讨论了一些例子。另外，把本节所讨论的变换方法用于 $H_c(s)$或 $h_c(t)$可以得出离散时间滤波器的系统函数 $H(z)$或脉冲响应 $h_c(t)$。

在这些变换中，我们通常要求所得到的离散时间滤波器在频率响应中应保留连续时间频率响应的基本特性。具体讲，这意味着应将 Cs 平面的虚轴映射成 z 平面的单位圆。第二个条件是，应当将一个稳定的连续时间滤波器变换成一个稳定的离散时间滤波器。这表明，若连续时间系统只有在 s 平面左半平面的极点，则离散时间滤波器应当只有在 z 平面单位圆内的极点。这些限制对本节所讨论的所有方法都是需要的。

7.1.1 滤波器设计的脉冲响应不变法

在 4.4.2 节中我们曾讨论过**脉冲响应不变**的概念，当时离散时间系统是用连续时间系统脉冲响应的采样来定义的。我们曾指出，脉冲响应不变法提供了一种当输入为带限信号时计算带限连续时间系统之输出样本的直接方法。另外，在滤波器设计技术中我们可以把脉冲响应不变法看作是得到离散时间系统的一种方法，该离散时间系统的频率响应由连续时间系统的频率响应来确定。

把连续时间滤波器变换成离散时间滤波器的脉冲响应不变设计法中，选取与连续时间滤波器脉冲响应成正比的等间隔样本作为离散时间滤波器的脉冲响应，即

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) \tag{7.4}$$

式中 T_d 表示采样间隔。我们将会看到，因为滤波器的设计首先用到离散时间滤波器的技术指标，所以无论在设计过程中或是在所得出的离散时间滤波器中，(7.4)式中的参数 T_d 事实上都不起作用。但是，因为在规定的步骤中习惯上都包括这个参数，所以在以下的讨论中仍用到该参数。正如我们将要指出的，即便将滤波器用在图 7.1 所示的基本框图中，采样周期 T_d 也不必设计得与采样周期 T 相同，后者与 C/D 和 D/C 转换有关。

当使用脉冲响应不变法作为设计具有给定频率响应的离散时间滤波器的方法时，我们应特别注意离散时间滤波器的频率响应和连续时间滤波器的频率响应之间的联系。从第 4 章中

有关采样的讨论可知，通过(7.4)式得出的离散时间滤波器的频率响应与连续时间滤波器的频率响应有如下关系：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi}{T_d}k\right) \tag{7.5}$$

如果连续时间滤波器是带限的，则

$$H_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geqslant \pi/T_d \tag{7.6}$$

而且

$$H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right), \qquad |\omega| \leqslant \pi \tag{7.7}$$

也就是说，离散时间频率响应和连续时间频率响应之间由一个频率轴的线性比例因子联系在一起，即$|\omega| < \pi$时，$\omega = \Omega T_d$。可惜任何实际的连续时间滤波器都不能是完全带限的，因此就会发生(7.5)式中相邻项之间的干扰，引起混叠，如图 7.3 所示。但是，如果连续时间滤波器在高频部分趋近于零，则混叠就很小，可以忽略，并且可以通过对连续时间滤波器脉冲响应的采样得到有用的离散时间滤波器。

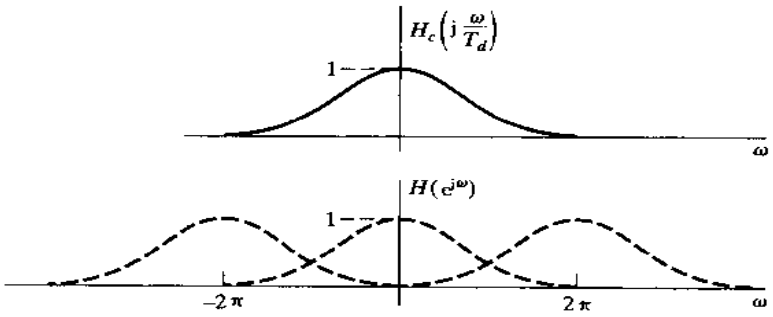


图 7.3　脉冲响应不变设计法中混叠现象的说明

在脉冲响应不变设计法中，首先利用(7.7)式将离散时间滤波器的技术指标变换成连续时间滤波器的技术指标。若假设由 $H_c(j\Omega)$到 $H(e^{j\omega})$的变换中所产生的混叠可以忽略，则我们利用关系式

$$\Omega = \omega / T_d \tag{7.8}$$

可以求出 $H_c(j\Omega)$的技术指标，从而由 $H(e^{j\omega})$的技术指标得到连续时间滤波器的技术指标。得出适合于这些技术指标的连续时间滤波器之后，就把系统函数为 $H_c(s)$的连续时间滤波器变换为所需的系统函数为 H(z)的离散时间滤波器。下面给出从 $H_c(s)$到 H(z)变换的代数运算细节。但是应当注意，当变换回到离散时间频率时，$H(e^{j\omega})$将通过(7.5)式与 $H_c(j\Omega)$联系在一起，(7.8)式的变换还是频率轴之间的变换。因此，“采样”的参数 T_d 不能用来控制混叠。因为基本的技术指标均使用离散时间频率，若采样率增加(T_d 减小)，则连续时间滤波器的截止频率必须成比例的增高。在实际中，为了补偿掉从 $H_c(s)$变换到 H(z)时可能产生的混叠，有可能会超标设计连续时间滤波器，即所设计的滤波器超过技术指标，尤其在阻带中更为突出。

虽然在脉冲响应中从连续时间到离散时间的变换是用时域采样来定义的，但是对系统函数的变换也很容易实现。为了推导出这种我们来研究用部分分式展开表示的连续时间滤波器

的系统函数，有①

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} \tag{7.9}$$

所对应的脉冲响应是

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

对 $T_d\, h_c(t)$采样得到的离散时间滤波器的脉冲响应是

$$h[n] = T_d h_c(nT_d) = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k e^{s_k nT_d} u[n] = \sum_{k=1}^{N} T_d A_k (e^{s_k T_d})^n u[n] \tag{7.11}$$

因此离散时间滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}} \tag{7.12}$$

比较(7.9)式和(7.12)式可以看出，s 平面中在 $s = s_k$ 处的极点变换成 z 平面中在 $e^{s_k T_d}$处的极点，并且，在 $H_c(s)$和 $H(z)$的部分分式展开式中的系数除了相差一个比例系数 T_d 外完全相同。如果连续时间滤波器是稳定的，相当于 s_k 的实部小于零，则 $e^{s_k T_d}$的幅度将小于 1，因此在离散时间滤波器中对应的极点位于单位圆内。这样，因果离散时间滤波器也是稳定的。虽然按照关系式 $z_k = e^{s_k T_d}$将 s 平面的极点映射成 z 平面的极点，但是应该清楚地认识到，脉冲响应不变设计法并不相当于按照该关系式进行 s 平面到 z 平面的简单映射。特别是离散时间系统函数中的零点是部分分式展开式中的极点和系数 $T_d A_k$ 的函数，通常它们并不按照与极点映射相同的方式进行映射。我们用下面的例子说明脉冲响应不变设计法。

例 7.2　用脉冲响应不变法设计巴特沃兹滤波器

让我们来研究低通离散时间滤波器的设计，将脉冲响应不变法用于一个合适的连续时间巴特沃兹滤波器②。离散时间滤波器的技术指标为

$$0.891\,25 \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.2\pi, \tag{7.13a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.177\,83, \qquad 0.3 \leqslant |\omega| \leqslant \pi, \tag{7.13b}$$

因为在脉冲响应不变法的设计过程中可将参数 T_d 抵消掉，所以我们可以选取 $T_d = 1$，因此 $\omega = \Omega$。在习题 7.2 中研究包含有参数 T_d 的相同例子，以说明 T_d 是如何且在何处被抵消掉的。

设计滤波器时若将脉冲响应不变法用于连续时间巴特沃兹滤波器，则首先必须将离散时间滤波器的技术指标变换成连续时间滤波器的技术指标。我们记得，脉冲响应不变法相当于在没有混叠情况下 Ω 和 ω 之间的线性映射。对于本例，假设混叠的影响可以忽略。当设计完成后，可以根据(7.13a)式和(7.13b)式的技术指标，对所得频率响应进行评估。

由于以上的考虑，我们希望设计一个连续时间巴特沃兹滤波器，其幅度函数满足 $|H_c(j\Omega)|$

$$0.891\,25 \leqslant |H_c(j\Omega)| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant |\Omega| \leqslant 0.2\pi \tag{7.14a}$$

$$|H_c(j\Omega)| \leqslant 0.177\,83, \qquad 0.3\pi \leqslant |\Omega| \leqslant \pi \tag{7.14b}$$

因为模拟巴特沃兹滤波器的幅度响应是频率的单调函数，则要满足(7.14a)式和(7.14b)式，需

$$|H_c(j0.2\pi)| \geqslant 0.891\,25 \tag{7.15a}$$

① 为了简化起见，我们在讨论中假设 $H(s)$的所有极点都是一阶的。习题 7.24 中讨论了对于高阶极点所要求的修正。

② 关于连续时间巴特沃兹和切比雪夫滤波器的讨论见附录 B。

和

$$|H_c(j0.3\pi)| \geqslant 0.177\,83 \tag{7.15b}$$

具体讲，巴特沃兹滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \tag{7.16}$$

因此滤波器的设计过程包括确定满足所需技术指标的参数 N 和 Ω_c。将(7.16)式带入(7.15)式并取等号，可得方程式

$$1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.891\,25}\right)^2 \tag{7.17a}$$

和

$$1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.177\,83}\right)^2 \tag{7.17b}$$

这两个方程的解是 $N=5.885\,8$ 和 $\Omega_c=0.704\,74$。但是参数 N 必须为整数，因此，为了满足和超过该技术指标我们将 N 近似取为整数，取 $N=6$。由于我们将 N 取整为相邻的最大整数，则滤波器不能同时完全的满足(7.17a)式和(7.17b)式。$N=6$ 时，可以选择滤波器的参数 Ω_c，使得通带或阻带或者两者的指标都超过所预定的要求。若改变 Ω_c 值，应在超过阻带指标和通带指标的数量之间折中选取。如果将 $N=6$ 代入(7.17a)式，得 $\Omega_c=0.703\,2$。若取此值，则完全可满足(连续时间滤波器的)通带指标并超过(连续时间滤波器的)阻带指标。这就给离散时间滤波器的混叠留有一些余地。取 $\Omega_c=0.703\,2$ 和 $N=6$，则幅度平方函数 $H_c(s)H_c(s)=1\Big/[1+(s/j\Omega_c)^{2N}]$ 的 12 个极点均匀分布在半径 $\Omega_c=0.703\,2$ 的圆周上，如图 7.4 所示。因此 $H_c(s)$ 的极点是 s 平面左半部分上的三对极点，其坐标为

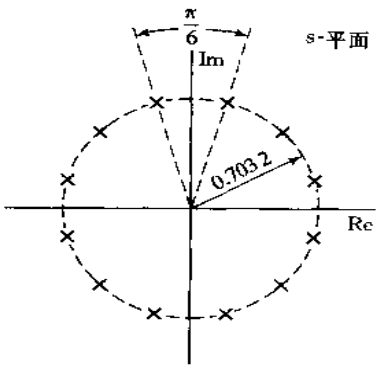


图 7.4　对于例 7.2 中的六阶巴特沃兹滤波器，$H_c(s)H_c(-s)$ 的极点在 s 平面中的位置

第一对极点：$-0.182\pm j(0.679)$

第二对极点：$-0.497\pm j(0.497)$

第三对极点：$-0.679\pm j(0.182)$

所以

$$H_c(s) = \frac{0.120\,93}{(s^2+0.364\,0s+0.494\,5)(s^2+0.994\,5s+0.494\,5)(s^2+1.358\,5s+0.494\,5)} \tag{7.18}$$

如果我们把 $H_c(s)$ 表示成一个部分分式展开式并进行(7.12)式的变换，然后将诸共轭对结合在一起，则得出离散时间滤波器的系统函数：

$$h(z) = \frac{0.287\,1-0.446\,6z^{-1}}{1-1.297\,1z^{-1}+0.694\,9z^{-2}} + \frac{-2.142\,8+1.145\,5z^{-1}}{1-1.069\,1z^{-1}+0.369\,9z^{-2}} + \frac{1.855\,7-0.630\,3z^{-1}}{1-0.997\,2z^{-1}+0.257\,0z^{-2}} \tag{7.19}$$

由(7.19)式显而易见，用脉冲响应不变设计法得到的系统函数可以直接用并联形式实现。如果需要用串联形式或直接形式，则应当用适当的方法将分散的各个二阶项组合起来。

离散时间系统的频率响应函数示于图 7.5 中。我们记得，设计得到的原型连续时间滤波器在通带的边缘处完全满足指标，并且在阻带的边缘处超过指标，对于所得到的离散时间滤波器也是如此。这表明，连续时间滤波器是充分带限的，因此已有的混叠不成问题。的确，$20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ 和

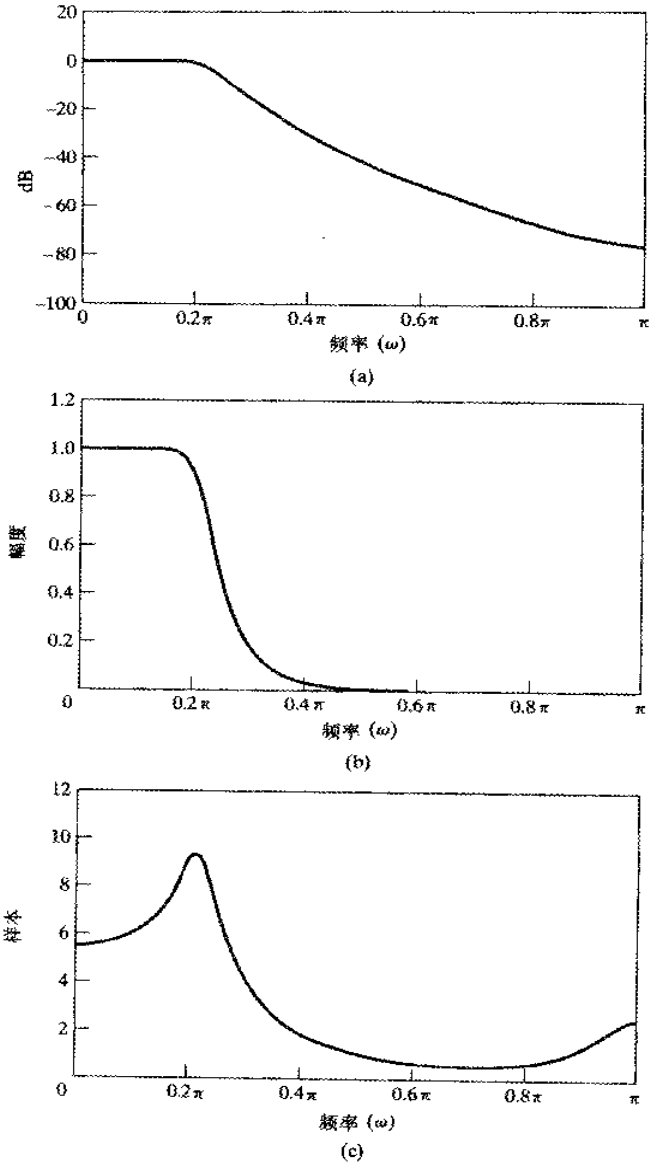


图 7.5　用脉冲响应不变法变换得出的六阶巴特沃兹滤波器的频率响应
(a) 对数幅度(dB)；(b) 幅度(dB)；(c) 群延迟

$20\log_{10}|H_c(j\omega)|$之间除了在 $\omega=\pi$ 附近有轻微的差别外，在画图所用的比例尺下看不出它们之间的差别。(请记住，$T_d=1$，因此 $\Omega=\omega$)有时混叠是一个突出的问题，如果由于混叠使所得出的离散时间滤波器不能满足技术指标，则对于脉冲响应不变法可再次试用较高阶的滤波器，或者保持阶次不

变而调整滤波器的一些参数。

脉冲响应不变法的基本点是选取在某种意义上与连续时间滤波器的脉冲响应相似的离散时间滤波器的脉冲响应。为了保持脉冲响应的形状，人们一般不太愿意使用这种方法。我们知道，若连续时间滤波器是带限的，则离散时间滤波器的频率响应将非常接近于连续时间频率响应，但是人们使用这种方法的出发点往往并不是希望保持脉冲响应的形状不变。然而在一些滤波器设计问题中，主要的目的可能是控制如像脉冲响应或阶跃响应之类的时间响应的某些方面。在这种情况下，一种很自然的方法是用脉冲响应不变法或阶跃响应不变法来设计离散时间滤波器。后一种方法定义时间滤波器对采样了的单位阶跃函数的响应是由连续时间阶跃响应采样得到的序列。如果连续时间滤波器具有良好的阶跃响应特性，如上升时间小和过冲峰值低等，则这些特性将会在离散时间滤波器中保留下来。显然，这种波形不变的概念可以推广到对于各种输入信号保持输出波形形状不变，正像在习题 7.1 中所表明的那样。这个习题说明，用脉冲响应不变法、同时也用阶跃响应不变法(或其它波形不变准则)对同一连续时间滤波器进行变换并不能得到相同的离散时间滤波器。

在脉冲响应不变设计法中，连续时间频率和离散时间频率之间的变换是线性的，因此，除了混叠之外，频率响应的形状应保持不变。这一点与下面要讨论的以代数变换为基础的方法不同。最后总结这一小节，我们应指出，脉冲响应不变法只适用于带限滤波器。如果要使用脉冲响应不变设计方法，则需要对如像高通和带阻之类的连续时间滤波器提出附加的带限要求，以避免严重的混叠失真。

7.1.2 双线性变换法

本节所讨论的方法避免了当使用双线性变换法时引起的混叠问题，这种变换是变量 s 和 z 之间的代数变换，它将 s 平面的整个 $j\Omega$ 轴映射成 z 平面的整个单位圆周。因为 $-\infty \leqslant \Omega \leqslant \infty$ 映射成 $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$，所以连续时间频率变量和离散时间频率变量的变换必定是非线性的。因此，这种方法只能用于相应的频率轴的畸变在允许范围之内的情况。

若 $H_c(s)$ 表示连续时间系统函数，$H(z)$ 表示离散时间系统函数，则双线性变换法相当于用如下表示来代替 s：

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \tag{7.20}$$

因此

$$H(z) = H_c\left[\frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\right] \tag{7.21}$$

如同脉冲响应不变法一样，“采样”参数 T_d 也包括在双线性变换法的定义中。从历史过程看，该方法也包括了这一参数，因为可以将梯形积分法则用于对应于 $H_c(s)$ 的微分方程，并用 T_d 代表数值积分的步长，从而得到对应于 $H(z)$ 的差分方程(见 Kaiser，1996 和习题 7.43)。但是在滤波器设计中，使用双线性变换法是以(7.20)式代数变换的特性为基础的。与使用脉冲响应不变法一样，在设计方法中参数 T_d 并不重要，因为我们假设设计问题总是首先从离散时间滤波器 $H(e^{j\omega})$ 的技术指标开始。在这些技术指标首先映射成连续时间滤波器的技术指标，然后又将连续时间滤波器反过来映射成离散时间滤波器的过程中，T_d 的作用将被抵消掉。虽然在我们的讨论中还有参数 T_d，但是在具体问题和举例中可选取任何方便的 T_d 值。

为了推导(7.20)式代数变换的性质，我们对 z 求解该方程，得到

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (T_d/2)s} \tag{7.22}$$

将 $s = \sigma + j\Omega$ 代入(7.22)式，得

$$z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 - j\Omega T_d/2} \tag{7.23}$$

若 $\sigma < 0$，则由(7.23)式可得，对于任意 Ω 值，$|z| < 1$。同样，若 $\sigma > 0$，则对所有 Ω 值，$|z| > 1$。这就是说，如果 $H_c(s)$ 的极点在 s 平面的左半部分，则它在 z 平面的映像将在单位圆内。所以因果稳定的连续时间滤波器将映射成因果稳定的离散时间滤波器。

其次，为了证明 s 平面的 $j\Omega$ 轴会映射成单位圆，将 $s = j\Omega$ 代入(7.22)式，得

$$z = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2} \tag{7.24}$$

由(7.24)式可以清楚的看出，对于 $j\Omega$ 轴上的所有 s 值，$|z| = 1$。这就是说，$j\Omega$ 轴映射成单位圆，所以(7.24)式成为

$$e^{j\omega} = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2} \tag{7.25}$$

为了推导出变量 ω 和 Ω 之间的关系式，我们返回到(7.20)式并将 $z = e^{j\omega}$ 代入，则

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}\right) \tag{7.26}$$

或等效的有

$$s = \sigma + j\Omega = \frac{2}{T_d}\left[\frac{2e^{-j\omega/2}(j\sin\omega/2)}{2e^{-j\omega/2}(\cos\omega/2)}\right] = \frac{2j}{T_d}\tan(\omega/2) \tag{7.27}$$

令(7.27)式等号两边的实部和虚部分别相等，得出关系式 $\sigma = 0$ 和

$$\Omega = \frac{2}{T_d}\tan(\omega/2) \tag{7.28}$$

或

$$\omega = 2\arctan(\Omega t_d/2) \tag{7.29}$$

双线性变换法从 s 平面映射到 z 平面的这些性质汇总在图 7.6 和图 7.7 中。从(7.29)式和图 7.7 中可以看出，$0 \leqslant \Omega \leqslant \infty$ 的频率范围映射成 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$，而 $-\infty \leqslant \Omega \leqslant 0$ 的频率范围映射成

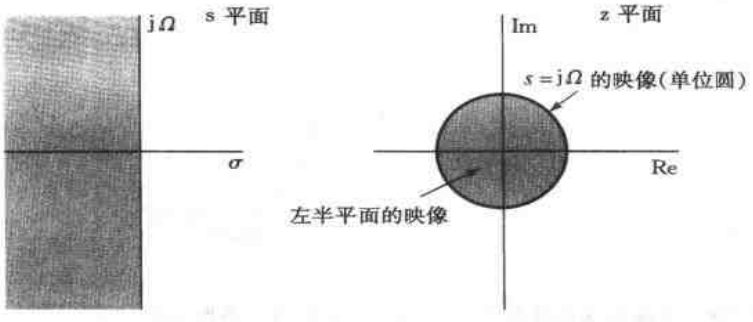


图 7.6　用双线性变换法由 s 平面 z 平面的映射

$-\pi \leqslant \omega \leqslant 0$。双线性变换法避免了使用脉冲响应不变法所遇到的混叠问题，因为它将 s 平面的整个虚轴映射成 z 平面的单位圆周。但是，为此所付出的代价是，引入了图 7.7 所示的频率轴非线性压缩。所以，只有当这种压缩在允许范围之内能加以补偿时，如在滤波器具有近似理想的分段恒定幅度响应特性的情况下，使用双线性变换法设计离散时间滤波器才是有效的。图 7.8 绘出了通过(7.28)式和(7.29)式的频率畸变将连续时间频率响应和它的容限图映射成相当的离散时间频率响应及其容限图的过程。如果根据(7.28)式对连续时间滤波器的临界频率(如通带和阻带的边缘频率)进行预畸变，则用(7.21)式把连续时间滤波器变换成离散时间滤波器时，该离散时间滤波器将会满足所给定的技术指标。

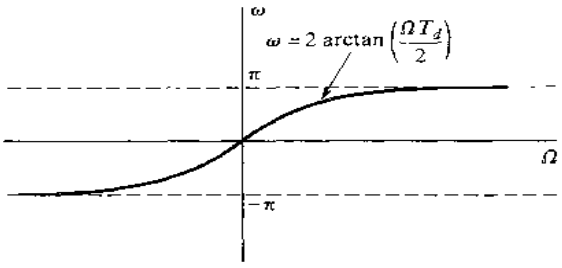


图 7.7　用双线性变换法由连续时间频率轴到单位圆上的映射

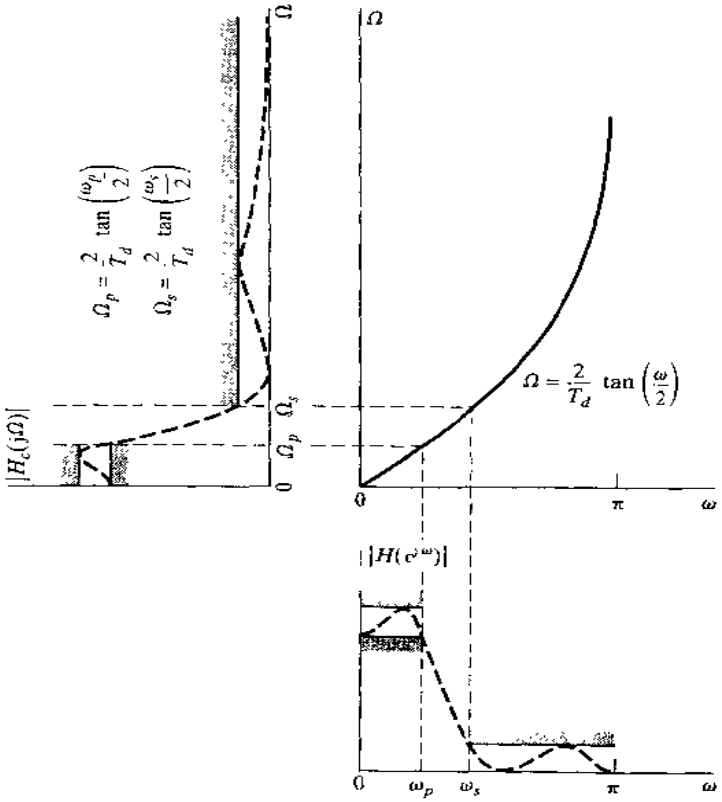


图 7.8　连续时间低通滤波器经双线性变换成离散时间低通滤波器中固有的频率畸变。为了得到要求的离散时间截止频率，连续时间截止频率必须作如图所示的预畸变

典型的选频连续时间滤波器的逼近有巴特沃兹、切比雪夫和椭圆滤波器逼近。这些连续时间逼近方法的完整设计公式使得设计步骤十分简单。正如附录B中所讨论的，巴特沃兹连续时间滤波器在通带和阻带内都是单调特性。Ⅰ型切比雪夫滤波器在通带中呈等波纹特性，而在阻带内单调变化。Ⅱ型切比雪夫滤波器在通带内呈单调特性而在阻带内是等波纹的。椭圆滤波器在通带和阻带内都具有等波纹特性。很清楚，用双线性变换法把连续时间滤波器映射成数字滤波器时，这些特性将保留下来。图7.8中虚线画出的椭圆型逼近就证明了这一点。

虽然双线性变换有效地用于将分段恒定的幅度响应特性从s平面映射到z平面，但是频率轴的失真表现为滤波器相位响应的畸变。例如，图7.9表示将双线性变换法用于一个理想线性相位因子$e^{-s\alpha}$的结果。如果我们用(7.20)式代替s并且计算在单位圆上的结果，则可以得出相位角为$-(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$。图7.9中，实线表示函数$-(2\alpha/T_d)\tan(\omega/2)$，虚线表示周期线性相位函数$-(\omega\alpha/T_d)$，它是利用小角度逼近$\omega/2\approx\tan(\omega/2)$得到的。由此显然可见，如果我们希望得到具有线性相位特性的离散时间低通滤波器，那么，若将双线性变换法用于具有线性相位特性的连续时间低通滤波器，就不会得到这种特性的滤波器。

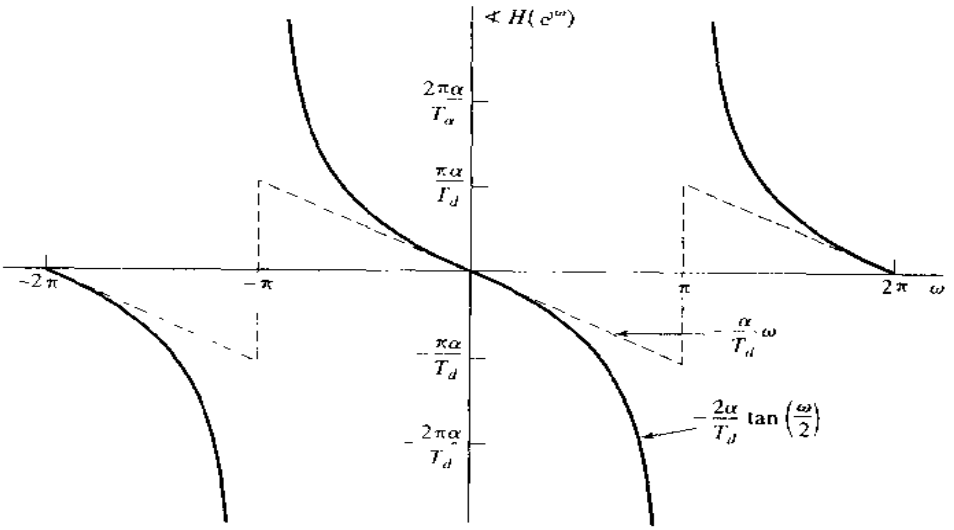


图7.9 双线性变换对线性相位特性的影响
(虚线表示线性相位，实线表示由双线性变换得到的相位)

正如前面所提到的，由于频率畸变，双线性变换的应用限于设计具有分段恒定幅频特性如高通、低通和带通滤波器逼近。如例7.2所示，脉冲响应不变法也可用于设计低通滤波器。然而，由于高通连续时间滤波器不是带限的，所以脉冲响应不变法不能将高通连续时间滤波器的设计映射为高通离散时间滤波器的设计。

在例4.5中，我们讨论对一类通常被称为离散时间微分器的滤波器。这类滤波器的频率响应有一个重要的特性，就是它与频率呈线性的关系。可是，双线性变换法所引入的频率轴的非线性畸变则不会保留这一特性。因此，双线性变换法用于连续时间微分器时，并不能产生离散时间微分器。然而，若将脉冲响应不变法用于合适的带限连续时间微分器则可得到离散时

间微分器。

7.1.3 双线性变换法设计举例

在下面的讨论中，我们将给出一些例子来说明如何利用双线性变换法来设计 IIR 滤波器。例 7.3 说明了相比于脉冲响应不变法，基于双线性变换法的设计过程。例 7.4，7.5 和 7.6 分别说明了怎样利用双线性变换法将巴特沃兹滤波器、切比雪夫滤波器和椭圆滤波器设计成为达到同一技术指标的滤波器。

例 7.3 用双线性变换法设计巴特沃兹滤波器

例 7.2 说明了设计离散时间滤波器所用的脉冲响应不变法，现在继续采用例 7.2 中离散时间滤波器的技术指标。该技术指标是

$$0.891\ 25 \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 0.2\pi \tag{7.30a}$$

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.177\ 83, \qquad 0.3\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \tag{7.30b}$$

用双线性变换法进行设计时，必须根据(7.28)式对离散时间滤波器的临界频率作预畸变处理，使其对应于连续时间滤波器的临界频率，这样双线性变换中固有的频率失真就可将预畸变后的连续时间临界频率映射回到正确的离散时间临界频率位置上。对于本例中的滤波器，用 $|H_c(j\Omega)|$ 表示连续时间滤波器的幅度响应函数，则要求

$$0.891\ 25 \leqslant |H_c(j\Omega)| \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \Omega \leqslant \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) \tag{7.31a}$$

$$|H_c(j\Omega)| \leqslant 0.177\ 83, \qquad \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) \leqslant \Omega \leqslant \infty \tag{7.31b}$$

为了方便起见，选取 $T_d=1$。同例 7.2 一样，因为连续时间巴特沃兹滤波器具有单调的幅度响应，我们可同样的要求

$$|H_c(j2\tan(0.1\pi))| \geqslant 0.891\ 25 \tag{7.32a}$$

和

$$|H_c(j2\tan(0.15\pi))| \leqslant 0.177\ 83 \tag{7.32b}$$

巴特沃兹滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}} \tag{7.33}$$

在(7.32a)式和(7.32b)式中取等号解出 N 和 Ω_c，得

$$1+\left(\frac{2\tan(0.1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.89}\right)^2 \tag{7.34a}$$

和

$$1+\left(\frac{2\tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N} = \left(\frac{1}{0.178}\right)^2 \tag{7.34b}$$

利用(7.43a)式和(7.34b)式解出 N 为

$$N = \frac{\log\left[\left(\left(\frac{1}{0.178}\right)^2-1\right)\Big/\left(\left(\frac{1}{0.89}\right)^2-1\right)\right]}{2\log[\tan(0.15\pi)/\tan(0.1\pi)]} = 5.305 \tag{7.35}$$

因为 N 必须是整数，所以我们选取 $N=6$。将 $N=6$ 代入(7.34b)式，得 $\Omega_c=0.766$。若用 Ω_c 的这个值，则可超过通带指标并完全满足阻带指标。对于双线性变换法这是合理的，因为我们不必担心混叠问题。这样，经过适当的预畸变处理后我们可以肯定，所得出的离散时间滤波器在要求的阻带边缘处将完全满足技术指标。

在 s 平面中，幅度平方函数的 12 个极点，均匀分布在半径为 0.766 的一个圆周上，如图 7.10 所示。

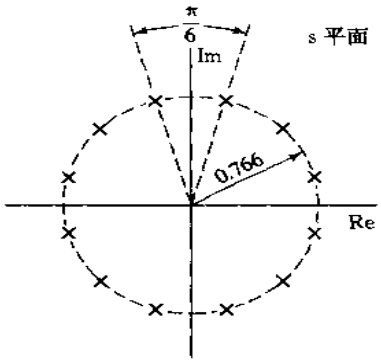


图 7.10　对于例 7.3 中的六阶巴特沃兹滤波器，$H_c(s)H_c(-s)$的极点在 s 平面上的位置

选取左半平面的极点得到的连续时间滤波器的系统函数是

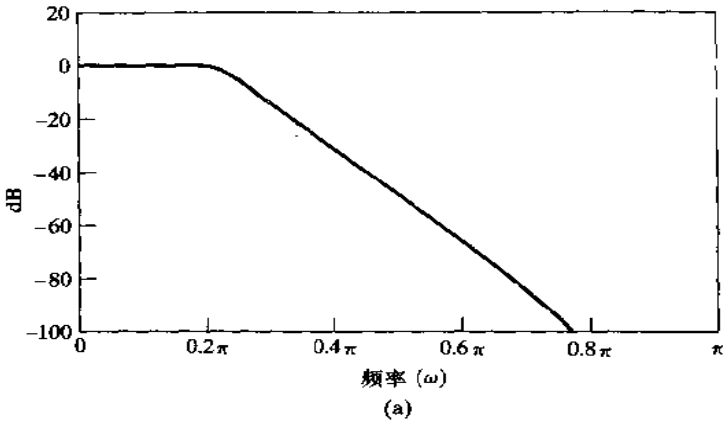
$$H_c(s)=\frac{0.202\,38}{(s^2+0.399\,6s+0.587\,1)(s^2+1.083\,6s+0.587\,1)(s^2+1.480\,2s+0.587\,1)} \tag{7.36}$$

离散时间滤波器的系统函数是将双线性变换法用于 $H_c(s)$，并取 $T_d=1$ 所得到的

$$H(z)=\frac{0.000\,737\,8(1+z^{-1})^6}{(1-1.268\,6z^{-1}+0.705\,1z^{-2})\,(1-1.010\,6z^{-1}+0.358\,3z^{-2})}\times\frac{1}{(1-0.904\,4z^{-1}+0.215\,5z^{-2})} \tag{7.37}$$

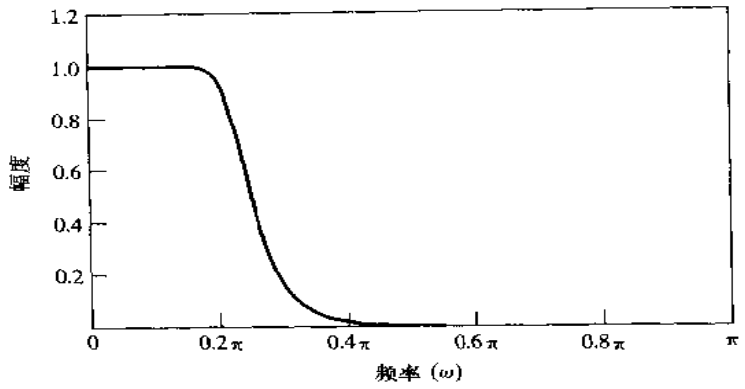
离散时间频率响应的幅度、对数幅度以及群延迟示于图 7.11 中。在 $\omega=0.2\pi$ 处的对数幅度是 -0.56dB，在 $\omega=0.3\pi$ 处的对数幅度恰好为 -15dB。

因为双线性变换将 s 平面的整个 $j\Omega$ 轴映射成 z 平面的单位圆，所以离散时间滤波器的幅度响应要比原始连续时间滤波器的幅度响应下降的快得多。特别是 $H(e^{j\omega})$在 $\omega=\pi$ 处的特性对应于 $H_c(j\Omega)$在 $\Omega=\infty$ 处的特性。因此，由于连续时间巴特沃兹滤波器在 $s=\infty$ 处有一个六阶零点，所以得出的离散时间滤波器在 $z=-1$ 处也有一个六阶零点。

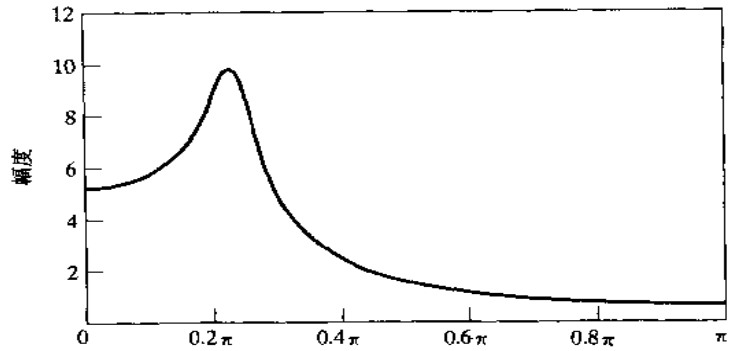


(a)

图 7.11　用双线性变换法得出的六阶巴特沃兹滤波滤波器的频率响应
(a) 对数幅度(dB)；



(b)



(c)

图 7.11(续) (b) 幅度(dB); (c) 群延迟

有趣的是,由于 N 阶巴特沃兹连续时间滤波器的一般形式由(7.33)式给出,并且因为 ω 与 Ω 由(7.28)式联系在一起,所以可以得出一般的 N 阶巴特沃兹离散时间滤波器有如下形式的幅度平方函数

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}} \tag{7.38}$$

式中 $\tan(\omega_c/2)=\Omega_c T_d/2$。

(7.38)式给出的频率响应函数具有与巴特沃兹连续时间滤波器的频率响应相同的特性;即具有最平特性[①] 且 $\left|H(e^{j\omega_c})\right|^2=0.5$。但是,(7.38)式的函数是周期为 2π 的周期函数,并且它要比巴特沃兹连续时间滤波器的频率响应下降快得多。

我们并不首先用(7.38)式直接设计离散时间巴特沃兹滤波器,因为它并不能直接确定(7.38)式幅度平方函数的极点在 z 平面的位置(所有的零点均在 $z=-1$ 处)。为了求出极点,有必要将幅度平方函数因式分解成 $H(z)H(z^{-1})$,从而求出 $H(z)$。比较容易的做法是,先

① $|H(e^{j\omega})|^2$ 在 $\omega=0$ 处的前 $(2N-1)$ 次导数均为零。

求出 s 平面中的极点位置(所有零点均在无限大处),并对连续时间系统函数进行因式分解,然后用双线性变换法对 s 左半平面上的极点进行变换,正如我们在例 7.3 中所做的一样。

对离散时间切比雪夫滤波器也可以得到形如(7.38)式的方程,但是在使用这些方程时会遇到同样的困难。因此,上述分两步进行的方法已成为设计 IIR 选频滤波器所使用的固定方法。

选频 IIR 模拟滤波器的主要逼近方法有巴特沃兹函数、切比雪夫函数及椭圆函数逼近方法。这些方法的详细情况可见于 Guillemin(1957),Daniels(1974),Weinberg(1975)和 Lam(1979)。它们通常可通过低通滤波器的逼近来说明和展开。这正是附录 B 中所采用的途径,其中我们总结了这些方法的重要特性。在下面三个例子中,我们将说明这几类滤波器相应的一组滤波器指标的实现。由于设计的计算复杂而冗长,并且最好由合并了适当的完整设计方程式的计算机程序来实现,所以我们并没有给出计算的细节。

三个例子中的低通离散时间滤波器的指标同例 7.1 一样,即

$$0.99 \leqslant |H(e^{j\omega})| \leqslant 1.01, \qquad |\omega| \leqslant 0.4\pi \tag{7.39a}$$

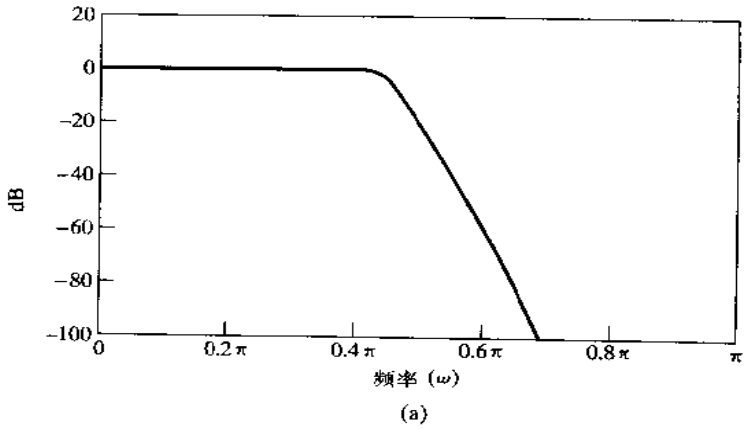
和

$$|H(e^{j\omega})| \leqslant 0.001, \qquad 0.6\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi \tag{7.39b}$$

根据图 7.2(b)的容限图,$\delta_1 = 0.01$,$\delta_2 = 0.001$,$\omega_p = 0.4\pi$ 及 $\omega_s = 0.6\pi$。这些指标足以确定巴特沃兹、切比雪夫和椭圆设计公式的输入参数。应注意这些指标仅与频率响应的幅度有关。相位则由逼近方程的特性隐含决定。

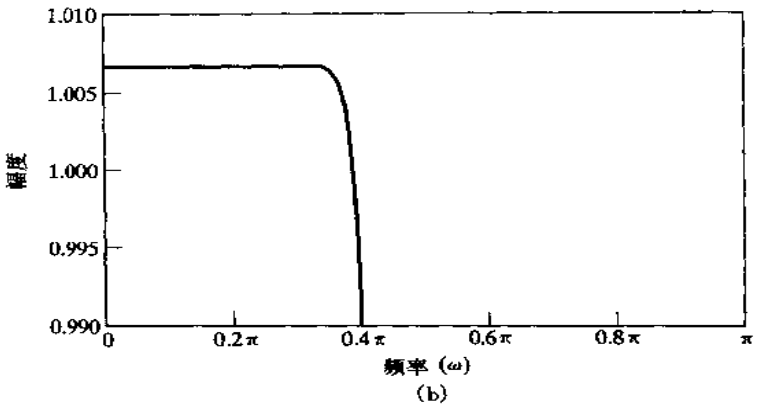
例 7.4　巴特沃兹逼近

对于(7.39a)式和(7.39b)式所示的技术指标,巴特沃兹逼近法要求一个十四阶系统。离散时间滤波器的频率响应如图 7.12 所示,该滤波器是由合适的预畸变巴特沃兹滤波器经双线性变换后得到的。图 7.12(a)表示对数幅度(dB),图 7.12(b)表示 $|H(e^{j\omega})|$ 只在通带内的幅度,图 7.12(c)表示滤波器的群延迟。从这些图中可以看出,巴特沃兹滤波器的频率响应应随频率单调的减小,而滤波器的增益在 $\omega = 0.7\pi$ 附近应非常小。应当指出,在图 7.12(b)中,本例中的巴特沃兹滤波器的频率响应已归一化,因此它在通带中的增益可以大于 1,这是在(7.39)式技术指标所允许的范围内的。

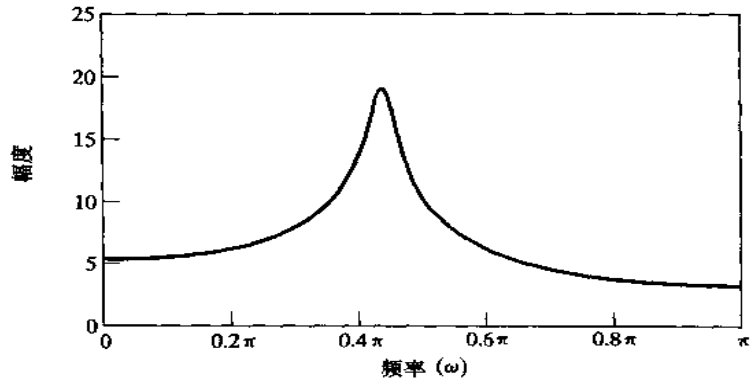


(a)

图 7.12　例 7.4 中十四阶巴特沃兹滤波器的频率响应
(a) 对数幅度(dB);



(b)



(c)

图 7.12(续) (b) 通带中幅度的详图；(c) 群延迟

在巴特沃兹逼近的例题中，因为将阶数舍入为整数，所以在通带和阻带的边缘处的性能均超过了技术指标。但是应当指出，在阻带中已明显超过技术指标，其原因由图 7.13 显然可见，该图为十四阶巴特沃兹滤波器的零极点图。因为连续时间巴特沃兹滤波器在 $s = \infty$ 处有 14 个零点，所以离散时间滤波器经双线性变换在 $z = -1$ 处得出 14 个零点。因此有理由预计，虽然低阶滤波器在阻带的性能不会超过技术指标很多，但也能满足该指标。这种预见也促进了切比雪夫逼近或等波纹逼近的使用。

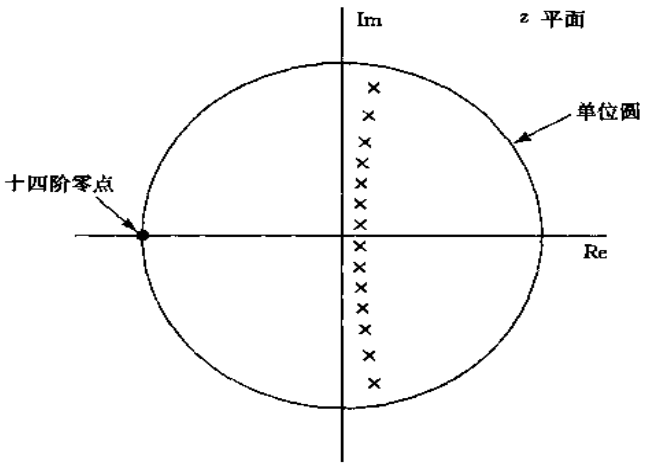


图 7.13 例 7.4 中的十四阶巴特沃兹滤波器的零极点图

例 7.5　切比雪夫逼近

这种方法有两种形式。Ⅰ型切比雪夫逼近在通带有等波纹特性，而Ⅱ型切比雪夫逼近在阻带有等波纹特性。对于给定的一组技术指标，这两种方法都得出相同的阶次。对于(7.39a)式和(7.39b)式所表示的技术指标，切比雪夫逼近要求八阶，而不像巴特沃兹逼近那样要求十四阶。图 7.14 表示满足(7.39a)式和(7.39b)式的指标时，Ⅰ型切比雪夫逼近的对数幅度、通带幅度和群延迟。请注意，通带

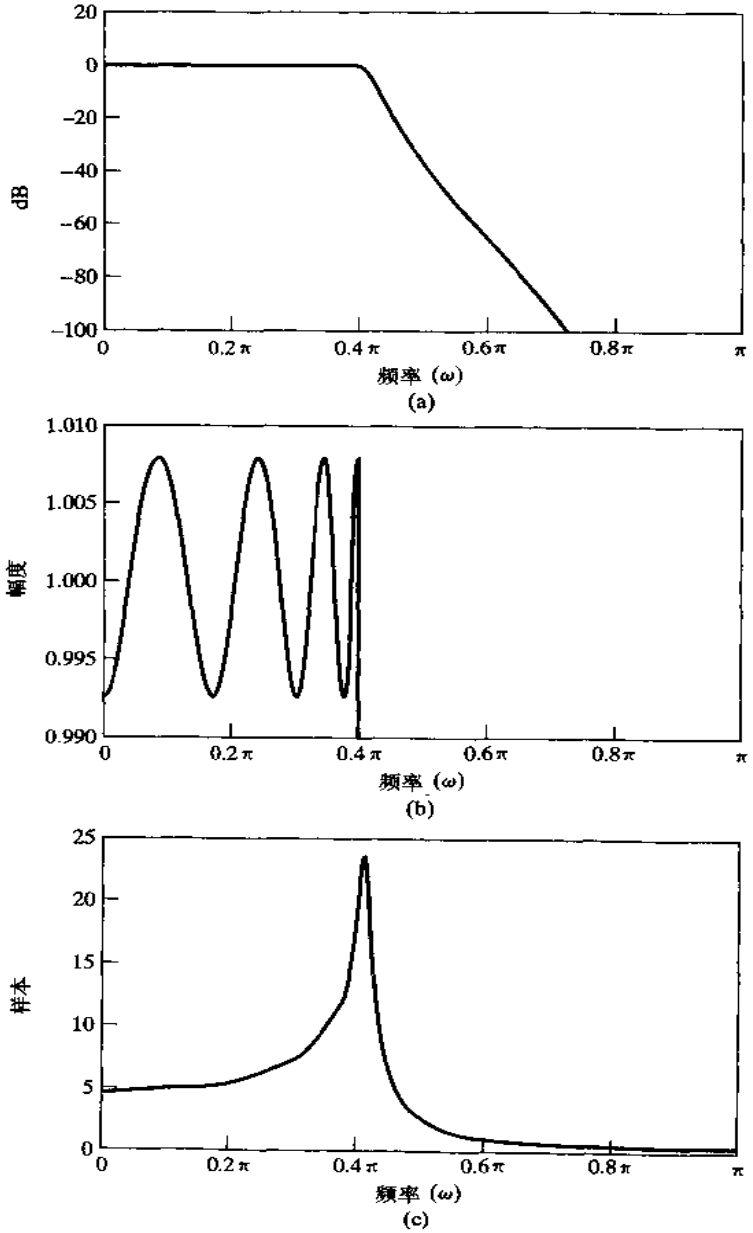


图 7.14　例 7.5 中八阶Ⅰ型切比雪夫滤波器的频率响应
(a) 对数幅度(dB)；(b) 通带中幅度的详图；(c) 群延迟

中的频率响应在要求的单位增益两边以相等的最大误差振荡。

图 7.15 表示满足(7.39a)式和(7.39b)式的指标时，Ⅱ型切比雪夫逼近的频率响应函数。对于这种情况在阻带呈等波纹特性。切比雪夫滤波器的零极点图示于图 7.16 中。应当注意，Ⅰ型切比雪夫滤波器与巴特沃兹滤波器相似，各自全部的 8 个零点均在 $z=-1$ 处。另一方面，Ⅱ型切比雪夫滤波

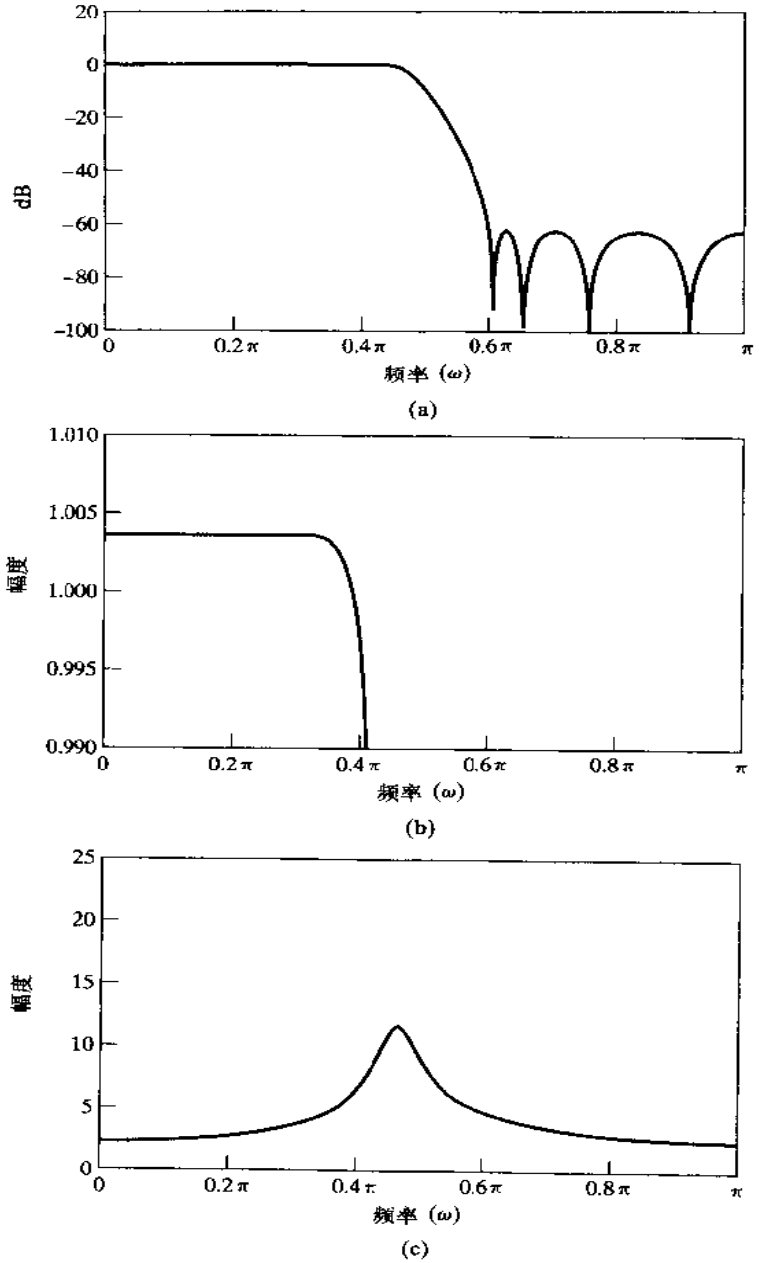


图 7.15 例 7.5 中八阶Ⅱ型切比雪夫滤波器的频率响应
(a) 对数幅度(dB)；(b) 通带中幅度的详图；(c) 群延迟

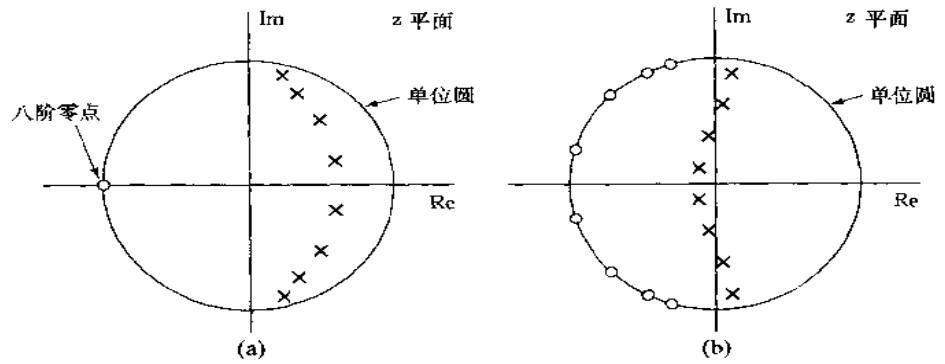


图 7.16　例 7.5 中八阶切比雪夫滤波器的零极点图
(a) Ⅰ型；(b) Ⅱ型

器的零点排列在单位圆上。这些零点的位置由设计方程决定，以便得到阻带的等波纹特性。

在切比雪夫逼近的两种情况中，阻带或通带的单调特性表明，如果在通带和阻带都使用等波纹逼近，则有可能得到较低阶的系统。的确可以证明（见 Papoulis，1957），对于图 7.2(b)给出的容限图中 δ_1，δ_2，ω_p 和 ω_s 的固定值，若逼近误差分别在两个逼近频带中的极限值之间呈等波纹变化，则可以得到较低阶的滤波器。因为这种等波纹特性是用一个涉及到椭圆函数的有理函数得到的，所以通常将这种系统称为椭圆滤波器。

例 7.6　椭圆逼近①

用一个六阶椭圆滤波器就能满足(7.39a)式和(7.39b)式给出的技术指标。这是能满足该指标的最低阶有理函数逼近。图 7.17 清楚的表示出在两个逼近频带中的等波纹特性。图 7.18表明与Ⅱ型切比雪夫逼近类似，椭圆滤波器的零点排列在单位圆的阻带区域内。

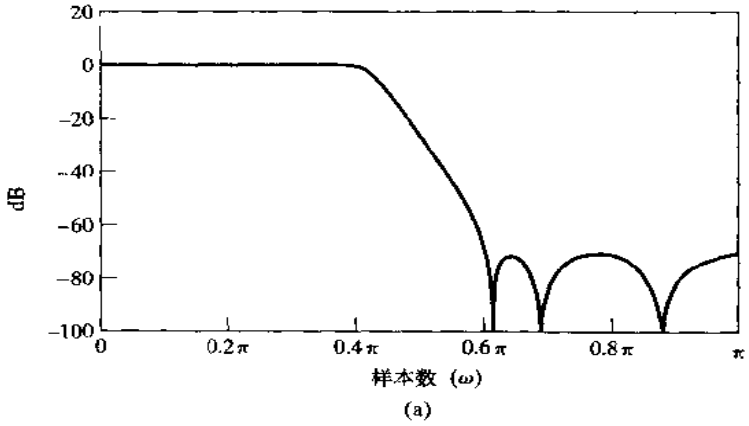
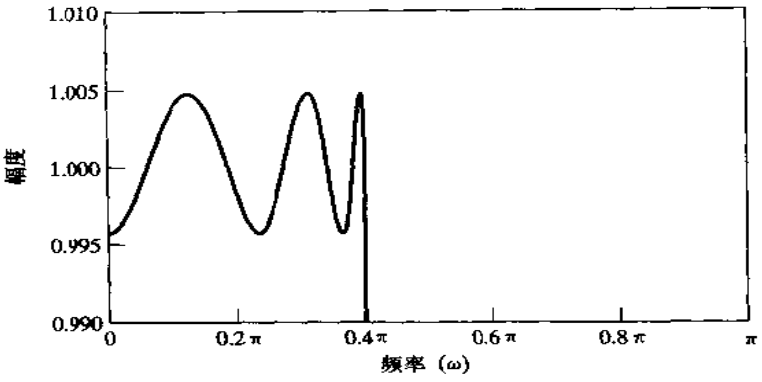
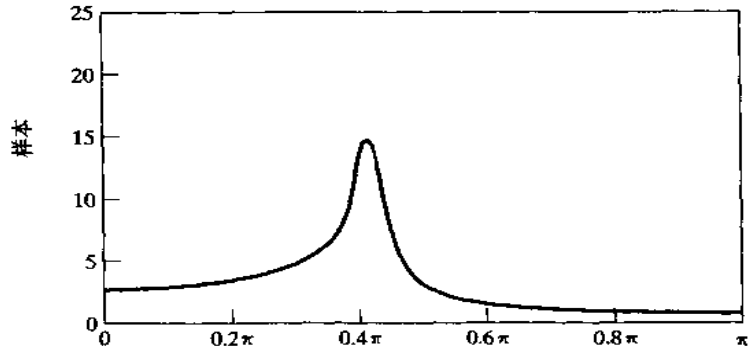


图 7.17　例 7.6 中六阶椭圆滤波器的频率响应
(a) 对数幅度(dB)；

① 椭圆滤波器的设计方程涉及到很多内容，我们在附录 B 中作了适当的总结。有关的设计方程可在 Storer(1957)，Weinberg(1957)，Parks and Burrus(1987)的论文中找到。椭圆滤波器设计的程序由 Gray and Markel(1976)给出，在 Zverev (1967)的论文中列了了扩充的椭圆滤波器设计数表。这三类滤波器都可用 MATLAB 中信号处理工具箱中的函数设计。



(b)



(c)

图 7.17(续) (b) 通带中幅度的详图；(c) 群延迟

用巴特沃兹、切比雪夫和椭圆逼近设计模拟滤波器的双线性变换法是设计 IIR 离散时间滤波器的标准方法。上面的例子说明了这些滤波器的一些重要的普遍特性。以上各种情况所得到的系统函数 $H(z)$的全部零点均在单位圆上，并且(由于稳定性的缘故)所有的极点均在单位圆内。因此，各种近似方法均得到具有非恒定群延迟或非线性相位的数字滤波器。各种情况下在通带的边缘处或过渡带中会出现恒定群延迟的最大偏差。通常，I 型切比雪夫逼近法在通带得到最小的延迟和群延迟近似为常数的最宽通带区域。但是，如果相位的线性度不是一个问题，则椭圆逼近可以得到最低阶次的系统函数。因此，实现给定的滤波器技术指标，椭圆滤波器需要的计算量最少。

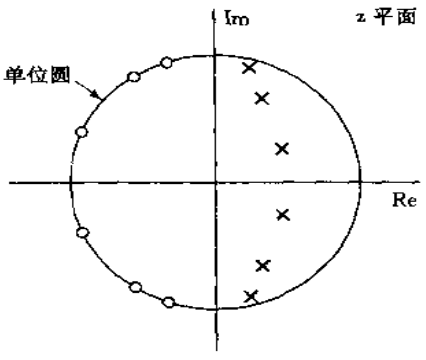


图 7.18 例 7.6 中六阶椭圆滤波器的零极点图

7.2 用窗函数法设计 FIR 滤波器

正如在 7.1 节所讨论的，通常设计 IIR 滤波器常用的技术都是以连续时间 IIR 系统到离散时间 IIR 系统的变换为基础的。这在一定程度上是由于当离散时间滤波器出现之前连续时间滤波器的设计方法已经非常成熟，而且在一定程度上也是由于实现 IIR 滤波器的非迭代直接设计法的困难性所致。

与此相反，FIR 滤波器几乎完全限于离散时间滤波器的实现问题。因此，FIR 滤波器的设计方法以直接逼近所需离散时间系统的频率响应为基础。另外，因为逼近 FIR 系统的幅度响应的大多数方法均假设有线性相位的限制条件，所以避免了使 IIR 滤波器的直接设计法复杂化的谱因式分解问题。

设计 FIR 滤波器最简单的方法称为**窗函数法**。这种方法一般均由一个理想的所需频率响应开始，该频率响应可表示为

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \tag{7.40}$$

式中 $h_d[n]$是对应的脉冲响应序列，它可以借助 $H_d(e^{j\omega})$表示为

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{7.41}$$

由于在两个频带间交界处的不连续性，所以许多理想化的系统均用分段恒定的或分段函数表示的频率响应来定义。因此这种系统具有非因果的和无限长的脉冲响应。得到逼近这种系统的因果 FIR 滤波器的最直接的方法是截短该理想脉冲响应。(7.40)式可以看作是周期频率响应 $H_d(e^{j\omega})$的傅里叶级数表示，其中序列 $h_d[n]$起着傅里叶系数的作用。因此，用截短理想脉冲响应的办法来逼近理想滤波器的问题等同于傅里叶级数的收敛问题，这是一个人们已经进行了大量研究的课题。在这一理论中，一个非常重要的概念是吉布斯现象，我们曾在例2.22中讨论过。从下面的讨论中将会看到，FIR 滤波器设计中的这种非一致收敛现象是如何得到的。

由 $h_d[n]$得到因果 FIR 滤波器最简单的方法是定义一个其脉冲响应 $h[n]$为如下形式[①]的新系统：

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.42}$$

通常，我们可以把 $h[n]$表示为所需脉冲响应与一个有限长“窗函数”$w[n]$的乘积，即

$$h[n] = h_d[n]w[n] \tag{7.43}$$

式中由于采用如(7.42)式的简单截取，所以窗函数为**矩形窗**。

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.44}$$

由调制定理或加窗定理(见 2.9.7 节)可得

① 在第 5 章中已经给出 FIR 系统的记号，也就是，M 为系统函数多项式的阶次。因此$(M+1)$是脉冲响应的长度或时宽。在文献中常用 N 表示 FIR 滤波器的脉冲响应的长度，但是我们已经用 N 来表示 IIR 滤波器系统函数中分母多项式的阶次，所以为了避免混淆并保证全书的一致性，我们始终用$(M+1)$表示 FIR 滤波器脉冲响应的长度。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{7.45}$$

因此，$H(e^{j\omega})$是所需理想频率响应与窗函数傅里叶变换的周期卷积。所以，频率响应 $H(e^{j\omega})$将是所需频率响应 $H_d(e^{j\omega})$"模糊了"的形式。图 7.19(a)绘出了如(7.45)式所要求的典型函数 $H_d(e^{j\omega})$和 $W(e^{j(\omega-\theta)})$。

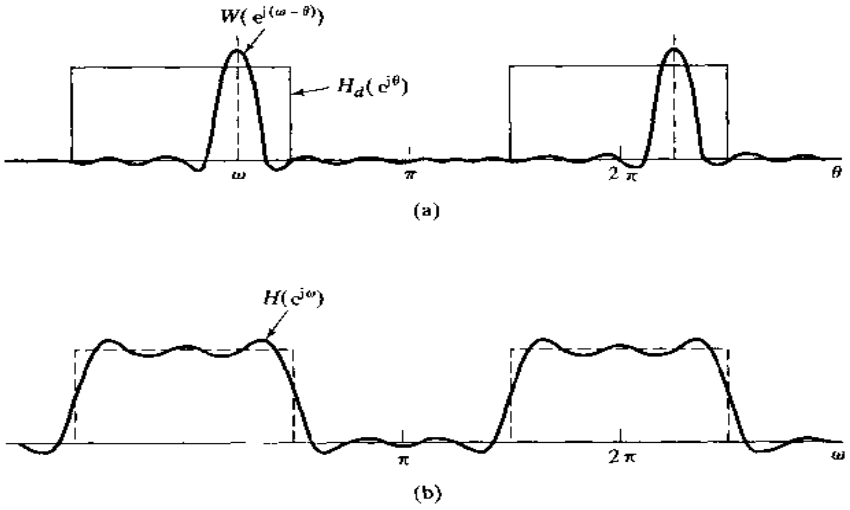


图 7.19 (a) 截断理想脉冲响应所包含的卷积过程；
(b) 对理想脉冲响应加窗后得到的典型逼近

如果对全部的 n 有 $w[n]=1$(即完全不截断)，则 $W(e^{j\omega})$是周期为 2π 的周期脉冲串，因此 $H(e^{j\omega})=H_d(e^{j\omega})$。这种解释表明，若选择 $w[n]$使得 $W(e^{j\omega})$集中在 $\omega=0$ 附近的一个狭窄频带范围内，则除去 $H_d(e^{j\omega})$变化很突然的地方外，$H(e^{j\omega})$将与 $H_d(e^{j\omega})$很"相像"。所以，窗函数选择的原则是，所用窗函数在长度上越短越好，以使在滤波器的实现中有最小的计算量，同时使 $W(e^{j\omega})$接近于一个脉冲函数；也就是说，我们希望 $W(e^{j\omega})$在频率上是高度集中的，以使(7.45)式的卷积正确地重现所要求的频率响应。如在(7.44)式矩形窗函数的情况下所能看到的，在要求上也有矛盾之处，此时

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2}\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \tag{7.46}$$

图 7.20 中绘出了 $M=7$ 时函数 $\sin[\omega(M+1)/2]/\sin(\omega/2)$的幅度。应当注意，矩形窗的频率响应 $W(e^{j\omega})$有广义的线性相位，当 M 增加时，"主瓣"的宽度减小。通常主瓣定义为原点两边第一个过零点之间的区域。对矩形窗，主瓣宽度是 $\Delta\omega_m=4\pi/(M+1)$。但是，矩形窗的旁瓣是很高的。事实上，当 M 增大时，主瓣峰的幅度也增大，虽然每个瓣的宽度随 M 增大而减小，但是每个瓣的面积却是常量。因此，由于随着 ω 的增大，$W(e^{j(\omega-\theta)})$滑过 $H_d(e^{j\theta})$的不连续点，所以，当 $W(e^{j(\omega-\theta)})$的每个旁瓣通过不连续点时，$W(e^{j(\omega-\theta)})H_d(e^{j\omega})$的积分将振荡。这一结果绘于图 7.19(b)中。因为随着 M 的增大在每个瓣下的面积维持不变，所以出现的振荡将加快，但是其幅度并不随 M 的增大而减小。

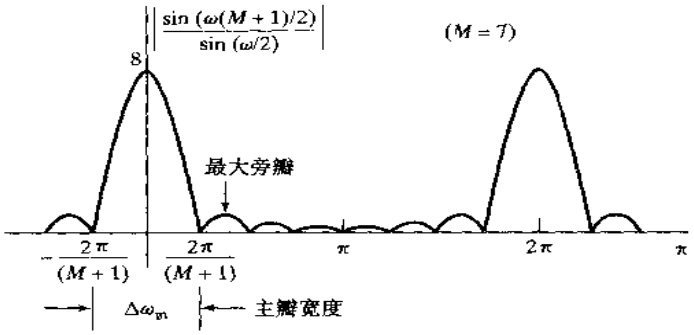


图 7.20　矩形窗傅里叶变换的幅度($M=7$)

在傅里叶级数理论中,这种非一致收敛就是著名的**吉布斯现象**,使用不要这样突然截断的傅里叶级数可减轻这种现象。把窗函数的两端平滑地减小至零,可减小旁瓣的高度,但是所付出的代价是,主瓣要加宽,并且在不连续处过渡带的宽度也增大。

7.2.1　常用窗函数的性质

一些常用的窗函数示于图 7.21[①]。这些窗函数用下列方程定义:

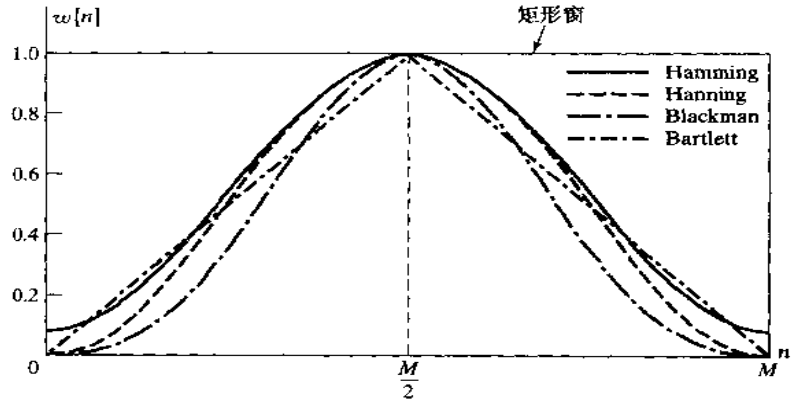


图 7.21　常用的窗函数

矩形窗

$$w[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.47a}$$

Bartlett 窗(三角窗)

① Bartlett, Hanning, Hamming 和 Blackman 均用发明者的名字来命名。Hanning 窗与奥地利气象学家 Julius von Hann 有关,有时也称为 Hann。"hanning"这一术语曾被 Blackman 和 Turkey(1958)用来描述将这种窗加到某一信号上的操作,后来随着人们逐渐喜欢选用"Hanning"或"hanning"一词,它才普遍地被用作窗函数的名字。

$$w[n]=\begin{cases}2n/M, & 0\leqslant n\leqslant M/2\\ 2-2n/M & M/2<n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.47b}$$

Hanning 窗

$$w[n]=\begin{cases}0.5-0.5\cos(2\pi n/M), & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.47c}$$

Hamming 窗

$$w[n]=\begin{cases}0.54-0.46\cos(2\pi n/M), & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.47d}$$

Blackman 窗

$$w[n]=\begin{cases}0.42-0.5\cos(2\pi n/M)+0.08\cos(4\pi n/M) & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.47e}$$

(为了方便起见,图 7.21 把这些窗绘成连续变量函数的图形,但是如(7.47)式所示,这些窗序列只限定为 n 的整数值的函数)

正如在第 10 章中所讨论的,(7.47)式定义的窗函数通常用于谱分析和 FIR 滤波器的设计。它们具有人们所希望的特性,其傅里叶变换集中在 $\omega=0$ 附近,并且具有简单的函数形式,容易计算。Bartlett 窗傅里叶变换可表示成两个矩形窗之傅里叶变换的乘积,而且其它窗的傅里叶变换也可以表示成(7.46)式给出的矩形傅里叶变换经不同频移后的和(见习题 7.34)。

图 7.22 绘出每个窗均取 $M=50$ 时函数 $20\log_{10}|W(e^{j\omega})|$ 的图形。显然,矩形窗的主瓣最窄,因为当长度一定时,它能使 $H(e^{j\omega})$ 在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处有最陡的过渡带特性。但是,它的第一个旁瓣只比主瓣低约 13dB,并且使得 $H(e^{j\omega})$ 在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处有大幅度振荡。表 7.1 比较了(7.47)式的各种窗函数。从表中可以清楚地看出,使用如 Hamming,Hanning 和 Blackman 窗之类的使窗的两端平滑减小至零的窗函数可以使旁瓣(表中第二列)大幅度下降。但是所付出的代价是,主瓣宽度(第三列)增加很多,因此在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处的过渡区也加宽了。表 7.1 中其它各列的特点将在以后讨论。

表 7.1 常用窗函数的比较

窗的类型	最大旁瓣幅度(相对值)	主瓣近似宽度	最大逼近误差 $20\log_{10}\delta$(dB)	等效 Kaiser 窗 β	等效 Kaiser 窗的过渡带宽度
矩形	−13	$4\pi(M+1)$	−21	0	$1.81\pi/M$
Bartlett	−25	$8\pi/M$	−25	1.33	$2.37\pi/M$
Hanning	−31	$8\pi/M$	−44	3.86	$5.01\pi/M$
Hamming	−41	$8\pi/M$	−53	4.86	$6.27\pi/M$
Blackman	−57	$12\pi/M$	−74	7.04	$9.19\pi/M$

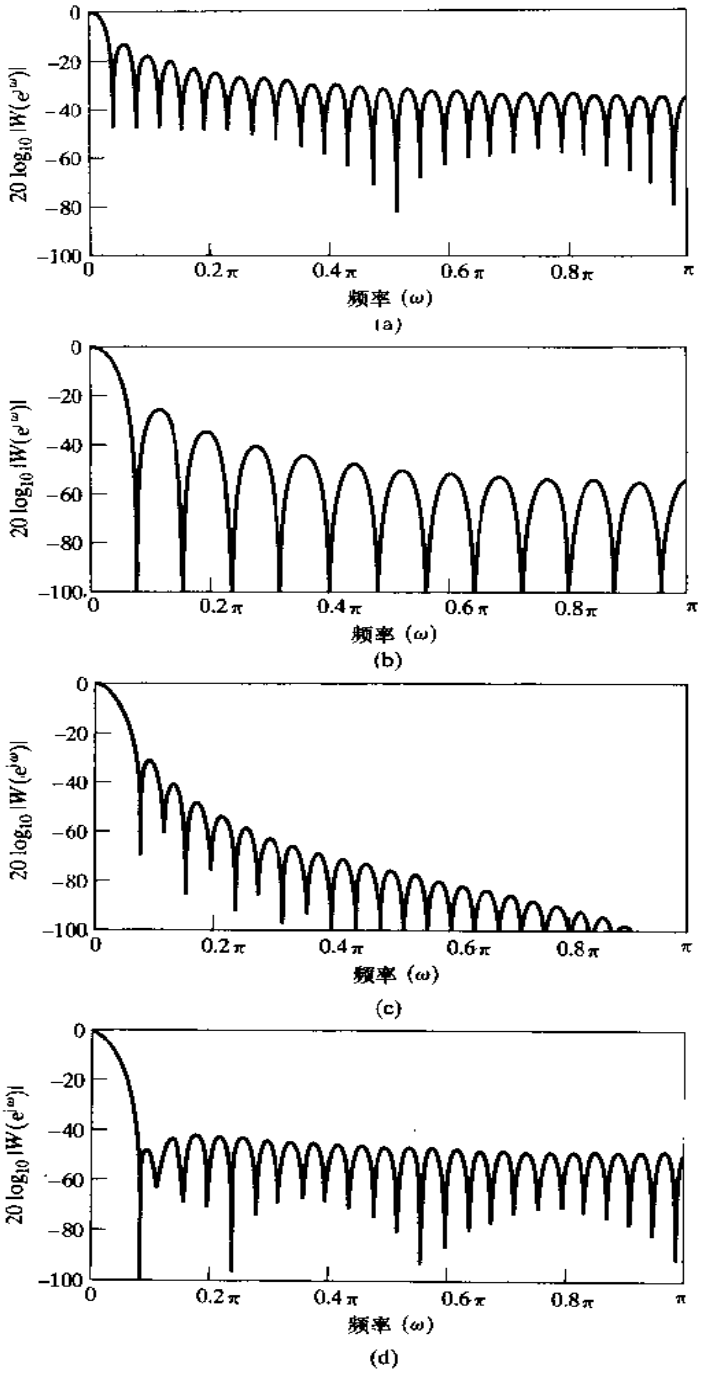
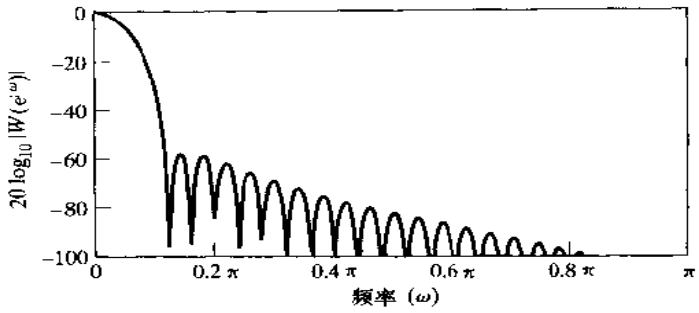


图 7.22　(a)～(d) $M=50$ 时图 7.21 中各种窗函数的傅里叶变换(对数幅度)
(a) 矩形窗；(b)Bartlett 窗；(c) Hanning 窗；(d) Hamming 窗；



(e)

图 7.22(续)　(e) Blackman 窗

7.2.2　广义线性相位的合并

在设计各型 FIR 滤波器时，总是希望能得到具有广义线性相位特性的因果系统。(7.47)式的所有窗函数就是为满足这一要求而定义的。特别应注意，全部窗函数均有性质

$$w[n] = \begin{cases} w[M-n], & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{7.48}$$

即，它们对于点 $M/2$ 为对称的。所以，它们的傅里叶变换是

$$W(e^{j\omega}) = W_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{7.49}$$

式中 $W_e(e^{j\omega})$是 ω 的实偶函数。这由(7.46)式就可以证明。(7.48)式的约定一般导致因果滤波器，并且若所需的脉冲响应也是对点 $M/2$ 为对称的，即 $h_d[M-n]=h_d[n]$，则加窗后的脉冲响应将也是对点 $M/2$ 呈反对称的，而且所得出的频率响应将有附带 90°常数相移的广义线性相位，也就是

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{7.50}$$

其中 $A_e(e^{j\omega})$是实数的，并且是 ω 的偶函数，同样，若所需的冲激响应是对点 $M/2$ 呈反对称的，即 $h_d[M-n]=-h_d[n]$，则加窗后的冲激响应将也是对点 $M/2$ 呈反对称的，而且所得出的频率响应将有附带 90°常数相移的广义线性相位，即

$$H(e^{j\omega}) = jA_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{7.51}$$

式中 $A_o(e^{j\omega})$为实数，并且是 ω 的奇函数。

虽然当我们研究对称窗函数与对称的(或反对称的)所需脉冲响应的乘积时，以上结论显而易见，但是，若我们研究它们的频域表示也十分有益。假设 $h_d[M-n]=h_d[n]$，并有

$$H_d(e^{j\omega}) = H_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{7.52}$$

式中 $H_e(e^{j\omega})$是实的偶函数。

如果窗函数是对称的，则我们可将(7.49)式和(7.52)式代入(7.45)式，得

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})e^{-j\theta M/2}\, W_e(e^{j(\omega-\theta)})e^{-j(\omega-\theta)M/2}d\theta \tag{7.53}$$

化简相位因子得到

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{7.54}$$

式中

$$A_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_e(e^{j\theta})W_e(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{7.55}$$

由此可以看出，所得到的系统具有广义线性相位，而且实函数 $A_e(e^{j\omega})$是实函数 $H_e(e^{j\omega})$和 $W_e(e^{j\omega})$的周期卷积。

(7.55)式卷积的具体特性决定着由窗函数所得滤波器的幅度响应。下面的例子说明线性相位低通滤波器的这一特点。

例 7.7　线性相位低通滤波器

我们将所要求的频率响应定义为

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.56}$$

式中广义相位因子已经合并到理想低通滤波器的定义中。对于$(-\infty < n < \infty)$相应的理想脉冲响应是

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega M/2}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)} \tag{7.57}$$

很容易证明 $H_{lp}[M-n] = H_{lp}[n]$，因此若我们在方程

$$h[n] = \frac{\sin[\omega_c(n-M/2)]}{\pi(n-M/2)}w[n] \tag{7.58}$$

中使用对称窗，则可以得到一个线性相位系统。

图 7.23 的上半部分绘出适用于(7.47)式所有窗函数的幅度响应的特性，但巴特利特窗除外，因为在滤波器设计中很少用到它(巴特利特窗应产生一个单调函数 $A_e(e^{j\omega})$，因为 $W_e(e^{j\omega})$是正函数。)。图 7.23 表现出窗函数法逼近具有阶跃间断点的所需频率响应时的重要特性。当 ω_c 不靠近零或 π 且主瓣宽度小于 $2\omega_c$ 时，这种方法可以得到精确的结果。图的下半部分是对称窗的典型傅里叶变换(线性相位除外)。从图中可以清楚地看出窗函数在不同位置时的作用，以帮助我们理解在 ω_c 附近逼近

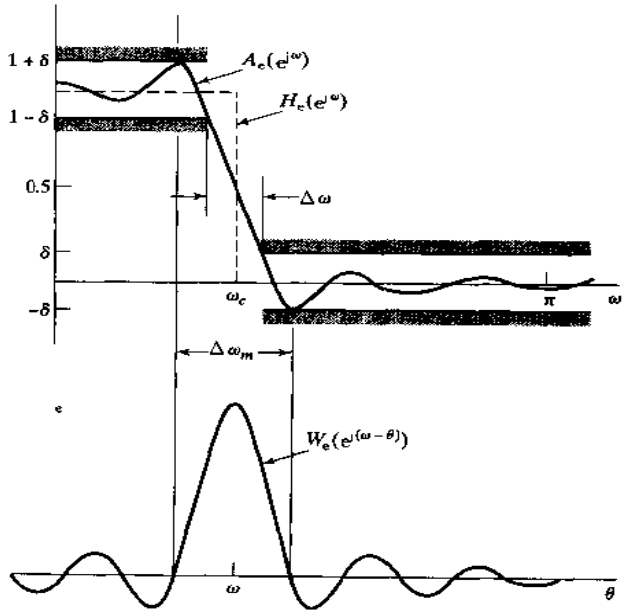


图 7.23　理想频率响应间断点处得到的逼近形式的说明

函数 $A_e(e^{j\omega})$ 为什么会有这种形状。

当 $\omega=\omega_c$ 时对称函数 $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ 的中心位于间断点处，并且约有一半的面积在 $A_e(e^{j\omega})$ 中起作用。还可看出，当 $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ 平移到其右边的第一个负旁瓣正好位于 ω_c 边时会出现峰的上冲。同样，当左边的第一个负旁瓣正好位于 ω_c 的左边时会出现峰的下冲(为负值)。这表明间断点两边最大波峰之间的距离约等于主瓣宽度 $\Delta\omega_m$，如图 7.23 所示。因此，图 7.23 所定义的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 略小于主瓣宽度。最后，由于 $W_e(e^{j(\omega-\theta)})$ 的对称性，逼近的结果会在 ω_c 附近也趋向于是对称的。这就是说在通带中有 δ 的上冲，而在阻带中也有同样大小的下冲。

表 7.1 的第四列表示对于(7.47)式窗函数的峰值逼近误差(dB)。很清楚，窗函数的旁瓣越低，则在理想响应的间断点处所得到的逼近越好。第三列表示主瓣宽度，它说明若增大 M，则可以使过度区域变窄。所以，通过选择窗的形状和长度就能控制所得 FIR 滤波器的特性。但是，反复试用不同的窗函数并调整窗的长度和逼近误差并不是一种很简单的滤波器设计方法。幸运的是，Kaiser(1974)已推导出一种窗函数法的简单公式。

7.2.3 Kaiser 窗滤波器设计法

在频域寻找最大限度地集中在 $\omega=0$ 附近的窗函数可以定量的在主瓣宽度和旁瓣面积之间进行权衡选择。在 Slepian 等人(1961)一系列的经典论文中深入地研究了这个问题，论文中所求出的解涉及到很难计算的扁球体波函数，因此也很难用于滤波器的设计中。但是，Kaiser(1966,1974)发现，利用十分容易的第一类零阶修正 Bessel 函数可构成一种近似最佳的窗函数。Kaiser 窗定义为：

$$w[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.59}$$

式中 $\alpha=M/2$，$I_0(\cdot)$ 表示第一类零阶修正 Bessel 函数。与(7.47)式中其它窗函数相反，Kaiser 窗有两个参数：长度参数($M+1$)和形状参数 β。若改变($M+1$)和 β 就可以调整窗的长度和形状，以便达到窗的旁瓣幅度和主瓣宽度之间的某种折衷。图 7.24(a)表示，当 $\beta=0$，3 和 6 时，长度 $M+1=21$ 的 Kaiser 窗的连续包络。应当注意，(7.59)式在 $\beta=0$ 的情况下就变为矩形窗。图 7.24(b)表示图 7.24(a)中 Kaiser 窗所对应的傅里叶变换。图 7.24(c)表示取 $\beta=6$以及 $M=10$，20 和 40 时的 Kaiser 窗的傅里叶变换。这些图清楚地表明可以达到所需要的折衷。如果窗的两端越尖，则其傅里叶变换的旁瓣就越低，但是主瓣也就越宽。图 7.24(c)表明，若增大 M 而同时保持 β 不变，可使主瓣宽度减小，且不影响旁瓣的幅度。事实上，通过大量的数值实验，Kaiser 得到一对公式，它可使滤波器设计人员事先预算出满足给定选频滤波器技术指标所需的 M 和 β 值。图 7.23 为用 Kaiser 窗得到的典型逼近，并且 Kaiser(1974)发现，在很宽范围的条件内，峰值逼近误差(图 7.23 中的 δ)由 δ 的选择来确定。若已知 δ 是固定的，则低通滤波器的通带截止频率 ω_p 定义为 $|H(e^{j\omega})|\geqslant 1-\delta$ 时的最高频率，阻带截止频率 ω_s 定义为 $|H(e^{j\omega})|\leqslant\delta$ 的最低频率。因此，对于低通滤波器逼近，其过渡区的宽度是

$$\Delta\omega=\omega_s-\omega_p \tag{7.60}$$

定义

$$A=-20\log_{10}\delta \tag{7.61}$$

Kaiser 用实验的方法求出，得到规定的 A 值所需要的 β 值由下式计算：

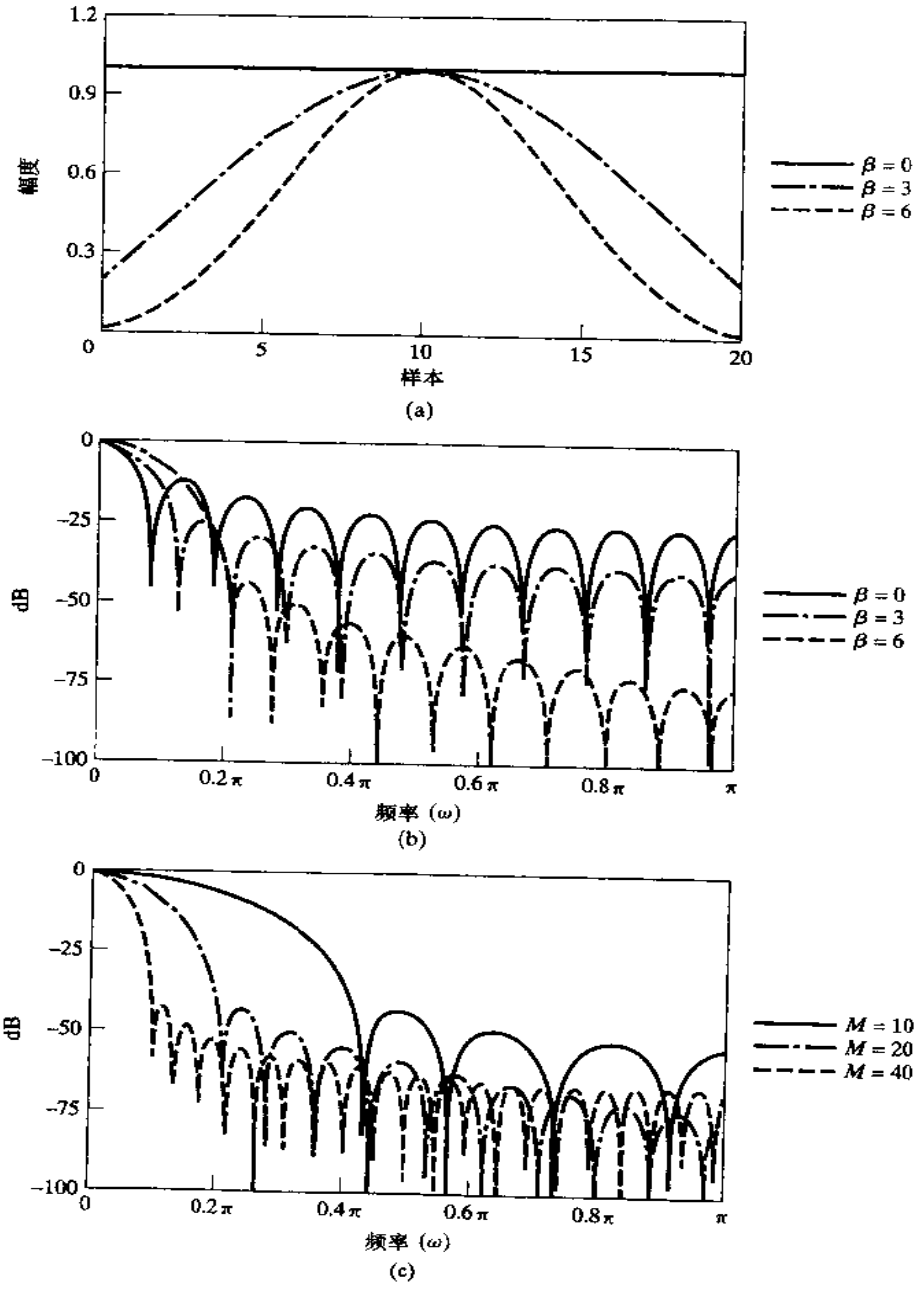


图 7.24 (a) $\beta=0$，3 和 6 以及 $M=20$ 时的 Kaiser 窗；
(b) 在(a)中各窗函数所对应的傅里叶变换；
(c) 取 $\beta=6$ 以及 $M=10,20$ 和 40 时 Kaiser 窗的傅里叶变换

$$\beta = \begin{cases} 0.110\,2(A-8.7), & A > 50 \\ 0.584\,2(A-21)^{0.4} + 0.078\,86(A-21), & 21 \leqslant A \leqslant 50 \\ 0.0, & A < 21 \end{cases} \tag{7.62}$$

(应当记得，$\beta=0$ 时是矩形窗，此时 $A=21$)另外，要得到预定的 A 和 $\Delta\omega$ 值，M 必须满足

$$M = \frac{A-8}{2.285\Delta\omega} \tag{7.63}$$

(7.63)式预计，在 $\Delta\omega$ 和 A 值的很大范围内 M 的值在 ± 2 之间。所以若使用这些公式，则 Kaiser 窗设计法几乎不需要迭代或反复试验，并且几乎没有误差。例 7.8 体现和说明了设计过程。

例 7.8　用 Kaiser 窗法设计低通滤波器

利用 Kaiser 窗设计公式直接设计一个满足预定技术指标的 FIR 低通滤波器。步骤如下：

1. 首先应给出技术指标。这表明需选择所要求的 ω_p，ω_s 和最大允许逼近误差。对于窗函数设计法，所得滤波器将在通带和阻带有相同的峰值误差 δ。本例中我们使用与例 7.4，例 7.5 和例 7.7 相同的技术指标，即，$\omega_p=0.4\pi$，$\omega_s=0.6\pi$，$\delta_1=0.01$ 和 $\delta_2=0.001$。因为用窗函数设计法的滤波器本来就有 $\delta_1=\delta_2$，所以我们应当设 $\delta=0.001$。

2. 必须求出基本理想低通滤波器的截止频率。由于在 $H_d(e^{j\omega})$ 的间断点处逼近的对称性，所以应当设

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.5\pi$$

3. 为了确定 Kaiser 窗的参数，首先应计算

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi, \quad A = -20\log_{10}\delta = 60$$

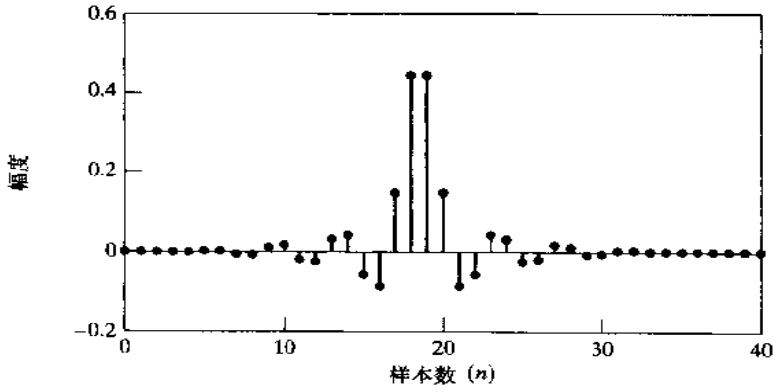
可将这两个量代入(7.62)式和(7.63)式求出所需的 β 和 M 值。对于本例，公式计算的结果是

$$\beta = 5.653, \qquad M = 37$$

4. 用(7.58)式和(7.59)式计算滤波器的脉冲响应：

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \cdot \dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}}{I_0(\beta)}, & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

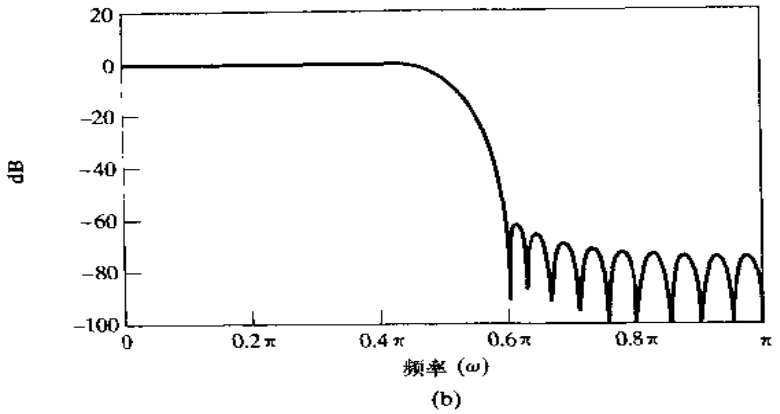
式中 $\alpha = M/2 = 37/2 = 18.5$。因为 $M=37$ 是一个奇整数，所以所得线性相位系统应当是Ⅱ型系统(具有广义线性相位 FIR 系统的四种类型的定义可见 5.7.3 节)。该滤波器的响应特性示于图 7.25



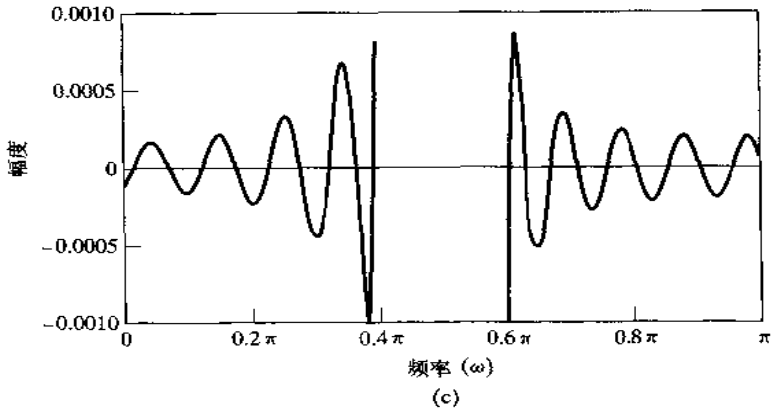
(a)

图 7.25　例 7.8 的响应函数

(a) 脉冲响应($M=37$)；



(b)



(c)

图 7.25(续) (b) 对数幅度；(c) 逼近误差

中。图 7.25(a)表示脉冲响应，它表现出Ⅱ型系统的对称特性。图 7.25(b)表示对数幅度响应(dB)，该图表明 $H(e^{j\omega})$在$\omega=\pi$处为零。或等效的，$H(z)$在 $z=-1$ 处有一个零点，正如Ⅱ型 FIR 系统所要求的那样。图 7.25(c)表示在通带和阻带中的逼近误差，这个误差函数定义为

$$E_A(\omega)=\begin{cases}1-A_e(e^{j\omega}), & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_p\\ 0-A_e(e^{j\omega}), & \omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases} \tag{7.64}$$

(没有限定在过渡区 $0.4\pi<\omega<0.6\pi$ 中的误差)请注意逼近误差的对称性，并应注意峰值逼近误差略大于$\delta=0.001$。若将 M 增大到 38 就得到Ⅰ型滤波器，其 $\delta=0.000\,8$。

最后还应注意，因为我们知道相位是精确线性的，并且延迟为 $M/2=18.5$ 个样本，所以就没有必要再画出相位或群延迟的图形。

7.2.4 Kaiser 窗与其它窗之间的关系

窗函数设计法的基本原理是用本节中所讨论的一个有限长窗函数去截取理想脉冲响应。在频域中相应产生的影响是，理想频率响应与窗函数的傅里叶变换进行了卷积。如果理想滤波器是一个低通滤波器，则当窗函数之傅里叶变换的主瓣在卷积过程中移动通过间断点时，就

模糊了理想滤波器频率响应的间断特性。对于一个初步的逼近，所得过渡带的带宽由窗函数傅里叶变换的旁瓣来确定。因为通带和阻带的波纹是由对称窗函数旁瓣的积分产生的，所以通带和阻带中的波纹近似相等。另外，对一个好的逼近来说，最大通带和阻带的偏差不取决于M，而只能通过改变所用窗函数的形状来改变这些偏差。表 7.1 的最后两列将 Kaiser 窗与(7.47)式的窗进行了比较。表中第五列给出了 Kaiser 窗的形状参数，用该参数可以得到与第一列所给窗函数相同的峰值逼近误差(δ)。第六列表示所对应的用 Kaiser 窗设计的滤波器之过渡带宽度(由(7.63)式得出)。由这个公式可以得出对其它窗函数的过渡带宽度较好的预计结果，这要比第三列中所给出的主瓣宽度更准确。

7.3 Kaiser 窗法设计 FIR 滤波器举例

当然，使用窗函数法不止限于设计低通滤波器。可用窗函数来截取任何理想脉冲响应以得到因果 FIR 滤波器的逼近。在这一节中我们将给出几个说明 Kaiser 窗使用方法的例子。这些例子表明了 FIR 系统的一些重要特性。

7.3.1 高通滤波器

具有广义线性相位的理想高通滤波器有频率响应

$$H_{\mathrm{hp}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\begin{cases}0, & |\omega|<\omega_c\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M/2}, & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases} \tag{7.65}$$

计算 $H_{\mathrm{hp}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的反变换就可以求出相应的脉冲响应，我们可以看出：

$$H_{\mathrm{hp}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M/2}-H_{\mathrm{lp}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{7.66}$$

其中 $H_{\mathrm{lp}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$由(7.56)式给出，因此 $h_{\mathrm{hp}}[n]$为

$$h_{\mathrm{hp}}[n]=\frac{\sin\pi(n-M/2)}{\pi(n-M/2)}-\frac{\sin\omega_c(n-M/2)}{\pi(n-M/2)},\qquad -\infty<n<\infty \tag{7.67}$$

为了设计一个逼近高通滤波器的 FIR 系统，我们可以用与例 7.8 同样的方式来进行。

例 7.9 用 Kaiser 窗法设计高通滤波器

假设我们要设计一个高通滤波器，满足技术指标：

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\leqslant\delta_2,\qquad |\omega|\leqslant\omega_s$$

$$1-\delta_1\leqslant|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|\leqslant 1+\delta_1,\quad \omega_p\leqslant|\omega|\leqslant\pi$$

其中 $\omega_s=0.35\pi$，$\omega_p=0.5\pi$ 和 $\delta_1=\delta_2=\delta=0.021$。因为理想响应也有一个间断点，所以我们可以用 Kaiser 公式(7.62)式和(7.63)式估计出所要求的值 $\beta=2.6$ 和 $M=24$。图 7.26 表示将具有这些参数的 Kaiser 窗函数用于 $h_{\mathrm{hp}}[n]$并取 $\omega_c=(0.35\pi+0.5\pi)/2$ 时而得出的响应函数的特性。请注意，因为 M 是偶整数，所以滤波器是线性相位的Ⅰ型 FIR 系统，并且延迟正好为 $M/2=12$ 个样本。此时，实际的峰值逼近误差 $\delta=0.021\,3$，而不是如所预定的 0.021。因为，除阻带的边缘外，各处的误差均小于 0.021，所以可以简单地将 M 增大至 25 而保持 β 不变，从而使过渡带变窄。图 7.27 中示出了这种Ⅱ型滤波器，由于线性相位的限制迫使 $H(z)$的零点位于 $z=-1(\omega=\pi)$处，所以其性能很不令人满意。虽然将阶次增加一阶所得结果并不好，但是若将 M 增大至 26 就会得到一个性能超过指标的Ⅰ型系统。显然，一般说来Ⅱ型 FIR 线性相位系统不适用于逼近高通或带阻滤波器。

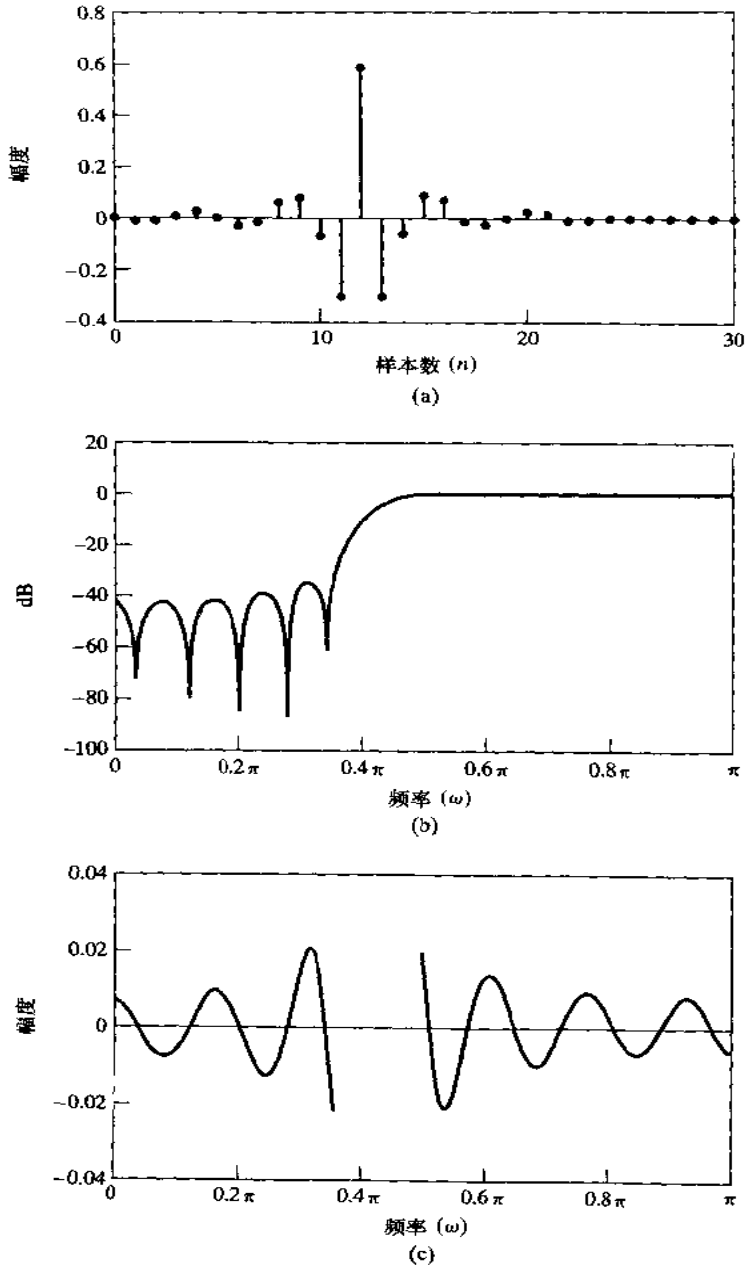


图 7.26　Ⅰ型 FIR 高通滤波器的响应函数
(a) 脉冲响应($M=24$)；(b) 对数幅度；(c) 逼近误差

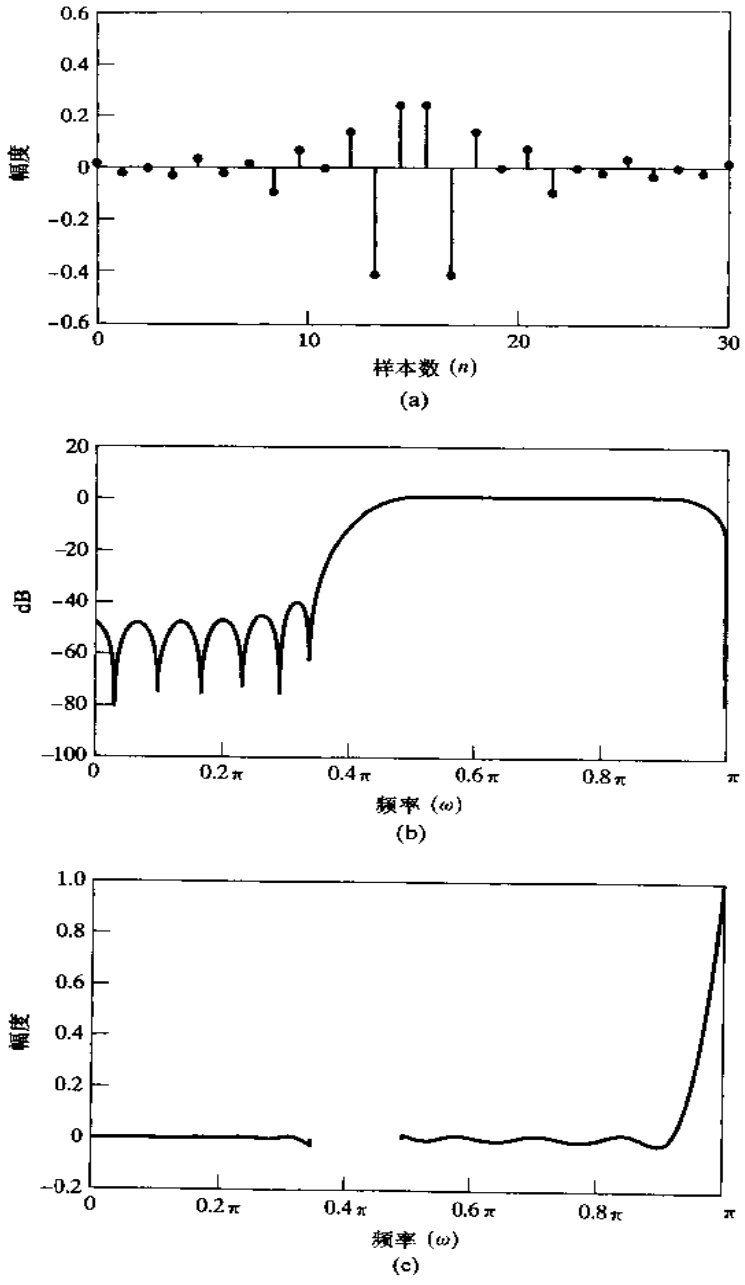


图 7.27　Ⅱ型 FIR 高通滤波器的响应函数
(a) 脉冲响应($M=25$)；(b) 对数幅度；(c) 逼近误差

上面关于高通滤波器设计的讨论可以推广到多通带和多阻带的情况。图 7.28 表示一个理想的多频带选频滤波器的频率响应。这种广义的多频带滤波器包括其低通、高通、带通和带阻滤波器，这些滤波器是广义多频带滤波器的特殊情况。如果给这种滤波器的幅度函数乘上一个线性相位因子 $e^{-j\omega M/2}$，则相应的脉冲响应是

$$h_{mb}[n] = \sum_{k=1}^{N_{mb}} (G_k - G_{k+1}) \frac{\sin\omega_k(n - M/2)}{\pi(n - M/2)} \tag{7.68}$$

式中 N_{mb} 是频带的个数，且 $G_{N_{mb}+1} = 0$。若 $h_{mb}[n]$ 乘以 Kaiser 窗函数，则我们在低通和高通系统的单间断点处已经看到的逼近型式将会出现在**每个**间断点处。只需各间断点之间相距足够远则在每个间断点处的特性将是相同的。因此，计算窗参数的 Kaiser 公式可以用于这种情况来预估计逼近误差和过渡带宽度。应当注意，逼近误差的大小将与产生这些误差的跳变幅度成正比例。这就是说，如果幅度为 1 的间断点能产生 δ 的峰值逼近误差，则幅度为 1/2 的间断点将产生 $\delta/2$ 的峰值逼近误差。

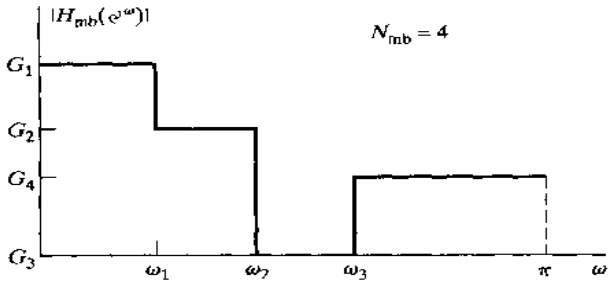


图 7.28　多频带滤波器的理想频率响应

7.3.2　离散时间微分器

如例 4.5 所示，有时我们需要由一个带限信号的样本得到该信号导数的样本。因为一个连续时间信号导数的傅里叶变换是该信号之傅里叶变换的 $j\Omega$ 倍，由此可知，对于带限信号来说频率响应为 $j\omega/T$（$-\pi < \omega < \pi$ 并且该响应是周期为 2π 的周期函数）的离散时间系统在其输出端将会得到与连续时间信号的导数相同的样本。具有这种性质的系统就称为离散时间微分器。

对于一个线性相位的理想“离散时间微分器”，恰当的频率响应是

$$H_{diff}(e^{j\omega}) = (j\omega)e^{-j\omega M/2}, \qquad -\pi < \omega < \pi \tag{7.69}$$

（我们已经省略了因子 $1/T$）所对应的理想脉冲响应是

$$h_{diff}[n] = \frac{\cos\pi(n - M/2)}{(n - M/2)} - \frac{\sin\pi(n - M/2)}{\pi(n - M/2)^2}, \qquad -\infty < n < \infty \tag{7.70}$$

如果用一个长度为 $(M+1)$ 的对称窗与 $h_{diff}[n]$ 相乘，则很容易证明，$h[n] = -h[M-n]$。因此，所得到的系统是一个Ⅲ型或Ⅳ型广义线性相位系统。

由于导出的 Kaiser 公式是针对单幅度间断点的频率响应而言，所以它不能直接用于微分器，因为在微分器中理想频率响应的间断点是相位引入的。尽管如此，窗函数法在设计这种系统时还是十分有效的。

例 7.10　用 Kaiser 窗设计微分器

为了证明如何使用窗函数法来设计微分器，假设 $M=10$ 和 $\beta=2.4$。所得出的响应如图 7.29 所示，图 7.29(a)表示反对称脉冲响应。因为 M 是偶数，所以系统是Ⅲ型线性相位系统，这意味着 $H(z)$ 在 $z=\pm1(\omega=0)$ 和 $z=-1(\omega=\pi)$ 处均有零点。图 7.29(b)所示的幅度响应中清楚地表现出了这

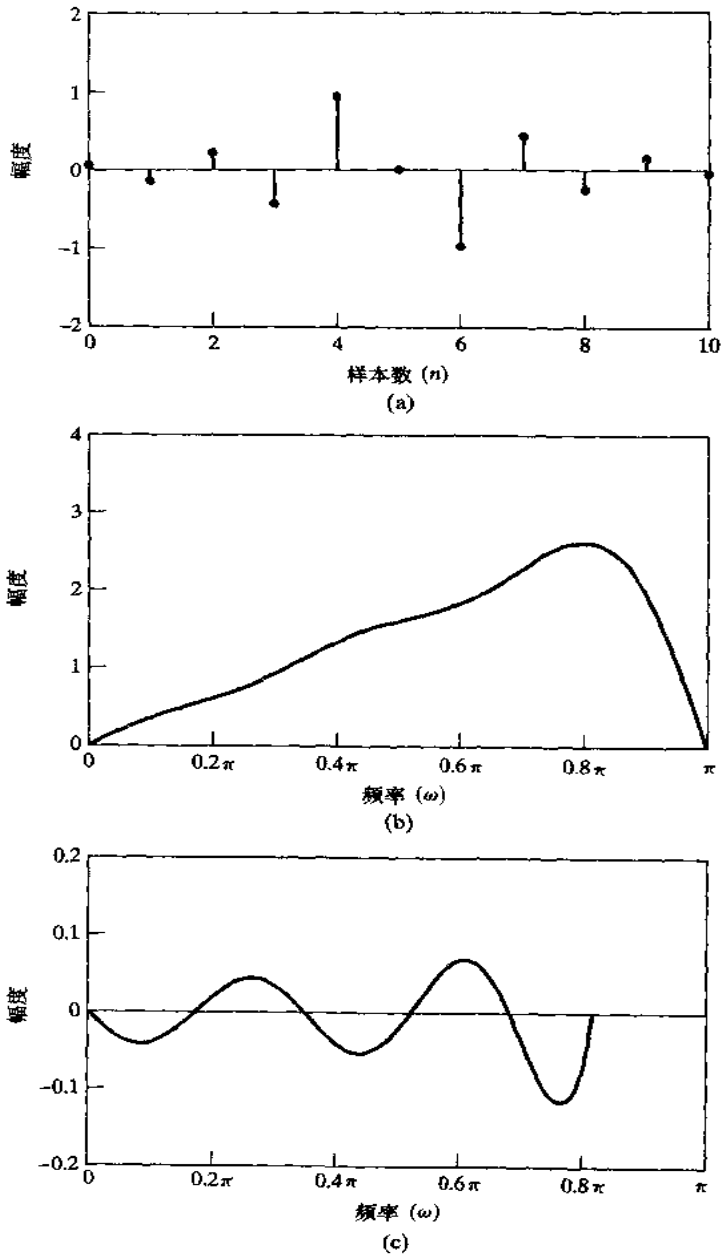


图 7.29　Ⅲ型 FIR 离散时间微分器的响应函数
(a) 脉冲响应($M=10$)；(b) 幅度；(c) 逼近误差

一点。因为Ⅲ型系统具有 $\pi/2$rad 的恒定相移，再加上在这种情况下对应于 $M/2=5$ 个样本延迟的线性相位，所以相位关系是准确的。图 7.29(c)表示幅度逼近误差

$$E_{\text{diff}}(\omega) = \omega - A_e(e^{j\omega}), \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 0.8\pi \tag{7.71}$$

其中 $A_o(e^{j\omega})$是逼近幅度。(请注意,该误差在 $\omega=\pi$ 附近很大,并且在图中没有画出频率大于 $\omega=0.8\pi$ 处的误差)显然,在整个频率上没有得到线性增长的幅度,并且对于低频或高频($\omega=\pi$ 附近)处的相对误差(即 $E_{\text{diff}}(\omega)/(\omega)$)是很大的。

Ⅳ型线性相位系统没有限制 $H(z)$必须在 $z=-1$ 处有一个零点。这种类型的系统可以很好地逼近幅度函数,如图 7.30 所示,其中取 $M=5$ 和 $\beta=2.4$。此时,在接近 $\omega=0.8\pi$ 及其以上频率范围

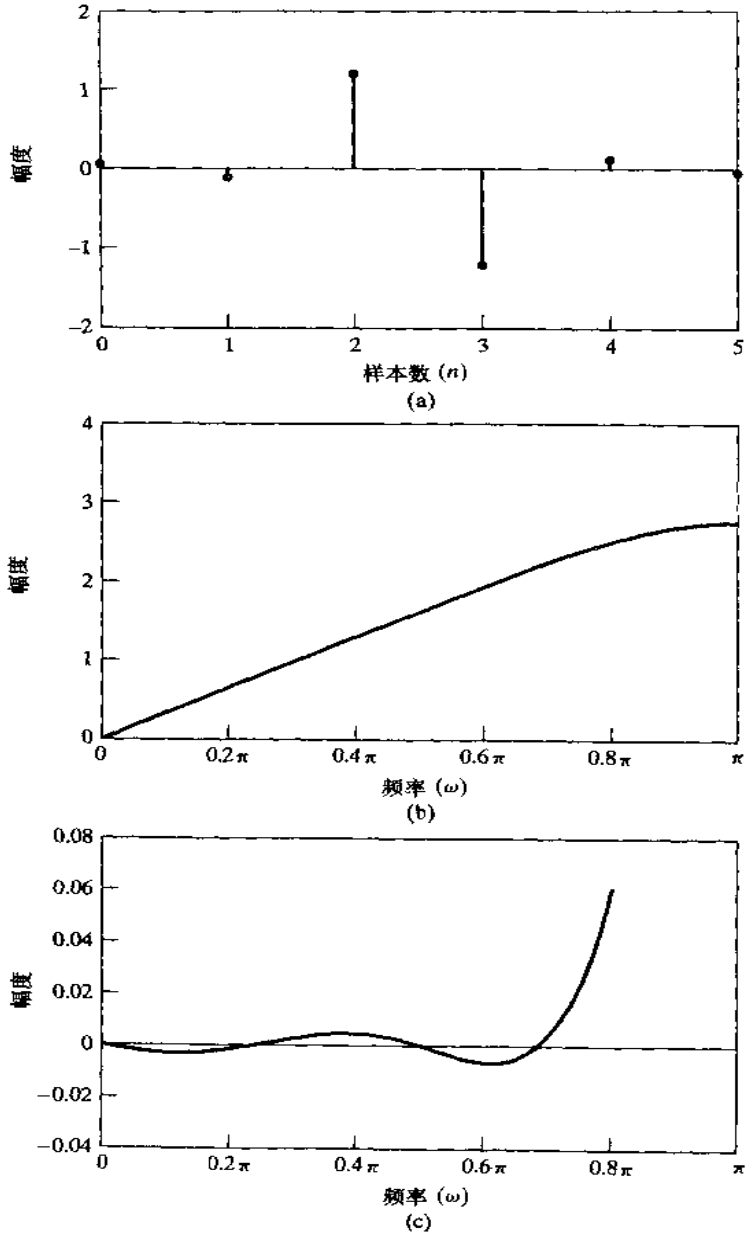


图 7.30 Ⅳ型 FIR 离散时间微分器的响应函数
(a) 脉冲响应($M=5$);(b) 幅度;(c) 逼近误差

中的幅度逼近误差都很小。该系统的相位还是 $\pi/2$rad 的恒定相移再加上对应于 $M/2=2.5$ 个样本延迟的线性相位。这一非整数延迟是由于幅度逼近非常好而付出的代价。我们没有求出在原采样时间 $t=nT$ 处连续时间信号之导数的样本，而是求出了采样时间 $t=(n-2.5)T$ 时导数的样本。但是在许多应用中这种非整数延迟并不是个问题，或者可用涉及到其它线性相位滤波器的较复杂系统中的其它非整数延迟来抵消掉。

7.4 FIR 滤波器的最佳逼近

尽管受到许多限制，但一般都直接用窗函数法设计 FIR 滤波器。然而，我们往往希望设计一个滤波器是 M 值给定时所能得到的滤波器中"最好的"。在没有定义逼近准则的情况下来讨论这个问题毫无意义，例如，在窗函数设计法的情况下由傅里叶级数理论可以得出，对给定 M 值的所需频率响应，矩形窗能得出最好的均方逼近。这就是说，

$$h[n]=\begin{cases}h_d[n], & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7.72}$$

可使如下表达式的值达到最小：

$$\varepsilon^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_d(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega \tag{7.73}$$

(见习题 7.32)。但是，正如我们所指出的，这种逼近准则在 $H_d(e^{j\omega})$的间断点处特性不好。另外，窗函数法不能单独控制在不同频率上的逼近误差。对于许多应用来说，使用最大最小准则(使最大误差最小化)或频率加权误差准则可得到较好的滤波器。这种设计可以用算法设计技术来实现。

以上的举例说明，用窗函数法设计的选频滤波器常常具有一种特性，即在理想频率响应间断点的两边误差最大，而在离开间断点的频率处误差逐渐减小。此外，由图 7.23 可以看出，这种滤波器是在通带和阻带的误差近似相同的情况下得出的典型结果(作为例子，可见图 7.25(c)和图 7.26(c))。我们已经看到，对于 IIR 滤波器来说，如果一种情况是逼近误差在频率上是均匀分布的而且可以分别调整通带和阻带的波纹，而另一种情况是该逼近误差在一个频率处正好满足指标而在其它频率处远超过指标，则前一种情况可用一个阶次较后一种情况要低的滤波器来满足给定的设计指标。本节下面将讨论的定理可证实我们对 FIR 系统的这种直观看法。

在下面的讨论中，我们将研究对于设计具有广义线性相位的 FIR 滤波器特别有效并广泛使用的算法设计法。虽然我们只详细研究 I 型滤波器，但同时也指出如何将这些结果用于 II，III，IV 型广义线性相位滤波器。

设计因果 I 型线性相位 FIR 滤波器时，很自然地，首先考虑设计一个零相位滤波器，即该滤波器有

$$h_e[n]=h_e[-n] \tag{7.74}$$

然后插入足够的延迟以使其成为因果的。因此，我们认为 $h_e[n]$满足(7.74)式的条件。对应的频率响应是

$$A_e(e^{j\omega})=\sum_{n=-L}^{L}h_e[n]e^{-j\omega n} \tag{7.75}$$

同时 $L=M/2$ 为一整数；或者由于(7.74)式，

$$A_e(e^{j\omega}) = h_e[0] + \sum_{n=1}^{L} 2h_e[n]\cos(\omega n) \tag{7.76}$$

应当注意，$A_e(e^{j\omega})$是一个实偶数，且为 ω 的周期函数。将 $h_e[n]$延迟 $L=M/2$ 个样本，就可由 $h_e[n]$得到一个因果系统，所得系统有脉冲响应

$$h[n] = h_e[n - M/2] = h[M - n] \tag{7.77}$$

和频率响应

$$H(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{7.78}$$

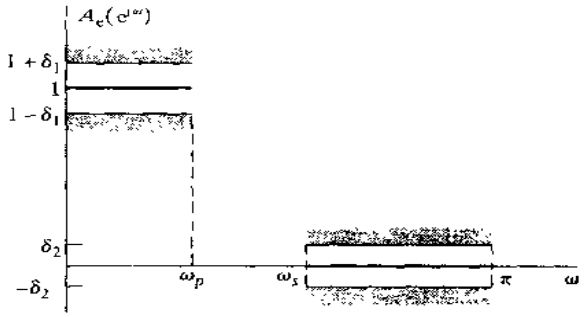


图 7.31 低通滤波器的容限图和理想响应

图 7.31 表示逼近具有实频率响应 $A_e(e^{j\omega})$的低通滤波器的容限图。在频带 $0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_p$中逼近 1 且最大绝对误差为 δ_1，而在频带 $\omega_s\leqslant|\omega|\leqslant\pi$ 中应逼近 0 且最大绝对误差为 δ_2。设计能满足这些技术指标的滤波器的算法设计法必须能有效而系统地改变 $(L+1)$ 个非限制的脉冲响应值 $h_e[n]$，这里 $0\leqslant n\leqslant L$。现已推导出设计算法，在这些算法中参数 L，δ_1，δ_2，ω_p 和 ω_s 中的一部分是固定的，用迭代方法就可得到其余参数的最佳调整方式。已推导出的有两种不同方法。Herrmann(1970)，Herrmann 和 Schüssler(1970a)以及 Hofstetter 等人(1971)推导出一种方法，该方法将 L 和 δ_1 及 δ_2 固定，而令 ω_p 和 ω_s 为变量。Parks 和 McClellan(1972a，1972b)，McClellan 和 Parks(1973)以及 Rabiner(1972a，1972b)推导出一种方法，该方法将 L，ω_p，ω_s 和比值 δ_1/δ_2 固定，而令 δ_1(或 δ_2)为变量。自研究出这些不同方法以来，Parks－McClellan 算法逐渐成为 FIR 滤波器最佳设计的主要方法。这是因为该方法最灵活而且在计算上最有效。因此我们在这里只讨论这种算法。

Parks-McClellan 算法的基础是将滤波器的设计问题用公式表示成多项式逼近问题。具体讲，(7.76)式中的 $\cos(\omega n)$项可表示成 $\cos\omega$ 不同幂次之和，形式为

$$\cos(\omega n) = T_n(\cos\omega) \tag{7.79}$$

式中 $T_n(x)$是一个 n 次多项式①。因此，(7.76)式可以重新写成 $\cos\omega$ 的 n 次多项式。也就是

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{L} a_k(\cos\omega)^k \tag{7.80}$$

其中 a_k 是与脉冲响应值 $h_e[n]$有关的常数。若用 $x=\cos\omega$ 代入(7.80)式，则该式可以表示成

$$A_e(e^{j\omega}) = P(x)\Big|_{x=\cos\omega} \tag{7.81}$$

式中 $P(x)$是 L 次多项式：

$$P(x) = \sum_{k=0}^{L} a_k x^k \tag{7.82}$$

我们将会看到，没有必要知道 a_k 和 $h_e[n]$之间的关系(虽然可以得出一个公式)；只要知道

① 更具体地说，$T_n(x)$是 n 次切比雪夫多项式，定义作 $T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$。

$A_e(e^{j\omega})$可以表示成(7.80)式的 L 次三角多项式就足够了。

能够控制 ω_p 和 ω_s 的关键是，将它们固定所需要的值上，而让 δ_1 和 δ_2 改变。Parks 和 McClellan(1972a，1972b)证明了，若 L，ω_s 和 ω_p 固定，则选频滤波器的设计问题就变成一个在不相交集上的切比雪夫逼近问题，这也是逼近理论中的一个重要问题，对此已经推导出一些有用的定理和方法(见 Cheney，1982)。为了得出在这种情况下逼近问题的公式，我们定义逼近误差函数为

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - A_e(e^{j\omega})] \tag{7.83}$$

其中加权函数 $W(\omega)$将逼近误差函数参数并入设计过程。这种设计方法规定误差函数 $E(\omega)$，加权函数 $W(\omega)$和要求的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$只在 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 的闭合子区间上有定义。例如，若逼近低通滤波器时，这些函数在区间 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$ 和 $\omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$ 上有意义。逼近函数 $A_e(e^{j\omega})$在过渡区(例如，$\omega_p < \omega < \omega_s$)上未加限制，而且为了在其区间上得到所要求的响应，它可以取任何所要求的形状。

例如，假设我们想要得到一个如图 7.31 所示的逼近，其中 L，ω_p 和 ω_s 是固定的设计参数。对于这个例子，

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p \\ 0, & \omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.84}$$

加权函数 $W(\omega)$可给出在不同的逼近区间上不同的加权逼近误差。对于低通滤波器逼近问题，加权函数是

$$W(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{K}, & 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p \\ 1, & \omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.85}$$

式中 $K = \delta_1/\delta_2$。若 $A_e(e^{j\omega})$如图 7.32 所示，则加权逼近误差，(7.83)式中的 $E(\omega)$，应当如图 7.33 中所示的那样。请注意，若用这种加权方式，最大加权绝对逼近误差在通带和阻带上均为 $\delta = \delta_2$。

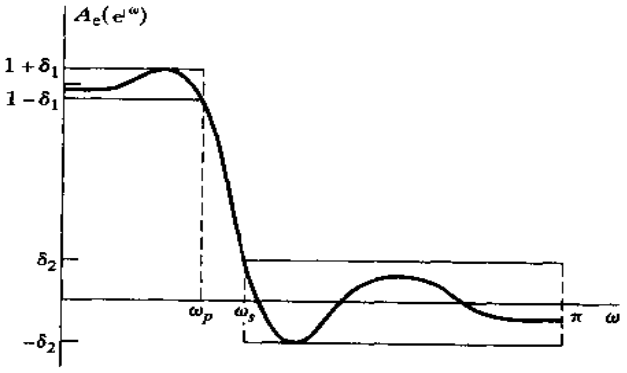


图 7.32　满足图 7.31 所示技术指标的典型频率响应

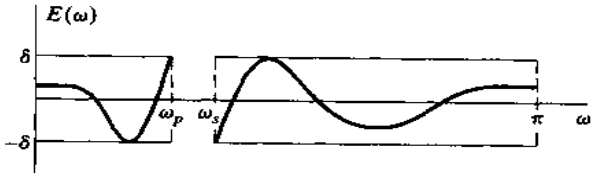


图 7.33　图 7.32 所示逼近的加权后误差

在这种设计方法中所使用的具体准则是人们所称的最大最小准则或切比雪夫准则，该准则在所需频率区间(如低通滤波器的通带和阻带)上找出能使(7.83)式的最大加权逼近误差达到最小的频率响应 $A_e(e^{j\omega})$。简言之，最好的逼近就是在

$$\min_{\{a_e[n]:0\leqslant n\leqslant L\}} \left(\max_{\omega\in F} |E(\omega)|\right)$$

意义上所求出的逼近，其中 F 是 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$的闭子集，如 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$ 或 $\omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$。从而，我们寻

求一组使图 7.33 中的 δ 达到最小的脉冲响应值。

Parks 和 McClellan(1972a,1972b)将如下逼近论的定理用于这种滤波器的设计问题中。

交错点定理:令 F_P 为由实轴 x 上不相交闭子集的并集构成的闭子集,则 $P(x)$是 r 次多项式

$$P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$$

$D_P(x)$是给定的所要求的 x 的函数,它在 F_P 上是连续的,$W_P(x)$是在 F_P 上连续的正函数,并且 $E_P(x)$是加权误差

$$E_P(x) = W_P(x)[D_P(x) - P(x)]$$

最大误差 $\| E \|$ 定义为

$$\| E \| = \max_{x \in F_P} | E_P(x) |$$

$P(x)$成为使 $\| E \|$ 最小的唯一 r 次多项式的必要和充分条件是,$E_p(x)$至少有$(r+2)$个交错点,即在 F_p 上必须至少存在$(r+2)$个 x_i 值,使得当 $i = 1, 2, \cdots, r+1$ 时,$x_1 < x_2 < \cdots < x_{r+2}$和 $E_p(x_i) = -E_P(x_{i+1}) = \pm \| E \|$。

初看起来,似乎很难将这个形式的定理与滤波器设计问题联系在一起,但是在下面的讨论中将会证明,该定理的全部内容在推导滤波器设计算法中是非常重要的。为了帮助理解交错点定理,在 7.4.1 节中我们将通过 I 型低通滤波器的设计来对这一定理作出具体的解释。然而,在将交错点定理应用于滤波器设计之前我们先通过例 7.11 说明怎样将它应用于多项式。

例 7.11　交错点定理与多项式

交错点定理给出了使给定阶次的多项式的最大加权误差为最小的必要和充分条件。为了说明如何应用该定理,假设我们需验证多项式 $P(x)$,当在 $-1 \leqslant x \leqslant -0.1$ 时取值近似为 1,而当 $0.1 \leqslant x \leqslant 1$ 时取值近似为 0。考虑如图 7.34 所示的三个该类多项式。每个多项式均是 5 次的,同时我们希望

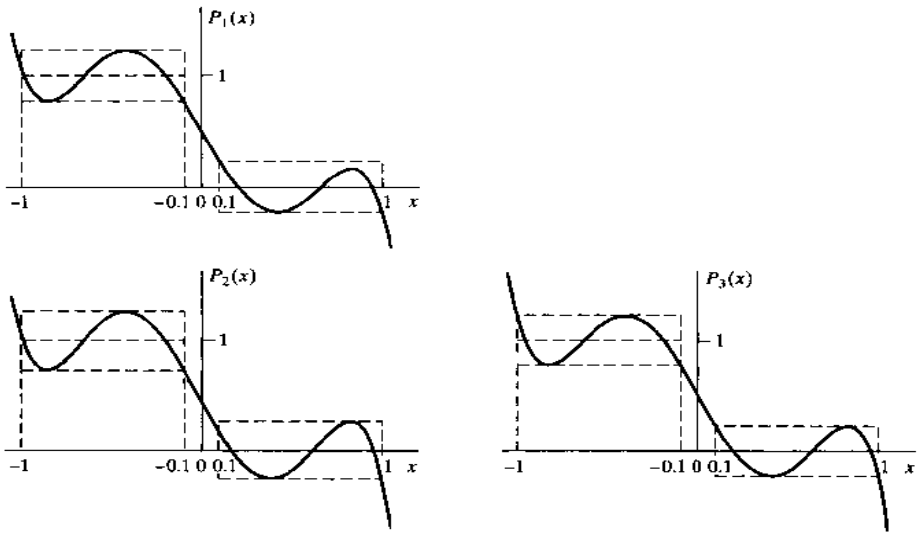


图 7.34　例 7.11 的五阶多项式

确定它们是否满足交错点定理。定理中所指的实轴 x 的闭子集为区间 $-1\leqslant x\leqslant -0.1$ 和 $0.1\leqslant x\leqslant 1$。我们设定在两个区间上误差加权系数相同，即 $W_p(x)=1$。

根据交错点定理，最佳的 5 次多项式在与闭子集 F_p 相应的区间上必须有**至少** 7 个误差交错点。$P_1(x)$只有 5 个交错点——3 个在区间 $-1\leqslant x\leqslant -0.1$ 上，2 个在区间 $0.1\leqslant x\leqslant 1$ 上。与虚线不相交的零斜率点不是交错点，因为它并没有达到正极值。交错点定理规定相邻的交错点符号必须相反，由于在 $0.1\leqslant x\leqslant 1$ 区间上具有零斜率的第一个点是一个负极值交错点，所以 $x=1$ 处的极值点也不能是交错点。

$P_2(x)$也只有 5 个交错点，所以它也不是最优的。具体地讲，$P_2(x)$在区间 $-1\leqslant x\leqslant -0.1$ 上有 3 个交错点，而在区间 $0.1\leqslant x\leqslant 1$ 上有两个。因为 $x=0.1$ 处的点不是正极值点，因此，出现了一个问题：由于在 $x=-0.1$ 处的交错点是负极值点，所以下一个交错点必须是正极值点。而在区间 $0.1\leqslant x\leqslant 1$ 上的第一个零斜率点同 $x=-0.1$ 一样是一个负极值点，没有改变符号，所以它也不能算为交错点。但是这个区间内的第二个零斜率点和 $x=1$ 处的点均是交错点，即区间 $0.1\leqslant x\leqslant 1$ 内有两个交错点，所以多项式 $P_2(x)$交错点总数为 5。

$P_3(x)$有 8 个交错点；所有交错点均为 0 斜率点，$x=-1$，$x=-0.1$，$x=0.1$ 和 $x=1$。因为 8 个交错点满足交错点定理，所以 $P_3(x)$是该区间唯一的最优五阶多项式逼近。

7.4.1 最佳Ⅰ型低通滤波器

对于Ⅰ型滤波器，多项式 $P(x)$是(7.80)式中的余弦多项式 $A_c(e^{j\omega})$，若用变量 $x=\cos\omega$ 和 $r=L$ 进行替换，有

$$P(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{L}a_k(\cos\omega)^k \tag{7.86}$$

$D_P(x)$是(7.84)式中所要求的低通滤波器频率响应，取 $x=\cos\omega$，则

$$D_P(\cos\omega)=\begin{cases}1, & \cos\omega_p\leqslant\cos\omega\leqslant 1\\ 0, & -1\leqslant\cos\omega\leqslant\cos\omega_s\end{cases} \tag{7.87}$$

$W_P(\cos\omega)$由(7.85)式给出，利用 $\cos\omega$ 可以重新写为

$$W_P(\cos\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{K}, & \cos\omega_p\leqslant\cos\omega\leqslant 1\\ 1, & -1\leqslant\cos\omega\leqslant\cos\omega_s\end{cases} \tag{7.88}$$

而且加权后的逼近误差是

$$E_P(\cos\omega)=W_P(\cos\omega)[D_P(\cos\omega)-P(\cos\omega)] \tag{7.89}$$

闭子集 F_P 包括区间 $0\leqslant\omega\leqslant\omega_p$ 和 $\omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi$，若用 $\cos\omega$ 表示，则包括区间 $\cos\omega_p\leqslant\cos\omega\leqslant 1$ 和 $-1\leqslant\cos\omega\leqslant\cos\omega_s$。交错点定理指出，当且仅当 $E_P(\cos\omega)$在 F_P 上呈现至少$(L+2)$个交错点，即它正负交错地等于其最大值至少$(L+2)$次时，(7.86)式中的系数集 a_k 才对应于唯一能最好逼近于理想低通滤波器的滤波器，该理想低通滤波器的通带和阻带边缘频率分别为 ω_p 和 ω_s，且比值 δ_1/δ_2 固定为 K。这种逼近称为**等波纹逼近**。

图 7.35 表示当 $L=7$ 时根据交错点定理，最佳的滤波器频率响应。在该图中以 ω 为自变量给出了 $A_c(e^{j\omega})$的图形。为了正式检验交错点定理，我们首先将它作为 $x=\cos\omega$ 的函数重新画图。此外我们希望仔细地检查 $E_P(x)$的交错点。因此图 7.36(a)，(b)和(c)分别表示 $P(x)$，$W_P(x)$和 $E_P(x)$作为 $x=\cos\omega$ 之函数的图形，对于本例($L=7$)我们可以看出，共有 9 个误差交错点，所以满足交错点定理。重要的一点是，在计数交错点时包括了点 $\cos\omega_p$ 和

$\cos\omega_x$，因为按交错点定理在 F_P 中所包括的子集（或子区间）是闭集，也就是说，应当考虑区间的两个端点。虽然这似乎是一个小问题，但我们将会看到，事实上它是很重要的。

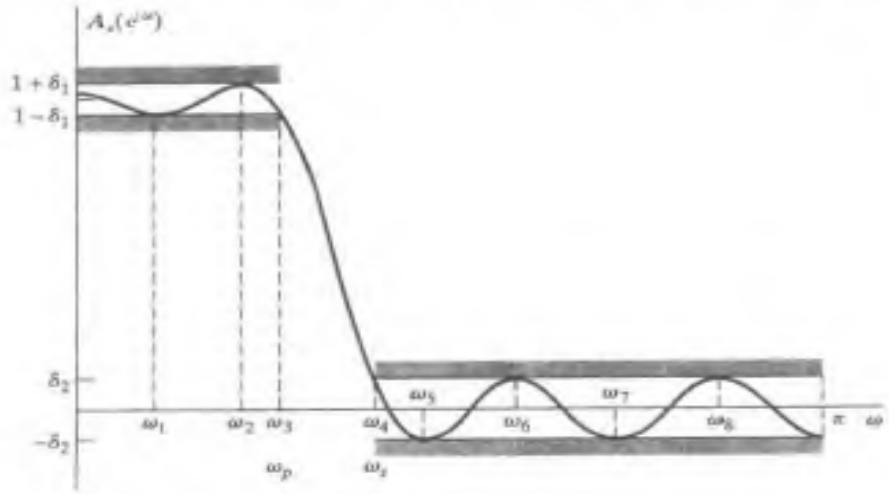


图 7.35　根据交错点定理，$L=7$ 时最佳低通滤波器逼近的典型举例

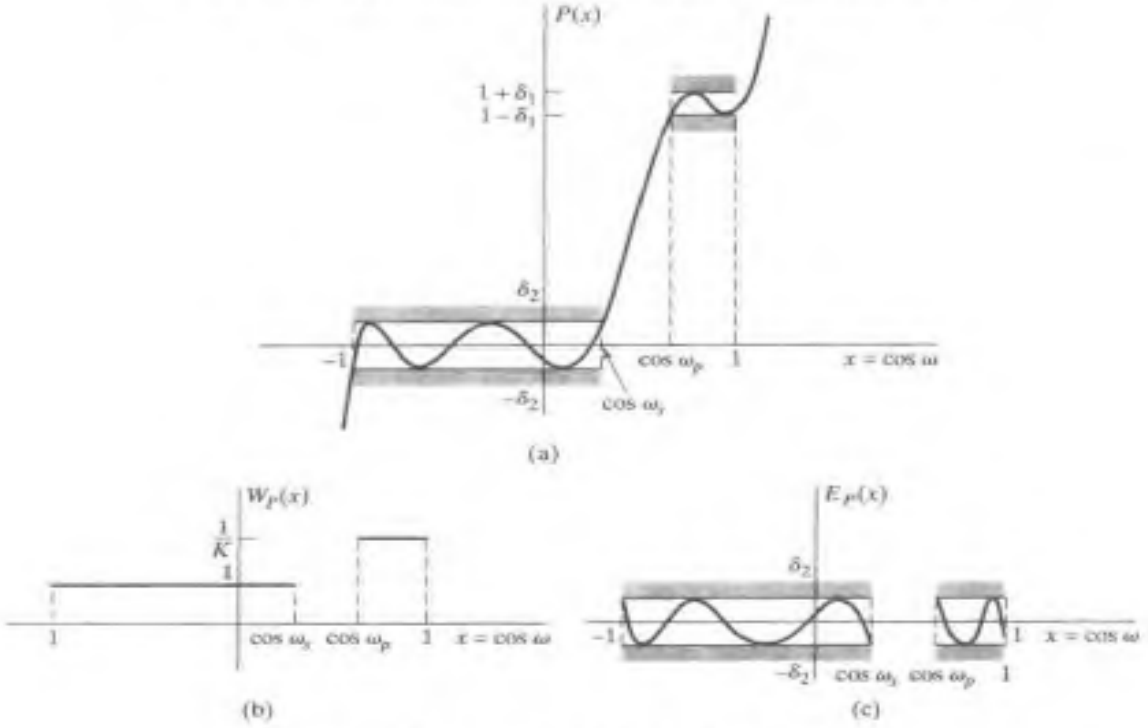


图 7.36　作为 $x=\cos\omega$ 函数的等效多项式逼近函数
（a）近似多项式；（b）加权函数；（c）逼近函数

通过比较图 7.35 和 7.36 可知，当所要求的滤波器是一个低通滤波器(或任意分段恒定的滤波器)时，实际上可以通过直接检查频率响应来计数交错点。应当记住，在通带和阻带的最大误差是不同的(用比值 $K=\delta_1/\delta_2$ 表示)。

交错点定理表明，最佳滤波器必须最少有$(L+2)$交错点，但是并不排除有多于$(L+2)$个交错点的可能性。事实上我们将会看到，对于一个低通滤波器最多可能的交错点数是$(L+3)$。首先我们用图 7.37($L=7$)来说明这一点。图 7.37(a)有 $L+3=10$ 个交错点，而图 7.37(b)，(c)和(d)分别有 $L+2=9$ 个交错点。$(L+3)$个交错点的情况(图 7.37(a))通常称为"**超波纹情况**"。需要注意的是，超波纹滤波器在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 以及 $\omega=\omega_p$ 和 $\omega=\omega_s$ 处，即各频带的边缘处均有交错点。图 7.37(b)和(c)在 ω_p 和 ω_s 处也有交错点，但分别在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处却没有交错点。图 7.37(d)在 $0,\pi,\omega_p$ 和 ω_s 处均有交错点，但是在阻带内极值点(零斜率的点)少一个。我们还看出所有这些情况在通带和阻带内都是等波纹的，即在 $0<\omega<\pi$ 的区间内全部零斜率点都是加权逼近误差幅度为最大的频率点。最后，因为图 7.37 中的所有滤波器均满足当 $L=7$ 并且取同样的 $K=\delta_1/\delta_2$ 值时的交错点定理，所有每个滤波器的 ω_p 和/或 ω_s 必定是不同的，因为交错点定理表明，在该定理的条件下最佳滤波器是唯一的。

对于图 7.37 中的滤波器，由交错点定理得出上述特性。具体讲，我们以 I 型低通滤波器为例，将这些特性归纳如下：

- 误差交错点最多的可能个数是$(L+3)$。
- 交错点始终出现在 ω_p 和 ω_s 处。
- 在通带和阻带($0<\omega<\omega_p$ 和 $\omega_s<\omega<\pi$)内部，全部零斜率点均对应于交错点，即除了可能在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处之外滤波器将是等波纹的。

交错点最多可能的个数为$(L+3)$

参考图 7.35 和 7.37 可以看出，极值点或交错点的位置最多可能出现在 4 个频带边缘点($\omega=0$，π，ω_p，ω_s)和局部极值点处，即 $A_e(e^{j\omega})$零斜率的那些频率点处。因为 L 次多项式在一个开区间上最多能有$(L-1)$个零斜率点，所以交错点位置的最多可能个数是$(L-1)$个多项式的极值点加上 4 个频率边缘点，总共为$(L+3)$个。如果考虑三角多项式的极值点和零斜率点则应看到，虽然 $P(x)$作为 x 的函数来考虑时在对应点 $x=1$ 和 $x=-1$ 处可能没有零斜率点，但是三角多项式

$$P(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{L}a_k(\cos\omega)^k \tag{7.90}$$

作为 ω 的函数来考虑时，始终在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处有零斜率。这是因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P(\cos\omega)}{\mathrm{d}\omega}&=-\sin\omega\left(\sum_{k=0}^{L}ka_k(\cos\omega)^{k-1}\right)\\&=-\sin\omega\left(\sum_{k=0}^{L-1}(k+1)a_{k+1}(\cos\omega)^k\right)\end{aligned} \tag{7.91}$$

上式在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 以及由求和式表示的$(L-1)$阶多项式的$(L-1)$个根处始终为零。在 $\omega=0$和 $\omega=\pi$ 处的这种特性在图 7.37 中明显可见。图 7.37(d)中碰巧(7.91)式中的 $\sin\omega$ 和

$$\sum_{k=0}^{L}ka_k(\cos\theta)^{k-1}$$

均为零，即多项式 $P(x)$在 $x=-1=\cos\pi$ 处也有零斜率。

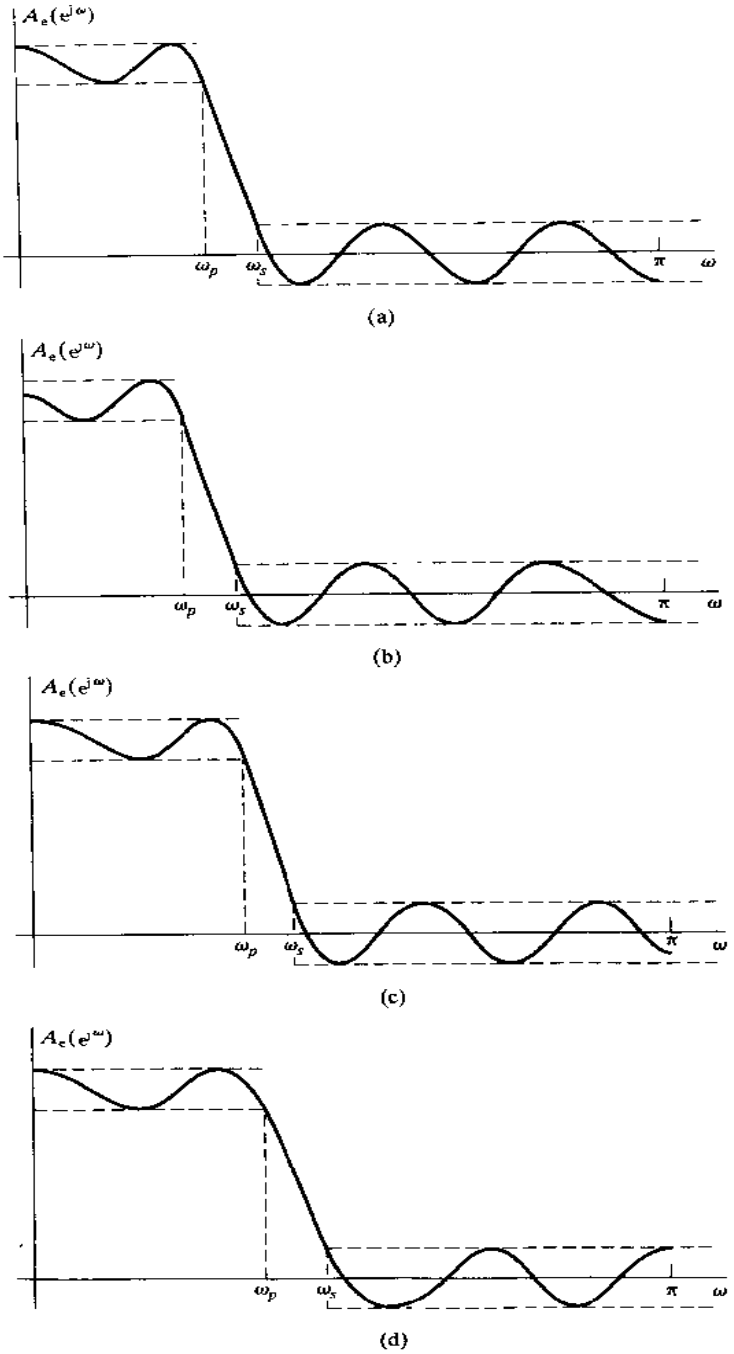


图 7.37　$L=7$ 时可能的最佳低通滤波器的逼近

(a) $(L+3)$个交错点(超波纹情况)；(b) $(L+2)$个交错点(在 $\omega=\pi$ 处有极值点)；
(c) $(L+2)$个交错点(在 $\omega=0$ 处有极值点)；(d) $(L=2)$个交错点(在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处有极值点)

交错点总出现在 ω_p 和 ω_s 处

对于图 7.37 中所有的频率响应，$A_e(e^{j\omega})$在通带边缘 ω_p 处正好等于 $1-\delta_1$，并且在阻带边缘 ω_s 处正好等于 $+\delta_2$。为了说明为什么总是这样，我们来研究一下当减小如图 7.38 所示的 ω_p 时怎样才能使图 7.37(a)中的滤波器也成为最佳的。最大加权误差幅度相等的那些频率是 $\omega=0$，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5，ω_6 和 $\omega=\pi$，总共有 $(L+2)=9$ 个频率。但是这些频率并不都是交错点，因为按照交错点定理的要求，在这些频率处的误差必须正负交错地为 $\delta=\pm\|E\|$。这样，由于误差在 ω_2 和 ω_s 处都是负值，所以按照交错点定理可以计数的频率是 $\omega-0$，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5，ω_6 和 $\omega=\pi$，总共有 8 个频率。因为未能达到 $(L+2)=9$，所以不满足交错点定理的条件，并且当具有所示的 ω_p 和 ω_s 时，图 7.38 的频率响应不是最佳的。换句话说，若将 ω_p 作为一个交错点频率而除去，则这时除去了两个交错点。因为图中交错点最多可能的个数是 $(L+3)$，所以就剩下最多 $(L+1)$ 个，该数目不能充分满足交错点定理。如果将 ω_s 也作为一个交错点频率而除去，则也会得出同样的结论。对于高通滤波器也会有类似的结果，但是，带通或多频带滤波器并不一定会出现这种情况(见习题 7.57)。

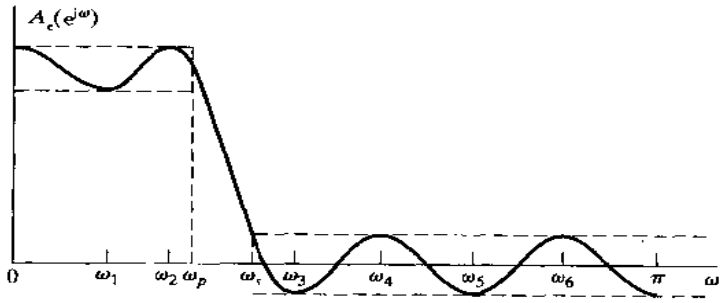


图 7.38　通带边缘 ω_p 必须是交错点频率的说明

除了可能在 $\omega=0$ 或 $\omega=\pi$ 处外，滤波器将是等波纹的

我们曾经证明 ω_p 和 ω_s 必须是交错点，这里的论点与此非常相似。例如，若将图 7.37(a)中的滤波器修改为如图 7.39 那样，使得一个零斜率点没有达到最大误差。则虽然极大误差出现在 9 个频率处，但其中只有 8 个可以作为交错点来考虑。因此，若少了一个误差极大值点，

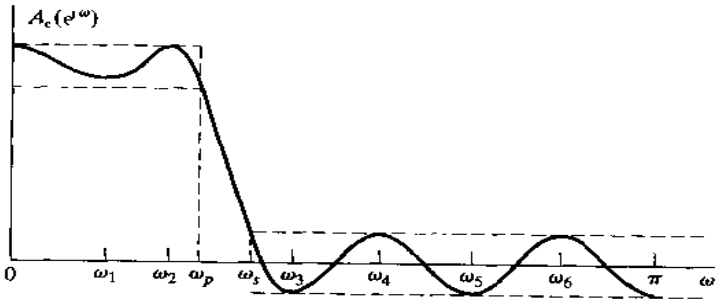


图 7.39　在要逼近的频带中频率响应必须是等波纹的说明

也就是除去了一个波纹，则使交错点数目减少了两个。只剩下$(L+1)$个最多可能的交错点。

这些特性只是从交错点定理所得出的众多特性中的一小部分。在 Rabiner 和 Gold(1975)的论文中讨论了其他许多特性。另外，我们在这里只研究了Ⅰ型低通滤波器，而对Ⅱ，Ⅲ和Ⅳ型或更一般的所需频率响应滤波器广泛详细的讨论超出了本书的范围。为了进一步强调交错点定理的一些特性，下面我们主要来研究Ⅱ型低通滤波器。

7.4.2 最佳Ⅱ型低通滤波器

Ⅱ型因果滤波器是在$0\leqslant n\leqslant M$范围之外$h[n]=0$的滤波器，且滤波器的长度$(M+1)$为偶数，即M为奇数，而且由于对称性有

$$h[n]=h[M-n] \tag{7.92}$$

因此，频率响应$H(e^{j\omega})$可表示成

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{(M-1)/2}2h[n]\cos\left[\omega\left(\frac{M}{2}-n\right)\right] \tag{7.93}$$

若令$b[n]=2h[(M+1)/2-n]$，$n=1,2,\cdots,(M+1)/2$，则(7.93)式可重写为

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\left\{\sum_{n=1}^{(M+1)/2}b[n]\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} \tag{7.94}$$

为了将交错点定理用于Ⅱ型滤波器的设计，我们必须将该问题等效为多项式逼近的问题。要完成这一点，我们将(7.94)式中的求和式表示成

$$\sum_{n=1}^{(M+1)/2}b[n]\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=\cos(\omega/2)\left[\sum_{n=0}^{(M-1)/2}\tilde{b}[n]\cos(\omega n)\right] \tag{7.95}$$

(见习题7.52)现在可以把(7.95)式中右边的求和式表示成一个三角多项式$P(\cos\omega)$，因此

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\cos(\omega/2)P(\cos\omega) \tag{7.96a}$$

式中

$$P(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{L}a_k(\cos\omega)^k \tag{7.96b}$$

且$L=(M-1)/2$。(7.96b)式中的系数a_k与(7.95)式中的系数$\tilde{b}[n]$有联系，而后者又与(7.94)式中的系数$b[n]=2h[(M+1)/2-n]$有联系。如对于Ⅰ型低通滤波器的情况，没有必要得出脉冲响应和a_k之间的解析关系式。现在我们可以把交错点定理用于$P(\cos\omega)$和所要求得频率响应之间的加权误差。对于给定通带和阻带波纹比值K的Ⅰ型低通滤波器，所要求得频率响应函数由(7.84)式给出，并且误差的加权函数由(7.85)式给出。对于Ⅱ型低通滤波器，由于(7.97a)式中有因子$\cos(\omega/2)$，所以，用多项式$P(\cos\omega)$来逼近的所要求频率响应函数定义为

$$H_d(e^{j\omega})=D_P(\cos\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos(\omega/2)}, & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_p\\ 0, & \omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases} \tag{7.97}$$

并且加到误差上的权函数是

$$W(\omega)=W_P(\cos\omega)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\omega/2)}{K}, & 0\leqslant\omega\leqslant\omega_p\\ \cos(\omega/2), & \omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi\end{cases} \tag{7.98}$$

所以，Ⅱ型滤波器设计是一个与Ⅰ型滤波器设计所不同的多项式逼近问题。

在这一节中我们只概括了Ⅱ型低通滤波器的设计问题，主要强调，必须首先将设计问题用公式表示成多项式逼近问题。在Ⅲ型和Ⅳ型线性相位 FIR 滤波器的设计中也有类似的要求。具体地讲，这些滤波器的设计也可以用公式表示成多项式逼近问题，但是在每一类中加到误差上的加权函数的形式恰与Ⅱ型滤波器所用的三角多项式(见习题 7.52)相同。有关这类滤波器特性和设计方法的详细讨论可见 Rabiner 和 Golod(1975)的论文。

已经以低通滤波器为例说明了用公式设计Ⅰ型和Ⅱ型线性相位系统的细节。但是从Ⅱ型情况的讨论中特别应当指出，选择所要求的响应函数 $H_d(e^{j\omega})$和加权函数 $W(\omega)$时有很大的灵活性。例如可以利用能够得到一定百分比的等波纹误差逼近的所要求函数来定义加权函数。这种方法在设计Ⅲ型和Ⅳ型微分系统时十分有用。

7.4.3 Parks-McClellan 算法

交错点定理说明使误差在切比雪夫或最大最小意义上最佳化的必要和充分条件。虽然该定理没有清楚地表明如何找出最佳滤波器，但是所给出的条件可以作为找出最佳滤波器有效算法的基础。虽然我们只用Ⅰ型低通滤波器来进行讨论，但是该算法很容易加以推广。

由交错点定理可知，最佳滤波器 $A_e(e^{j\omega})$应满足如下方程组：

$$W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - A_e(e^{j\omega_i})] = (-1)^{i+1}\delta, \qquad i = 1,2,\cdots,(L+2) \tag{7.99}$$

式中 δ 是最佳误差，$A_e(e^{j\omega})$由(7.76)式或(7.80)式给出。若用(7.80)式表示 $A_e(e^{j\omega})$，则这些方程可以写成

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^L & \dfrac{1}{W(\omega_1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^L & \dfrac{-1}{W(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{L+2} & x_{L+2}^2 & \cdots & x_{L+2}^L & \dfrac{(-1)^{L+2}}{W(\omega_{L+2})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_d(e^{j\omega_1}) \\ H_d(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ H_d(e^{j\omega_{L+2}}) \end{bmatrix} \tag{7.100}$$

其中 $x_i = \cos\omega_i$，这组方程是寻找最佳 $A_e(e^{j\omega})$的迭代算法的基础。该方程首先猜测一组交错点频率 ω_i，$i=1, 2, \cdots, (L+2)$。请注意 ω_p 和 ω_s 是固定的，并且根据我们在 7.4.1 节中的讨论可知，它们必定为交错点频率。具体地讲，若 $\omega_l = \omega_p$，则 $\omega_{l+1} = \omega_s$。由方程组(7.100)可以解出系数组 a_k 和 δ。此外另一种更加有效的方法是利用多项式内插。具体来说，Parks 和 McClellan(1972a, 1972b)发现，对于给定的一组极值频率

$$\delta = \frac{\sum_{k=1}^{L+2} b_k H_d(e^{j\omega_k})}{\sum_{k=1}^{L+2} \dfrac{b_k(-1)^{k+1}}{W(\omega_k)}} \tag{7.101}$$

其中

$$b_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{L+2} \frac{1}{(x_k - x_i)} \tag{7.102}$$

且和以前一样，$x_i = \cos\omega_i$。这就是说，如果 $A_e(e^{j\omega})$由满足(7.100)式的系数组 a_k 来确定，并且 δ 由(7.101)式给出，则误差函数就会通过在$(L+2)$个频率 ω_i 上的 $\pm\delta$ 值处，或等效的，若

$0 \leqslant \omega_i \leqslant \omega_p$ 则 $A_e(e^{j\omega})$ 的值中包括 $1 \pm K\delta$ 值，而若 $\omega_s \leqslant \omega_i \leqslant \pi$，则 $A_e(e^{j\omega})$ 的值中包括 $\pm\delta$ 值。因为，已知 $A_e(e^{j\omega})$ 是一个 L 次三角多项式，所以我们可以通过 $(L+2)$ 个已知值 $E(\omega_i)$ 或等效的 $A_e(e^{j\omega_i})$ 中的 $(L+1)$ 个值插入一个三角多项式。Parks 和 McClellan 曾用 Lagrange 内插公式得出

$$A_e(e^{j\omega}) = P(\cos\omega) = \frac{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k/(x - x_k)]C_k}{\sum_{k=1}^{L+1} [d_k/(x - x_k)]} \tag{7.103a}$$

式中，$x = \cos\omega$，$x_i = \cos\omega_i$，

$$C_k = H_d(e^{j\omega_k}) - \frac{(-1)^{k+1}\delta}{W(\omega_k)} \tag{7.103b}$$

和

$$d_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{L+1} \frac{1}{(x_k - x_i)} = b_k(x_k \cdots x_{L+2}) \tag{7.103c}$$

虽然只用到频率 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{L+1}$ 来拟合 L 次多项式，但是因为所得出的 $A_e(e^{j\omega})$ 满足 (7.100) 式所以可以确认多项式在 ω_{L+2} 处也取正确值。

现在，已得出满足任何所要求频率的 $A_e(e^{j\omega})$，而不用去解方程组 (7.100) 来求系数 a_k。(7.103a) 式所表示的多项式可用以计算通带和阻带中许多频率处的 $A_e(e^{j\omega})$ 和 $E(\omega)$ 值。如果对通带和阻带中的所有 ω，都有 $|E(\omega)| \leqslant \delta$，则说明已经得到最佳逼近，否则我们必须求出一组新的极值频率。

图 7.40 表示在求出其最佳逼近之前 I 型低通滤波器的一个典型例子。很清楚，求 δ 所用到的频率组 ω_i（如图 7.40 中用圆圈所表示的）是那些能使 δ 最小的频率。根据 Remez 法的原理将该组极值频率转换成由误差曲线 $(L+2)$ 个最大峰所确定的一组新的频率。图中用 '×' 号表示的点就是本例的一组新频率点。如前所述，必须将 ω_p 和 ω_s 选作极值频率。我们

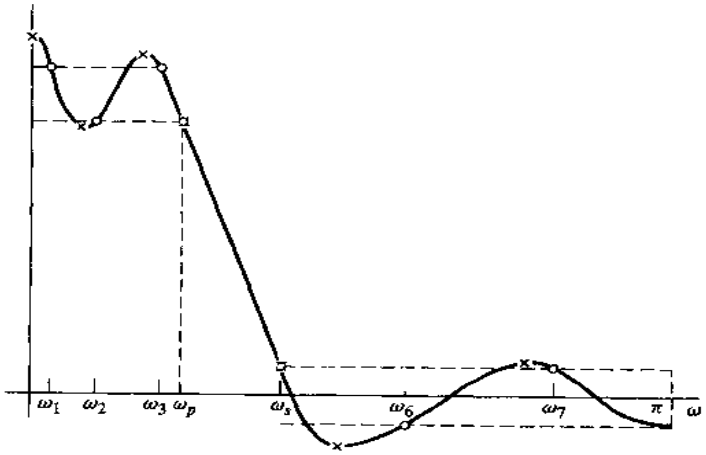


图 7.40　等波纹逼近的 Parks-McClellan 算法的说明

记得，在开区间 $0<\omega<\omega_p$ 和 $\omega_s<\omega<\pi$ 中最多有 $(L-1)$ 个局部极大值点和极小值点。剩下的极值点可在 $\omega=0$ 处，也可在 $\omega=\pi$ 处。如果在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处误差函数均有一个极大值，则把产生最大误差的频率作为极值频率的最新估计。我们重复下列步骤：首先进行 δ 的循环计算，其次用假设的误差峰值拟合一个多项式，然后找出实际误差峰点的位置。该步骤重复进行，用稍大于原定的较小数值开始，直到 δ 值不再改变为止。这个值就是所要求的极大极小加权逼近误差。

该算法的流程图(Rabiner 和 Gold, 1975)如图 7.41 所示。在该算法中，每一步迭代均隐含地改变脉冲响应值 $h_e[n]$ 以得到所要求的最佳逼近，但是 $h_e[n]$ 的值也从未用显式计算过。当算法收敛后，可以利用将在第 8 章中讨论的离散傅里叶变换由多项式的样本来计算脉冲响应。

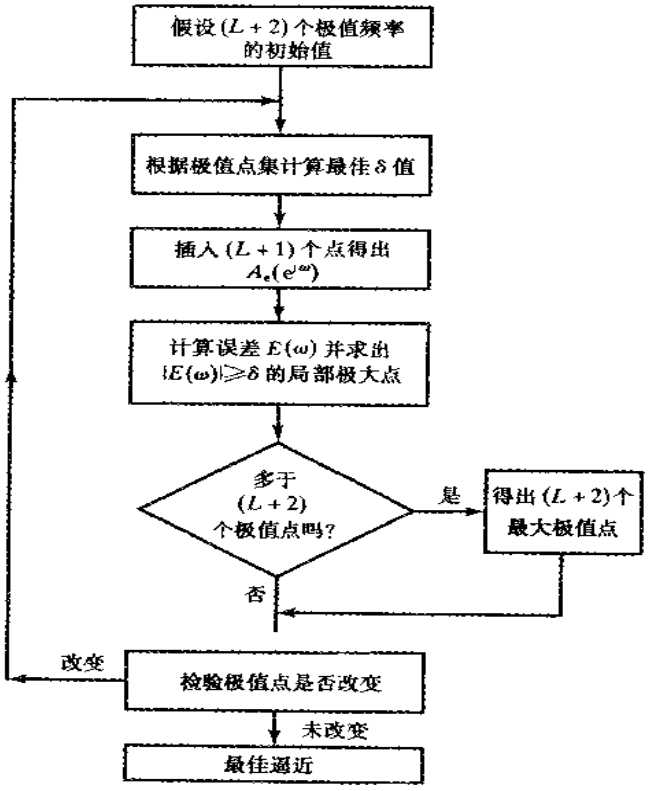


图 7.41 Parks-McClellan 算法的流程图

7.4.4 最佳 FIR 滤波器的特性

对于预先给定的通带和阻带的边缘频率 ω_p 和 ω_s，最佳 FIR 滤波器有最小的最大加权逼近误差 δ。对(7.85)式的加权函数而言，得出的最大阻带逼近误差是 $\delta_1=\delta$，最大通带逼近误差是 $\delta_1=K\delta$。图 7.42 说明了 δ 怎样随滤波器的阶次而变化以及通带截止频率。本例中，$K=1$ 且过渡带固定为 $(\omega_s-\omega_p)=2\pi$。曲线表明随着 ω_p 的增大，误差 δ 可以达到局部极小

点。曲线上的这些点对应于超波纹($(L+3)$个极值点)滤波器。按照交错点定理在极小点之间的所有点都对应于最佳滤波器。$M=8$ 和 $M=10$ 的滤波器是Ⅰ型滤波器,而 $M=9$ 和 $M=11$ 的滤波器对应于Ⅱ型滤波器,我们注意到,选择某些参数会是较短的滤波器($M=9$)可能优于较长的滤波器($M=10$)(即有较小的误差)。这一点开始时可能会令人感到吃惊,并且看上去似乎是矛盾的。但是 $M=9$ 和 $M=10$ 的情况分别代表两种基本上不同类型的滤波器。若用另一种方式来解释,$M=9$ 时的滤波器不能视为将一个样本点设为零的 $M=10$ 的特殊情况,因为这将不满足线性相位对称性的要求。另一方面,$M=8$ 的滤波器可以看作是 $M=10$ 时将第一个和最后一个样本设为零的一种特殊情况。由于这个原因,$M=8$ 时的最佳滤波器就不能优于 $M=10$ 时的最佳滤波器。这种限制可从图 7.42 中看出,图中 $M=8$ 的曲线始终高于或等于 $M=10$ 的曲线。这两条曲线相遇的那些点对应于 $M=10$ 的滤波器将第一个和最后一个样本设为零时的脉冲响应。

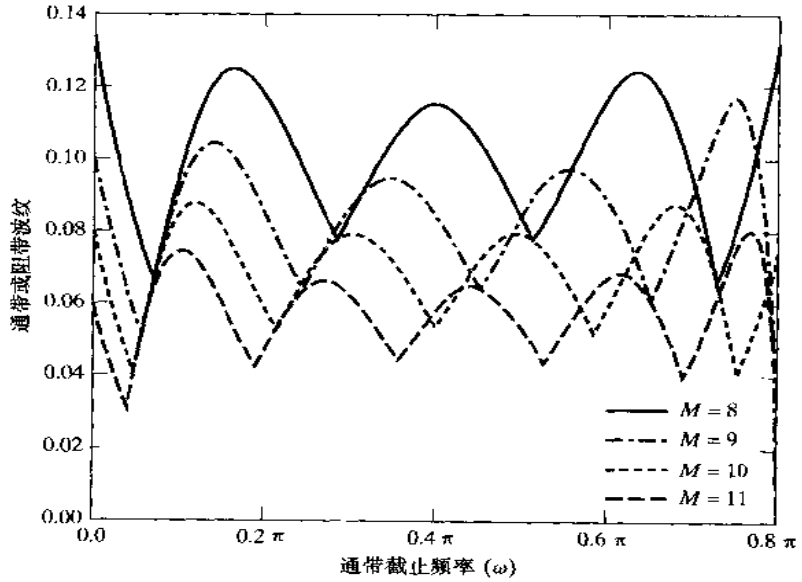


图 7.42 最佳逼近低通滤波器在截止频率上通带和阻带误差的关系曲线,本例中 $K=1$ 且 $(\omega_s-\omega_p)=0.2\pi$

Herrmann 等人(1973)对等波纹低通滤波器逼近的各种参数 M,δ_1,δ_2,ω_p 和 ω_s 之间的关系进行了大量的计算研究,后来 Kaiser(1974)得出了一种能反映这些参数之间关系的简化公式

$$M=\frac{-10\log_{10}(\delta_1\delta_2)-13}{2.324\Delta\omega} \tag{7.104}$$

其中 $\Delta\omega=\omega_s-\omega_p$。在可以比较的情况下($\delta_1=\delta_2=\delta$),通过对(7.104)式与 Kaiser 窗法设计公式(7.63)式的比较看出,M 值给定时最佳逼近可以使逼近误差有 5dB 的改善。等波纹滤波器的另一个重要优点是 δ_1 和 δ_2 不要求相等,而不像窗函数法所要求得那样。

7.5 FIR 等波纹逼近举例

FIR 滤波器最佳等波纹逼近的 Parks-McClellan 算法可以用于设计众多类型的 FIR 滤波器。在这一节中我们将给出几个例子来说明最佳逼近的一些特性，并指出这种设计方法所提供的极大灵活性。

7.5.1 低通滤波器

对于低通滤波器我们再次逼近曾在例 7.4,7.5,7.6 和 7.8 中用到的那组技术指标。这样就可以在相同的低通滤波器指标下来比较所有的主要设计方法，该指标要求 $\omega_p = 0.4\pi$，$\omega_s = 0.6\pi$ 和 $\delta_1 = 0.01$，$\delta = 0.001$。与窗函数法不同，Parks-McClellan 算法可以在加权函数的参数 $K = \delta_1/\delta_2 = 10$ 固定的情况下调整通带和阻带的不同逼近误差。

将上述指标代入(7.104)式并作舍入处理，可以得出估计值 $M = 26$，这是达到技术指标所必须的 M 值。图 7.43(a)，(b)和(c)分别表示 $M - 26$，$\omega_p = 0.4\pi$ 和 $\omega_s = 0.6\pi$ 时最佳滤波器的脉冲响应、对数幅度和逼近误差。图 7.43(c)表示**未加权**的逼近误差

$$E_A(\omega)) = \frac{E(\omega)}{W(\omega)} = \begin{cases} 1 - A_e(e^{j\omega}), & 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p \\ 0 - A_e(e^{j\omega}), & \omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.105}$$

而不是设计算法公式中所用的加权误差。除了通带误差应该除以 10 外，加权误差应与图 7.43(c)中的误差相同①。逼近误差的交错点在图 7.43(c)中是很清楚的。在通带中有 7 个交错点而在阻带中有 8 个，总共有 15 个交错点，因为Ⅰ型(M 为偶数)滤波器 $L = M/2$，且 $M = 26$，所以交错点的最少个数是$(L + 2) = (26/2 + 2) = 15$。因此，图 7.43 所示的滤波器是 $M = 26$，$\omega_p = 0.4\pi$ 和 $\omega_s = 0.6\pi$ 时的最佳滤波器。但是，图 7.43(c)表示，滤波器未能满足通带和阻带误差的原始技术要求(通带和阻带中的最大误差分别为 0.011 6 和 0.001 16)。这样，为了满足或超过技术指标，我们必须增大 M。

$M = 27$ 时的滤波器响应函数如图 7.44 所示。此时的通带和阻带逼近误差略小于给定值。(通带和阻带中的最大通近误差分别为 0.009 2 和 0.000 92。)在这种情况下通带中也有 7 个交错点，阻带中也有 8 个，总共 15 个交错点。请注意，由于 $M = 27$，因此这是一个Ⅱ型系统，而对于Ⅱ型系统，隐含的逼近多项式的阶次是 $L = (M - 1)/2 = (27 - 1)/2 = 13$。所以，交错点的最少个数仍为 15。还应注意，Ⅱ型系统约束其系统函数有一个零点在 $z = -1$ 或 $\omega = \pi$ 处。这一点从图 7.44(b)和(c)中显然可见。

如果将本例的结果与例 7.8 的结果作一比较就会发现，Kaiser 窗法要求 $M = 38$ 以满足或超过技术指标，而 Parks-McClellan 法只要求 $M = 27$。之所以会有这种不同之处是因为窗函数法在通带和阻带中产生基本上相等的最大误差，而 Parks-McClellan 法可以对不同频带的误差进行不同的加权。

① 对于选频滤波器来说，因为在通带中 $A_e(e^{j\omega}) = 1 - E(\omega)$，在阻带中 $A_e(e^{j\omega}) = -E(\omega)$，所以用来加权逼近函数也可以方便地表现出通带和阻带的特性。

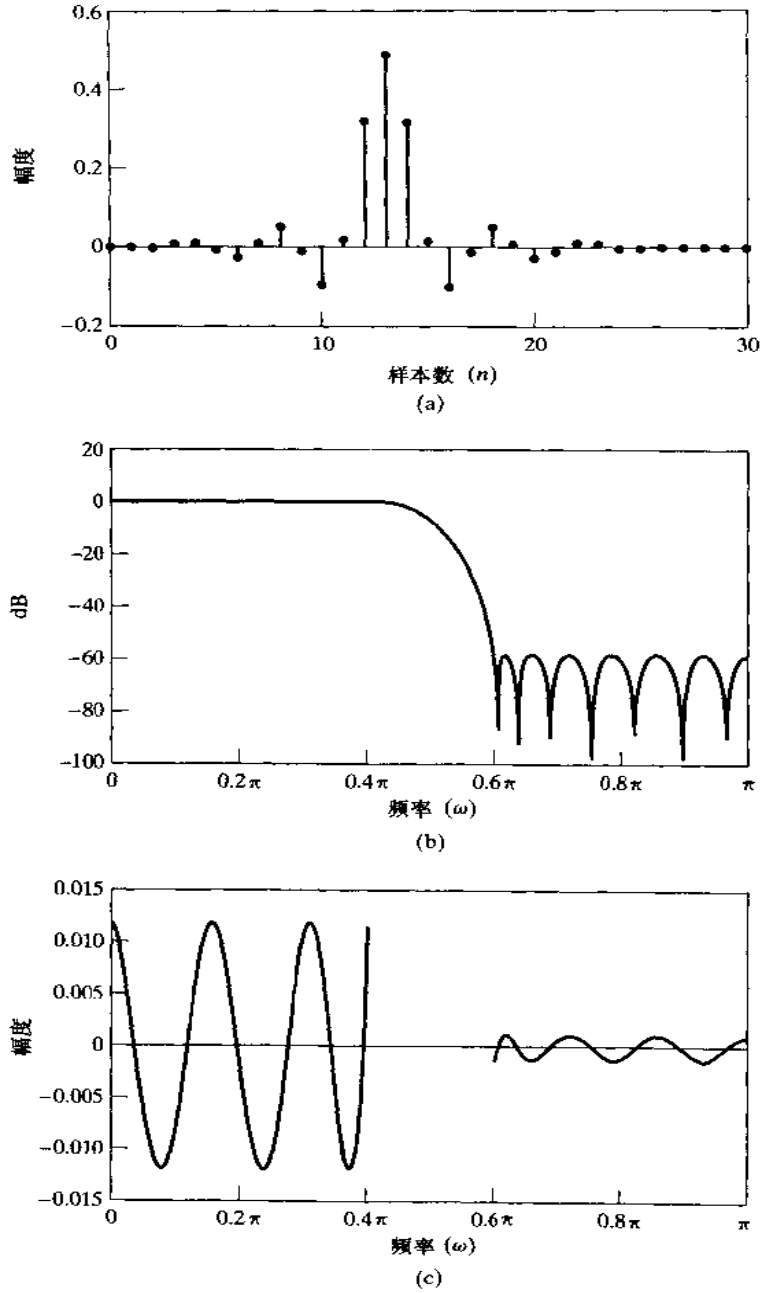


图 7.43　$\omega_p = 0.4\pi$，$\omega_s = 0.6\pi$，$K = 10$ 和 $M = 26$ 时的最佳 I 型 FIR 低通滤波器
(a) 脉冲响应；(b) 频率响应的对数幅度；(c) 逼近误差(未加权的)

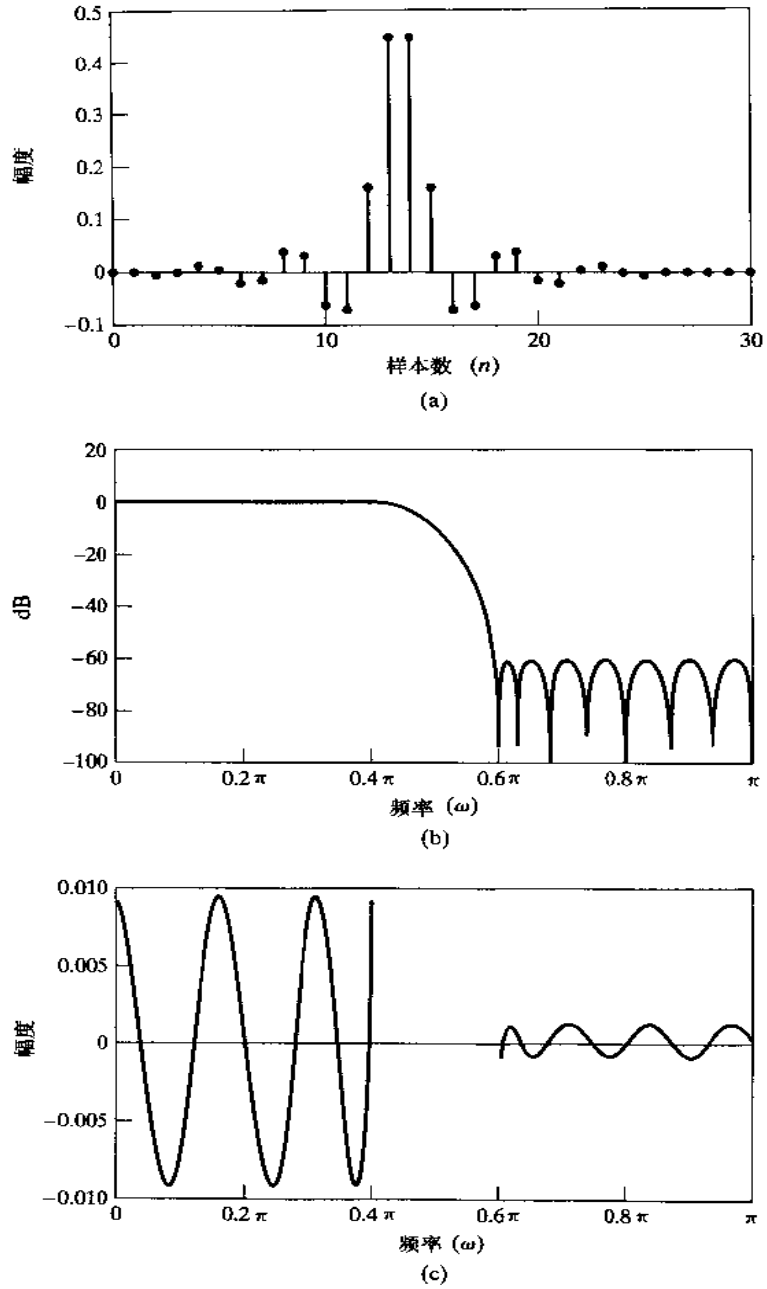


图 7.44　$\omega_p = 0.4\pi$，$\omega_s = 0.6\pi$，$K = 10$ 和 $M = 27$ 时的最佳Ⅱ型 FIR 低通滤波器
(a) 脉冲响应；(b) 频率响应的对数幅度；(c) 逼近误差(未加权的)

7.5.2 零阶保持器的补偿

在许多情况下都需要设计用于如图 7.45 所示系统中的离散时间滤波器，即该滤波器用于处理一个样本序列 $x[n]$以得到序列 $y[n]$，然后将它输入到 D/A 转换器和连续时间低通滤波器(逼近理想 D/C 转换器)中，以便重构连续时间信号 $y_c(t)$。正如在 4.8 节中所讨论的，这样一个系统是对连续时间信号进行离散时间滤波之系统的一部分。如果 D/A 转换器在整个采样周期 T 中能保持其输出为常量，则输出 $y_c(t)$的傅里叶变换是

$$Y_c(j\Omega) = \widetilde{H}_r(j\Omega)H_o(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}) \tag{7.106}$$

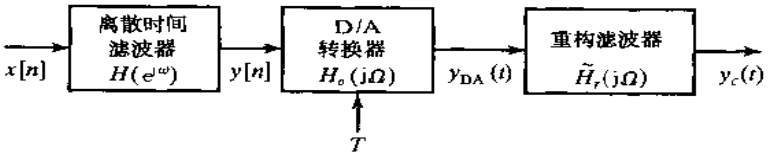


图 7.45 由于 D/A 转换器的影响而对离散时间滤波器的预补偿

其中 $H_r(j\Omega)$是一个适当地低通重构滤波器的频率响应，并且

$$H_o(j\Omega) = \frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega/2}\, e^{-j\Omega T/2} \tag{7.107}$$

是 D/A 转换器零阶保持器的频率响应。(请注意 $H_r(j\Omega)$的增益可为 1，因为 $H_o(j\Omega)$的增益在 $\Omega=0$ 处为 T。)在 4.8.4 节我们曾指出，对 $H_o(j\Omega)$的补偿可以并入连续时间重构滤波器中；即 $\widetilde{H}_r(j\Omega)$可以用

$$\widetilde{H}_r(j\Omega) = \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}\, H_r(j\Omega) \tag{7.108}$$

来代替。式中 $H_r(j\Omega)$是(4.128)式的理想低通重构滤波器，因此离散时间滤波器$H(e^{j\Omega T})$的作用不会由于零阶保持器而产生失真。另一种方法是通过设计一个滤波器 $\widetilde{H}(e^{j\Omega T})$使得

$$\widetilde{H}(e^{j\Omega T}) = \frac{\Omega T/2}{\sin(\Omega T/2)}\, H(e^{j\Omega T}) \tag{7.109}$$

而把补偿加入到离散时间滤波器中。如果我们将所要求的频率响应简单定义为

$$\widetilde{H}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\omega/2}{\sin(\omega/2)}, & 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p \\ 0, & \omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.110}$$

则可很容易得用 Parks-McClellan 算法设计有 D/A 补偿的低通滤波器。

图 7.46 表示这种滤波器的响应函数，其技术指标仍为 $\omega_p = 0.4\pi$，$\omega_s = 0.6\pi$ 和 $\delta_1 = 0.01$，$\delta_2 = 0.001$。此时若维持先前的恒定增益，则用 $M=28$ 而不是 $M=27$ 就可以满足技术指标。这样我们将 D/A 转换器的补偿并入离散时间滤波器，使得滤波器的有效通带更加平坦。(为了强调通带的斜坡特性，图 7.46(c)表示出通带的幅度响应，而不是像在其它 FIR 举例的频率响应图中的逼近误差)

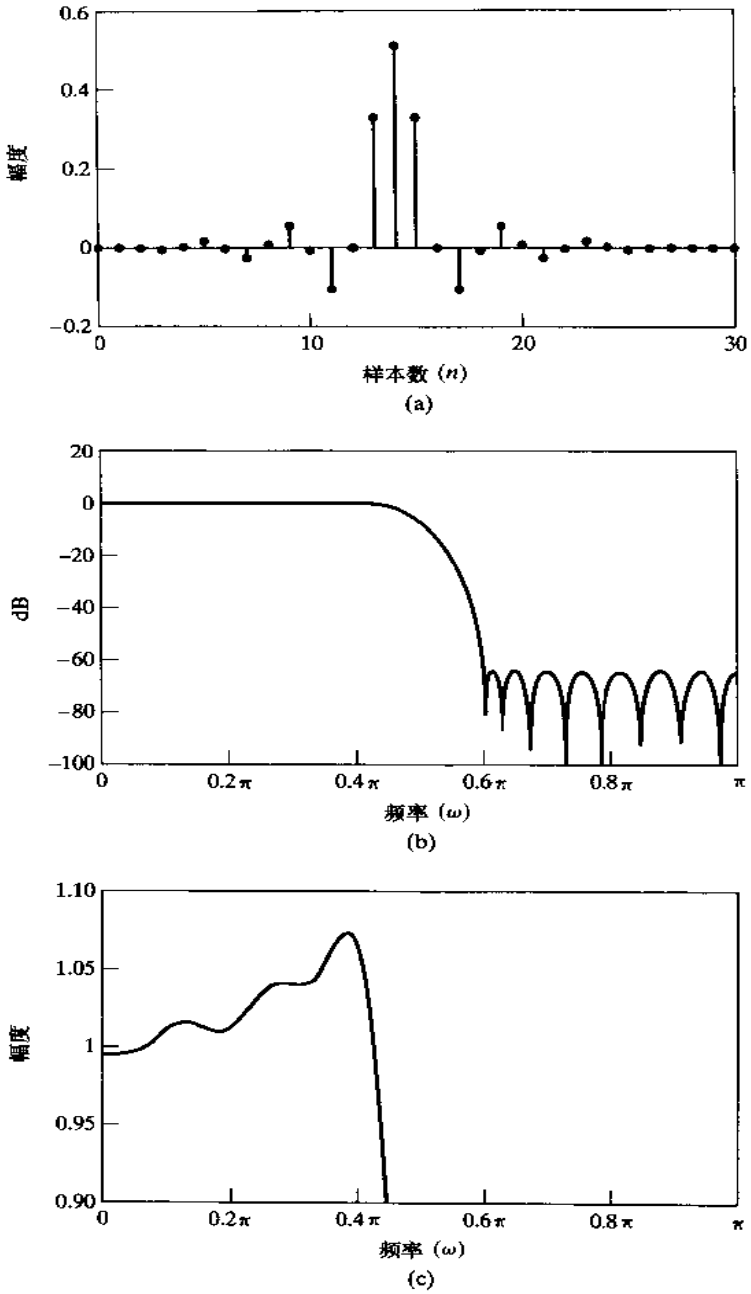


图 7.46　$\omega_p = 0.4\pi$，$\omega_s = 0.6\pi$，$K = 10$ 和 $M = 28$ 时的最佳 D/A 补偿低通滤波器
（a）脉冲响应；（b）频率响应的对数幅度；（c）通带中的幅度响应

7.5.3 带通滤波器

7.4 节集中讨论了只有两个逼近频带的低通最佳 FIR 滤波器的情况。然而，带通和带阻滤波器要求有三个逼近频带，为了设计这类滤波器就需要将 7.4 节的结论推广到多频带情况。因而要求我们进一步研究在这种更一般的情况下交错点定理的含义和逼近多项式的性质。首先我们应记得，所论述的交错点定理并没有对不相交逼近区间的个数提出任何限制。因此最佳逼近交错点的最少个数仍是$(L+2)$。但是由于有更多的频带边缘点，所以多频带滤波器的交错点可以多于$(L+3)$个(习题 7.57 说明了这个问题)。这意味着 7.4.1 节中证明的一些论点在多频带情况下不成立。例如 $A_e(e^{j\omega})$，的局部极大或极小点不必都在逼近区内。因此，在过渡区内会出现局部极值点，并且在逼近区中不要求逼近是等波纹的。

为了说明这一点，让我们来研究所要求的频率响应

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \omega \leqslant 0.3\pi \\ 1, & 0.35\pi \leqslant \omega \leqslant 0.6\pi \\ 0, & 0.7\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.111}$$

以及误差加权函数

$$W(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega \leqslant 0.3\pi \\ 1, & 0.35\pi \leqslant \omega \leqslant 0.6\pi \\ 0.2, & 0.7\pi \leqslant \omega \leqslant \pi \end{cases} \tag{7.112}$$

滤波器脉冲响应的长度取为 $M+1=75$。图 7.47 表示所得滤波器的响应函数。我们首先注意到，由第二个逼近频带到第三个逼近频带的过渡区不再是单调的。但是，在这个未加限制的区域中选用两个局部极值点不会违反交错点定理。由于 $M=74$，则滤波器是 I 型系统，并且隐含的逼近多项式的阶次为 $L=M/2=74/2=37$。这样，交错点定理要求至少有 $L+2=39$ 个交错点。这一点在表示未加权逼近误差的图 7.47(c)中显而易见，每个频带中均有 13 个交错点，总共有 39 个。

图 7.47 所示的这种逼近在交错点定理的意义上是最佳的，但是它们可能并不适用于某一

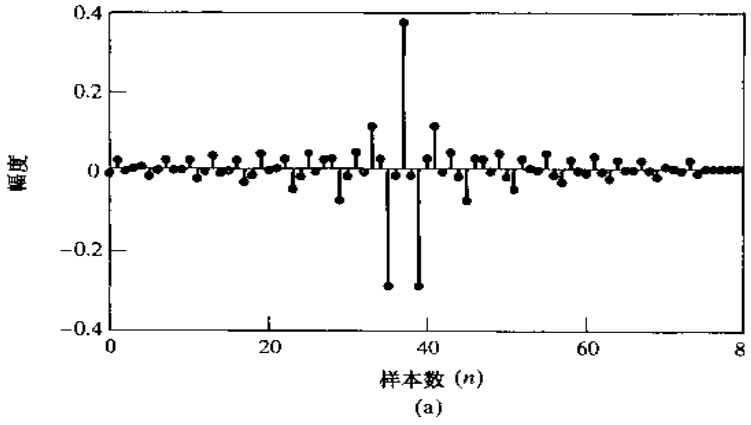
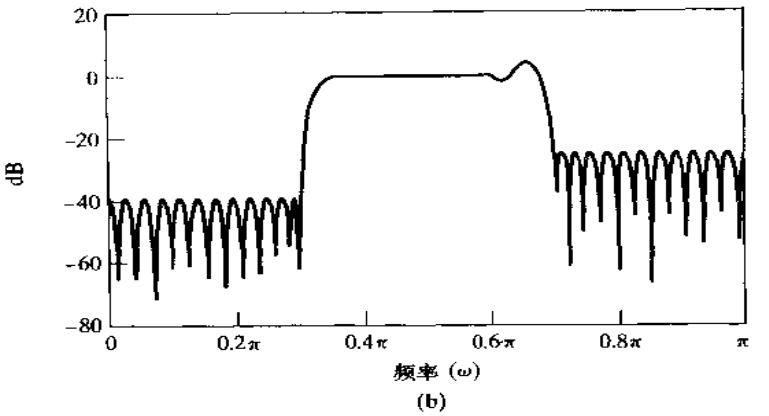
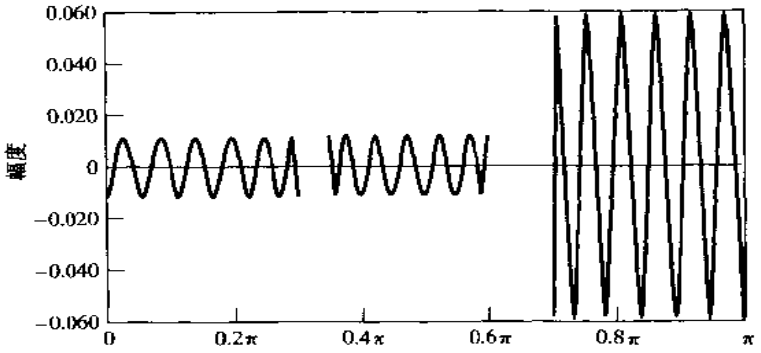


图 7.47 当 $M=74$ 时的最佳 FIR 带通滤波器
(a) 脉冲响应；



(b)



(c)

图 7.47(续) (b) 频率响应的对数幅度；(c) 逼近误差(未加权的)

具体的滤波应用。通常，并不能保证多频带滤波器的过渡区是单调的，这是因为 Parks-McClellan 算法对这些区域完全未加限制。若为了满足具体选择的滤波器参数而要得出这样一种响应时，一般可以通过系统地改变一个或多个频带边缘频率、脉冲响应长度或误差加权函数，以及重新设计滤波器等多种方法来得到可以接受的过渡区。

7.6 IIR 和 FIR 数字滤波器的评价

这一章集中讨论了线性时不变离散时间系统的设计方法。我们讨论了无限长和有限长脉冲响应滤波器的多种设计方法。人们自然会产生这样一些问题：什么样的系统是最好的？是 IIR 还是 FIR？为什么给出这么多不同的设计方法？哪一种方法能得出最好的结果？正如在任何一个工程设计问题那样，一般不可能回答什么是最好的。我们之所以讨论了 IIR 和 FIR 滤波器的各种设计方法，是因为没有哪一种类型的滤波器，也没有哪一种设计方法能对所有的情况都是最好的。

选择 IIR 和 FIR 滤波器取决于每种类型滤波器的优点在设计问题中的重要性。例如 IIR

滤波器具有可以用完整的设计公式来设计各种选频滤波器的优点。这就是说，一旦选定了选用哪种已知的逼近方法(即巴特沃兹、切比雪夫或椭圆逼近)，则可以直接把技术指标代入一组设计方程来计算满足技术条件的滤波器的阶次，并得出数字滤波器的系数(或极点和零点)。这种简便的设计方法使得人们可以很容易地通过人工计算(若需要的话)来设计 IIR 滤波器，并且直接得出 IIR 滤波器的非迭代计算程序。这些方法只限于设计选频滤波器，并只允许用于规定了幅度响应的场合。如果要得到其它形状的幅度响应，或需要逼近预定的相位响应或群延迟响应，则需要用算法设计法。

与此相反，FIR 滤波器可以有精确的(广义)线性相位，但是对于 FIR 滤波器不存在完整的设计方程。虽然可以直接用窗函数法，但为了满足预定的技术指标有可能需要做一些迭代。与窗函数法相比，Parks-McClellan 算法可以得出较低阶的滤波器，这两种方法都可以在个人计算机和工作站上实现。而且，窗函数法和大多数算法设计法都有可能逼近比较任意的频率响应特性，但所遇到的困难要比在低通滤波器设计中遇到的稍大一些。此外，FIR 滤波器的设计问题要比 IIR 设计问题有更多的可控之处，因为对 FIR 滤波器有适用于各种实际情况的最佳理论。无线性相位要求的 FIR 滤波器的设计技术已经由 Chen 和 Parks(1987)，Parks 和 Burrus(1987)以及 Schssler 和 Steffen(1988)给出。

最后，在实现数字滤波器时还要考虑经济问题。通常将硬件的复杂性、芯片的面积或计算速度等作为衡量经济问题的因素。这些因素或多或少地直接与满足给定指标所需的滤波器阶次有关。如果我们不考虑相位问题，一般说来用 IIR 滤波器就能最有效地满足给定的幅度响应技术指标。但是在许多情况下，FIR 滤波器的线性相位与它所带来的额外成本相比是非常值得的，而且在如抽取或内插之类的应用中，FIR 滤波器可以与 IIR 滤波器同样有效，并且特殊用途的 DSP 微型计算机通常都具有 FIR 滤波器所要求的对乘积进行累加的算术运算能力。在 Rabiner，Kaiser，Rabiner，Kaiser，Herrmann 和 Dolan(1974)的论文中已经给出了有关计算效率问题的详细考虑。

因此，在设计数字滤波器时必须权衡考虑许多因素。显然，应从工程应用的角度来考虑问题，如技术指标的计算公式、实现设计的方法、完成设计所用的计算设备和设计软件等，应该根据这些因素来作出最后的选择。

7.7 小 结

在这一章中我们研究了无限长和有限长脉冲响应数字滤波器的各种设计方法。重点放在所要求滤波器特性的频域技术指标上，因为这是在实际中最普遍的情况。我们的目的是给出可能用于离散时间滤波器设计的各种方法的概貌，并给出一些方法的有关细节，使它们可以直接使用而无需进一步参考离散时间滤波器设计的浩瀚文献。对于 FIR 滤波器，我们详细地讨论了滤波器设计的窗函数法和 Parks-McClellan 算法设计法。

本章最后对如何选用这两类数字滤波器的问题作了一些讨论。这一讨论的要点是，方法的选择并不总是直接了当的，可能取决于许多因素，很难对其量化或从普遍意义上加以论述。但是，我们从本章和第 6 章中应清楚地认识到，数字滤波器的特性在设计和实现中都有很大的灵活性。这种灵活性使它有可能实现在许多情况下用模拟滤波器很难实现的较复杂的信号处理方案。

习　题

基本题(附答案)

7.1　考虑一个脉冲响应为 $h_c(t)$的因果连续时间系统,其系统函数为

$$H_c(s)=\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

(a)用脉冲响应不变法求离散时间系统的 $H_1(z)$,使得 $h_1[n]=h_c(nT)$。

(b)用阶跃响应不变法求离散时间系统的 $H_2(z)$,使得 $s_2[n]=s_c(nT)$。其中

$$s_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h_2[k]\text{ 和 }s_c(t)=\int_{\infty}^{t}h_c(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(c)求系统 1 的阶跃响应 $s_1[n]$和系统 2 的脉冲响应 $h_2[n]$。请判定 $h_2[n]=h_1[n]=h_c[nT]$以及 $s_1[n]=s_2[n]=s_c[nT]$成立吗?

7.2　某一离散时间低通滤波器是将脉冲响应不变法用于一个连续时间巴特沃兹滤波器而设计出来的。该连续时间滤波器的幅度平方函数为

$$|H_c(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

该离散时间系统的技术指标与例 7.2 中的相同,即,

$$0.891\,25\leqslant|H(e^{\mathrm{j}\omega})|\leqslant 1,\quad 0\leqslant|\omega|\leqslant 0.2\pi$$
$$|H(e^{\mathrm{j}\omega})|\leqslant 0.177\,83,\quad 0.3\pi\leqslant|\omega|\leqslant\pi$$

假定如在例 7.2 中那样,混叠不是一个问题。也就是说设计连续时间巴特沃兹滤波器,以满足由要求的离散时间滤波器所确定的通带和阻带指标。

(a) 画出连续时间巴特沃兹滤波器频率响应$|H_c(\mathrm{j}\Omega)|$之幅度的容限界,使得用冲激响应不变法(即 $h[n]=T_dh_c(nT_d)$后所得出的离散时间滤波器将满足给定的设计指标。不必像例 7.2 中那样假设 $T_d=1$。

(b) 求整数阶次 N 和量 $T_d\Omega_c$,使得连续时间巴特沃兹滤波器可以完全满足在(a)中所确定的在通带边缘处的技术指标。

(c) 注意若 $T_d=1$,则你在(b)中的答案必须给出在例 7.2 中得出的 N 和 Ω_c 值。利用这种观点求出当 $T_d\neq1$ 时的系统函数 $H_c(s)$,并说明由脉冲响应不变法($T_d\neq1$)得出的系统函数 $H(z)$与(7.19)式给出的结果($T_d=1$ 时)相同。

7.3　我们常希望用脉冲响应不变法或双线性不变法来设计一个离散时间滤波器,该滤波 器可以满足如下技术指标:

$$1-\delta_1\leqslant|H(e^{\mathrm{j}\omega})|\leqslant 1+\delta_1,\quad 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_p$$
$$|H(e^{\mathrm{j}\omega})|\leqslant\delta_2,\quad \omega_s\leqslant|\omega|\leqslant\pi \qquad \text{(P7.3-1)}$$

由于历史的原因,绝大多数的连续时间滤波器的设计公式、表格或曲线通常均用通 带的峰值增益为 1 来规定技术指标,即

$$1-\hat{\delta}_1\leqslant|H_c(\mathrm{j}\omega)|\leqslant 1,\quad 0\leqslant|\Omega|\leqslant\Omega_p$$

$$|H_c(\omega)|\leqslant\hat{\delta}_2,\quad \Omega_s\leqslant|\Omega| \qquad \text{(P7.3-2)}$$

Rabiner,Kaiser,Herrmann,和 Dolan(1974)曾给出了十分有用的用这种形式规定的连续时间滤波器的设计曲线。

(a) 为了使用这种表格和曲线来设计峰值增益为$(1+\delta_1)$的离散时间滤波器,必须将该离散时间滤波器

的技术指标转换成式(P7.3-2)形式的技术指标。用$(1+\delta_1)$除以离散时间滤波器的技术指标就可以实现这种转换。利用这种方法求用 δ_1 和 δ_2 来表示 $\hat{\delta}_1$ 和 $\hat{\delta}_2$ 的表示式。

(b) 在例 7.2 中我们曾经设计了一个最大通带增益为 1 的离散时间滤波器。这个滤波器可以用乘以常数$(1+\delta_1)$的方法转换成满足(P7.3-1)式中技术指标的滤波器。求所需要的 δ_1 值和与该例对应的 δ_2 值,并用(7.19)式求新滤波器的系统函数的系数。

(c) 对于例 7.3 中的滤波器重复(b)。

7.4 某一离散时间系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{2}{1-e^{-0.2}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-0.4}z^{-1}}$$

(a) 假设这个离散时间系统是用取 $T_d=2$ 的脉冲响应不变法来设计的,即 $h[n]=2h_c(2n)$,其中 $h_c(t)$ 为实数。求出一个连续时间滤波器的系统函数 $H_c(s)$,它可以作为设计的基础。你的答案是唯一的吗?如果不是,则求出另一个系统函数 $H_c(s)$。

(b) 假设 $H(z)$可用取 $T_d=2$ 的双线性变换法得出。求可以作为设计基础的 $H_c(s)$。你的答案是唯一的吗?如果不是,则求出另一个系统函数 $H_c(s)$。

7.5 我们希望用 Kaiser 窗函数法设计一个具有广义线性相位的离散时间滤波器,它满足如下技术指标:

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})|&\leqslant 0.01, && 0\leqslant|\omega|\leqslant 0.25\pi\\ 0.95\leqslant|H(e^{j\omega})|&\leqslant 1.05, && 0.35\leqslant|\omega|\leqslant 0.6\pi\\ |H(e^{j\omega})|&\leqslant 0.01, && 0.65\pi\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{aligned}$$

(a) 对于满足以上技术指标的滤波器,求脉冲响应的最小长度$(M+1)$的值,以及 Kaiser 窗参数 β 的值。

(b) 该滤波器的延迟是多少?

(c) 确定使用 Kaiser 窗的理想脉冲响应脉冲响应 $h_{dc}[n]$。

7.6 我们要用 Kaiser 窗法设计一个实值的一般线性相位的 FIR 滤波器,且满足以下指标:

$$\begin{aligned}0.9<H(e^{j\omega})&<1.1, && 0\leqslant|\omega|\leqslant 0.2\pi\\ -0.06<H(e^{j\omega})&<0.06, && 0.3\leqslant|\omega|\leqslant 0.475\pi\\ 1.9<H(e^{j\omega})&<2.1, && 0.525\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{aligned}$$

将 Kaiser 窗加到理想实值的脉冲响应上可以满足该指标,与该脉冲响应有关的理想频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & 0\leqslant|\omega|\leqslant 0.25\pi\\ 0, & 0.25\pi\leqslant|\omega|\leqslant 0.5\pi\\ 2, & 0.5\leqslant|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

(a) 满足指标的 δ 最大值是多少?相应的 β 值是多少?清楚地说明你的理由。

(b) 满足指标的 $\Delta\omega$ 最大值是多少?相应的 M 值是多少?清楚地说明你的理由。

7.7 我们对利用图 4.11 所示的系统来实现连续时间 LTI 低通滤波器 $H(j\Omega)$很感兴趣,此时离散时间系统的频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$。采样时间 $T=10^{-4}$s,且输入信号 $x_c(t)$是恰当带限的,以及 $X_c(j\Omega)=0$, $|\Omega|\geqslant 2\pi(5\,000)$。

设$|H(j\Omega)|$的技术指标为

$$\begin{aligned}0.99\leqslant|H_e(j\Omega)|&\leqslant 1.01, && |\Omega|\leqslant 2\pi(1\,000)\\ |H_e(j\Omega)|&\leqslant 0.01, && |\Omega|\geqslant 2\pi(1\,100)\end{aligned}$$

确定离散时间频率响应 $H_d(e^{j\omega})$的相应技术指标。

7.8 我们想要设计一个最优(Parks-McClellan)零相位 I 型 FIR 低通滤波器,其通带频率$\omega_p=0.3\pi$,阻带频率$\omega_s=0.6\pi$,且在通带和阻带上有相同的误差加权。所求滤波器的脉冲响应长度为 9;即当 $n<-4$ 或 $n>4$时 $h[n]=0$。图 P7.8 表示两个不同滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$。对每个滤波器确定各有多少交错

点，并说明在最大最小意义上满足上述指标的最佳滤波器是否符合交错点定理。

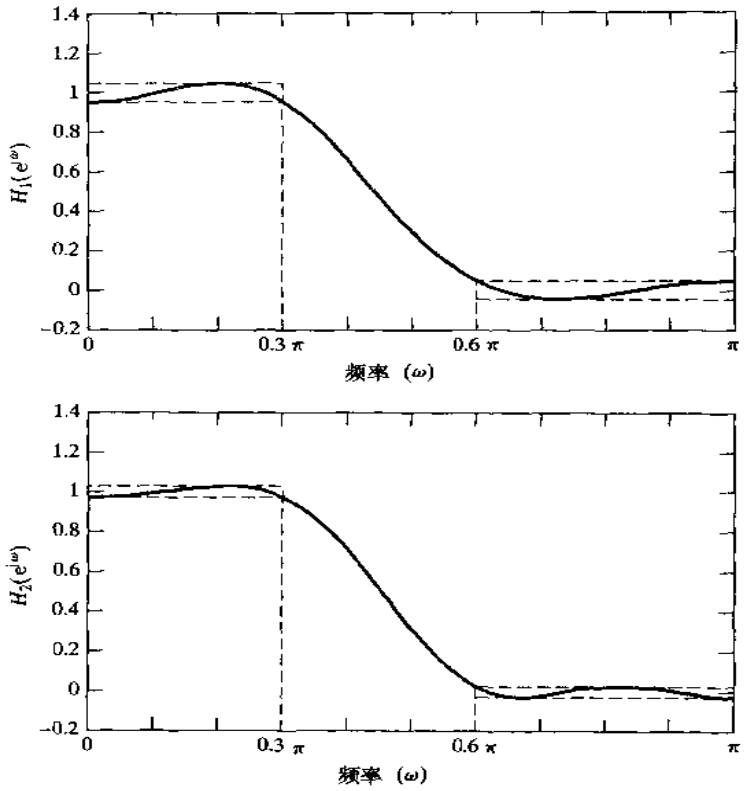


图 P7.8

7.9 假设要用脉冲响应不变法并以理想连续时间低通滤波器为原型，设计一个离散时间滤波器。原型滤波器的截止频率 $\Omega_c = 2\pi(1\,000)$ rad/s，且在脉冲响应不变法的变换中 $T = 0.2$ ms。所得离散时间滤波器的截止频率 ω_c 是多少？

7.10 我们将双线性变换法用于连续时间理想低通滤波器来设计一个离散时间低通滤波器。假设连续时间滤波器原型的截止频率为 $\Omega_c = 2\pi(2\,000)$ rad/s，且选取双线性变换参数 $T = 0.4$ ms。所得离散时间滤波器的截止频率是多少？

7.11 假设理想离散时间低通滤波器的截止频率 $\omega_c = \pi/2$。另外，还知道该滤波器是将取值 $T = 0.1$ ms 时的脉冲响应不变法用于连续时间原型低通滤波器变换而得到的。连续时间原型滤波器的截止频率 Ω_c 为多少？

7.12 一个截止频率 $\omega_c = \pi/2$ 理想离散时间高通滤波器是利用取值 $T = 1$ ms 时的双线性变换法设计出的。问原型理想连续时间高通滤波器的截止频率 Ω_c 为多少？

7.13 一个截止频率 $\omega_c = 2\pi/5$ 理想离散时间低通滤波器是利用脉冲响应不变法根据一截止频率为 $\Omega_c = 2\pi\,(4\,000)$ rad/s 的理想连续时间低通滤波器设计出的。T 值是多少？此值是否唯一？如果不是，求出另外符合上述要求的 T 值。

7.14 用双线性变换法由截止频率 $\Omega_c = 2\pi(300)$ rad/s 的理想连续时间低通滤波器来设计一个截止频率 $\omega_c = 3\pi/5$ 理想离散时间低通滤波器。求出一个符合要求的参数 T。它是否唯一？如果不是，求出另外符合上述要求的值。

7.15 我们要通过给截止频率 $\omega_c=0.3\pi$ 的理想离散时间低通滤波器的脉冲响应 $h_d[n]$ 加窗函数 $W[n]$ 来设计一个 FIR 低通滤波器，并满足技术指标

$$0.95 < H(e^{j\omega}) < 1.05, \quad 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.25\pi$$
$$-0.1 < H(e^{j\omega}) < 0.1, \quad 0.35\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

7.2.1 节中列出的哪一种滤波器可满足这一要求？对于每一个能满足这一要求的窗函数，求出滤波器所要求的最小长度 $M+1$。

7.16 我们要通过给截止频率为 $\omega_c=0.64\pi$ 的理想离散时间低通滤波器的脉冲响应 $h_d[n]$ 加 Kaiser 窗来设计一个 FIR 低通滤波器，并满足技术指标

$$0.98 < H(e^{j\omega}) < 1.02, \quad 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.63\pi$$
$$-0.15 < H(e^{j\omega}) < 0.15, \quad 0.65\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

求满足上述要求的 β 和 M 值。

7.17 假定我们要设计一个带通滤波器，满足下列指标：

$$-0.02 < |H(e^{j\omega})| < 0.02, \quad 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.2\pi$$
$$0.95 < |H(e^{j\omega})| < 1.05, \quad 0.3\pi \leqslant |\omega| \leqslant 0.7\pi$$
$$-0.001 < |H(e^{j\omega})| < 0.001, \quad 0.75\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

该滤波器是利用脉冲响应不变法且取 $T=5$ ms 通过一个原型连续时间滤波器来设计的。试给出用于设计原型连续时间滤波器的技术指标。

7.18 假设我们要设计一个高通滤波器，满足下列技术指标：

$$-0.04 < |H(e^{j\omega})| < 0.04, \quad 0 \leqslant |\omega| \leqslant 0.2\pi$$
$$0.995 < |H(e^{j\omega})| < 1.005, \quad 0.3\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi$$

该滤波器是利用双线性变换法且取 $T=2$ ms 通过一个原型连续时间滤波器来设计的。为了保证满足离散时间滤波器的技术指标，则用于设计原型连续时间滤波器的技术指标是多少？

7.19 我们要利用脉冲响应不变法由一个通带为 $2\pi(300) \leqslant \Omega \leqslant 2\pi(600)$ 的理想连续时间带通滤波器设计出一个通带为 $\pi/4 \leqslant \omega \leqslant \pi/2$ 的理想离散时间带通滤波器。求满足该滤波器设计的 T 值为多少？它是否是唯一的？

7.20 判断下列命题是否正确，并说明原因。

命题：如果利用双线性变换法将一个连续时间全通系统变换成一个离散时间系统，则所得离散时间系统也是一个全通系统。

基础题

7.21 假设给定一个连续时间低通滤波器，其频率响应 $H_c(j\Omega)$ 为

$$1-\delta_1 \leqslant |H_c(j\Omega)| \leqslant 1+\delta_1, \quad |\Omega| \leqslant \Omega_p$$
$$|H_c(j\Omega)| \leqslant \delta_2, \quad |\Omega| \leqslant \Omega_s$$

利用双线性变换法由 $H_c(s)$ 可得出一组离散时间低通滤波器，即

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=(2/T_d)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]}$$

其中 T_d 为变量。

(a) 设 Ω_p 是固定的，求使离散时间系统通带截止频率 $\omega_p=\pi/2$ 时所对应的 T_d 值。

(b) 当 Ω_p 固定时，画出 ω_p 作为 T_d 的函数的曲线，其中 $0<T_d<\infty$。

(c) 当 Ω_p 和 Ω_s 均固定时，画出过渡带 $\Delta\omega=(\omega_s-\omega_p)$ 作为 T_d 的函数的曲线，其中 $0<T_d<\infty$。

7.22 考虑一个连续时间系统，其系统函数为

$$H_c(s) = \frac{1}{s}$$

这个系统被称为**积分器**,因为输出 $y_c(t)$与输入 $x_c(t)$之间有如下关系:

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} x_c(\tau)\mathrm{d}\tau$$

假设某一离散时间系统是将双线性变换法用于 $H_c(s)$而得到的。

(a) 所得离散时间系统的系统函数 $H(z)$是什么? 脉冲响应 $h[n]$是什么?

(b) 如果 $x[n]$为输入,且 $y[n]$为所得离散时间系统的输出。请写出输入和输出满足的差分方程。在用这个差分方程来实现该离散时间系统时,你预料会有什么问题?

(c) 求出该系统频率响应 $H(e^{j\omega})$的表达式。画出当 $0\leqslant|\omega|\leqslant\pi$ 时该离散时间系统的幅度和相位。将它们与连续时间积分器之频率响应 $H_c(j\Omega)$的幅度和相位作一比较。在什么条件下可以认为该离散时间"积分器"是连续时间积分器的良好逼近? 现在考虑一个连续时间系统,其系统函数是

$$G_c(s) = s$$

这个系统称为**微分器**,因为它的输出是输入的导数。假设某一离散时间系统是将双线性变换用于 $G_c(s)$而得到的。

(d) 所得离散时间系统的系统函数 $G(z)$是什么? 脉冲响应 $g[n]$是什么?

(e) 求出该系统频率响应 $G(e^{j\omega})$的表示式,画出当 $0\leqslant|\omega|\leqslant\pi$ 时该离散时间系统的幅度和相位。将它们与连续时间微分器之频率响应 $G_c(j\Omega)$的幅度和相位作一比较。在什么条件下可以认为该离散时间"微分器"是连续时间微分器的良好逼近。

(f) 连续时间积分器和微分器完全是互为可逆的。对于它们的离散时间逼近也同样正确吗?

7.23 一个连续时间滤波器有脉冲响应 $h_c(t)$,其频率响应幅度为

$$|H_c(j\Omega)| = \begin{cases} |\Omega|, & |\Omega| < 10\pi \\ 0, & |\Omega| < 10\pi \end{cases}$$

用该滤波器作为设计离散时间滤波器的原型。所得离散时间系统用于图 P7.23 的配置中对连续时间信号 $x_c(t)$进行滤波。

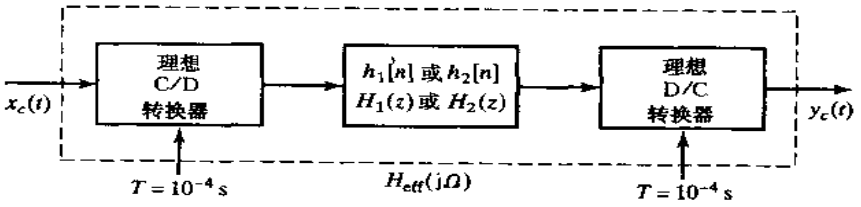


图 P7.23

(a) 脉冲响应为 $h_1[n]$和系统函数为 $H_1(z)$的某一离散时间系统是利用取 $T_d = 0.01$ 的脉冲响应不变法由原型连续时间系统而得到的,即 $h_1[n] = 0.01h_c(0.01n)$。给出当这一离散时间系统用于图 P7.23 中时,全部有效频率响应。$H_{\text{eff}}(j\Omega) = Y_c(j\Omega)/X_c(j\Omega)$的幅度图

(b) 另外,假设脉冲响应为 $h_2[n]$和系统函数为 $H_2(z)$的某一离散时间系统是利用取 $T_d = 2$ 的双线性变换由原型连续时间系统而得到的,即

$$H_2(z) = H_c(s)\Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}$$

请给出当这一离散时间系统用于图 P7.23 中时,全部有效频率响应 $H_{\text{eff}}(j\Omega)$的幅度图。

深入题

7.24 假设 $H_c(s)$在 $s = s_0$ 处有一个 r 阶极点,使得 $H_c(s)$可以表示成

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{(s - s_0)^k} + G_c(s)$$

式中 $G_c(s)$只有一阶极点。设 $H_c(s)$是因果的，

(a) 给出由 $H_c(s)$来求常数 A_k 的公式。

(b) 得出利用 s_0 和 $g_c(t)$来表示的脉冲响应 $h_c(t)$的表示式，其中 $g_c(t)$为 $G_c(s)$的拉普拉斯反变换。

7.25 **脉冲响应不变法和双线性变换法**是设计离散时间滤波器的两种方法。这两种方法都是将一个连续时间系统函数 $H_c(s)$变换成一个离散时间系统函数 $H(z)$。回答下列问题，指出哪一种方法或二者均能够得出要求的结果？

(a) 最小相位连续时间系统的所有极点和零点均在左半 s 平面上，如果将一个最小相位连续时间系统变换成一个离散时间系统，哪一种方法将得出最小相位离散时间系统？

(b) 如果连续时间系统是一个全通系统，则它的极点将在左半平面 $-s_k$ 处，而它的零点将在所对应的右半平面的 $-s_k$ 处。哪一种方法将得出全通离散时间系统？

(c) 哪一种设计方法可以保证

$$H(e^{\omega})\Big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)\Big|_{\Omega=0}$$

(d) 如果连续时间系统是一个带阻滤波器，哪一种方法会得出离散时间带阻滤波器？

(e) 假设 $H_1(z)$，$H_2(z)$和 $H(z)$分别是 $H_{c1}(s)$，$H_{c2}(s)$和 $H_c(s)$的变换形式。哪一种设计方法可以保证，只要当 $H_c(s) = H_{c1}(s)H_{c2}(s)$时就有 $H(z) = H_1(z)H_2(z)$？

(f) 假定 $H_1(z)$，$H_2(z)$和 $H(z)$分别是 $H_{c1}(s)$，$H_{c2}(s)$和 $H_c(s)$的变换形式。哪一种设计方法可以保证，只要当 $H_c(s) = H_{c1}(s) + H_{c2}(s)$时就有 $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$？

(g) 假设两个连续时间系统函数满足条件

$$\frac{H_{c1}(j\Omega)}{H_{c2}(j\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & \Omega > 0 \\ e^{-j\pi/2}, & \Omega < 0 \end{cases}$$

如果 $H_1(z)$和 $H_2(z)$分别是 $H_{c1}(s)$和 $H_{c2}(s)$的变换形式，哪一种设计会得出满足下式的离散时间系统：

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \begin{cases} e^{-j\pi/2} & 0 < \omega < \pi \\ e^{j\pi/2} & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

（这类系统被称为“90°分相器”）

7.26 具有系统函数 $H(z)$的离散时间滤波器是把具有系统函数 $H_c(s)$的连续时间滤波器经过变换而设计出的。设计要求

$$H(e^{\omega})\Big|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)\Big|_{\Omega=0}$$

(a) 若用脉冲响应不变法设计该滤波器，上述条件能成立吗？如果能，$H_c(j\Omega)$必须满足什么条件？（如果有的话）

(b) 若用双线性变换法设计该滤波器，上述条件能成立吗？如果能，$H_c(j\Omega)$必须满足什么条件？（如果有的话）

7.27 假设给定一个理想低通离散时间滤波器，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leqslant \pi \end{cases}$$

我们要用脉冲响应为 $h[n]$的原型滤波器来设计新滤波器。

(a) 画出脉冲响应为 $h_1[n] = h[2n]$的系统的频率响应 $H_1(e^{j\omega})$。

(b) 画出脉冲响应如下所示系统的频率响应 $H_2(e^{j\omega})$。

$$h_2[n]=\begin{cases}h[n/2], & n=0,\pm 2,\pm 4,\cdots\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(c) 画出脉冲响应为 $h_3[n]=e^{j\pi n}h[n]=(-1)^n h[n]$的系统的频率响应 $H_3(e^{j\omega})$。

7.28 考虑一个连续时间低通滤波器 $H_c(s)$,其通带和阻带的指标为

$$1-\delta_1\leqslant|H_c(j\Omega)|\leqslant 1+\delta_1,\quad |\Omega|\leqslant\Omega_p$$
$$|H_c(j\Omega)|\leqslant\delta_2,\quad \Omega_s\leqslant|\Omega|$$

用如下变换将这个滤波器变换成一个低通离散时间滤波器 $H_1(z)$:

$$H_1(z)=H_c(s)\Big|_{s=(1-z^{-1})/(1+z^{-1})}$$

并且用另一种下述变换将同样的连续时间滤波器变换成一个高通离散时间滤波器:

$$H_2(z)=H_c(s)\Big|_{s=(1+z^{-1})/(1-z^{-1})}$$

(a) 确定连续时间低通滤波器的通带截止频率 Ω_p 和离散时间低通滤波器的通带截止频率 ω_{p1}之间的关系。

(b) 确定连续时间低通滤波器的通带截止频率 Ω_p 和离散时间高通滤波器的通带截止频率 ω_{p2}之间的关系。

(c) 确定离散时间低通滤波器的通带截止频率 ω_{p1}和离散时间高通滤波器的通带截止频率 ω_{p2}之间的关系。

(d) 图 P7.28 中的网络描述了一种实现系统函数为 $H_1(z)$的离散时间低通滤波器的方法.系数 A,B,C 和 D 均为实数。对这些系数如何进行修改以得到一个实现系统函数为 $H_2(z)$的离散时间高通滤波器的网络?

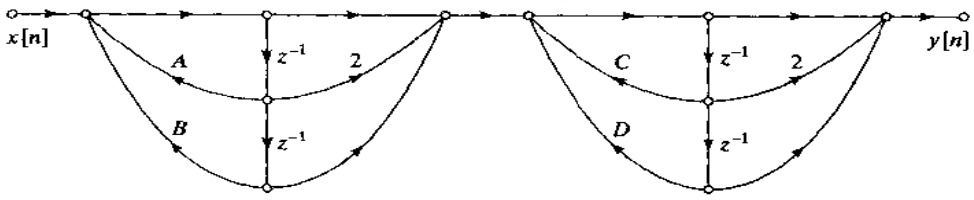


图 P7.28

7.29 系统函数为 $H(z)$和脉冲响应 $h[n]$为的一个离散时间系统有频率响应

$$H(e^{j\theta})=\begin{cases}A, & |\theta|<\theta_c\\ 0, & \theta_c<|\theta|\leqslant\pi\end{cases}$$

其中 $0<\theta_c<\pi$。通过变换 $Z=-z^2$,将这个滤波器变换成一个新滤波器,即

$$H_1(z)=H(Z)\Big|_{Z=-z^2}=H(-z^2)$$

(a) 求原低通系统 $H(Z)$的频率变量 θ 与新系统 $H_1(z)$的频率变量 ω 之间的关系式。

(b) 画出新滤波器频率响应 $H_1(e^{j\omega})$的图形,并认真加以标记。

(c) 求用 $h[n]$表示 $h_1[n]$的关系式。

(d) 假设 $H(Z)$可用如下差分方程组来实现:

$$g[n]=x[n]-a_1g[n-1]-b_1f[n-2]$$
$$f[n]=a_2g[n-1]+b_2f[n-1]$$
$$y[n]=c_1f[n]-c_2g[n-1]$$

式中 $x[n]$ 为系统的输入，$y[n]$ 为系统的输出。确定对于变换后的系统可以实现 $H_1(z)=H(-z^2)$ 的差分方程组。

7.30 考虑通过下述变换由有理系统函数为 $H_c(s)$ 的一个连续时间滤波器来设计一个系统函数为 $H(z)$ 的离散时间滤波器：

$$H(z)=H_c(s)\Big|_{s=\beta(1-z^{-\alpha})/(1+z^{-\alpha})}$$

其中 α 为非零整数，β 为实数。

(a) 若 $\alpha>0$，β 取何值时可以由一个具有有理系统函数 $H_c(s)$ 的稳定因果连续时间滤波器得出一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的稳定因果离散时间滤波器？

(b) 若 $\alpha<0$，β 取何值时可以由一个具有有理系统函数 $H_c(s)$ 的稳定因果连续时间滤波器得出一个具有有理系统函数 $H(z)$ 的稳定因果离散时间滤波器？

(c) 当 $\alpha=2$ 和 $\beta=1$ 时，确定 s 平面的 $j\Omega$ 轴将映射成 z 平面上的什么曲线？

(d) 假设连续时间滤波器是一个稳定的低通滤波器，其通带频率响应满足

$$1-\delta_1\leqslant|H_c(j\Omega)|\leqslant 1+\delta_1,\quad \text{当 } |\Omega|\leqslant 1 \text{ 时}$$

如果该离散时间系统 $H(z)$ 是用取 $\alpha=2$ 和 $\beta=1$ 的上述变换而得出的，求在区间 $|\omega|\leqslant\pi$ 中使得

$$1-\delta_1\leqslant|H(e^{j\omega})|\leqslant 1+\delta_1$$

的 ω 值。

7.31 离散时间高通滤波器可用如下变换由一个连续时间低通滤波器求得：

$$H(z)=H_c(s)\Big|_{s=[(1+z^{-1})/(1-z^{-1})]}$$

(a) 证明上述变换将 s 平面的 $j\Omega$ 轴映射成 z 平面的单位圆。

(b) 证明，如果 $H_c(s)$ 是一个所有极点均在左半 s 平面上的有理函数，则 $H(z)$ 将是所有极点均在 z 平面单位圆内的有理函数。

(c) 假设要求的高通离散时间滤波器的技术指标为

$$|H(e^{j\omega})|\leqslant 0.01,\qquad |\omega|\leqslant\pi/3$$

$$0.95\leqslant|H(e^{j\omega})|\leqslant 1.05,\quad \pi/2\leqslant|\omega|\leqslant\pi$$

求连续时间低通滤波器的技术指标，使得用上述变换可以得出所要求的高通离散时间滤波器。

7.32 令 $h_d[n]$ 表示一个理想的所要求系统的脉冲响应，对应的频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$，还令 $h[n]$ 和 $H(e^{j\omega})$ 分别表示对于该理想系统的 FIR 逼近的脉冲响应和频率响应。假设当 $n<0$ 和 $n>M$ 时，$h[n]=0$。我们希望选择脉冲响应的 $(M+1)$ 个样本以使频率响应的均方误差为最小，该误差定义为

$$\varepsilon^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_d(e^{j\omega})-H(e^{j\omega})|^2d\omega$$

(a) 利用 Parseval 关系式并借助序列 $h_d[n]$ 和 $h[n]$ 来表示误差函数。

(b) 利用(a)的结果，求可使 ε^2 最小的 $h[n]$ 值 $(0\leqslant n\leqslant M)$。

(c) 在(b)中确定的 FIR 滤波器可用加窗的方法求得。这就是说，可以用一定的有限长序列 $\omega[n]$ 乘以所要求的无限长序列 $h_d[n]$ 而得到 $h[n]$。求所需要的窗 $\omega[n]$ 使得最优脉冲响应为 $h[n]=\omega[n]h_d[n]$。

7.33 **理想离散时间希尔伯特变换器**是一个对于 $0<\omega<\pi$ 引入 $-90°(-\pi/2\text{rad})$ 相移，而对 $-\pi<\omega<0$ 引入 $+90°(+\pi/2\text{rad})$ 相移的系统。对于 $0<\omega<\pi$ 和 $-\pi<\omega<0$，频率响应的幅度为常量(单位 1)。这类系统也称为**理想 90°移相器**。

(a) 给出一个理想离散时间希尔伯特变换器的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的方程，该变换器还包括稳定(非零)群延迟。画出该系统对于 $-\pi<\omega<\pi$ 的相位响应曲线。

(b) 可用哪种类型(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ或Ⅳ)的 FIR 线性相位系统来逼近(a)中的理想希尔伯特变换器？

(c) 假设我们要用窗函数法设计一个逼近理想希尔伯特变换器的线性相位系统。若 FIR 系统是，当 $n<0$ 和 $n>M$ 时 $h_d[n]=0$，请利用(a)中给出的 $H_d(e^{j\omega})$ 求理想脉冲响应 $h_d[n]$。

(d) 当 $M=21$ 时该系统的延迟是多少？若采用矩形窗，请画出在这种情况下 FIR 逼近的频率响应之幅度曲线。

(e) 当 $M=20$ 时该系统的延迟是多少？若采用矩形窗，请画出在这种情况下 FIR 逼近的频率响应之幅度曲线。

7.34 在 7.2.1 节中提出的常用窗函数均可以利用矩形窗来表示。这一特性可以用来得出 Bartlett 窗和包括 Hanning，Hamming 及 Blackman 窗在内的提升余弦窗族的傅里叶变换表示式。

(a) 证明(7.47b)式定义的 $(M+1)$ 点 Bartlett 窗可以表示成两个较短矩形窗的卷积。用这一事实证明，$(M+1)$ 点 Bartlett 窗的傅里叶变换是

$$W_B(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}(2/M)\left(\frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)}\right)^2,\ M\text{ 为偶数}$$

或

$$W_B(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}(2/M)\left(\frac{\sin[\omega(M+1)/4]}{\sin(\omega/2)}\right)\left(\frac{\sin[\omega(M-1)/4]}{\sin(\omega/2)}\right),\quad M\text{ 为奇数。}$$

(b) 很容易看出，由(7.47c)式至(7.47e)式定义的 $(M+1)$ 点提升余弦窗均可以表示成

$$w[n]=[A+B\cos(2\pi n/M)+C\cos(4\pi n/M)]w_R[n]$$

式中 $w_R[n]$ 是 $(M+1)$ 点矩形窗，用这个关系式求一般提升余弦窗的傅里叶变换。

(c) 利用适当选择的 A，B 和 C 以及(b)中得出的结果，画出 Hamming 窗傅里叶变换的幅度曲线。

7.35 考虑一个多频带滤波器的如下频率响应：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{j\omega M/2}, & 0\leqslant|\omega|<0.3\pi\\ 0, & 0.3\pi<|\omega|<0.6\pi\\ 0.5e^{-j\omega M/2}, & 0.6\pi<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

用 $M=48$ 和 $\beta=3.68$ 的 Kaiser 窗乘以脉冲响应 $h_d[n]$ 得到一个线性相位的 FIR 系统，其脉冲响应为 $h[n]$。

(a) 该滤波器的延迟是多少？

(b) 求理想脉冲响应 $h_d[n]$。

(c) 确定 FIR 滤波器所满足的一组逼近误差技术指标，即确定在下式中的参数 δ_1，δ_2，δ_3，B，C，ω_{p1}，ω_{s1}，ω_{s2} 和 ω_{p2}：

$$B-\delta_1\leqslant|H(e^{j\omega})|\leqslant B+\delta_1,\qquad 0\leqslant\omega\leqslant\omega_{p1}$$

$$|H(e^{j\omega})|\leqslant\delta_2,\qquad \omega_{s1}\leqslant\omega\leqslant\omega_{s2}$$

$$C-\delta_3\leqslant|H(e^{j\omega})|\leqslant C+\delta_3,\qquad \omega_{p2}\leqslant\omega\leqslant\pi$$

7.36 用 Parks-McClellan 算法设计一个最佳等波纹 FIR 线性滤波器，其频率响应的幅度示于图 P7.36 中。通带中的最大逼近误差为 $\delta_1=0.0531$，且阻带中的最大逼近误差为 $\delta_2=0.085$。通带和阻带截止频率分别为 $\omega_p=0.4\pi$ 和 $\omega_s=0.58\pi$。

(a) 这是什么类型(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ或Ⅳ)的线性相位系统？并请解释其理由。

(b) 在优化中使用的误差加权函数 $W(\omega)$ 是什么？

(c) 仔细画出加权逼近误差的曲线，即画出

$$E(\omega)=W(\omega)[H_d(e^{j\omega})-A_e(e^{j\omega})]$$

(注意，图 P7.36 已表示出 $|A_e(e^{j\omega})|$)

(d) 系统脉冲响应的长度是多少？

(e) 如果这个系统是因果的，则它能具有的最小延迟是多少？

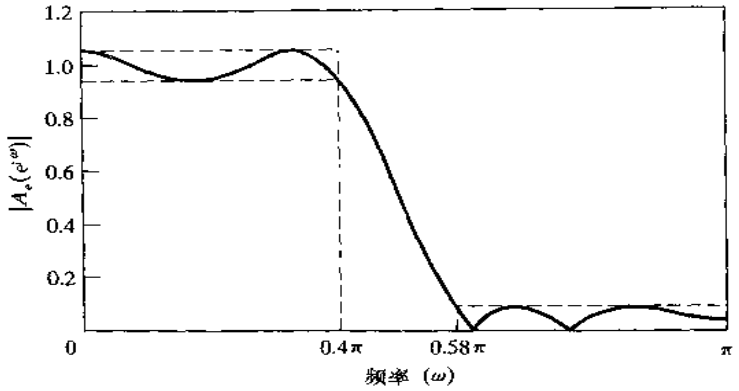


图 P7.36

(f) 在 z 平面上尽可能精确地画出系统函数 $H(z)$的零点。

7.37 所要求得滤波器 $h_d[n]$的频率响应如图 P7.37 所示。

本题中，我们要设计一个 N 点因果线性相位 FIR 滤波器 $h[n]$，使得积分-平方误差

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

为最小，其中滤波器的频率响应 $h[n]$为

$$H_d(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})\, e^{-j\omega(N-1)/2}$$

且 N 为奇整数。

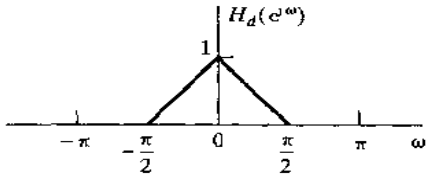


图 P7.37

(a) 求 $h_d[n]$。

(b) 在 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 区间中 $h_d[n]$有何种对称性？简要说明理由。

(c) 求 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 区间中的 $h_d[n]$。

(d) 求作为 $h_d[n]$和 N 函数的最小积分-平方误差 ϵ 的表达式。

7.38 考虑一个 I 型线性相位 FIR 低通滤波器，其脉冲响应为 $h_{LP}[n]$，长度为$(M+1)$，频率响应为

$$H_{LP}(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})\, e^{-j\omega M/2}$$

系统有幅度函数 $A_e(e^{j\omega})$，如图 P7.38 所示。

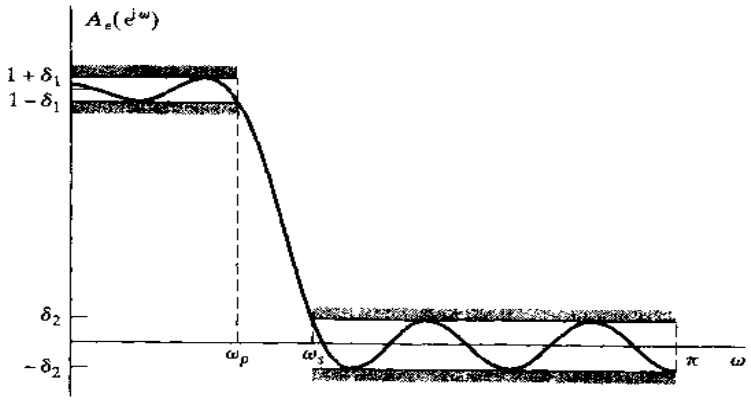


图 P7.38

这个幅度函数在频带 $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$ 中(其中 $\omega_p = 0.27\pi$)(在 Parks-McClellan 意义上),并且在频带 $\omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$ 中(其中 $\omega_s = 0.4\pi$)。

(a) M 值为多少?

假设高通滤波器是由如下定义的低通滤波器获得的:

$$h_{HP}[n] = (-1)^{n+1} h_{LP}[n] = -e^{j\pi n} h_{LP}[n]$$

(b) 证明所得频率响应的表达式为 $H_{HP}(e^{j\omega}) = B_e(e^{j\omega})\, e^{-j\omega M/2}$。

(c) 画出当 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 时的 $B_e(e^{j\omega})$的草图。

(d) 现有一结论认为,对于给定的 M 值(如(a)中所求),所得高通滤波器在频带 $0 \leqslant \omega \leqslant 0.6\pi$中最佳逼近于 0;在频带 $0.73\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$ 上是最佳逼近于 1。这一结论是否正确? 并说明理由。

7.39 设计一个三点最优(在最小最大意义上)因果低通滤波器,且 $\omega_s = \pi/2$, $\omega_p = \pi/3$, 和 $K = 1$。求所设计滤波器的脉冲响应 $h[n]$。注意:$\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi/3) = 0.5$。

7.40 滤波器 C 是一个稳定的连续时间 IIR 滤波器,其系统函数为 $H_c(s)$和脉冲响应为$h_c(t)$。滤波器 B 是一个稳定的离散时间滤波器,其系统函数为 $H_b(z)$和脉冲响应为$h_b[n]$。两者通过双线性变换联系起来。判断下面结论是否正确。如果是正确的,请说明理由。如果是错误的结论,请举出一个反例。

结论:滤波器 B 不能是 FIR 滤波器。

7.41 假设一离散时间滤波器是由一个原型连续时间滤波器 $H_c(s)$通过双线性变换而得到的。而且,假设该连续时间滤波器有恒定的群延迟,即

$$H_c(j\Omega) = A(\Omega)e^{-j\Omega\alpha}$$

式中 $A(\Omega)$为实数。所得离散时间滤波器是否也有恒定的群延迟。给出你的理由。

扩充题:

7.42 如果一个线性时不变连续时间系统具有有理系统函数,则它的输入和输出满足常规的常系数线性差分方程。在模拟这类系统时的标准方法是用有限差分来逼近微分方程中的导数。特别是,因为对于连续可微函数 $y_c(t)$,

$$\frac{dy_c(t)}{dt} = \lim_{T \to 0}\left[\frac{y_c(t) - y_c(t-T)}{T}\right]$$

这似乎是合理的,因为如果 T"足够小",当我们用$[y_c(t) - y_c(t-T)]/T$ 来代替$dy_c(t)/dt$时,应当得到一个好的逼近。

虽然这个简单的方法在连续时间系统的模拟中可能是有用的,但是在滤波器的应用中它并不总是一种设计离散时间系统的有用方法。为了了解用差分方程逼近微分方程的影响,我们来研究一个具体的例子是有益的,假设一个连续时间系统的系统函数是

$$H_c(s) = \frac{A}{s + c}$$

其中 A 和 c 为常数。

(a) 证明该系统的输入 $x_c(t)$和输出 $y_c(t)$满足微分方程

$$\frac{dy_c(t)}{dt} + cy_c(t) = Ax_c(t)$$

(b) 计算当 $t = nT$ 时的微分方程,并且进行替代

$$\left.\frac{dy_c(t)}{dt}\right|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT) - y_c(nT-T)}{T}$$

也就是用一阶后向差分来代替一阶导数。

(c) 定义 $x[n] = x_c(nT)$和 $y[n] = y_c(nT)$。用这一定义和(b)的结果求联系 $x[n]$和 $y[n]$的差分方程,并求所得离散系统的系统函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$。

(d) 证明，对于这个例子

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=(1-z^{-1})/T}$$

也就是证明 $H(z)$可用如下映射由 $H_c(s)$直接求得：

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

（可以证明，如果高阶导数可由重复使用一阶后向差分来逼近，则对于高阶系统(d)的结果也成立）

(e) 利用(d)的映射，求出由 s 平面的 $j\Omega$ 轴映射到 z 平面的围线。并求左半 s 平面相对应的 z 平面区域。若具有系统函数 $H_c(s)$的连续时间系统是稳定的，则用一阶后向差分逼近所得出的离散时间系统也是稳定的吗？该离散时间系统的频率响应是原连续时间系统频率响应的准确复现吗？T 的选择对稳定性和频率响应有何影响？

(f) 假设用一阶前向差分逼近一阶微分，即

$$\frac{dy_c(t)}{dt}\Big|_{t=nT} \approx \frac{y_c(nT + T) - y_c(nT)}{T}$$

求由 s 平面到 z 平面所对应的映射，并且用这一映射重复(e)。

7.43 考虑一个具有有理系统函数 $H_c(s)$的线性实不变连续时间系统。输入 $x_c(t)$和输出 $y_c(t)$满足常规的常系数线性微分方程。模拟这类系统的一种方法是利用数值计算方法对微分方程积分。在这个习题中我们将表明，如果使用梯形积分公式，则这一方法等同于用双线性变换法将连续时间系统函数 $H_c(s)$变换成离散时间系统函数 $H(z)$。

为了说明这一点，考虑连续时间系统函数

$$H_c(s) = \frac{A}{s + c}$$

式中 A 和 c 为常数.对应的微分方程是

$$\dot{y}_c(t) + cy_c(t) = Ax_c(t)$$

式中

$$\dot{y}_c(t) = \frac{dy_c(t)}{dt}$$

(a) 证明 $y_c(nT)$可用 $\dot{y}_c(t)$表示成

$$y_c(nT) = \int_{(nT-T)}^{nT} \dot{y}_c(\tau)d\tau + y_c(nT - T)$$

在这个方程中的定积分表示在从$(nT - T)$到 nT 的区间上函数 $\dot{y}_c(t)$下方的面积。图 P7.43 表示函数 $y_c(t)$和一个划阴影线的梯形区域，该区域的面积近似为曲线下方的面积。这种对积分的逼近方法称为**梯形逼近法**。显然，T 越接近零这种逼近就越好。利用这种逼近方法求用 $y_c(nT - T)$，$\dot{y}_c(nT)$和 $\dot{y}_c(nT - T)$来表示 $y_c(nT)$的表示式。

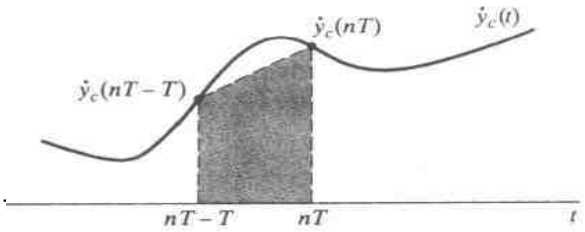


图 P7.43

(b) 利用该微分方程求 $y_c(nT)$的表示式，并且将这个表示式代入在(a)中得出的表示式。

(c) 定义 $x[n]=x_c(nT)$和 $y[n]=y_c(nT)$，利用这个定义和(b)的结果，求联系 $x[n]$和 $y[n]$的差分方程，并求所得离散时间系统的系统函数 $H(z)=Y(z)/X(z)$。

(d) 证明，对于这个例子

$$H(z) = H_c(s)\Big|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]}$$

也就是证明 $H(z)$可用双线性变换法由 $H_c(s)$直接求得(对于高阶微分方程,重复将梯形积分用于输出的高阶导数将得出与具有有理系统函数的一般连续时间系统相同的结论)。

7.44 在这个习题中我们研究一种称为**自相关函数不变法**的滤波器设计方法,考虑一个具有脉冲响应 $h_c(t)$和系统函数 $H_c(s)$的稳定连续时间系统。该系统的自相关函数定义为

$$\phi_c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h_c(t)h_c(t+\tau)\mathrm{d}\tau$$

并且对于实脉冲响应很容易证明,$\phi_c(\tau)$的拉普拉斯变换是 $\Phi_c(s) = H_c(s)H_c(-s)$。同样,考虑一个具有脉冲响应 $h[n]$和系统函数 $H(z)$的离散时间系统。离散时间系统的自相关函数定义为

$$\phi[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n+m]$$

并且对于实脉冲响应,$\Phi_c(z) = H_c(z)H_c(z^{-1})$。

自相关函数不变法意味着,使该离散时间系统的自相关函数等于一个连续时间系统采样后的自相关函数,以此来定义一个离散时间滤波器,即

$$\phi[m] = T_d\phi_c(mT_d), \quad -\infty < m < \infty$$

当 $H_c(s)$是一个有理函数,在 $s_k(k=1, 2, \cdots, N)$处有 N 个一阶极点并有 $M<N$ 个零点时,对于自相关函数不变法,特提出如下设计步骤:

1. 得出 $\Phi_c(s)$的部分分式展开式,形式为

$$\Phi_c(s) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{A_k}{s-s_k} + \frac{B_k}{s+s_k}\right)$$

2. 形成 z 变换

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{T_dA_k}{1-e^{s_kT_d}z^{-1}} + \frac{T_dB_k}{1-e^{-s_kT_d}z^{-1}}\right)$$

3. 求 $\Phi(z)$的极点和零点,并且由 $\Phi(z)$在单位圆内的极点和零点构成最小相位系统函数 $H(z)$。

(a) 确认在所提出的设计方法中的每一个步骤,也就是证明所得离散时间系统的自相关函数的采样形式。为了证明该方法,一种有用的办法是将它用于一个一阶系统,其脉冲响应为

$$h_c(t) = e^{-at}u(t)$$

且系统函数为

$$H_c(s) = \frac{1}{s+a}$$

(b) $|H(e^{j\omega})|^2$ 和 $|H_c(j\Omega)|^2$ 之间的联系是什么?哪一种频率响应的函数对于自相关函数不变法是合适的?

(c) 在步骤 3 中得出的系统函数是唯一的吗?若不是,请说明如何得出另外的自相关函数不变离散时间系统。

7.45 令 $H_{lp}(Z)$表示一个离散时间低通滤波器的系统函数,这一系统的实现可用线性信号流图来表示,该流图由图 P7.45-1 所示的加法器、增益因子和单位延迟等单元组成。我们希望实现一个低通滤波器,它通过改变某一单个参数就可以改变截止频率。这里提出的方法是用图 P7.45-2中所示的网络来代替表示 $H_{lp}(Z)$的信号流图中的每一个单位延迟单元,其中 α 为实数且 $|\alpha|<1$。

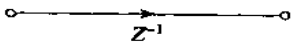


图 P7.45-1

(a) 当用图 P7.45-2 的网络来代替在实现 $H_{lp}(Z)$的网络中的每一个单位延迟分支时,令 $H(z)$表示所得滤波器的系统函数。证明 $H(z)$和 $H_{lp}(Z)$是通过一个 Z 平面到 z 平面的映射联系起来的。

(b) 如果 $H(e^{j\omega})$和 $H_{lp}(e^{j\theta})$是两个系统的频率响应,求频率变量 ω 和 θ 之间的关系。画出当 $\alpha=0$,

±0.5 时作为 θ 的函数的曲线，并证明 $H(e^{j\omega})$是一个低通滤波器。如果 θ_p 是原低通滤波器 $H_{lp}(Z)$的通带截止频率，求新滤波器 $H(z)$的截止频率 ω_p 作为 α 和 θ_p 的函数的方程式。

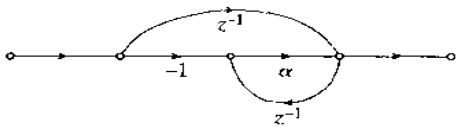


图 P7.45 - 2

(c) 假设原低通滤波器有系统函数

$$H_{lp}(Z) = \frac{1}{1 - 0.9Z^{-1}}$$

画出实现 $H_{lp}(Z)$的流图，并画出实现 $H(z)$的流图，$H(z)$是用图 P7.45 - 2 中的网络来代替第一个流图中的单位延迟单元而得到的。所得到的网络对应于一个可以计算的差分方程吗？

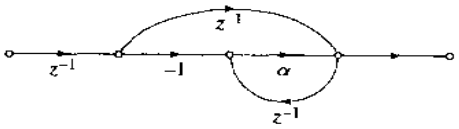


图 P7.45 - 3

(d) 如果 $H_{lp}(Z)$对应于一个用直接形式实现的 FIR 系统，那么该流图可以得出一个可以计算的差分方程吗？若 FIR 系统 $H_{lp}(Z)$是线性相位的，所得系统 $H(z)$也是线性相位的吗？如果 FIR 统具有长度为$(M-1)$个样本的脉冲响应，则变换后的系统脉冲响应的长度是多少？

(e) 为了避免在(c)中出现困难，建议将图 P7.45 - 2 的网络与图 P7.45 - 3 绘出的单位延迟单元级联。当用图 P7.45 - 3 的网络代替每一个单位延迟单元时，重复(a)的分析。求将 θ 为 ω 的函数的方程，并证明，若 $H_{lp}(e^{j\omega})$是一个低通滤波器，则$H(e^{j\omega})$不是一个低通滤波器。

7.46 若给定基本的滤波器组件(硬件或计算机子程序)，有时可能重复使用它来实现一个具有锐截止频率响应特性的新滤波器。有一种方法是将该滤波器与自身级联两次或更多次，但是很容易证明，尽管阻带误差是平方的(若误差小于 1，则总误差将减小)，但是这种方法将增加通带逼近误差。另一种由 Tukey (1977)提出的方法示于图 P7.46 - 1 的方框图中。Tukey 称这种方法为"加倍"法。

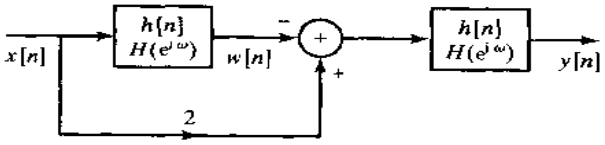


图 P7.46 - 1

(a) 假定基本系统具有对称的有限长脉冲响应，即

$$h[n] = \begin{cases} h[-n], & -L \leqslant n \leqslant L \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

确定整个脉冲响应 $g[n]$是否是(i)FIR 的；(ii)对称的。

(b) 假设 $H(e^{j\omega})$满足下列逼近误差指标：

$$(1 - \delta_1) \leqslant H(e^{j\omega}) \leqslant (1 + \delta_1), \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$$

$$-\delta_2 \leqslant H(e^{j\omega}) \leqslant \delta_2, \quad \omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$$

如果基本系统具有这些指标，可以证明整个系统的频率响应 $G(e^{j\omega})$满足如下形式的指标：

$$A \leqslant G(e^{j\omega}) \leqslant B \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$$

$$C \leqslant G(e^{j\omega}) \leqslant D \qquad \omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$$

求利用 δ_1 和 δ_2 表示的 A，B，C 和 D。如果 $\delta_1 \ll 1$ 且 $\delta_2 \ll 1$，则 $G(e^{j\omega})$近似的最大通带和阻带逼近误差是多少？

(c) 正如(b)中所求出的，杜基的加倍法减小了通带逼近误差，但是增加了阻带误差。Kaiser 和 Hamming(1977)推广了该加倍法，使得通带和阻带同时得到改善，它们把自己得出的方法称为"锐化法"。使通带和阻带同时得到改善的最简单锐化系统如图 P7.46－2 所示。再次假设该基本系统的脉冲响应与(a)中给出的相同。对于图 P7.46－2 的系统重复(b)。

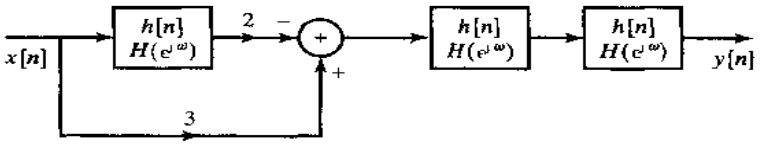


图 P7.46－2

(d) 假定基本系统是非因果。如果该基本系统的脉冲响应是一个因果线性相位 FIR 系统，使得

$$h[n] = \begin{cases} h[M-n], & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则图 P7.46－1 和 P7.46－2 中的系统应当如何修改？可以使用哪种类型的(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ或Ⅳ)因果线性相位 FIR 系统？对于图 P7.46－1 和 P7.46－2 中的系统，脉冲响应 $g[n]$的长度是多少？(利用 L 表示)

7.47 考虑用 Parks-McClellan 算法设计一个低通线性相位 FIR 滤波器。利用交错点定理说明在通带和阻带逼近区之间的"不在乎"区域中逼近必须单调地减小。[**提示**：证明三角多项式的所有局部极大点和极小点必须在通带中或在阻带中以满足交错点定理]

7.48 图 P7.48 表示一个离散时间 FIR 系统的频率响应 $A_e(e^{j\omega})$，该系统的脉冲响应是：

$$h_e[n] = \begin{cases} h_e[-n], & -L \leqslant n \leqslant L \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 证明 $A_e(e^{j\omega})$不能对应于由 Parks-McClellan 算法产生的 FIR 滤波器，该滤波器的通带边缘频率为 $\pi/3$，阻带边缘频率为 $2\pi/3$，且在通带和阻带中误差加权函数为 1。并详细解释其理由。[**提示**：交错点定理表明，最佳逼近是唯一的]

(b) 根据图 P7.48 和 $A_e(e^{j\omega})$不能对应于一个最佳滤波器的论述，对于 L 值可以得出什么结论？

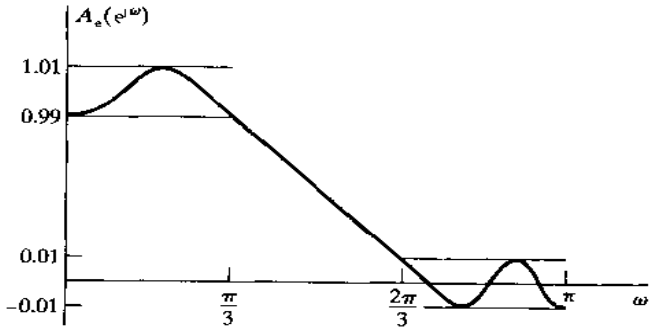


图 P7.48

7.49 考虑图 P7.49 所示的系统。

1. 假设当$|\Omega| \geqslant \pi/T$时 $X_c(j\Omega)=0$，并且 $H_r(j\Omega)$表示理想低通重构滤波器，使得

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi/T \\ 0, & |\Omega| > \pi/T \end{cases}$$

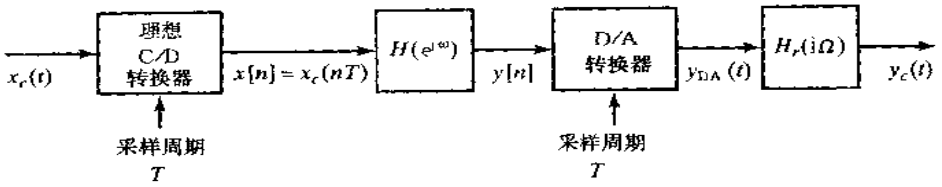


图 P7.49

2. D/A 转换器有一个内置零阶保持电路，因此

$$y_{DA}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n]h_0(t-nT)$$

式中 $h_0(t)$ 为

$$h_0(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（我们忽略在 D/A 转换器中的量化）

3. 图 P7.49 中的第 2 个系统是一个具有频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的线性相位 FIR 离散时间系统。

我们想要利用 Parks-McClellan 算法设计该 FIR 系统，以便补偿掉零阶保持系统的影响。

(a) 输出的傅里叶变换为 $Y_c(e^{-j\Omega})=H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega)$，求利用 $H(e^{j\Omega T})$ 和 T 表示 $H_{eff}(j\Omega)$ 的表示式。

(b) 如果线性相位 FIR 系统是，当 $n<0$ 和 $n>51$ 时 $h[n]=0$，并且 $T=10^{-4}$s，则在 $x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 之间的总时间延迟（单位 ms）是多少？

(c) 假设当 $T=10^{-4}$s 时我们希望有效频率响应在以下容限范围内是等波纹的（同时在通带和阻带中）：

$$0.99\leqslant|H_{eff}(j\Omega)|\leqslant 1.01,\qquad |\Omega|\leqslant 2\pi(1\,000)$$
$$|H_{eff}(j\Omega)|\leqslant 0.01,\qquad 2\pi(2\,000)\leqslant|\Omega|\leqslant 2\pi(5\,000)$$

我们希望通过设计一个包括补偿零阶保持在内的最佳线性相位滤波器（用 Parks-McClellan 算法）来实现这一点。给出应当使用的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的方程。求出应当使用的加权函数 $W(\omega)$ 并作图。绘出所得出的“典型”频率响应 $H(e^{j\omega})$ 的曲线。

(d) 如何修改你在 (c) 中的结果，使其包括对重构滤波器 $H_r(j\Omega)$ 的幅度补偿，已知该滤波器在 $\Omega=2\pi(5\,000)$ 以上增益为零，且具有倾斜的通带？

7.50 一个离散时间信号经过低通滤波器过滤后常常如图 P7.50－1 所示的那样被欠采样或抽取。在这种应用中往往希望滤波器是线性相位 FIR 滤波器。但是如果图 P7.50－1 中的低通滤波器有一个很窄的过渡带，则 FIR 系统将具有一个很长的脉冲响应，因此计算每个输出样本就需要大量的乘法和加法运算。

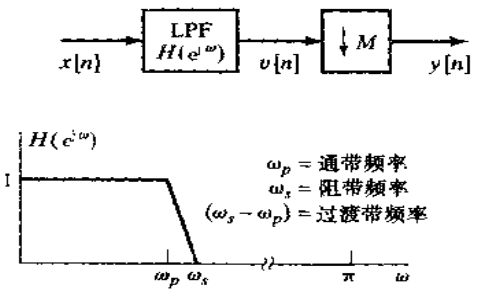


图 P7.50－1

在这个习题中，我们将研究图 P7.50－1 所示系统的多级实现的优点。当 ω_s 很小并且抽取因子 M 很大时这种实现方法是特别有用的。一种通用的多级实现绘于图P7.50－2中。它的基本思路是，在前面几级低通滤波器中使用较宽的过渡带，因此减少了在这几级中所需要的滤波器脉冲响应的长度。当进行抽取时信号样本数就减少了，并且我们可以逐渐地减小对抽取后信号过滤的滤波器过渡带的宽度。用这种方式就可以减少实现抽取器所需要的总计算次数。

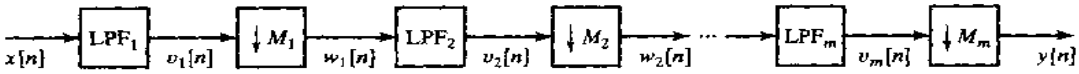


图 P7.50－2

(a) 如果图 P7.50－1 中抽取的结果没有出现混叠，最大允许的抽取因子 M 是多少(用 ω_s 表示)?

(b) 在图 P7.50－1 所示系统中，令 $M=100$，$\omega_s=\pi/100$ 和 $\omega_p=0.9\pi/100$。若 $x[n]=\delta[n]$，请绘出 $V(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$的图形。

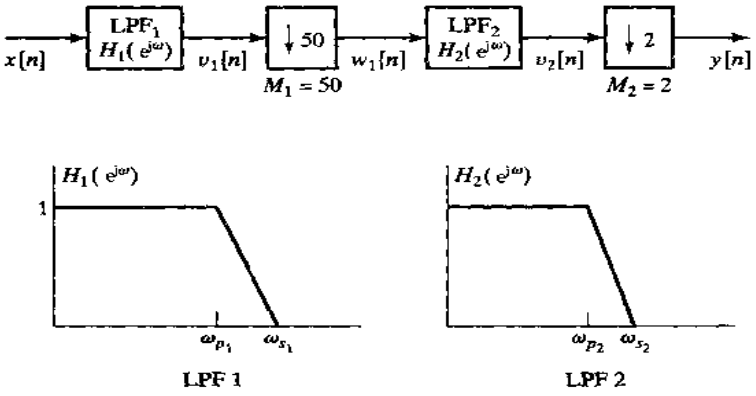


图 P7.50－3

现在考虑当 $M=100$ 时抽取器的二级实现，如图 P7.50－3 所示，其中 $M_1=50$，$M_2=2$，$\omega_{p1}=0.9\pi/100$，$\omega_{p2}=0.9\pi/2$ 以及 $\omega_{s2}=\pi/2$。我们必须选择 ω_{s1}或等效地选择 LPF_1 的过渡带 $(\omega_{s1}-\omega_{p1})$，使得二级实现得到与单级抽取器同样的等效通带和阻带频率(我们没有考虑在过渡带中频率响应的形状细节，但两个系统在过渡带中均应当有单调下降的频率响应)。

(c) 对于一个任意的 ω_{s1}值和输入 $x[n]=\delta[n]$，绘出图 P7.50－3 所示二级抽取器的 $V_1(e^{j\omega})$、$W_1(e^{j\omega})$，$V_2(e^{j\omega})$和 $Y(e^{j\omega})$

(d) 求使得该二级抽取器得到与(b)中的单级系统一样的等效通带和阻带截止频率 ω_{s1}的最大值。

除了非零过渡带宽度以外，低通滤波器与理想低通滤波器在通带和阻带逼近误差 δ_p 和 δ_s 上也必定不同。假设使用线性相位等波纹 FIR 逼近。由(7.104)式可得，对于最佳低通滤波器

$$N\approx\frac{-10\log_{10}(\delta_p\delta_s)-13}{2.324\Delta\omega}+1 \qquad \text{(P7.50－1)}$$

其中 N 是脉冲响应的长度，$\Delta\omega=\omega_s-\omega_p$ 是低通滤波器的过渡带。(P7.50－1)式提供了对抽取器的两种实现进行比较的基础(当用 Kaiser 窗函数法来设计滤波器时，可用(7.63)式代替(P7.50－1)式来估计脉冲响应的长度)。

(e) 对于在单级实现中的低通滤波器，假设 $\delta_p=0.01$ 和 $\delta_s=0.001$。计算其脉冲响应长度 N，并求出计算每个输出样本所需的乘法次数。应利用线性相位 FIR 系统脉冲响应的对称性(注意，在这种抽取的应用中，只需要计算每个输出的第 M 个样本，即压缩器与 FIR 系统的乘法交换)。

(f) 利用(d)中求出的 ω_{s1}值，分别计算在图 P7.50－3 所示二级抽取器中 LPF_1 和 LPF_2 的脉冲响应长度 N_1 和 N_2。求在二级抽取器中计算每个输出样本所需的全部乘法次数。

(g) 如果将逼近误差指标 $\delta_p=0.01$ 和 $\delta_s=0.001$ 同时用于二级抽取器中的两个滤波器，则总的通带波

纹可能要大于0.01，因为这二级的通带波纹可能会得到加强，即$(1+\delta_p)(1+\delta_p)>(1+\delta_p)$。为了对此进行补偿，可以设计二级实现中的每个滤波器通带波纹只有单级实现的一半。因此，对于二级抽取器中的每个滤波器均假设$\delta_p=0.005$和$\delta_s=0.001$。分别计算LPF_1和LPF_2的脉冲响应长度N_1和N_2，并求出计算每个输出样本所需要的全部乘法次数。

(h) 对于二级抽取器中的滤波器还必须降低阻带逼近误差的技术指标吗？

(i) **选做**。将$M_1=50$和$M_2=2$结合在一起也可能不会使计算每个输出样本所需的全部乘法为最少。使得$M_1M_2=100$，整数M_1和M_2的其它可能选择是什么？求使得计算每个输出样本所需的乘法次数为最少的M_1和M_2值。

7.51 在本习题中我们来推导设计最小相位离散时间滤波器的一种方法。这类滤波器的全部零点和极点均在单位圆内(或上)，(在此题中允许零点在单位圆上)。让我们首先考虑将I型线性相位FIR等波纹低通滤波器转换成最小相位系统的问题。如果$H(e^{j\omega})$是一个I型线性相位滤波器的频率响应，则

1. 所对应的脉冲响应为实数，并且

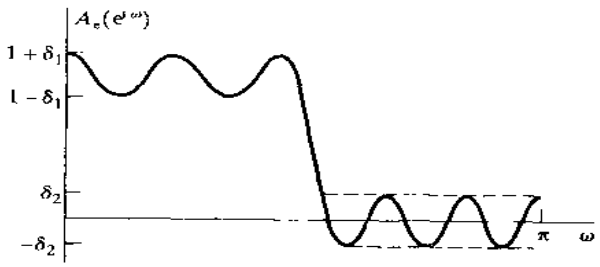
$$h[n]=\begin{cases}h[M-n], & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中M为偶整数。

2. 由(1)得，$H(e^{j\omega})=A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$，其中$A_e(e^{j\omega})$为实数且$n_0=M/2$为整数。

3. 通带波纹为δ_1，即在通带中$A_e(e^{j\omega})$在$(1+\delta_1)$和$(1-\delta_1)$之间振荡。(见图P7.51-1)。

4. 阻带波纹为δ_2，即在阻带中$-\delta_2\leqslant A_e(e^{j\omega})\leqslant\delta_2$，且$A_e(e^{j\omega})$在$-\delta_2$和$\delta_2$之间振荡(见图P7.51-1)。



图P7.51-1

Herrmann和Schüssler(1970a)曾提出如下方法，将这种线性相位系统转换成具有系统函数$H_{min}(z)$和单位样本响应$h_{min}[n]$的最小相位系统(在本题中，我们假设最小相位系统可以有在单位圆上的零点)。

步骤1：产生一个新序列

$$h_1[n]=\begin{cases}h[n], & n\neq n_0\\ h[n_0]+\delta_2, & n=n_0\end{cases}$$

步骤2：确认对于某些$H_2(z)$，$H_1(z)$可以表示成

$$H_1(z)=z^{-n_0}H_2(z)H_2(1/z)=z^{-n_0}H_3(z)$$

式中$H_2(z)$的所有极点和零点均在单位圆内或单位圆上，且$h_2[n]$为实数。

步骤3：定义

$$H_{min}(z)=\frac{H_2(z)}{a}$$

其中分母的常量$a=(\sqrt{1-\delta_1+\delta_2}+\sqrt{1+\delta_1+\delta_2})/2$使通带归一化，因此所得频率响应$H_{min}(e^{j\omega})$将在1上下振荡。

(a) 证明如果$h_1[n]$像步骤1中那样选择，则$H_1(e^{j\omega})$可以写成

$$H_1(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}H_3(e^{j\omega})$$

式中$H_3(e^{j\omega})$对所有的ω值均为实数和非负。

(b) 如果像在(a)中所证明的那样 $H_3(e^{j\omega})\geqslant 0$,证明存在一个 $H_2(z)$,使得

$$H_3(z) = H_2(z)H_2(1/z)$$

其中 $H_2(z)$ 是最小相位的,$h_2[n]$ 为实数(即证明步骤 2)。

(c) 通过计算 δ'_1 和 δ'_2 表明,新滤波器 $H_{\min}(e^{j\omega})$ 是一个等波纹低通滤波器(也就是表明它的幅度特性是图 P7.51-2 中所示的形式)。新脉冲响应 $h_{\min}[n]$ 的长度是多少?

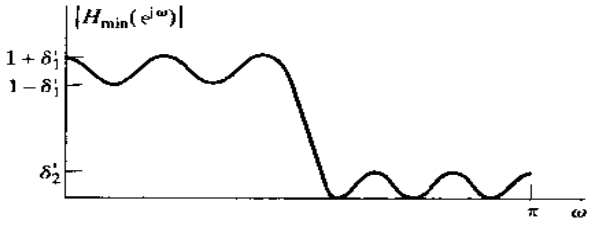


图 P7.51-2

(d) 在(a),(b)和(c)中曾假设我们从Ⅰ型 FIR 线性相位滤波器开始。如果去掉线性相位的限制,这种方法还正确吗?如果使用Ⅱ型 FIR 线性相位系统,这种方法是否仍正确?

7.52 假设我们有一个计算机程序,当已知 $L, F, W(\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 时可以求出使下式达到最小的一组系数 $a[n], n=0, 1, \cdots, L$:

$$\max_{\omega\in F}\left\{\left|W(\omega)\left[H_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^{L} a[n]\cos\omega n\right]\right|\right\}$$

我们已经证明,这个优化问题的解表示一个非因果 FIR 零相位系统,其脉冲响应满足 $h_e[n] = h_e[-n]$。若将 $h_e[n]$ 延迟 L 个样本,则可以得到一个因果的Ⅰ型 FIR 线性相位系统,其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{L} a[n]\cos\omega n = \sum_{n=0}^{2L} h[n]e^{-j\omega n}$$

式中脉冲响应与系数 $a[n]$ 有如下关系:

$$a[n] = \begin{cases} 2h[M/2-n], & 1\leqslant n\leqslant L \\ h[M/2], & n=0 \end{cases}$$

且 $M=2L$ 为系统函数多项式的阶次[脉冲响应的长度为 $(M+1)$]。

如果我们对加权函数 $W(\omega)$ 和要求的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 作适当修改,则利用现在的程序就可以设计其它三型(Ⅱ,Ⅲ和Ⅳ)线性相位 FIR 滤波器。为了说明如何实现这一点,必须将频率响应表示式变成程序所用的标准形式。

(a) 假设我们想要设计一个因果的Ⅱ型 FIR 线性相位系统,使得当 $n=0, 1, \cdots, M$ 时 $h[n] = h[M-n]$,其中 M 为奇整数。证明该型系统的频率响应可以表示成

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

并且求系数 $b[n]$ 和 $h[n]$ 之间的关系式。

(b) 证明,若得出用 $\tilde{b}[n]$ $(n=0, 1, \cdots, (M-1)/2)$ 表示 $b[n]$ $(n=1, 2, \cdots, (M+1)/2)$ 的表示式,则可以将和式 $\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)$ 写成

$$\cos(\omega/2)\sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{b}[n]\cos\omega n$$

[提示:应当仔细地对待用 $\tilde{b}[n]$ 来表示 $b[n]$。也可以利用三角恒等式。$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$]

(c) 如果我们想要用给定的程序来设计已知 $F, W(\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 时的Ⅱ型系统(M 为奇数),证明如何利用 $M, F, W(\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega})$ 求出 $\tilde{L}$, $\tilde{F}$, $\tilde{W}(\omega)$ 和 $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$,使得若利用 $\tilde{L}$, $\tilde{F}$, $\tilde{W}(\omega)$ 和 $\tilde{H}_d(e^{j\omega})$ 来运行该程序,则可以用得出的那组系数求出所要求Ⅱ型系统的脉冲响应。

(d) 对于Ⅲ和Ⅳ型有理线性相位 FIR 系统重复(a)至(c),其中 $h[n]=-h[M-n]$。对于这种情况你必须证明Ⅲ型系统(M 为偶数)的频率响应可以表示为

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{M/2} c[n]\sin\omega n = e^{-j\omega M/2}\sin\omega \sum_{n=0}^{(M-2)/2} \tilde{c}[n]\cos\omega n$$

而对Ⅳ型系统(M 为奇数),

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n]\sin\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{j\omega M/2}\sin(\omega/2)\sum_{n=0}^{(M-1)/2} \tilde{d}[n]\cos\omega n$$

和(b)中一样,有必要通过三角恒等式 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$ 用 $\tilde{c}[n]$ 用来表示 $c[n]$ 以及用 $\tilde{d}[n]$ 来表示 $d[n]$。McClellan 和 Parks(1973)以及 Rabiner 和 Gold(1975) 给出了在本习题中所提出的有关问题的细节。

7.53 在这个习题中我们来研究得出实现变量截止线性相位滤波器的一种方法。假定已知用 Parks-McClellan 法设计出一个零相位滤波器,它的频率响应为

$$A_e(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{L} a_k(\cos\theta)^k$$

因此它的系统函数可以表示成

$$A_e(Z) = \sum_{k=0}^{L} a_k\left(\frac{Z+Z^{-1}}{2}\right)^k$$

其中 $e^{j\theta}=Z$(对于原系统使用 Z,而对于由原系统的变换得到的系统使用 z)。

(a) 利用系统函数的上述表达式,画出用系统 a_k 的乘法、加法和具有系统函数$(Z+Z^{-1})/2$ 的基本系统来实现该系统的方框图或流图。

(b) 该系统脉冲响应的长度是多少?把这个系统与 L 个样本的延迟级联起来,可以使整个系统成为因果的吗?将这个延迟分散成一些单位延迟,这样网络的各个部分将是因果的。

(c) 假设我们用如下替换由 $A_e(Z)$得出一个新的系统函数:

$$B_e(z) = A_e(Z)\Big|_{[(Z+Z^{-1})/2-a_0+a_1[(z-z^{-1})/2]}$$

利用(b)中的流图,画出实现系统函数 $B_e(Z)$的系统流图。这个系统的脉冲响应的长度是多?如像(b)中那样,对该网络作一修正使得整个系统以及网络的各部分均为因果的。

(d) 如果 $A_e(e^{j\omega})$是原滤波器的频率响应,$B_e(e^{j\omega})$是变换后滤波器的频率响应,求 θ 和 ω 之间的关系式。

(e) 原最佳滤波器的频率响应如图 P7.53 所示。对于这种情况,$a_1=1-a_0$ 和$0\leqslant a_0<1$。说明频率响应

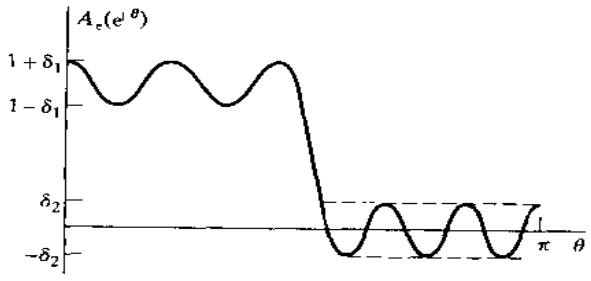


图 P7.53

$B_e(e^{j\omega})$是如何随 α_0 的改变而变化的。

[**提示**:画出 $A_e(e^{j\omega})$和 $B_e(e^{j\omega})$作为 $\cos\theta$ 和 $\cos\omega$ 之函数的图形。在变换后的通带和阻带中有最小—最大加权逼近误差的意义上,所得变换后滤波器还是最佳的吗?]

(f) **选做**。对于 $\alpha_1 = 1 + \alpha_0$ 和 $-1 \leqslant \alpha_0 \leqslant 0$ 的情况,重复(e)。

7.54 在本题中,我们研究用下述方法将连续时间滤波器映射成离散时间滤波器时的影响。该方法是,用中心差分代替对连续时间滤波器的微分方程中的导数,从而得到一个差分方程的方法。序列 $x[n]$的一节中心差分定义为

$$\Delta^{(1)}\{x[n]\} = x[n+1] - x[n-1]$$

k 阶中心差分可递归地定义为

$$\Delta^{(k)}\{x[n]\} = \Delta^{(1)}\{\Delta^{(k-1)}\{x[n]\}\}$$

为了一致起见,0 阶中心差分定义为

$$\Delta^{(0)}\{x[n]\} = x\{n\}$$

(a) 如果 $X(z)$是 $x[n]$的 z 变换,求 $\Delta^{(k)}\{x[n]\}$的 z 变换。

一个 LTI 连续时间滤波器到一个 LTI 离散时间滤波器的映射步骤如下:首先输入 $x(t)$和输出 $y(t)$的连续时间滤波器的特征由以下微分方程确定:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^{M} b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}$$

然后相应的输入 $x[n]$和 $y[n]$输出离散时间滤波器的特性由以下差分方程确定:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \Delta^{(k)}\{y[n]\} = \sum_{r=0}^{M} b_r \Delta^{(r)}\{x[n]\}$$

(b) 如果 $H_c(s)$是有理连续时间系统函数,$H_d(z)$是在(a)中所示的将微分方程映射成差分方程所得到的离散时间系统函数,则

$$H_d(z) = H_c(s)\Big|_{s=m(z)}$$

求 $m(z)$。

(c) 假设 $H_c(s)$逼近于一个截止频率 $\Omega = 1$ 的连续时间低通滤波器,即

$$H(j\Omega) \approx \begin{cases} 1, & |\Omega| < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

用在(a)中所讨论的中心差分将此滤波器映射成一个离散时间滤波器。画出你所得出的离散时间滤波器的逼近频率响应,假设它是稳定的。

7.55 设 $h[n]$为如图 P7.55 所示的最优 I 型等波纹低通滤波器,利用加权函数 $W(e^{j\omega})$进行设计且所要求得频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$。为了简便起见,假设滤波器是零相位的(即非因果的)。我们要用 $h[n]$设计 5 种不同的 FIR 滤波器,如下所示:

$$h_1[n] = h[-n]$$

$$h_2[n] = (-1)^n h[n]$$

$$h_3[n] = h[n] * h[n]$$

$$h_4[n] = h[n] - K\delta[n] \qquad K \text{ 是常数}$$

$$h_5[n] = \begin{cases} h[n/2] & n \text{ 为偶数} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

对每一个滤波器 $h_i[n]$,确定 $h_i[n]$是否在最大最小意义上是最优的。也就是说,确定

$$h_i[n] = \min_{h_i[n]} \max_{\omega \in F} \left(W(e^{j\omega}) \left| H_d(e^{j\omega}) - H_i(e^{j\omega}) \right| \right)$$

在分段恒定的 $H_d(e^{j\omega})$和分段恒定的 $W(e^{j\omega})$的某些选择下是否成立,其中 F 是在 $0 \leqslant \omega \leqslant \pi$ 上不重合

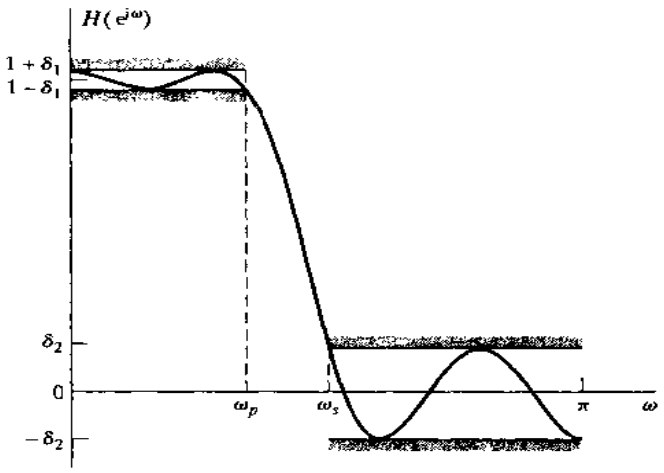


图 P7.55

的闭区间的集合。若 $h_i[n]$是最优的，求相应的 $H_d(e^{j\omega})$和 $W(e^{j\omega})$。若不是最优的，请说明原因。

7.56 假设要利用 Parks-McClellan 算法设计一个因果 FIR 线性相位系统。该系统的系统函数记作 $H(z)$。脉冲响应的长度为 25 个样本，即当 $n<0$ 且 $n>24$ 时，$h[n]=0$，且 $h[0]\neq 0$。对下面每一个问题，回答"正确"、"错误"或"所给条件不充分"：

(a) 当 $-\infty<n<\infty$ 时，$h[n+12]=h[12-n]$或 $h[n+12]=-h[12-n]$。

(b) 该系统的逆系统是稳定的和因果的。

(c) $H(-1)=0$。

(d) 在所有通近带中最大加权逼近误差均相同。

(e) 系统可以用一个无反馈支路的信号流图来实现。

(f) 当 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 时，群延迟是正的。

7.57 考虑用 Parks-McClellan 算法设计一个 I 型带通线性相位 FIR 滤波器，其脉冲响应的长度是 $M+1=2L+1$。回想一下，对 I 型系统频率响应的形式为 $H(e^{j\omega})=A_e(e^{j\omega})\cdot e^{-j\omega M/2}$，并且 Parks-McClellan 算法可以求出可使如下误差函数的最大值达到最小的函数 $A_e(e^{j\omega})$：

$$E(\omega)=W(\omega)[H_d(e^{j\omega})-A_e(e^{j\omega})]\quad \omega\in F$$

式中 F 是区间上 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 的一个闭子集，$W(\omega)$是加权函数，且 $H_d(e^{j\omega})$是定义在通近区间 F 上所要求的频率响应。某一带通滤波器的容限图示于图 P7.57 中。

(a) 对于容限图 P7.57，给出所要求频率响应 $H_d(e^{j\omega})$的方程式。

(b) 对于容限图 P7.57，给出加权函数 $W(\omega)$的方程式。

(c) 对于最佳滤波器，误差函数之交错点的最少个数是多少？

(d) 对于最佳滤波器，误差函数之交错点的最多个数是多少？

(e) 画出一个"典型的"加权误差函数 $E(\omega)$的曲线，该函数能够作为一个最佳带通滤波器(取 $M=14$)的误差函数。假设有最多个数的交错点。

(f) 现在假设，M，ω_1，ω_2，ω_3，加权函数和所要求的函数均保持不变，但是 ω_4 增大使得过渡带($\omega_4-\omega_3$)也增大。对于这些新指标的最佳滤波器必须有比与原指标相联系的最佳滤波器要小的最大通近误差吗？详细说明其理由。

(g) 在低通滤波器的情况下，$A_e(e^{j\omega})$的所有局部极小点和极大点必然出现在通近频带 $\omega\in F$ 中。它们不能出现在"不在乎"的频带中。在低通的情况下，在通近带中出现的极小点和极大点必须是误差

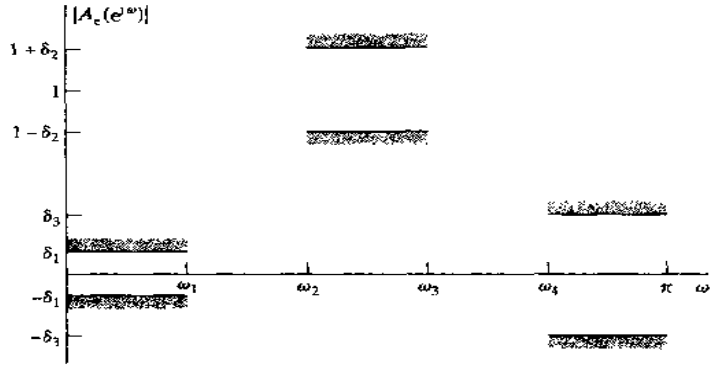


图 P7.57

的交错点。证明在带通滤波器的情况下这一点不一定正确。具体讲，用交错点定理证明：(i) $A_e(e^{j\omega})$的局部极大点和极小点不限于在逼近频带中；(ii)在逼近频带中的局部极大点和极小点不必要是交错点。

7.58 我们常常希望把一个原型离散时间低通滤波器变换成另一种离散时间选频滤波器。需要指出，脉冲响应不变法并不能用于将连续时间高通或带阻滤波器转换成离散时间高通或带阻滤波器。因此，传统的方法是首先用脉冲响应不变法或双线性变换法设计一个原型离散时间低通滤波器，然后利用代数变换将离散时间低通滤波器转换成所要求的选频滤波器。

为了说明这种方法，假设我们已给定一个低通系统函数 $H_{lp}(Z)$，我们要把它转换成一个新的系统函数 $H(z)$，当 $H(z)$在单位圆上取值时它可具有低通、高通、带通或带阻的特性。应注意，在原型低通滤波器中我们用复变量 Z，而在变换后的滤波器中用复变量 z。然后定义一个由 Z 平面到 z 平面的映射为如下形式：

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) \tag{P7.58-1}$$

因此有

$$H(z) = H_{lp}(Z)\Big|_{Z^{-1}=G(z^{-1})} \tag{P7.58-2}$$

这里并不是要将 Z 表示成 z 的函数，而是如在(P7.58-1)式中那样将 Z^{-1}表示成 z^{-1}的函数。所以，根据(P7.58-2)式在由 $H_{lp}(Z)$得到 $H(z)$时，只需简单地用函数$G(z^{-1})$替换 $H_{lp}(Z)$中的每一个 Z^{-1}。这是一种方便的表示方法，因为 $H_{lp}(Z)$往往表示成 Z^{-1}的有理函数。

如果 $H_{lp}(Z)$是一个因果稳定系统的有理系统函数，则我们当然要求变换后的系统函数 $H(z)$为 z^{-1}的有理函数，而且该系统也是因果的和稳定的。因此在进行变换 $Z^{-1}=G(z^{-1})$时有如下的限制：

1. $G(z^{-1})$必须是 z^{-1}的有理函数。
2. Z 平面单位圆的内部必须映射成 z 平面单位圆的内部。
3. Z 平面上的单位圆必须映射成 z 平面上的单位圆。

在本题中，应推导和说明将一个离散时间低通滤波器变换成另一个具有不同截止频率的低通滤波器或一个离散时间高通滤波器的必要的代数变换。

(a) 设 θ 和 ω 分别是 Z 平面和 z 平面上的频率变量(角度)，即在各自的单位圆上 $Z=e^{j\theta}$，$z=e^{j\omega}$。证明，为了使条件 3 成立，$G(z^{-1})$必须是一个全通系统，即

$$|G(e^{j\omega})| = 1 \tag{P7.58-3}$$

(b) 可以证明在满足以上全部 3 个条件 $G(z^{-1})$的最基本的形式为：

$$Z^{-1} = G(z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}} \qquad \text{(P7.58-4)}$$

根据我们在第5章中有关全通系统的讨论中，显然可知(P7.58-4)式中给出的$G(z^{-1})$满足(P7.58-3)式，即$G(z^{-1})$是一个全通系统，因此也满足条件3。显然(P7.58-4)式也满足条件1。证明：当且仅当$|\alpha_k| < 1$时满足条件2。

(c) 一个简单的一阶$G(z^{-1})$可用于将截止频率为θ_p的原型低通滤波器映射成一个截止频率为ω_p的新滤波器$H(z)$。证明：

$$G(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}}$$

当α取某些值时，可以形成所要求的映射。将α作为θ_p和ω_p的函数进行求解。习题7.45用这种方法设计可调整截止频率的低通滤波器。

(d) 考虑$\theta_p = \pi/2$的原型低通滤波器的情况。对下面的每一种α值求变换后滤波器的截止频率ω_p：

(i) $\alpha = -0.2679$。

(ii) $\alpha = 0$。

(iii) $\alpha = 0.4142$。

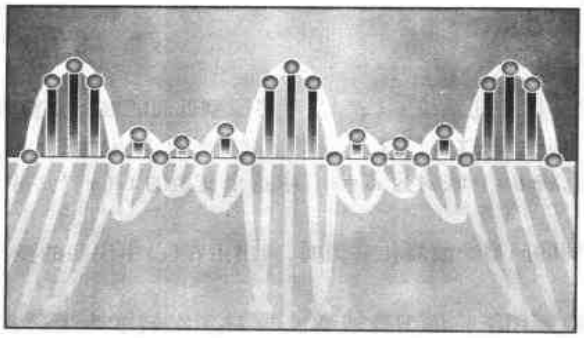
(e) 也有可能找到一个一阶全通系统$G(z^{-1})$，可将原型低通滤波器变换成一个截止频率为ω_p的离散时间高通滤波器。应注意，这样的变换必须将$Z^{-1} = e^{j\theta_p}$映射为$z^{-1} = e^{j\omega_p}$，而且也可将$Z^{-1} = 1$映射为$z^{-1} = -1$；即，将$\theta = 0$映射为$\omega = \pi$。求这个变换的$G(z^{-1})$，并求含有θ_p和ω_p的α的表示式。

(f) 当采用与(d)中相同的原型滤波器和α值时，画出由在(e)中说明的变换得出的高通滤波器的频率响应。

同样，这些变换可用于将原型低通滤波器$H_{lp}(Z)$转变为带通和带阻滤波器，但比较复杂。Constantinides(1970)比较详细地论述了这些变换。

第8章

离散傅里叶变换



8.0 引言

在第 2 章和第 3 章中我们分别讨论了利用傅里叶变换和 z 变换来表示序列和线性时不变系统的方法。对于有限长序列，可以得出另外一种傅里叶表示，称为**离散傅里叶变换**(DFT)。DFT 本身是一个序列，而不是一个连续变量的函数，它相应于对信号的傅里叶变换进行频率的等间隔取样的样本。作为序列的傅里叶表示，DFT 除了在理论上十分重要外，在实现各种数字信号处理算法中还起着核心作用，这是因为存在着计算 DFT 的高效算法。我们将在第 9 章中详细讨论这些算法，并在第 10 章中讨论 DFT 对于谱分析的应用。

虽然可以从几个不同的观点来推导和解释一个有限长序列的 DFT 表示，但是我们还是以周期序列和有限长序列之间的关系为基础进行论述。首先考虑周期序列的傅里叶级数表示。尽管这个表示式本身很重要，但是我们通常仍十分关注将傅里叶级数的结果用于有限长序列的表示上。这可以通过构造一个每个周期都与有限长序列相等的周期序列来实现。我们将会看到，周期序列的傅里叶级数表示相当于有限长序列的 DFT。因而，我们的做法是，首先定义周期序列的傅里叶表示，并研究这种表示的性质，然后基本上重复同样的推导方式，这里假定要表示的序列是有限长序列。这种对于 DFT 的定义方法着重强调了 DFT 表示式基本固有的周期性，并保证在 DFT 的应用中不会忽略这种周期性。

8.1 周期序列的表示：离散傅里叶级数

若考察一个周期为 N 的周期[①] 序列 $\tilde{x}[n]$，则对于任一整数 n 和 r，有 $\tilde{x}[n]=\tilde{x}[n+rN]$。与连续时间周期信号相类似，这一序列可表示为傅里叶级数，该级数相当于成谐波关系的复指数序列之和，也就是说，复指数序列的频率是与周期序列 $\tilde{x}[n]$ 有关的基频 $(2\pi/N)$ 的整数倍。这些周期复指数的形式为

$$c_k[n]=e^{j(2\pi/N)kn}=c_k[n+rN] \tag{8.1}$$

式中 k 为整数，且傅里叶级数表示式具有形式[②]

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn} \tag{8.2}$$

一个连续时间周期信号的傅里叶级数表示，通常需要无穷多个成谐波关系的复指数，而对于任何周期为 N 的离散时间信号的傅里叶级数，只需要 N 个成谐波关系的复指数。要了解这一点，应当注意到在(8.1)式中成谐波关系的复指数 $c_k[n]$ 对于相差为 N 的 k 值均是相同的，即 $c_0[n]=c_N[n]$，$c_1[n]=c_{N+1}[n]$。概括地说，

$$c_{k+lN}[n]=e^{j(2\pi/N)(k+lN)n}=e^{(2\pi/N)kn}e^{j2\pi ln}=e^{(2\pi/N)kn}=c_k[n] \tag{8.3}$$

这里 l 是一个整数。因此，一组 N 个周期复指数 $c_0[n],c_1[n],\cdots,c_{N-1}[n]$ 可以定义所有其它的周期复指数，其频率是 $(2\pi/N)$ 的整数倍。这样，一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数表示只需包含 N 个这样的复指数，所以它具有如下形式：

$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn} \tag{8.4}$$

为了从周期序列 $\tilde{x}[n]$ 中得出傅里叶级数的系数序列 $\tilde{X}[k]$，我们将利用复指数序列集的正交性。给(8.4)式的两边均乘以 $e^{-j(2\pi/N)rn}$，并且从 $n=0$ 到 $n=N-1$ 求和，则可以得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn}=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \tag{8.5}$$

交换等号右边求和的先后次序，(8.5)式就成为

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{j(2\pi/N)rn}=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)(k-r)n}\right] \tag{8.6}$$

下述等式表示复指数的正交性：

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)(k-r)n}=\begin{cases}1, & k-r=mN,\ m\text{ 是整数}\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.7}$$

证明该等式是很容易的(见习题8.51)。将它代入(8.6)式中括号内的求和运算，可得出

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn}=\tilde{X}[r] \tag{8.8}$$

这样通过以下关系式就可以由 $\tilde{x}[n]$ 求出(8.4)式中的傅里叶级数的系数 $\tilde{X}[k]$：

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \tag{8.9}$$

序列 $\tilde{X}[k]$ 是周期为 N 的周期序列，即 $\tilde{X}[0]=\tilde{X}[N]$，$\tilde{X}[1]=\tilde{X}[N+1]$。概括地讲，对于任

① 今后每当需要清楚区分周期序列和非周期序列时，我们就用波纹号 ~ 表示周期序列。

② 为了方便起见，在(8.2)式中乘了一个常数 $1/N$。它也可以放在 $\tilde{X}[k]$ 的定义式中。

意整数 k

$$\tilde{X}[k+N]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)(k+N)n}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\right)e^{-j2\pi n}=\tilde{X}[k]$$

可以把傅里叶级数的系数看作是一个有限长的序列，对于 $k=0,\cdots,(N-1)$，其值由(8.9)式给出，k 为其它数时，其值为零，也可以把它看作是一个对于所有的 k 均由(8.9)式定义的周期序列。很清楚，以上两种解释都是可以接受的，因为在(8.4)式中我们只用到对于 $0\leqslant k\leqslant(N-1)$ 的 $\tilde{X}[k]$ 值。把傅里叶级数的系数 $\tilde{X}[k]$ 当作是一个周期序列的优点是，对于周期序列的傅里叶级数表示，在时域和频域之间存在着对偶性。(8.9)式和(8.4)式在一起就是一个分析/综合对，称为一个周期序列的**离散傅里叶级数**(DFS)表示式。为了表示方便，常常利用复数量来写这两个式子。

$$W_N=e^{-j(2\pi/N)} \tag{8.10}$$

这样 DFS 分析/综合对可表示为

分析式
$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn} \tag{8.11}$$

综合式
$$\tilde{x}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn} \tag{8.12}$$

式中和均为周期序列。有时我们会发现，使用记号

$$\tilde{x}[n]\overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow}\tilde{X}[k] \tag{8.13}$$

来表示关系式(8.11)式和(8.12)式是很方便的。下面的例子将说明这些式子的用途。

例 8.1　周期脉冲串的离散傅里叶级数

考虑一个周期脉冲串

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]=\begin{cases}1, & n-rN,\ r\text{ 为任意整数}\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.14}$$

因为对于 $0\leqslant n\leqslant N-1$，$\tilde{x}[n]=\delta[n]$，所以利用(8.11)式求出 DFS 系数为

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]W_N^{kn}=W_N^0=1 \tag{8.15}$$

在这种情况下，对于所有的 k 值，$\tilde{X}[k]$ 均相同。于是，将(8.15)式代入(8.12)式可以得出表示式

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}e^{j(2\pi/N)kn} \tag{8.16}$$

(注意与(8.7)式所示的正交关系的相似)

例 8.1 利用对复指数求和得出了一个有用的周期脉冲串的表示式，其中所有的复指数均有相同的幅值和相位，并且当整数 n 为 N 的倍数时它们的取值加在一起为 1，而当 n 为其它所有的整数时它们加在一起为零。如果我们仔细研究(8.11)式和(8.12)式就会发现它们非常相似，仅相差一个常数因子和指数的符号。下面的例子将说明周期序列 $\tilde{x}[n]$ 和其傅里叶级数系数 $\tilde{X}[k]$ 之间的对偶性。

例 8.2　离散傅里叶级数的对偶性

这里我们令离散傅里叶级数的系数为周期脉冲串

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} N\delta[k - rN]$$

将 $\tilde{Y}[k]$代入(8.12)式得

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k]W_N^{-kn} = W_N^0 = 1$$

在这种情况下，对于所有的 n，$\tilde{y}[n]=1$。将这一结果与例 8.1 中的 $\tilde{x}[n]$和 $\tilde{X}[k]$的结果相比较，我们会看到 $\tilde{Y}[k]=N\tilde{x}[k]$和 $\tilde{y}[n]=\tilde{X}[n]$。在 8.2.3 节中，我们将说明本例是更广义的对偶性的一种特殊情况。

如果序列 $\tilde{x}[n]$仅在一个周期的部分内等于 1，我们也能得到 DFS 系数的完整表达式。下面的例子说明了这一点。

例 8.3　周期矩形脉冲串的离散傅里叶级数

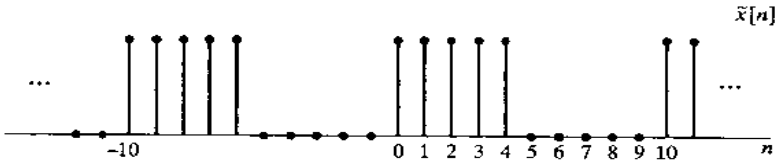


图 8.1　需要计算其傅里叶级数表示的周期序列(周期为 $N=10$)

本例中 $\tilde{x}[n]$为图 8.1 中所示的序列，其中周期是 $N=10$。由(8.11)式，

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi/10)kn} \tag{8.17}$$

这一有限求和有闭合形式

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - W_{10}^{5k}}{1 - W_{10}^{k}} = e^{-j(4\pi k/10)}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)} \tag{8.18}$$

图 8.2 为周期序列 $\tilde{X}[k]$的幅值和相位的示意图。

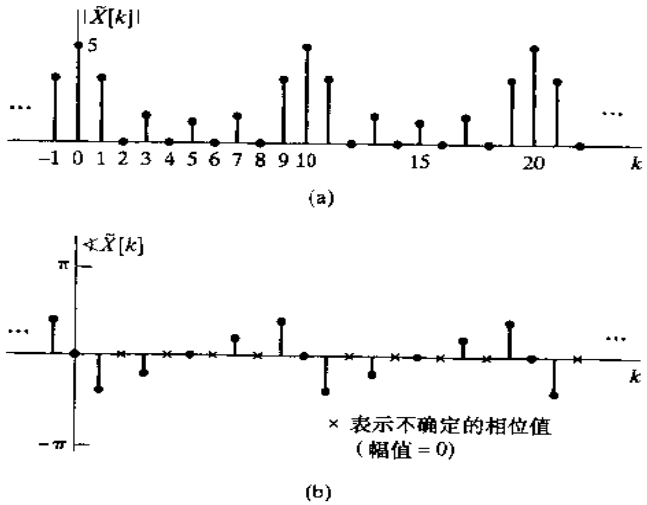


图 8.2　图 8.1 所示序列的傅里叶级数之系数的幅值和相位，$\times$ 表示不确定的相位值(幅值=0)

我们已经说明了任何一个周期序列都可用复指数序列的和来表示。(8.11)式和(8.12)式总结了这一重要特性。我们将会看到，这些关系正是与有限长序列有关的 DFT 的基础。然而在讨论 DFT 之前，我们先要考虑周期序列 DFS 表示的一些性质，然后再说明如何利用周期信号的 DFS 表示形式来得到其傅里叶变换的表示。

8.2　离散傅里叶级数的性质

正如连续时间信号的傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换，以

及离散时间非周期序列的 z 变换一样，离散时间傅里叶级数的某些性质对于它在信号处理问题中的成功使用至关重要。本节中我们将总结这些重要性质。许多基本性质与 z 变换和傅里叶变换相似，这一点并不奇怪。但是，我们将明确地指出那些由于 $\tilde{x}[n]$ 和 $\tilde{X}[k]$ 二者都具有的周期性所引起的一些重要差别。另外，在 DFS 表示式中时域和频域之间存在着完全的对偶性，而在序列的傅里叶变换和 z 变换的表示式中这一点却不存在。

8.2.1 线性

考虑两个周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$，其周期均为 N，若

$$\tilde{x}_1[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_1[k] \tag{8.19a}$$

和

$$\tilde{x}_2[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_2[k] \tag{8.19b}$$

则

$$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k] \tag{8.20}$$

这一线性性质可以由(8.11)式和(8.12)式直接得出。

8.2.2 序列的移位

如果周期序列 $\tilde{x}[n]$ 具有傅里叶系数 $\tilde{X}[k]$，则 $\tilde{x}[n-m]$ 是 $\tilde{x}[n]$ 移位后的形式，且

$$\tilde{x}[n-m] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} W_N^{km}\tilde{X}[k] \tag{8.21}$$

这个性质的证明在习题 8.52 中考虑。任何大于或等于周期的移位(即 $m \geqslant N$)，在时域上都无法与如 $m = m_1 + m_2N$ 的较短的移位 m_1 区分开来，其中 m_1 和 m_2 均为整数，且 $0 \leqslant m_1 \leqslant N-1$(说明这一点的另一种方式是 $m_1 = m[\mathrm{mod}N]$，或等效的 m_1 是 m 被 N 除的余数)。利用 m 的表示式很容易证明，$W_N^{km} = W_N^{km_1}$。也就是说，在时域上移位的不确定性也必定会在频域的表示式中显示出来。

由于周期序列的傅里叶级数的系数序列也是一个周期序列，类似的结果也可以用于傅里叶系数的移位，若它为整数 l，则有

$$W_N^{nl}\tilde{x}[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k-l] \tag{8.22}$$

应当注意到在(8.21)式和(8.22)式中指数符号的差别。

8.2.3 对偶性

因为连续时间的傅里叶分析和综合方程式之间极为相似，所以在时域和频域之间存在着对偶性。然而，对于非周期信号的离散时间傅里叶变换并不存在类似的对偶性，这是由于非周期信号和它的傅里叶变换是两类十分不同的函数。自然，非周期离散时间信号是非周期序列，而它的傅里叶变换总是连续频率变量的周期函数。

由(8.11)式和(8.12)式我们可以看到，DFS 分析式和综合式的差别仅在于一个 $1/N$ 因子和 W_N 指数的符号。另外，周期序列和它的 DFS 系数为同类函数，均为周期序列。特别是，考虑到因子 $1/N$ 以及(8.11)式和(8.12)式之间指数符号的差别，由(8.12)式可得

$$N\tilde{x}[-n] = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{kn} \tag{8.23}$$

或者将(8.23)式中的 n 和 k 互换，有

$$N\tilde{x}[-k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{X}[n]W_N^{nk} \tag{8.24}$$

我们看到，(8.24)式与(8.11)式相似。换句话说，周期序列 $\tilde{X}[n]$ 的 DFS 系数序列是 $N\tilde{x}[-k]$，即倒序后的原周期序列并乘以 N。该对偶性概括如下：若

$$\tilde{x}[n]\overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow}\tilde{X}[k] \tag{8.25a}$$

则

$$\tilde{X}[n]\overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow}N\tilde{x}[-k] \tag{8.25b}$$

8.2.4 对称性

正如我们在 2.8 节中所讨论的，非周期序列的傅里叶变换具有一些有用的对称性。一个周期序列的 DFS 表达式有同样重要的对称性。与第 2 章中推导的做法类似，这些特性的推导将留作习题(见习题 8.53)。所得结果作为性质 9～17 列于 8.2.6 节的表 8.1 中。

8.2.5 周期卷积

设 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$ 为两个周期均为 N 的周期序列，它们的离散傅里叶级数的系数分别记为 $\tilde{X}_1[k]$ 和 $\tilde{X}_2[k]$。如果将其相乘

$$\tilde{X}_3[k]=\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] \tag{8.26}$$

则以 $\tilde{X}_3[k]$ 为傅里叶级数系数的周期序列 $\tilde{x}_3[n]$ 为

$$\tilde{x}_3[n]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m] \tag{8.27}$$

这个结果并不意外，因为先前有关变换的知识告诉我们，频域函数的乘积对应于时域函数的卷积，并且(8.27)式看上去很像卷积和。(8.27)式对 $\tilde{x}_1[m]$ 和 $\tilde{x}_2[n-m]$ 乘积进行求和，其中 $\tilde{x}_2[n-m]$ 是将 $\tilde{x}_2[n]$ 时间反转并移位，和非周期离散卷积相同。但是(8.27)式中的序列均为周期的，周期为 N，求和只在一个周期上进行。(8.27)式表示的卷积称为**周期卷积**。正如非周期卷积一样，周期卷积是可交换的，即

$$\tilde{x}_3[n]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2[m]\tilde{x}_1[n-m] \tag{8.28}$$

为了说明由(8.26)式给出的 $\tilde{X}_3[k]$ 是与(8.27)式给出的 $\tilde{x}_3[n]$ 相对应的傅里叶系数序列，我们首先把 DFS 分析式(8.11)式用于(8.27)式，得

$$\tilde{X}_3[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]\right)W_N^{kn} \tag{8.29}$$

交换求和次序后，上式变为

$$\tilde{X}_3[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\left(\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2[n-m]W_N^{kn}\right) \tag{8.30}$$

对 n 的内求和是移位序列 $\tilde{x}_2[n-m]$ 的 DFS，因此由 8.2.2 节的移位特性，可得

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}_2[n-m]W_N^{kn}=W_N^{km}\tilde{X}_2[k]$$

上式代入(8.30)式，有

$$\tilde{X}_3[k]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]W_N^{km}\tilde{X}_2[k]=\left(\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]W_N^{km}\right)\tilde{X}_2[k]=\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] \quad (8.31)$$

总之

$$\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]\overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow}\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] \quad (8.32)$$

周期序列的周期卷积对应于与之相应的傅里叶级数系数序列的乘积。

因为周期卷积与非周期卷积有些不同，这就有必要研究一下计算(8.27)式的详细步骤。首先注意到(8.27)式要求进行 $\tilde{x}_1[m]$ 和 $\tilde{x}_2[n-m]=\tilde{x}_2[-(m-n)]$ 的乘积，将其当作 m 的函数，n 为定值。这与非周期卷积相同，但有以下两点主要差别：

1. 在有限区间 $0\leqslant m\leqslant N-1$ 上求和；

2. 对于在区间 $0\leqslant m\leqslant N-1$ 以外的 m 值，$\tilde{x}_2[n-m]$ 的值在该区间上周期的重复。下面的例子将说明这些细节。

例 8.4　周期卷积

图 8.3 举例说明形成与(8.27)式对应的两个周期序列的周期卷积的过程，在图中我们示出了序列 $\tilde{x}_2[m]$，$\tilde{x}_1[m]$，$\tilde{x}_2[-m]$，$\tilde{x}_2[1-m]=\tilde{x}_2[-(m-1)]$ 和 $\tilde{x}_2[2-m]=\tilde{x}_2[-(m-2)]$。例如，为了计算当 $n=2$ 时(8.27)式中的 $\tilde{x}_3[n]$，我们把 $\tilde{x}_1[m]$ 与 $\tilde{x}_2[2-m]$ 相乘，然后对于 $0\leqslant m\leqslant N-1$，将乘积项 $\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[2-m]$ 求和，从而得出 $\tilde{x}_3[2]$。随着 n 的改变，序列 $\tilde{x}_2[n-m]$ 适当移位，对于

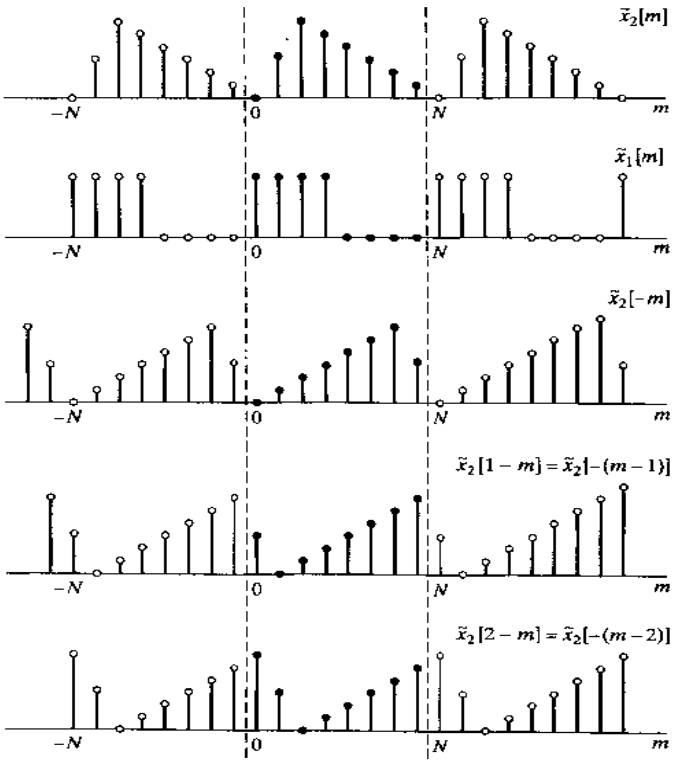


图 8.3　形成两个周期序列的周期卷积的过程

$0 \leqslant n \leqslant N-1$ 的每一个值，计算(8.27)式。应当注意到，由于周期性，当序列 $\tilde{x}_2[n-m]$ 移向右边或左边时，离开两条虚线之间的区间一端的值又会出现在另一端。因为 $\tilde{x}_3[n]$ 的周期性，没有必要继续计算(8.27)式在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 之外的值。

对偶定理(8.2.3 节)指出，若时间和频率交换一下，我们将得到一个与前面几乎相同的结果。这就是说，若周期序列

$$\tilde{x}_3[n] = \tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n] \tag{8.33}$$

其中 $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_2[n]$ 均为周期序列(周期为 N)，则 $\tilde{x}_3[n]$ 的离散傅里叶级数的系数为

$$\tilde{X}_3[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1[l]\tilde{X}_2[k-l] \tag{8.34}$$

等于 $\tilde{X}_1[k]$ 和 $\tilde{X}_2[k]$ 的周期卷积乘以 $1/N$。这一结果也可以通过将(8.34)式给出的 $\tilde{X}_3[k]$ 代入傅里叶级数关系式(8.12)式而得到 $\tilde{x}_3[n]$ 来加以证明。

8.2.6 周期序列 DFS 表示的性质汇总

本节讨论的离散傅里叶级数表示的有关性质汇总于表 8.1。

表 8.1

周期序列(周期为 N)	DFS 的系数(周期为 N)
1. $\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$(周期为 N 的周期序列)
2. $\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$(周期为 N 的周期序列)
3. $a\tilde{x}_1[n]+b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k]+b\tilde{X}_2[k]$
4. $\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
5. $\tilde{x}[n-m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
6. $W_N^{-ln}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k-l]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$(周期卷积)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
8. $\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1[l]\tilde{X}_2[k-l]$(周期卷积)
9. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
10. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
11. $\mathrm{Re}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k]=\frac{1}{2}(\tilde{X}[k]+\tilde{X}^*[-k])$
12. $j\,\mathrm{Im}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k]=\frac{1}{2}(\tilde{X}[k]-\tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[n]=\frac{1}{2}(\tilde{x}[n]+\tilde{x}^*[-n])$	$\mathrm{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[n]=\frac{1}{2}(\tilde{x}[n]-\tilde{x}^*[-n])$	$j\,\mathrm{Im}\{\tilde{X}[k]\}$

续表 8.1

周期序列(周期为 N)	DFS 的系数(周期为 N)
性质 15～17 只适用于 $x[n]$为实数的情况	
15. 对称性质	$\begin{cases}\tilde{X}[k]=\tilde{X}^*[-k]\\ \mathrm{Re}\{\tilde{X}[k]\}=\mathrm{Re}\{\tilde{X}[-k]\}\\ \mathrm{Im}\{\tilde{X}[k]\}=-\mathrm{Im}\{\tilde{X}[-k]\}\\ \lvert\tilde{X}[k]\rvert=\lvert\tilde{X}[-k]\rvert\\ \angle\tilde{X}[k]=-\angle\tilde{X}[-k]\end{cases}$
16. $\tilde{x}_e[n]=\frac{1}{2}(\tilde{x}[n]+\tilde{x}[-n])$	$\mathrm{Re}\{\tilde{X}[k]\}$
17. $\tilde{x}_o[n]=\frac{1}{2}(\tilde{x}[n]-\tilde{x}[-n])$	$j\,\mathrm{Im}\{\tilde{X}[k]\}$

8.3 周期信号的傅里叶变换

正如 2.7 节中所讨论的，一个序列的傅里叶变换的一致收敛要求该序列是绝对可加的，均方收敛要求该序列是平方可加的。周期序列均不满足这两个条件，因为当 $n\to\pm\infty$时序列不趋近于零。然而，正像我们在 2.7 节中简要讨论的，若序列能表示成复指数的和，则它可以具有形式如(2.152)式的傅里叶变换表示，即可以看作是一个脉冲串。类似地，将周期信号的离散傅里叶级数表示归并入傅里叶变换的框架内常常是有益的。如将周期信号的傅里叶变换看作是频域的脉冲幅值正比于序列的 DFS 系数的一个脉冲串，就可以实现这一点。特别是，如果 $\tilde{x}[n]$是周期的，周期是 N，并且所对应的离散傅里叶级数的系数为 $\tilde{X}[k]$，则 $\tilde{x}[n]$的傅里叶变换定义为脉冲串

$$\tilde{X}(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right) \tag{8.35}$$

注意，$\tilde{X}(e^{j\omega})$必然是周期的，周期为 2π，这是因为 $\tilde{X}[k]$是周期的，周期为 N，并且脉冲间的间隔 $2\pi/N$ 是的整数倍，其中 N 为整数。为了证明由(8.35)式定义的 $\tilde{X}(e^{j\omega})$是周期序列$\tilde{x}[n]$的傅里叶变换表示，我们把(8.35)式代入傅里叶变换式(2.133)式，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon}\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}d\omega \tag{8.36}$$

其中ϵ满足不等式 $0<\epsilon<(2\pi/N)$。回想一下在计算傅里叶反变换时，因为被积分函数 $\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ 是周期的，且周期为 2π，所以我们可以在长度为 2π 的**任意**区间上积分。在(8.36)式中积分限写作 $0-\epsilon$ 和 $2\pi-\epsilon$，这意味着积分是从正好在 $\omega=0$ 之前开始，到正好在 $\omega=2\pi$ 之前结束。这种积分限是比较方便的，因为它们包括了在 $\omega=0$ 处的脉冲，而不包括在 $\omega=2\pi$ 处的脉冲。交换积分和求和的先后次序，得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon}\tilde{X}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega&=\frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}[k]\int_{0-\epsilon}^{2\pi-\epsilon}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)e^{j\omega n}d\omega\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}\end{aligned} \tag{8.37}$$

得出(8.37)式最后的形式是由于在 $\omega=0-\epsilon$ 至 $\omega=2\pi-\epsilon$ 的区间内只包括对应于 $k=0,1,\cdots,$

$(N-1)$的脉冲。

比较(8.37)式和(8.12)式,(8.37)式等号右边与(8.12)式所示的 $\tilde{x}[n]$的傅里叶表示完全相同。因此,(8.35)式中脉冲串的傅里叶反变换正是所要的周期信号 $\tilde{x}[n]$。

虽然周期序列的傅里叶变换在通常意义下是不收敛的,但是引入了脉冲函数后,我们可以将周期序列纳入傅里叶变换分析的框架内。这种方法在第 2 章中也曾使用过,得出如双边常数序列(例 2.23)或复指数序列(例 2.24)之类的其它不可加序列的傅里叶变换表示。尽管离散傅里叶级数表示适用于大多数场合,但是(8.35)式的傅里叶变换表示有时可得出比较简单或简洁的表示式,并且可使分析简化。

例 8.5　周期脉冲串的傅里叶变换

考虑一个与例 8.1 中周期序列 $\tilde{x}[n]$相同的周期脉冲串

$$\tilde{p}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN] \tag{8.38}$$

由例 8.1 的结果可知,对所有的 k 有

$$\tilde{P}[k]=1,\quad \text{对所有的 } k \tag{8.39}$$

因此 $\tilde{p}[n]$的傅里叶变换为

$$\tilde{P}(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right) \tag{8.40}$$

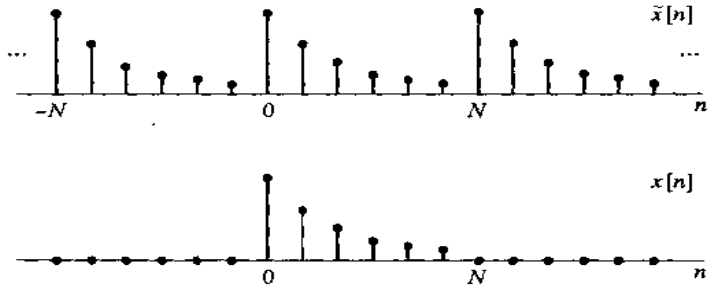


图 8.4　周期序列 $\tilde{x}[n]$是将有限长序列 $x[n]$周期重复而得到的。换句话说,在一个周期上 $x[n]=\tilde{x}[n]$,而在其它区间上 $x[n]$为零

例 8.5 的结果给出了有关周期信号和有限长信号之间联系的一种有益的解释。考虑一个有限长信号 $x[n]$,如在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 区间之外 $x[n]=0$,且它与例 8.5 中周期脉冲串 $\tilde{p}[n]$的卷积为

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n]&=x[n]*\tilde{p}[n]=x[n]*\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN]\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN]\end{aligned} \tag{8.41}$$

(8.41)式表明 $\tilde{x}[n]$是由一组有限长序列 $x[n]$的周期重复序列组成的。图 8.4 说明如何通过(8.41)式由一个有限长序列 $x[n]$得到一个周期序列 $\tilde{x}[n]$。$x[n]$的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$,且 $\tilde{x}[n]$的傅里叶变换是

$$\begin{aligned}\tilde{X}(e^{j\omega})&=X(e^{j\omega})\tilde{P}(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{N}X(e^{j(2\pi/N)k})\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)\end{aligned} \tag{8.42}$$

比较(8.42)式和(8.35)式,我们得出

$$\tilde{X}[k]=X(e^{j(2\pi/N)k})=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} \tag{8.43}$$

换句话说,具有如(8.11)式所示的 DFS 系数的周期序列 $\tilde{X}[k]$可以看做是有限长序列傅里叶

变换的等间隔采样，该有限长序列是 $\tilde{x}[n]$的一个周期，即

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.44}$$

这也与图 8.4 相符，图中清楚的表明 $x[n]$可利用(8.44)式由 $\tilde{x}[n]$得出。我们也可用另一种方法来证明(8.43)式。因为当 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 时，$x[n]=\tilde{x}[n]$，否则 $x[n]=0$，则

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\omega n} \tag{8.45}$$

比较(8.45)式和(8.11)式，我们又一次得出

$$\tilde{X}[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N} \tag{8.46}$$

这对应于在 $\omega=0$ 和 $\omega=2\pi$ 之间的 N 个等间隔频率点上以 $2\pi/N$ 为间隔，对傅里叶变换进行采样。

例 8.6　傅里叶级数系数与一个周期的傅里叶变换之间的关系

我们再次研究图 8.1 所示的例 8.3 中的序列 $\tilde{x}[n]$。图 8.1 中序列 $\tilde{x}[n]$的一个周期为

$$x[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.47}$$

$\tilde{x}[n]$一个周期的傅里叶变换如下式：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{4}e^{-j\omega n}=e^{j2\omega}\frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \tag{8.48}$$

可以证明在本例中，将 $\omega=2\pi k/10$ 代入(8.48)式后，可以满足(8.46)式，且

$$\tilde{X}[k]=e^{-j(4\pi k/10)}\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}$$

上式与(8.18)式的结果相同。$X(e^{j\omega})$的幅度和相位如图 8.5 所示。注意，相位在 $X(e^{j\omega})=0$ 的频率点是不连续的。图 8.2(a)和(b)的序列分别对应于图 8.5(a)和(b)的样本，如图 8.6 所示，其中图 8.2 和 8.5 叠加在一起。

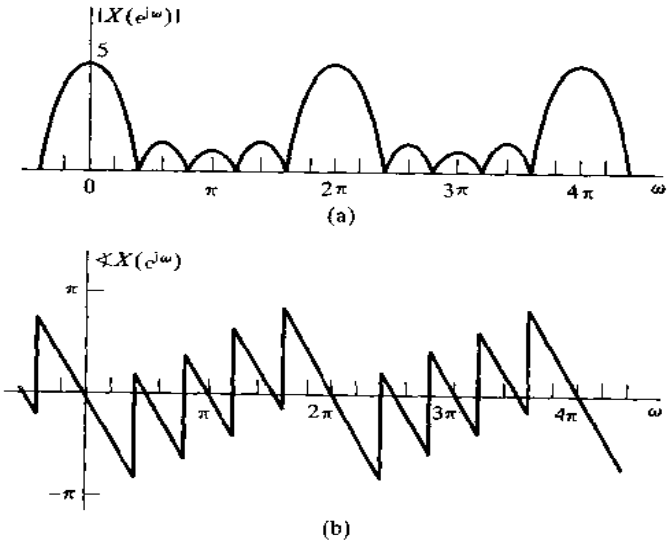
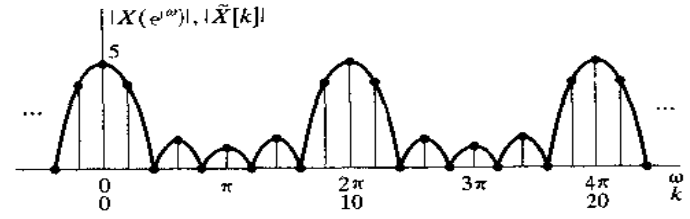
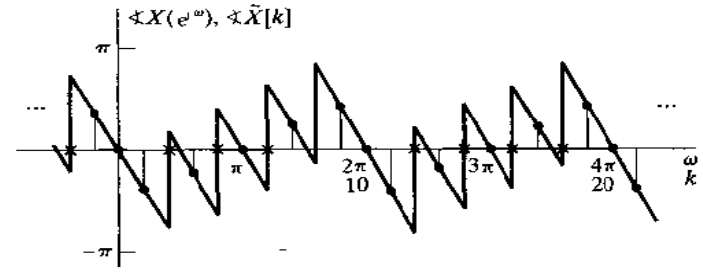


图 8.5　图 8.1 所示序列一个周期的傅里叶变换的幅度和相位



(a)



(b)

图 8.6　将图 8.2 和图 8.5 重叠在一起，说明一个周期序列的 DFT 的系数正是一个周期的傅里叶变换的样本

8.4　对傅里叶变换采样

在这一节中我们讨论非周期序列和周期序列之间更一般的关系，前者具有傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$的形式，后者的 DFS 系数对应于 $X(e^{j\omega})$在频率上等间隔的采样。我们将会发现，在本章后面讨论离散傅里叶变换及其性质时，这一关系是非常重要的。

考虑一个非周期序列 $x[n]$，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，且假定序列 $\tilde{X}[k]$是通过对$X(e^{j\omega})$在$\omega_k = 2\pi k/N$ 频率处采样得到的，即

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = X(e^{j(2\pi/N)k}) \quad (8.49)$$

因为傅里叶变换是 ω 的周期函数，周期为 2π，所以得出的序列是 k 的周期函数，周期为 N。同样，因为傅里叶变换等于 z 变换在单位圆上的值，所以 $\tilde{X}[k]$也可以由在单位圆的 N 个等间隔的点上对 $X(z)$采样得到的。这样有

$$\tilde{X}[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} = X(e^{j(2\pi/N)k}) \quad (8.50)$$

在图 8.7 中绘出了 $N=8$ 时的这些采样点。由于 N 个点是从 0°开始等间隔分布的，所以，从图中可以清楚地看出，样本序列是周期的，因此在区间 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 之外随着 k 的变化会重复同样的序列。

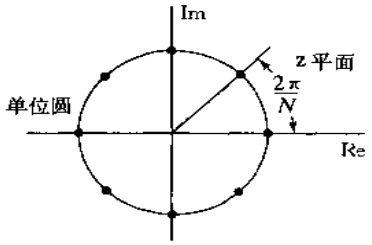


图 8.7　在单位圆上对 $X(z)$进行采样的点，从而得出周期序列 $\tilde{X}[k]$($N=8$)

我们看到，样本序列 $\tilde{X}[k]$是周期序列，周期为 N，它可以是一个序列 $\tilde{x}[n]$的离散傅里叶级数的系数序列。为了得到这个序列，我们可以简单地将 $\tilde{X}[k]$代入(8.12)式：

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{kn} \tag{8.51}$$

因为我们已经假定存在 $x[n]$的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j\omega m} \tag{8.52}$$

将(8.52)式代入(8.49)式，然后将所得出的 $\tilde{X}[k]$的表示式代入(8.51)式，于是得

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j(2\pi/N)km}\right]W_N^{-kn} \tag{8.53}$$

交换求和先后次序，上式成为

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m)}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\tilde{p}[n-m] \tag{8.54}$$

由(8.7)式或(8.16)式可知，(8.54)式括号中的项可看作例 8.1 和例 8.2 中周期脉冲串的傅里叶级数表示，特别是，

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{-k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-rN] \tag{8.55}$$

和由此得出的

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN] \tag{8.56}$$

式中 * 表示非周期卷积。就是说，$\tilde{x}[n]$是周期序列，因为它是 $x[n]$与一个周期单位脉冲串的非周期卷积的结果。这样，与 $\tilde{X}[k]$对应的周期序列 $\tilde{x}[n]$是把无数多个平移后的 $x[n]$加在一起而形成的，$\tilde{X}[k]$是对 $X(e^{j\omega})$采样而得到的。移位可以是 N 的正整数倍或负整数倍，N 为序列 $\tilde{X}[k]$的周期。图 8.8 举例说明了这一点。在图中，$x[n]$为长度为 9 的序列，在

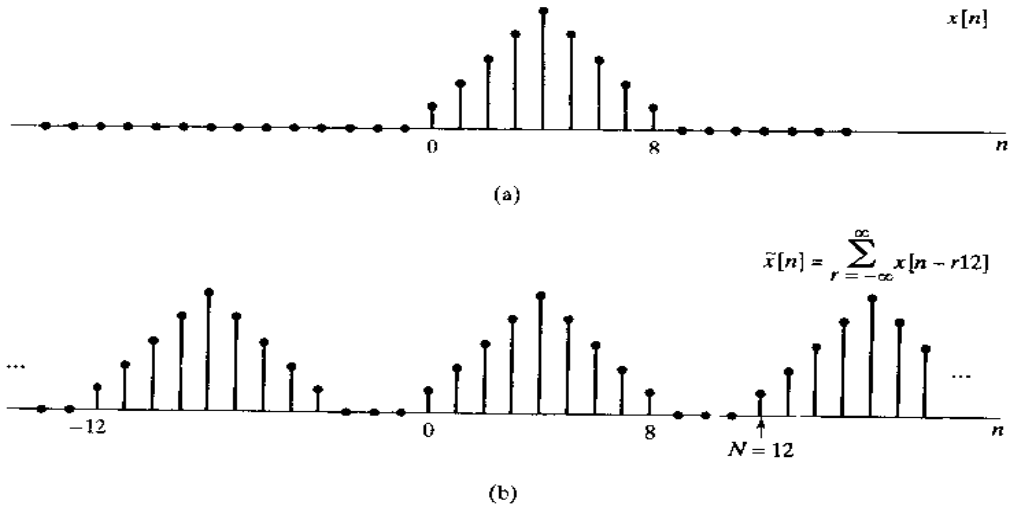


图 8.8 (a) 有限长序列 $x[n]$；(b) 对应于取 $N=12$ 时对 $x[n]$的傅里叶变换采样的周期序列 $\tilde{x}[n]$

(8.56)式中 $N=12$。结果，延迟后的 $x[n]$序列没有重叠在一起，并且周期序列 $\tilde{x}[n]$的一个周期就是 $x[n]$。这与8.3节中的讨论相符，在例8.6中我们曾证明了一个周期序列的傅里叶级数系数就是一个周期上的傅里叶变换的样本值。在图8.9中使用相同的序列 $x[n]$，但此时 $N=7$。在这种情况下平移后的 $x[n]$序列相互重叠，可是 $\tilde{x}[n]$的一个周期不再与 $x[n]$的周期相同。然而，在这两种情况下(8.49)式仍然成立，也就是说，在这两种情况下，$\tilde{x}[n]$的DFS系数都是 $x[n]$的傅里叶变换在频率 $2\pi/N$ 整数倍的等间隔点上的采样值。这一讨论使我们联想起在第4章中有关采样的讨论。不同的是，这里我们是在频域上采样，而不是在时域上。但是，数学表示大体上是十分相似的。

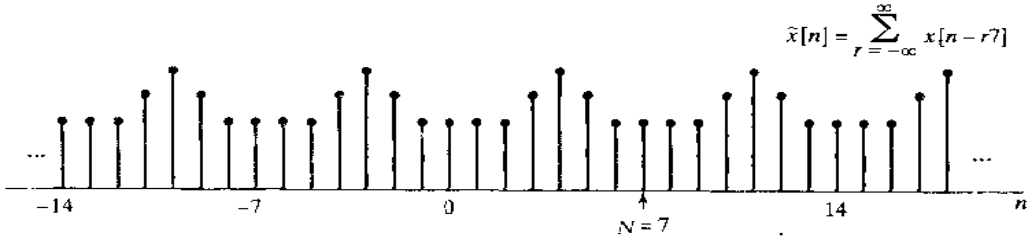


图8.9 对应于取 $N=7$ 时对图8.8(a)中的 $x[n]$的傅里叶变换采样的周期序列 $\tilde{x}[n]$

对于在图8.8中的例子，原来的序列 $x[n]$可以从 $\tilde{x}[n]$中抽取出一个周期而恢复。同样，傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$也可以从频率上以 $2\pi/12$ 等间隔的采样来恢复。与之相反，在图8.9中的 $x[n]$不能用取出 $\tilde{x}[n]$一个周期的方法来恢复，同样，如果采样间隔只有 $2\pi/7$，$X(e^{j\omega})$也不能由它的采样来恢复。实际上，对于图8.8中所说明的情况，已经用足够小的间隔(在频率上)对 $x[n]$的傅里叶变换采样，以便能够由这些样本来恢复该变换，而图8.9表示一种对傅里叶变换欠采样的情况。在欠采样的情况下，$x[n]$和 $\tilde{x}[n]$的一个周期之间的关系可以认为是在时域产生混叠的一种形式，基本上等同于频域的混叠(在第4章中曾讨论过)，它是由时域的欠采样所引起的。显然，只要 $x[n]$为有限长，时域混叠就可避免，正如信号的傅里叶变换只要是带宽有限的，其频域混叠也可以避免。

这段讨论强调了几个重要的概念，它们将在本章的后续部分中起着重要的作用。我们已经看到，可以把一个非周期序列 $x[n]$的傅里叶变换的采样看做是通过将 $x[n]$周期重复而得到的一个周期序列 $\tilde{x}[n]$的DFS的系数。如果 $x[n]$为有限长，并且我们取其傅里叶变换足够多的等间隔采样值(特别是，个数大于或等于 $x[n]$的长度)，则傅里叶变换是可以由这些采样值来恢复的，同样 $x[n]$可以由如下关系来恢复：

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.57}$$

可以推导出 $X(e^{j\omega})$及其采样 $\tilde{X}[k]$之间的直接关系，即对于 $X(e^{j\omega})$的内插公式(见习题8.54)。然而，以上讨论的基本点是，如果 $x[n]$为有限长，要表示或恢复 $x[n]$就没有必要知道在所有频率处的 $X(e^{j\omega})$值。若给出一个有限长序列 $x[n]$，就能按(8.56)式形成一个周期序列，也就能用傅里叶级数来表示。另外，若给出傅里叶系数 $\tilde{X}[k]$，我们就可以求出 $\tilde{x}[n]$，然后利用(8.57)式得到 $x[n]$。当利用傅里叶级数以这种方式来表示有限长序列时，就将它成为离散傅里叶变换(DFT)。在推导、讨论和应用DFT时，始终应记住十分重要的一点：通过

傅里叶变换的采样值来表示，实际上是利用一个周期序列来表示有限长序列，该周期序列的一个周期正是我们要表示的有限长序列。

8.5 有限长序列的傅里叶表示：离散傅里叶变换

在这一节我们用公式来描述上一节末所建议的观点。首先，我们来研究一个有 N 个样本的有限长序列 $x[n]$，在 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 之外 $x[n]=0$。在许多情况下，我们都假设一个序列长度为 N，即使它的长度为 $M \leqslant N$。在这种情况下，我们只是认为最后 $(N-M)$ 个样本值为零。对于每一个长度为 N 的有限长序列，我们总可以与一个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 联系起来，$\tilde{x}[n]$ 由下式给出：

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] \tag{8.58a}$$

有限长序列 $x[n]$ 可以通过(8.57)式由 $\tilde{x}[n]$ 来恢复，即

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.58b}$$

由 8.4 节使我们想到，$\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数是 $x[n]$ 的傅里叶变换的采样(频率间隔为 $2\pi/N$)。因为假定 $x[n]$ 为有限长 N，所以对于不同的 r 值，在 $x[n-rN]$ 各项之间没有重叠。这样，(8.58a)式可以写成另一种形式

$$\tilde{x}[n] = x[n \text{ 以 } N \text{ 为模}] \tag{8.59}$$

为了方便起见，我们用符号 $((n))_N$ 表示(n 以 N 为模)；利用这种符号，(8.59)式可以表示为

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \tag{8.60}$$

注意，只有当 $x[n]$ 的长度小于或等于 N 时，(8.60)式才与(8.58a)式等价。有限长序列 $x[n]$ 是由 $\tilde{x}[n]$ 取出一个周期而得到的，如(8.59b)式。

将(8.59)式形象化的一种非正式且有用的方式是，可以想象成把有限长序列 $x[n]$ 缠绕在一个周长等于序列长度的圆柱体上。如果重复地转动圆柱体的圆周，我们就会看到有限长序列周期的重复着。利用这种解释，用一个周期序列来表示有限长序列就相当于把该序列围绕着这种圆柱体缠绕。使用(8.58b)式可以把从周期序列恢复有限长序列形象化的变成把圆柱体展开并将它铺平，以便使序列显示在线性时间轴上，而不是在循环(以 N 为模的)时间轴上。

正如在 8.1 节中所定义的，周期序列 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数的系数 $\tilde{X}[k]$ 本身是一个周期为 N 的周期序列。为了保持时域和频域之间的对偶性，我们将把与有限长序列相联系的傅里叶系数选取为与 $\tilde{X}[k]$ 的一个周期相对应的有限长序列。这个有限长序列 $X[k]$ 称为离散傅里叶变换(DFT)。因此 DFT，$X[k]$，与 DFS 系数 $\tilde{X}[k]$ 有如下关系：

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k], & 0 \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.61}$$

和

$$\tilde{X}[k] = X[(k \text{ 以 } N \text{ 为模})] = X[((k))_N] \tag{8.62}$$

由 8.1 节知，$\tilde{X}[k]$ 和 $\tilde{x}[n]$ 由下式相联系：

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \tag{8.63}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-kn} \tag{8.64}$$

因为在(8.63)式和(8.64)式中的求和只涉及零到$(N-1)$这一区间，所以由(8.58b)式至(8.64)式可得

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, & 0 \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.65}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.66}$$

通常 DFT 的分析式和综合式为

分析式
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \tag{8.67}$$

综合式
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \tag{8.68}$$

就是说，这意味着如下事实：对于在区间$0 \leqslant k \leqslant N-1$之外的$k$，$X[k]=0$。而且，对于在区间$0 \leqslant n \leqslant N-1$之外的$n$，$x[n]=0$，但这一点并不总是明显地说出来。由(8.67)式和(8.68)式所表示的$x[n]$和$X[k]$之间的关系有时记作

$$x[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} X[k] \tag{8.69}$$

对于有限长序列用(8.67)式和(8.68)式的形式来改写(8.11)式和(8.12)式，并没有消除固有的周期性。如同 DFS 一样，DFT $X[k]$等于周期的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$的采样，并且若对于在区间$0 \leqslant n \leqslant N-1$之外的$n$值来计算(8.68)式，其结果并不为零，而是$x[n]$的周期延拓。固有的周期性总是存在的。虽然有时候它使我们感到棘手，有时候对我们有用，但是将它完全忽略掉将要引起麻烦。在定义 DFT 表示式时，我们仅仅认为，我们**感兴趣**的$x[n]$值只是在区间$0 \leqslant n \leqslant N-1$内，因为$x[n]$在该区间外的确为零，并且认为所**感兴趣**的$X[k]$值也只是在$0 \leqslant k \leqslant N-1$内，因为在(8.68)式中只需要这些值。

例 8.7　矩形脉冲的 DFT

为了说明有限长序列的 DFT，考虑图 8.10(a)所示$x[n]$。在确定 DFT 时，我们可以将$x[n]$看作是一个长度$N \geqslant 5$的任意有限长序列。设想$x[n]$为长度$N=5$的序列，周期序列$\tilde{x}[n]$如图 8.10(b)所示，$\tilde{x}[n]$的 DFS 与$x[n]$的 DFT 相对应。因为在图 8.10(b)中的序列在区间$0 \leqslant n \leqslant 4$上为常数值，所以可以得出

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} e^{-j(2\pi k/5)n} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(2\pi k/5)}}$$

$$= \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \cdots \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.70}$$

也就是说，只有在$k=0$和$k=5$的整数倍处才有非零的 DFS 系数$\tilde{X}[k]$值(这些所有的非零系数表示相同的复指数频率)。这些 DFS 系数如图 8.10(c)所示。而且图 8.10(c)所表示的是傅里叶变换的幅值$|X(e^{j\omega})|$。很清楚，$\tilde{X}[k]$就是$X(e^{j\omega})$在频率$\omega_k = 2\pi k/5$处的样本序列。按照(8.61)式，

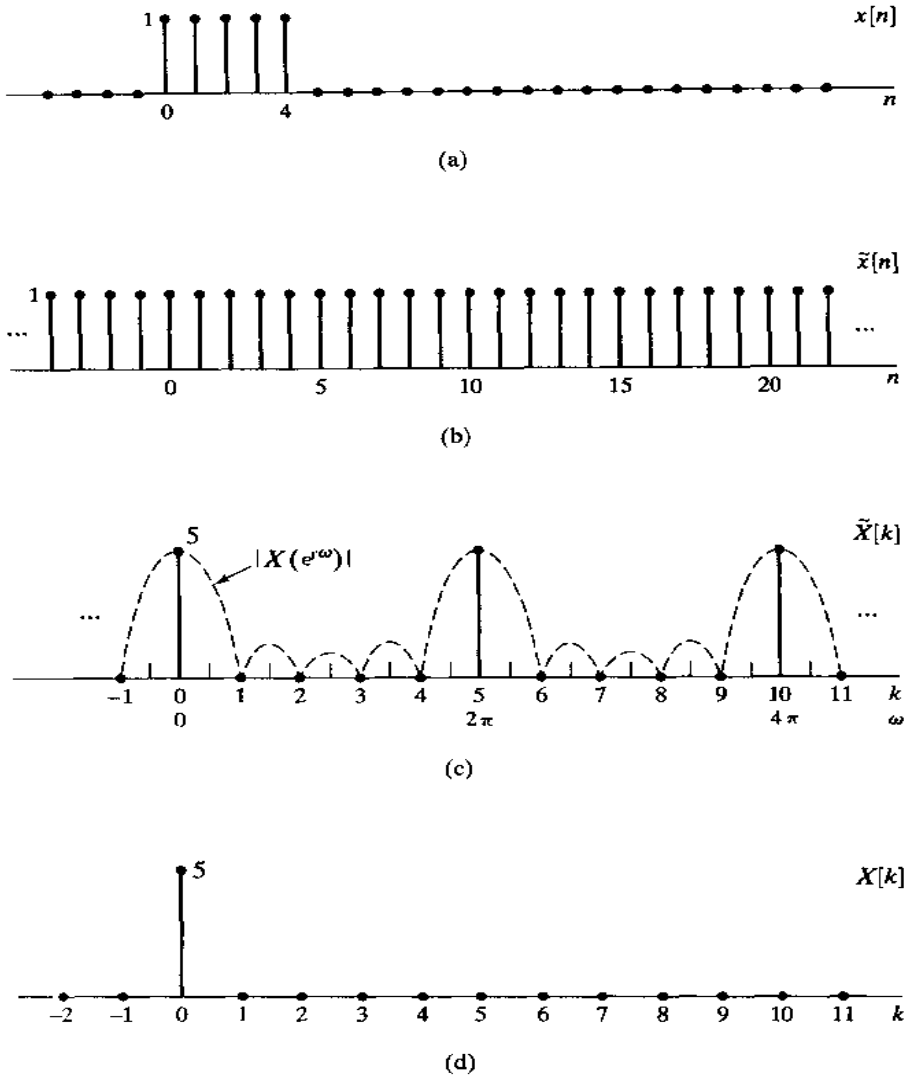


图 8.10　DFT 的举例说明

(a) 有限长序列 $x[n]$；(b) 由 $x[n]$形成的周期 $N=5$ 的周期序列；

(c) 对应于 $\tilde{x}[n]$的傅里叶级数系数 $\tilde{X}[k]$；(d) $x[n]$的 DFT

$x[n]$ 的 5 点 DFT 对应于抽取 $\tilde{X}[k]$的一个周期而得到的有限长序列。这样，$x[n]$的 5 点 DFT 如图 8.10(d)所示。

如果我们考虑将 $x[n]$换成长度 $N=10$ 的序列，则基本的周期序列如图 8.11(b)所示，它正是例 8.3 中所用到的周期序列。因此，$\tilde{X}[k]$正如在图 8.2 和图 8.6 所画的那样。而且图 8.11(c)和图 8.11(d) 所示的 10 点 DFT $X[k]$是 $\tilde{X}[k]$的一个周期。

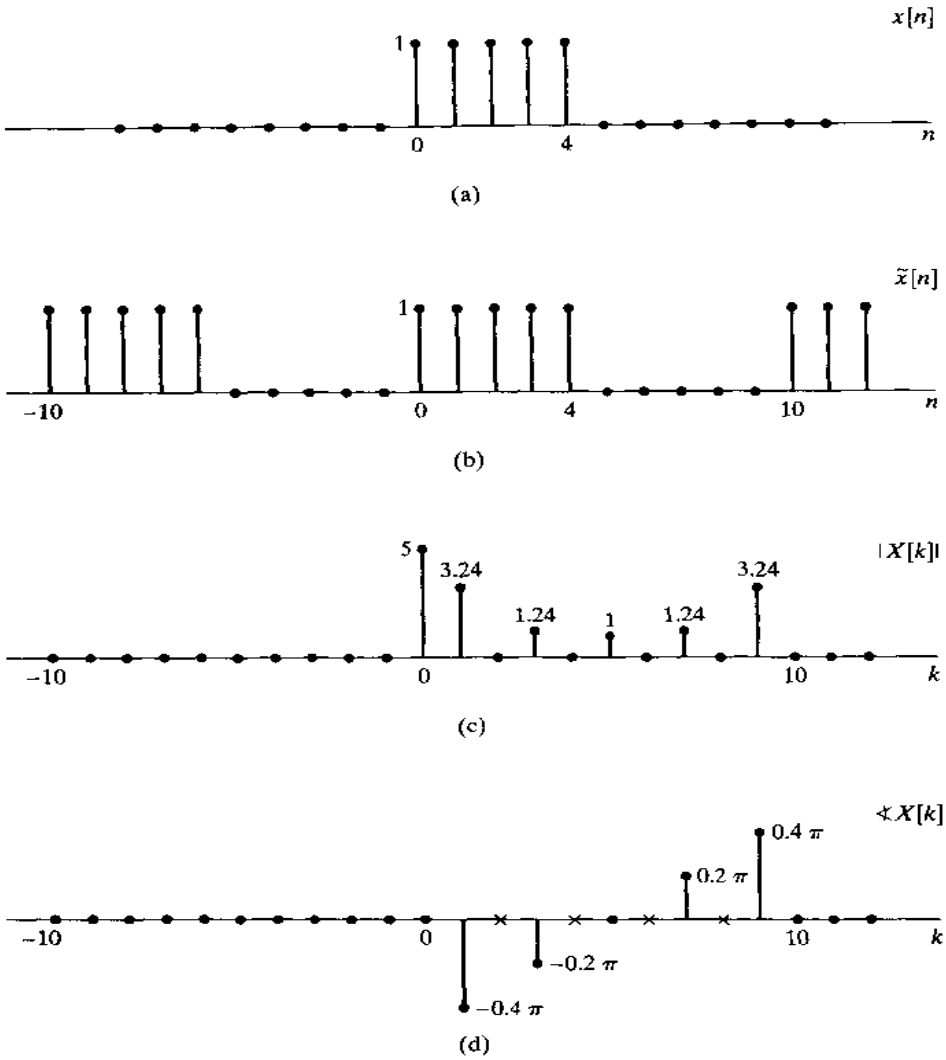


图 8.11 DFT 的举例说明

(a) 有限长序列 $x[n]$;(b) 由 $x[n]$形成的周期 $N=10$ 的周期序列 $\tilde{x}[n]$;

(c) DFT 的幅值;(d) DFT 的相位;(×表示不确定的值)

通过(8.57)式和(8.60)式联系起来的有限长序列 $x[n]$和周期序列 $\tilde{x}[n]$之间的差别似乎很小,因为利用这两个方程式可以直接从一个构造出另一个。然而在研究 DFT 的性质以及改变 $x[n]$对 $X[k]$的影响时,这种差别是很重要的。这一点在下一节讨论 DFT 表示的性质时将变得很明显。

8.6 离散傅里叶变换的性质

这一节我们来研究有限长序列 DFT 的一些性质。我们的讨论类似于 8.2 节对于周期序列的讨论。但是，这里特别侧重于有限长的假定与有限长序列 DFT 表示的隐含周期性之间的相互影响。

8.6.1 线性

如果两个有限长序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$线性组合如下：

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \tag{8.71}$$

则 $x_3[n]$的 DFT 为

$$X_3[k] = aX_1[k] + bX_2[k] \tag{8.72}$$

显然，若 $x_1[n]$的长度为 N_1，且 $x_2[n]$的长度为 N_2，则 $x_3[n]$的最大长度为 $N_3 = \max[N_1, N_2]$。因此，要使(8.72)式有意义，它们的 DFT 必须按同一长度 $N \geqslant N_3$ 来计算。例如，若 $N_1 < N_2$，则 $X_1[k]$为序列 $x_1[n]$增加$(N_2 - N_1)$个零点后的 DFT。也就是说，它的 N_2 点 DFT 是

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_1[n]W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N_2 - 1 \tag{8.73}$$

且 $x_2[n]$的 N_2 点 DFT 是

$$X_2[k] = \sum_{n=0}^{N_2-1} x_2[n]W_{N_2}^{kn}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N_2 - 1 \tag{8.74}$$

总之，若

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] \tag{8.75a}$$

且

$$x_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_2[k] \tag{8.75b}$$

则

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} aX_1[k] + bX_2[k] \tag{8.76}$$

式中每个序列及其离散傅里叶变换的长度均等于 $x_1[n]$和 $x_2[n]$中的最大长度。当然，大于该长度的 DFT 也可以计算，只要给两个序列增加零值采样点即可。

8.6.2 序列的循环移位

按照 2.9.2 节及表 2.2 中的性质 2，如果 $X(e^{j\omega})$是 $x[n]$的傅里叶变换。则 $e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$是时间移位序列 $x[n-m]$的傅里叶变换。换句话说，在时域 m 点的移位(m 为正对应于时间延迟，而 m 为负则对应于时间超前)相当于在频域给傅里叶变换乘以线性相位因子 $e^{-j\omega m}$。在 8.2.2 节中我们曾讨论过一个周期序列的 DFS 系数所对应的性质；特别是，若一个周期序列 $\tilde{x}[n]$具有傅里叶级数系数 $\tilde{X}[k]$，则移位后的序列 $\tilde{x}[n-m]$的傅里叶级数系数为 $e^{j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k]$。现在我们来研究对应于用线性相位因子 $e^{-j(2\pi k/N)m}$乘以有限长序列 $x[n]$的 DFT 系数的时域中的运算。特别是，令 $x_1[n]$表示一有限长序列，该序列的 DFT 是

$e^{-j(2\pi k/N)m}X[k]$，即，若

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X[k] \tag{8.77}$$

则我们对 $x_1[n]$感兴趣，有

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}X[k] \tag{8.78}$$

因为 N 点 DFT 表示一个长度为 N 的有限长序列，所以 $x[n]$和 $x_1[n]$在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 以外必须为零。因此 $x_1[n]$不能由 $x[n]$的一个简单的时域移位来得到。正确的结果可以直接由 8.2.2 节的结果得出，而且把 DFT 看作是周期序列 $x_1[((n))_N]$的傅里叶级数的系数。特别是，由(8.59)式和(8.62)式可得

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[k] = X[((k))_N] \tag{8.79}$$

同样，我们可以定义一个周期序列 $\tilde{x}_1[n]$为

$$\tilde{x}_1[n] = x_1[((n))_N] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_1[k] = X_1[((k))_N] \tag{8.80}$$

根据假设，式中

$$X_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}X[k] \tag{8.81}$$

因此，$\tilde{x}_1[n]$的傅里叶级数的系数是

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j[2\pi((k))_N/N]m}X[((k))_N] \tag{8.82}$$

注意

$$e^{-j[2\pi((k))_N/N]m} = e^{-j(2\pi k/N)m} \tag{8.83}$$

也就是说，因为对于 k 和 m，$e^{-j(2\pi k/N)m}$均是周期的，且周期为 N，所以我们可以省去记号 $((k))_N$。这样，(8.82)式成为

$$\tilde{X}_1[k] = e^{-j(2\pi k/N)m}\tilde{X}[k] \tag{8.84}$$

所以由 8.2.2 节可得

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m] = x[((n-m))_N] \tag{8.85}$$

于是，其 DFT 由(8.81)式给出的有限长序列 $x_1[n]$为

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}_1[n] = x[((n-m))_N], & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.86}$$

(8.86)式告诉我们如何构造 $x_1[n]$。

例 8.8　序列的循环移位

图 8.12 表示当 $m=-2$ 时进行序列循环移位的步骤，即我们想要确定当 $N=6$ 时 $x_1[n]=x[((n+2))_N]$，其中已经证明 $x_1[n]$的 DFT 为 $X_1[k]=W_6^{-2k}X[k]$。特别是，正如图8.12(b)所示，我们由 $x[n]$来构造周期序列 $\tilde{x}[n]=x[((n))_6]$。然后如图 8.12(c)所示，我们根据(8.85)式将 $\tilde{x}[n]$向左平移 2 位得到$\tilde{x}_1[n]=\tilde{x}[n+2]$。最后利用(8.86)式，抽取$\tilde{x}_1[n]$的一个周期得到 $x_1[n]$，如图 8.12(d)所示。

比较图 8.12(a)和(d)，可清楚地看出 $x_1[n]$并不对应于 $x[n]$的线性移位，而实际上这两个序列均限制在 0 到$(N-1)$的区间内。参考图 8.12 可以看出，$x_1[n]$可由 $x[n]$的移位而得到，因此可看做是一个序列的值从区间 0 到$(N-1)$一端离开的同时，又从区间的另一端进入该区间。另一个有趣之处是，对于图 8.12(a)所举的例子，如果将序列 $x[n]$以 6 为模向右平移 4 位得 $x_2[n]=x[((n-4))_6]$，那就得到一个与 $x_1[n]$一样的序列。这一结果的得出是因为，根据 DFT 有 $W_6^{4k}=W_6^{-2k}$，或更一般的 $W_N^{mk}=W_N^{(N-M)k}$，它表明在一个方向上平移 m 位的 N 点循环移位等同于在相反方向上平

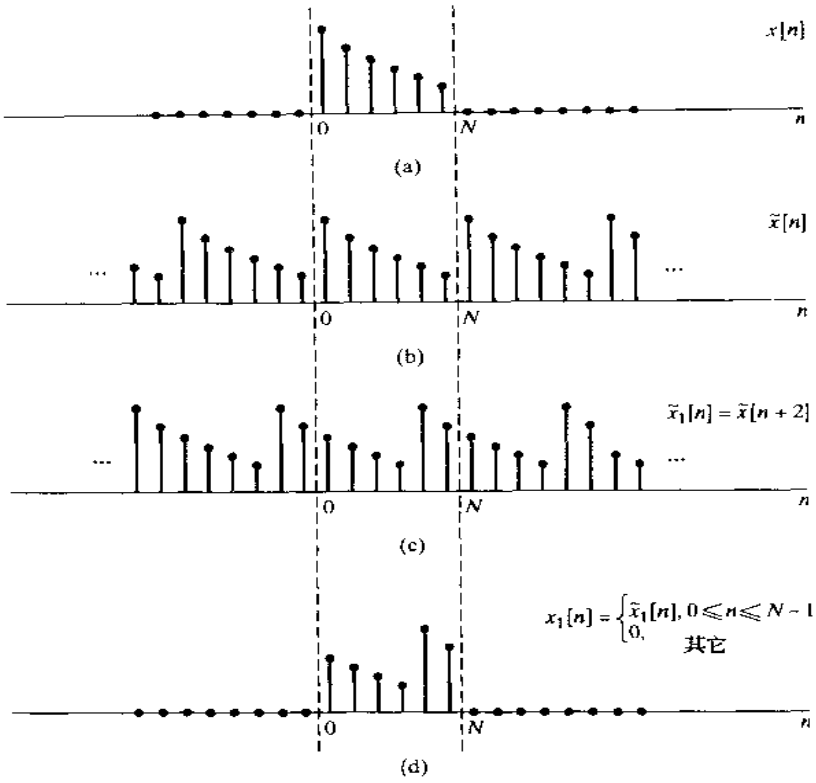


图 8.12　有限长序列的循环移位。相当于用一个线性相位因子乘以该序列的 DFT 在时域产生的结果

移 $N-m$ 位的循环移位。

在 8.4 节中，我们曾建议，可以用将 $x[n]$ 表现为围绕在周长恰好等于 N 点的圆柱体上的形式来解释如何从一个有限长序列 $x[n]$ 来构造周期序列 $\tilde{x}[n]$。如果我们反复旋转圆柱体的圆周，所看到的序列就是 $\tilde{x}[n]$，则这个序列的一个线性移位就相当于圆柱体的旋转。在有限长序列和 DFT 的有关论述中，把这样的一种移位称为在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 上的**循环移位**或序列的旋转。

总之，DFT 循环移位的性质是

$$x[((n-m))_N],\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \xleftrightarrow{\text{DFT}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi k/N)m}X[k] \tag{8.87}$$

8.6.3　对偶性

由于 DFT 与 DFS 有着十分密切的联系，因此我们可以预见到 DFT 将表现出类似于在 8.2.3节讨论 DFS 所具有的对偶性质。事实上，从(8.67)式和(8.68)式可知，分析式和综合式之间只差因于 $1/N$ 以及 W_N 的幂指数的符号。

DFT 对偶性的推导可以通过揭示 DFT 和 DFS 之间的关系来进行，如同我们在推导循环

移位性质时所做的那样。为此，考虑 $x[n]$及其 DFT $X[k]$，且构造周期序列

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \tag{8.88a}$$

$$\tilde{X}[k] = X[((k))_N] \tag{8.88b}$$

从而

$$\tilde{x}[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] \tag{8.89}$$

由(8.25)式给出的对偶性，得

$$\tilde{X}[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k] \tag{8.90}$$

如果我们定义周期序列 $\tilde{x}_1[n]=\tilde{X}[n]$，它的一个周期是有限长序列 $x_1[n]=X[n]$，则 $\tilde{x}_1[n]$ 的 DFS 系数是 $\tilde{X}_1[k]=N\tilde{x}[-k]$。因此 $x_1[n]$的 DFT 是

$$X_1[k] = \begin{cases} N\tilde{x}[-k], & 0 \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.91}$$

或者等效地

$$X_1[k] = \begin{cases} Nx[((-k))_N], & 0 \leqslant k \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.92}$$

因此，对于 DFT，对偶性可以表述为：若

$$x[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X[k] \tag{8.93a}$$

则

$$X[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} Nx[((-k))_N], \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{8.93b}$$

序列 $Nx[((-k))_N]$就是 $Nx[k]$将变量反转且以 N 为模移位的情况，利用下面的周期序列可以很好地表现以 N 为模把变量反转的实际过程。

例 8.9　DFT 的对偶关系

为了说明(8.93)式中的对偶关系，我们来研究一下例 8.7 中的序列 $x[n]$。图 8.13(a)表示有限长序列 $x[n]$，图 8.13(b)和图 8.13(c)分别对应于 10 点 DFT $X[k]$的实部和虚部。通过简单的重新标定

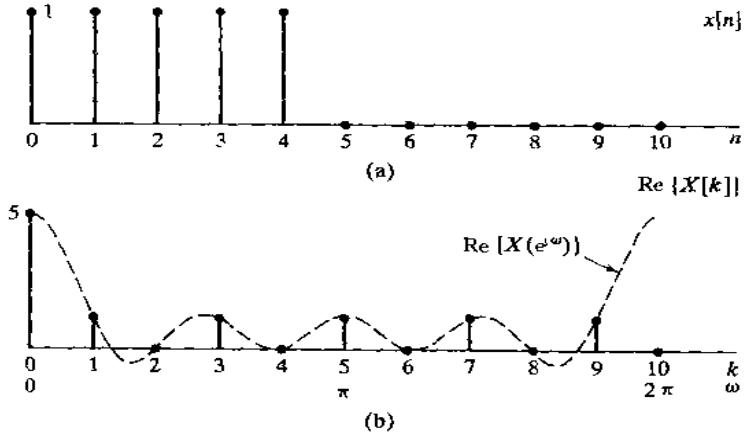


图 8.13　对偶性举例

(a) 为实有限长序列 $x[n]$；(b)和(c)分别对应 DFT $X[k]$的实部和虚部；(c)和(e)分别为对偶序列 $x_1[n]=X[n]$的实部和虚部；(b) 为 $x_1[n]$的 DFT

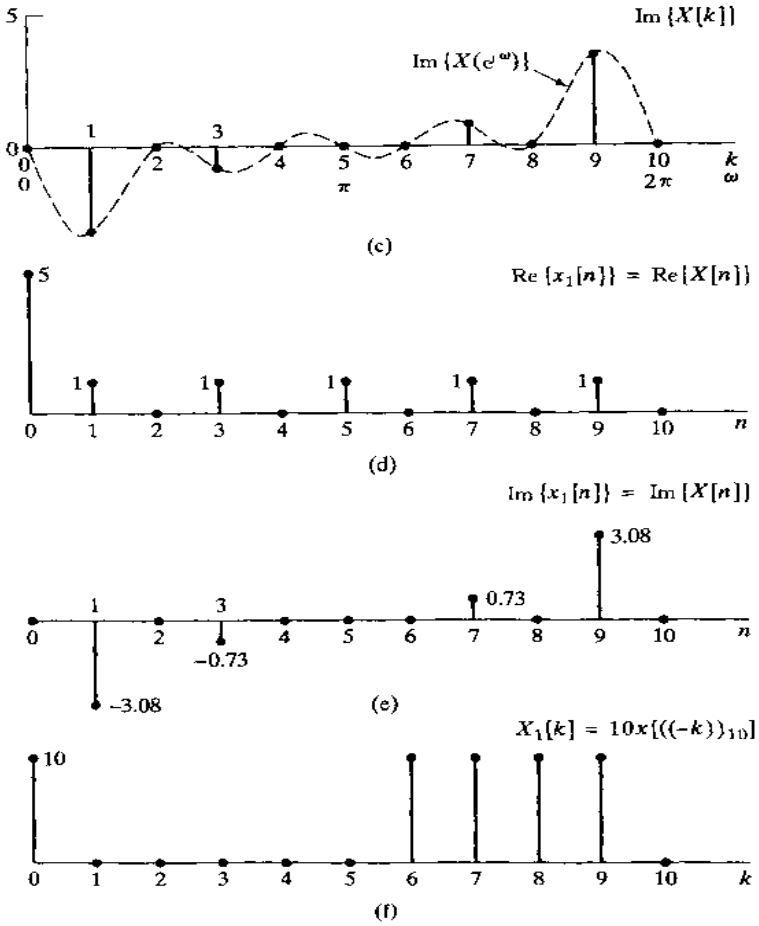


图 8.13(续)　对偶性举例

(a) 为实有限长序列 $x[n]$;(b)和(c)分别对应 DFT $X[k]$的实部和虚部;(c)和(e)分别为对偶序列 $x_1[n]=X[n]$的实部和虚部;(b) 为 $x_1[n]$的 DFT

水平轴,可得 $x_1[n]=X[n]$,如图 8.13(d)和图 8.13(e)所示。根据(8.93)式的对偶关系,(复数值)序列 $X[n]$的 10 点 DFT 就是图 8.13(f)中所示的序列。

8.6.4　对称性

因为 $x[n]$的 DFT 等同于周期序列 $\tilde{x}[n]=x[((n))_N]$的 DFS 系数,所以与 DFT 有关的对称性可以由 8.2.6 节表 8.1 中总结的 DFS 的对称性推理得出。特别是利用(8.88)式并同时考虑到表 8.1 中的性质 9 和性质 10,有

$$x^*[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X^*[((-k))_N],\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.94}$$

和

$$x^*[((-n))_N] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X^*[k],\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.95}$$

表 8.1 中的性质 11 至 14 指出,一个周期序列可分解为一个共轭对称序列和一个共轭反对称

序列之和。这一点提示我们，有限长序列 $x[n]$ 可分解为两个长度为 N 的有限长序列，一个对应于 $\tilde{x}[n]$ 中的一个周期的共轭对称分量，另一个对应于 $\tilde{x}[n]$ 中的一个周期的共轭反对称分量。我们把 $x[n]$ 的这两个分量分别记为 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$。这样通过

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \tag{8.96}$$

共轭对称分量为

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}\{\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]\} \tag{8.97}$$

以及共轭反对称分量为

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}\{\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]\} \tag{8.98}$$

我们定义 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 为

$$x_{ep}[n] = \tilde{x}_e[n], \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.99}$$

$$x_{op}[n] = \tilde{x}_o[n], \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.100}$$

或者等效地

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.101a}$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.101b}$$

同时，x_{ep} 和 $x_{op}[n]$ 均为有限长序列，即在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 之外它们均为零。因为对于 $0 \leqslant n \leqslant N-1$，$((-n))_N = (N-n)$ 且 $((n))_N = n$，所以我们也可以将(8.101)式表示为

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[N-n]\}, \quad 1 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.102a}$$

$$x_{ep}[0] = \mathrm{Re}\{x[0]\} \tag{8.102b}$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[N-n]\}, \quad 1 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.102c}$$

$$x_{op}[0] = \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{x[0]\} \tag{8.102d}$$

方程的这种形式比较方便，因为它避免了变量以 N 为模的运算。

显然，$x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 不等于由(2.154)式定义的 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$。但是，可以证明(见习题 8.56)

$$x_{ep}[n] = \{x_e[n] + x_e[n-N]\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.103}$$

和

$$x_{op}[n] = \{x_o[n] + x_o[n-N]\}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.104}$$

换句话说，将 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$ 在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 中混叠在一起可产生 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$。序列 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 分别称为 $x[n]$ 的**周期共轭对称分量和周期共轭反对称分量**。当 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 是实序列时，分别称为**周期偶分量和周期奇分量**。注意，序列 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 不是周期序列，但是它们是有限长序列，分别等于周期序列 $\tilde{x}_e[n]$ 和 $\tilde{x}_o[n]$ 的一个周期。

(8.101)式和(8.102)式是利用 $x[n]$ 来定义 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$。反之也可以利用 $x_{ep}[n]$ 和 $x_{op}[n]$ 来表示 $x[n]$，其关系式可以由(8.97)式和(8.98)式得出。先把 $\tilde{x}[n]$ 表示为

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n] \tag{8.105}$$

这样

$$x[n] = \tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + x_o[n] \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.106}$$

把(8.106)式与(8.99)式和(8.100)式结合在一起，可得

$$x[n] = x_{ep}[n] + x_{op}[n] \tag{8.107}$$

换言之，当加入(8.102)式时，由此可得(8.107)式的结果。现在可以直接得出与表 8.1 中性质 11 至 14 有关的 DFT 的对称性。特别是

$$\mathrm{Re}\{x[n]\} \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_{ep}[k] \tag{8.108}$$

$$\mathrm{j}\ \mathrm{Im}\{x[n]\} \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} X_{op}[k] \tag{8.109}$$

$$x_{ep}[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X[k]\} \tag{8.110}$$

$$x_{op}[n] \overset{\mathcal{DFT}}{\longleftrightarrow} \mathrm{j}\ \mathrm{Im}\{X[k]\} \tag{8.111}$$

8.6.5 循环卷积

在 8.2.5 节中我们曾证明两个序列的 DFS 系数乘积对应于序列的周期卷积。这里我们先考虑两个**有限长序列** $x_1[n]$和 $x_2[n]$，长度均为 N，其中 DFT 分别为 $X_1[k]$和 $X_2[k]$，我们希望求出序列 $x_3[n]$，其 DFT 为 $X_3[k]=X_1[k]X_2[k]$。为了求出 $x_3[n]$，我们可以使用 8.2.5 节的结果。具体地说，$x_3[n]$对应于 $\tilde{x}_3[n]$的一个周期，$\tilde{x}_3[n]$由(8.27)式给出。这样

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m],\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.112}$$

或者等效地

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N],\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.113}$$

因为对于 $0 \leqslant m \leqslant N-1$，$((m))_N = m$，所以(8.113)式可以写成

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N],\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.114}$$

(8.112)式和(8.114)式不同于在一些重要场合由(2.52)式定义的 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的线性卷积。在线性卷积中，计算序列 $x_3[n]$的值包括用一个时间反转且线性移位的序列来乘以另一个序列，然后对于所有的 m 将乘积 $x_1[m]x_2[n-m]$加在一起。为了得到卷积序列依次的值，其中一个序列要相对另一个依次进行移位。对于由(8.114)式表示的卷积则不同，它需将第二个序列循环地作时间反转，且相对于第一个序列循环地移位。由于这个原因，按照(8.114)式把两个有限长序列结合在一起的运算称为**循环卷积**。更准确地说，把(8.114)式称为 N **点循环卷积**，它清楚地规定两个序列的长度均为 N(或小于 N)，并且以 N 为模进行移位。有时，把利用(8.114)式构成序列 $x_3[n]$($0 \leqslant n \leqslant N-1$)的运算记作

$$x_3[n] = x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \tag{8.115}$$

因为 $x_3[n]$的 DFT 是 $X_3[k]=X_1[k]X_2[k]$，并且还因为 $X_1[k]X_2[k]=X_2[k]X_1[k]$，所以勿须进一步分析就可以得出

$$x_3[n] = x_2[n] \textcircled{N} x_1[n] \tag{8.116}$$

或者更明确一些，为

$$x_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_2[m]x_1[((n-m))_N] \tag{8.117}$$

这就是说，循环卷积与线性卷积一样，是可交换运算次序的。

由于循环卷积正是周期卷积，因此例 8.4 和图 8.3 也正好说明循环卷积。但是，如果我们利用循环移位的概念，均不必构造出图 8.3 中基本的周期序列。这一点会在下面的例子中加以说明。

例 8.10　与延迟脉冲序列的循环卷积

8.6.2 节的结果提供了一个循环卷积的例子。设 $x_2[n]$是一个长度为 N 的有限长序列，且

$$x_1[n] = \delta[n - n_0] \tag{8.118}$$

其中 $0<n_0<N$。很清楚，$x_1[n]$可以认为是有限长序列

$$x_1[n] = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant n \leqslant n_0 \\ 1, & n = n_0 \\ 0, & n_0 < n \leqslant N-1 \end{cases} \tag{8.119}$$

$n_0=1$ 时如图 8.14 所示。$x_1[n]$的 DFT 是

$$X_1[k] = W_N^{kn_0} \tag{8.120}$$

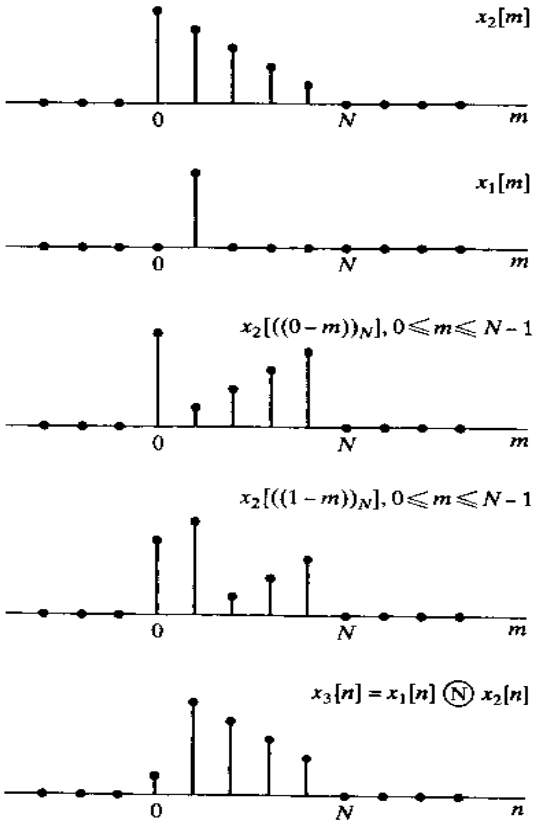


图 8.14　有限长序列 $x_2[n]$和一个延迟的脉冲序列，$x_1[n]=\delta[n-1]$的循环卷积

如果我们形成乘积

$$X_3[k] = W_N^{kn_0}X_2[k] \tag{8.121}$$

则由8.6.2节可以看出，对应于$X_3[k]$的有限长序列是在区间$0\leqslant n\leqslant N-1$中将序列$x_2[n]$向右边旋转$n_0$个采样点后的序列。也就是说，序列$x_2[n]$与一个延迟的单位脉冲序列的循环卷积就是在区间$0\leqslant n\leqslant N-1$中把序列$x_2[n]$加以旋转。作为一个例子，图8.14示出了$N=5$且$n_0=1$时的情况。图中先绘出了序列$x_2[m]$和$x_1[m]$，然后绘出了序列$x_2[((0-m))_N]$和$x_2[((1-m))_N]$。由这种情况可以清楚的看出，$x_2[n]$与一个延迟的单位脉冲序列循环卷积的结果就是将$x_2[n]$循环移位。图中最后一个序列是$x_3[n]$，即$x_1[n]$和$x_2[n]$循环卷积的结果。

例8.11　两个矩形脉冲的循环卷积

这是循环卷积的另一个例子。令

$$x_1[n] = x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0\leqslant n\leqslant L-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.122}$$

图8.15中$L=6$，N定义为DFT长度。若$N=L$，则N点DFT为

$$X_1(k) = X_2(k) = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.123}$$

如果我们将$X_1[k]$和$X_2[k]$直接相乘，得

$$X_3[k] = X_1[k]X_2[k] = \begin{cases} N^2, & k=0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.124}$$

由此可得

$$x_3[n] = N,\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{8.125}$$

这个结果绘在图8.15中。显然，由于序列$x_2[((n-m))_N]$是对于$x_1[m]$旋转，则乘积$x_1[m]x_2[((n-m))_N]$的和始终等于N。

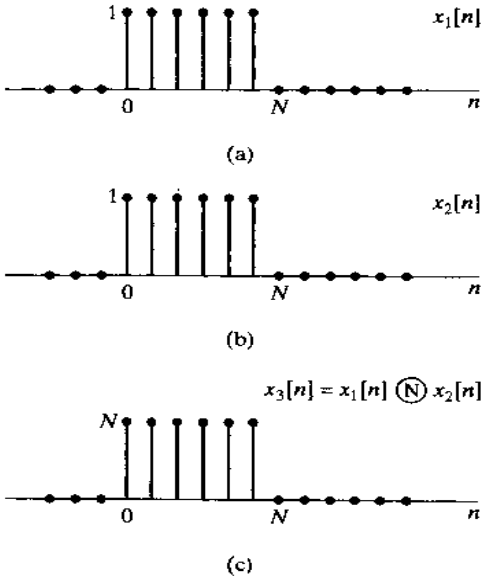


图8.15　两个长度为N的常数序列的N点循环卷积

当然也可以把$x_1[n]$和$x_2[n]$看作是$2L$点循环卷积，只要给他们增补L个零即可。若我们计算增长序列的$2L$点循环卷积，就得到图8.16所示序列。可以看出它等于有限长序列$x_1[n]$和$x_2[n]$的线性卷积。我们将在8.7节中更详细的讨论这个重要的结果。

注意如图8.16所示，$N=2L$时

$$X_1[k] = X_2[k] - \frac{1-W_N^{kL}}{1-W_N^k}$$

所以图8.16(e)中矩形序列$x_3[n]$的DFT为($N=2L$)

$$X_3[k] - \left(\frac{1-W_N^{kL}}{1-W_N^k}\right)^2$$

循环卷积的性质可以表示为

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X_1[k]X_2[k] \tag{8.126}$$

考虑到DFT关系的对偶性，自然两个N点序列乘积的DFT等于它们对应的离散傅里叶变换的循环卷积。具体地说，若$x_3[n]=x_1[n]x_2[n]$，则

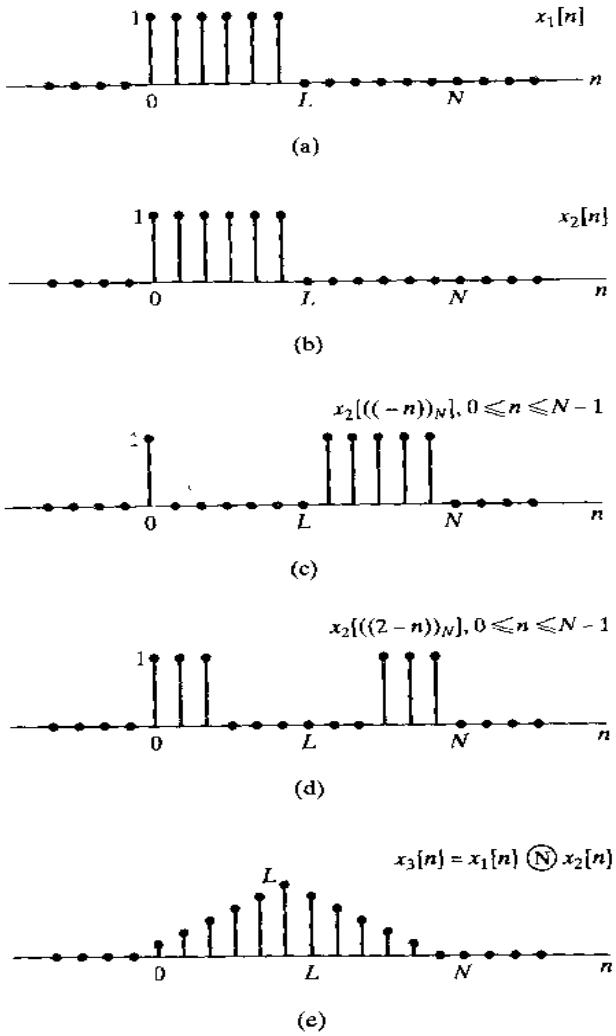


图 8.16　两个长为 L 的常数序列的 $2L$ 点循环卷积

$$X_3[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[l]X_2[((k-l))_N] \tag{8.127}$$

或

$$x_1[n]x_2[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}X_1[k] \textcircled{N} X_2[k] \tag{8.128}$$

8.6.6　离散傅里叶变换的性质汇总

8.6 节所讨论的离散傅里叶变换的性质汇总在表 8.2 中。注意，这里所给出全部性质的表示均规定 $x[n]$，$0 \leqslant n \leqslant N-1$ 和 $X[k]$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$。在此区间之外 $x[n]$ 和 $X[k]$ 均为零。

表 8.2

有限序列(长度为 N)	N 点 DFT(长度为 N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1[k]+bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-ln}x[n]$	$X[((k-l))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1}x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X_1(l)X_2[((k-l))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$X_{ep}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]+X^*[((-k))_N]\}$
12. $j\,\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$X_{op}[k]=\frac{1}{2}\{X[((k))_N]-X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{ep}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x^*[((-n))_N]\}$	$\mathrm{Re}\{X[k]\}$
14. $x_{op}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x^*[((-n))_N]\}$	$j\,\mathrm{Im}\{X[k]\}$
性质 15～17 只适用于 $x[n]$为实数的情况	
15. 对称性质	$\begin{cases} X[k]=X^*[((-k))_N] \\ \mathrm{Re}\{X[k]\}=\mathrm{Re}\{X[((-k))_N]\} \\ \mathrm{Im}\{X[k]\}=-\mathrm{Im}\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert=\lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \angle\lvert X[k]\rvert=-\angle\lvert X[((-k))_N]\rvert \end{cases}$
16. $x_{ep}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]+x[((-n))_N]\}$	$\mathrm{Re}\{X[k]\}$
17. $x_{op}[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[((-n))_N]\}$	$j\,\mathrm{Im}\{X[k]\}$

8.7 用离散傅里叶变换实现线性卷积

在第 9 章我们将证明,对于计算一个有限长序列的离散傅里叶变换已有高效的算法。通常将它们总称为**快速傅里叶变换**(FFT)算法。利用这些算法,在计算上可以通过如下步骤高效的实现两个序列的卷积。

1. 分别计算两个序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 N 点傅里叶变换 $X_1[k]$和 $X_2[k]$。
2. 取 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 计算乘积 $X_3[k]=X_1[k]X_2[k]$。
3. 计算 $X_3[k]$的 DFT 反变换得到序列 $x_3[n]=x_1[n]\textcircled{N}x_2[n]$。

在大多数的应用中我们关心的是实现两个序列的线性卷积,也就是希望实现一个线性时不变系统。例如,对语音波形或雷达信号之类的序列进行滤波,或者计算这类信号的自相关函数时的确是这样。正如我们在 8.6.5 节中所看到的,离散傅里叶变换的乘积相当于序列的循环卷积。为了得到线性卷积,我们必须保证循环卷积具有线性卷积的效果。例 8.15 的讨论已

经暗示出如何做到这一点。现在我们进行比较详细的讨论。

8.7.1 两个有限长序列的线性卷积

考虑一个 L 点长的序列 $x_1[n]$ 和另一个 P 点长的序列 $x_2[n]$，假定我们想要通过线性卷积将这两个序列结合在一起从而得出第三个序列

$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m]x_2[n-m] \tag{8.129}$$

图 8.17(a)画出一个典型序列 $x_1[m]$，图 8.17(b)绘出对于几个 n 值的典型序列 $x_2[n-m]$。显然，只要当 $n<0$ 和 $n>L+P-2$ 时，乘积 $x_1[m]x_2[n-m]$ 对所有的 m 均为零，即当 $0\leqslant n\leqslant L+P-2$ 时 $x_3[n]\neq 0$。因此，$(L+P-1)$ 是序列 $x_3[n]$ 的最大长度，这一点可以由一个长度为 L 的序列和一个长度为 P 的序列的线性卷积而得出。

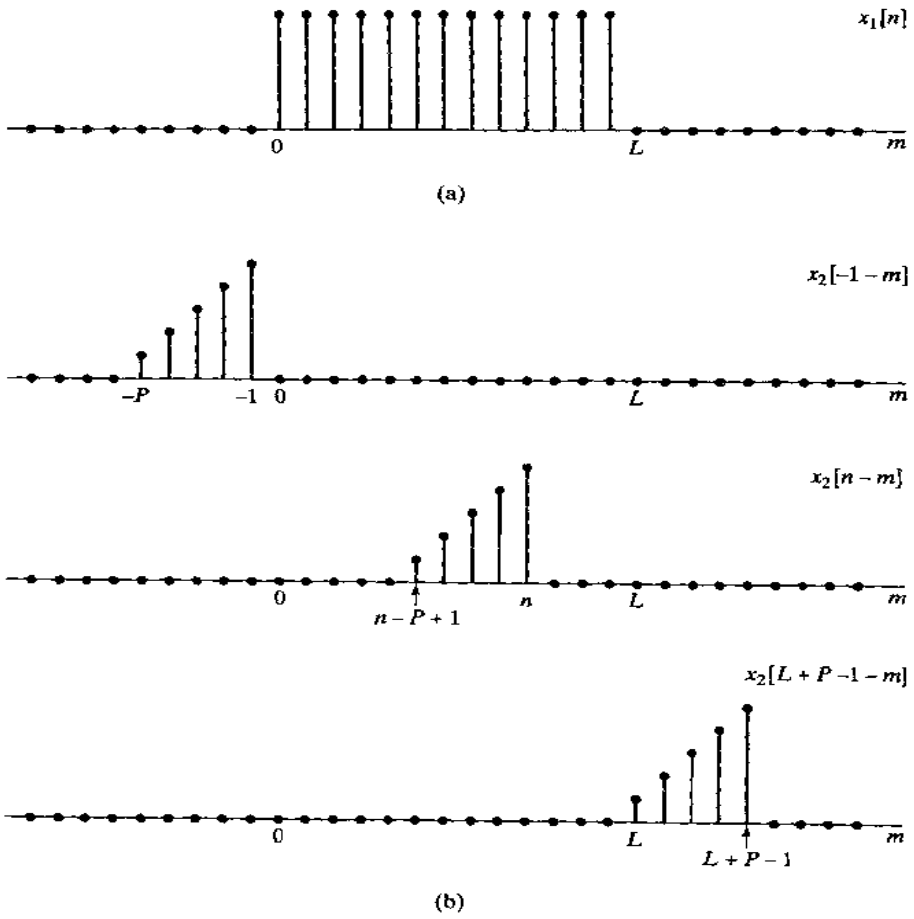


图 8.17 两个有限长序列之线性卷积的示例，结果表明当 $n\leqslant -1$ 和 $n\geqslant L+P-1$ 时 $x_3[n]=0$
(a) 有限长序列 $x_1[n]$；(b) 对于几个 n 值的 $x_2[n-m]$

8.7.2 循环卷积作为带有混叠的线性卷积

正如我们从例 8.10 和例 8.15 中所看到的，对应于两个 N 点 DFT 的乘积的循环卷积是否与对应的有限长序列的线性卷积相同取决于和有限长序列的长度有关的 DFT 的长度。对于循环卷积和线性卷积之间相互关系的一种十分有用的解释是利用时间混叠的概念。鉴于这种解释对于理解循环卷积是非常重要的和有益的，我们将用几种方式来加以论述。

在 8.4 节中我们看到，如果对一个序列 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$在频率$\omega_k=2\pi k/N$ 处采样，则得到对应于周期序列

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN] \tag{8.130}$$

之 DFS 系数的序列。从关于 DFT 的讨论中可以看出：有限长序列

$$X[k]=\begin{cases}X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0\leqslant k\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.131}$$

是由(8.130)式表示的 $\tilde{x}[n]$的一个周期的 DFT，即

$$x_p[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.132}$$

显然，如果 $x[n]$的长度小于等于 N，则不会产生时间混叠，且 $x_p[n]=x[n]$。但是，若 $x[n]$的长度大于 N，则对于一些或全部 n，$x_p[n]$可能不等于 $x[n]$。因此，我们以后将用下标 p 来表示从一个采样后的傅里叶变换的 DFT 得到的周期序列的一个周期。如果明确知道无时间混叠，则下标可以省去。

(8.129)式中的序列 $x_3[n]$的傅里叶变换为

$$X_3(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega}) \tag{8.133}$$

若我们定义一个 DFT 为

$$X_3[k]=X_3(e^{j(2\pi k/N)}),\ 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{8.134}$$

则由(8.133)式和(8.134)式显然可见，$X_3[k]$也可表示为

$$X_3[k]=X_1(e^{j(2\pi k/N)})X_2(e^{j(2\pi k/N)}),\ 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{8.135}$$

因此

$$X_3[k]=X_1[k]X_2[k] \tag{8.136}$$

这就是说，作为 $X_3[k]$之反 DFT 的序列 $x_{3p}[n]$为

$$x_{3p}[n]=\begin{cases}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x_3[n-rN], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{8.137}$$

并且由(8.136)式得

$$x_{3p}[n]=x_1[n]\textcircled{N}x_2[n] \tag{8.138}$$

因此，两个有限长序列的循环卷积等于根据(8.137)式有时间混叠的两个序列的线性卷积。

应当注意，若 N 大于或等于L 或P，则 $X_1[k]$和 $X_2[k]$可以完全表示 $x_1[n]$和 $x_2[n]$，但是只有当 N 大于或等于序列$x_3[n]$的长度时，才可能对于全部 n 有$x_{3p}[n]=x_3[n]$。正如我们在 8.7.1 节中所指出的，如果 $x_1[n]$的长度为 L，$x_2[n]$的长度为 P，则 $x_3[n]$的最大长度为$(L+P-1)$。因此，若 DFT 的长度 N 满足$N\geqslant L+P-1$，则对应于 $X_1[k]X_2[k]$的循环卷

积等于 $X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$对应的线性卷积。

例 8.12　循环卷积作为带有混叠的线性卷积

根据上面的讨论，例 8.15 的结果是很容易理解的。注意，$x_1[n]$和 $x_2[n]$是两个完全相同的常数序列，长度 $L=P=6$，如图 8.18(a)所示，$x_1[n]$和 $x_2[n]$的线性卷积长度为 $L+P-1=11$，且具有三

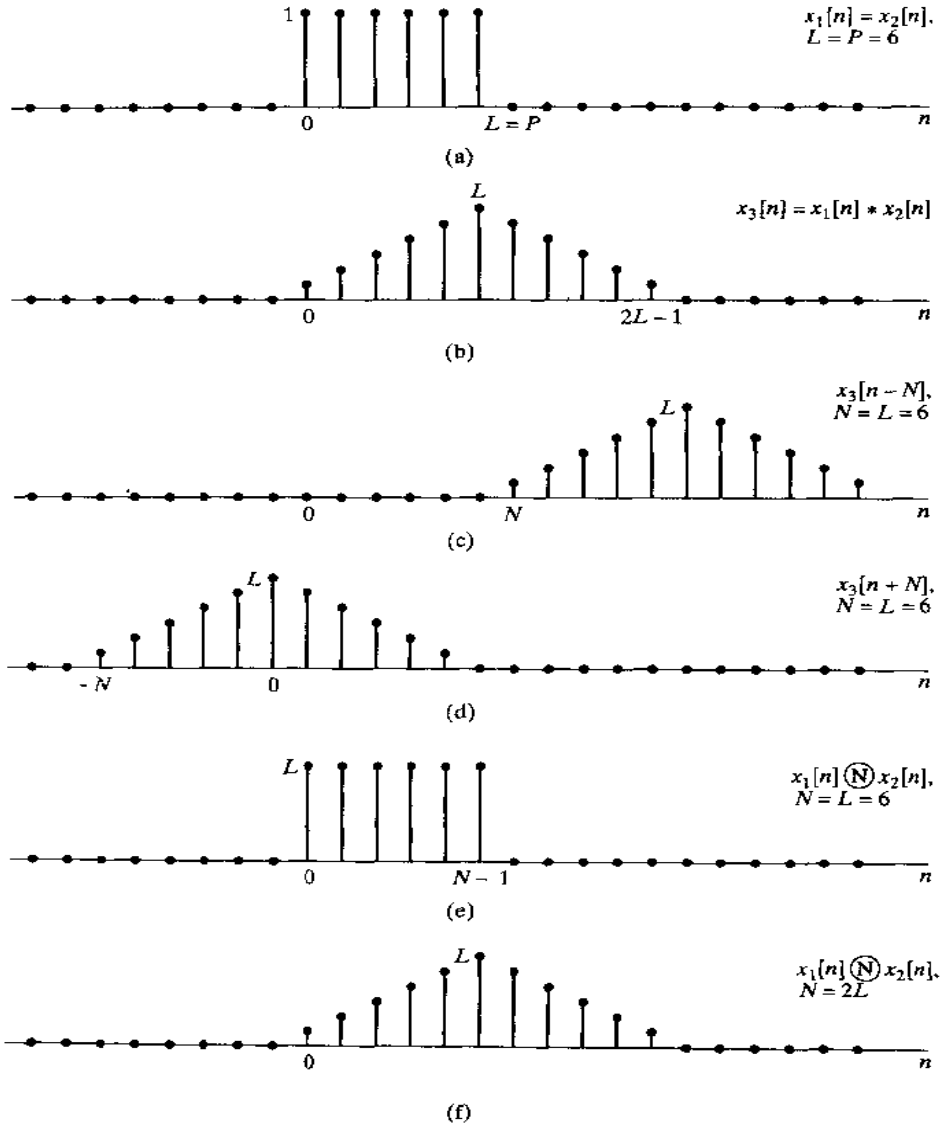


图 8.18　举例说明循环卷积等同于有混叠的线性卷积

(a) 参与卷积的序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$；(b) $x_1[n]$和 $x_2[n]$的线性卷积；

(c) 对于 $N=6$ 的序列 $x_3[n-N]$；(d) 对于 $N=6$ 的序列 $x_3[n+N]$；

(e) $x_1[n]\textcircled{6}x_2[n]$，它等于(b)，(c)和(d)在区间 $0\leqslant n\leqslant 5$ 上的和；(f) $x_1[n]\textcircled{12}x_2[n]$

角形包络，如图 8.18(b)所示。图 8.18(c)和(d)表示当 $N=6$ 时(8.137)式中所示移位序列 $x_3[n-rN]$的两种形式：$x_3[n-N]$和 $x_3[n+N]$。$x_1[n]$和 $x_2[n]$的 N 点循环卷积可以利用(8.137)式来计算。这一点如图 8.18(c)(取 $N=L=6$)和图 8.18(f)(取 $N=2L=12$)所示。需要注意，当 $N=L=6$ 时，只有 $x_3[n]$和 $x_3[n+N]$对最后的结果有贡献；而当 $N=2L=12$ 时，仅 $x_3[n]$对最后的结果有贡献。由于线性卷积的长度为$(2L-1)$，所以当 $N=2L$ 时仅其循环卷积结果与线性卷积的结果对全部 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 均相同。事实上，对于 $N=2L-1=11$ 的情况这也是完全正确的。

正如例 8.12 中所指出的，在两个有限长序列的循环卷积中，若 $N\geqslant L+P-1$，则时间混叠可以避免。显然，如果 $N=L=P$，则循环卷积的全部序列值可以完全与线性卷积的值不同。但是，若 $P<L$，则 L 点循环卷积的部分序列值将会等于线性卷积所对应的值。为了表示出这一点，用时间混叠来解释是十分有用的。

考虑两个有限长序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$，其长度分别为 L 和 P，如图 8.19(a)和图 8.19(b)所示，其中 $P<L$。首先让我们来研究一下 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 L 点循环卷积，查看在循环卷积中哪些序列值等于线性卷积得到的值，而哪些序列值不等于。$x_1[n]$和 $x_2[n]$的线性卷积是一个长度为$(L+P-1)$的有限长序列，如图 8.19(c)所示。为了确定 L 点循环卷积，利用(8.137)式和(8.138)式，有

$$x_{3p}[n]=\begin{cases}x_1[n]\textcircled{L}x_2[n]=\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}x_3[n-rL], & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{8.139}$$

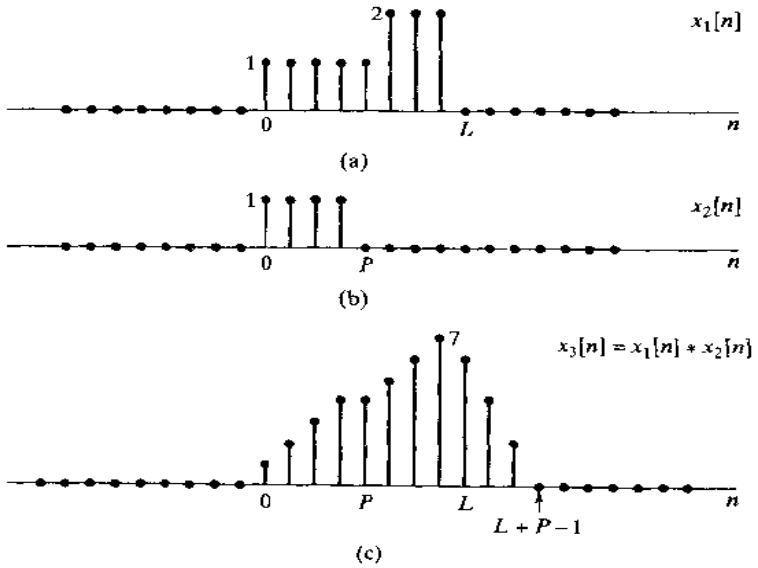


图 8.19　两个有限长序列的线性卷积举例

图 8.20(a)表示当 $r=0$ 时在(8.139)式中的项，而图 8.20(b)和图 8.20(c)则分别表示为 $r=+1$ 和 $r=-1$ 时的项，从图 8.20 清晰可见，在区间 $0\leqslant n\leqslant L-1$ 上，$x_{3p}[n]$只受 $x_3[n]$和 $x_3[n+L]$的影响。

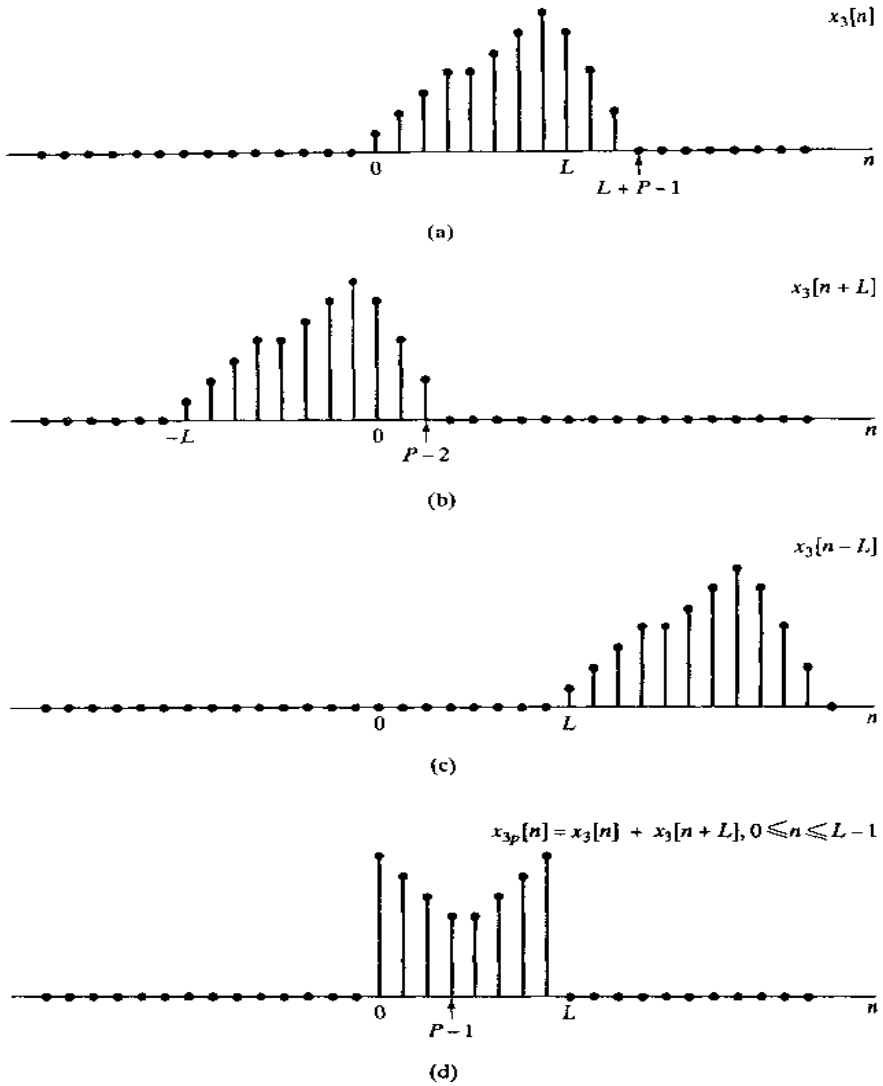


图 8.20　对于图 8.19 所示的两个序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$之循环卷积，循环卷积可以解释为线性卷积加上混叠

总之，只要当 $P<L$ 时，只有项 $x_3[n+L]$在区间 $0\leqslant n\leqslant L-1$ 产生混叠。更明确地说，当这些项相加在一起时，$x_3[n+L]$的最后$(P-1)$个点，即从 $n=0$ 到 $n=P-2$，将加在 $x_3[n]$的最初$(P-1)$个点上，而 $x_3[n]$的最后$(P-1)$个点，即从 $n=L$ 到 $n=L+P-2$，将被丢掉。这样截取 $0\leqslant n\leqslant L-1$ 的部分就形成了 $x_{3p}[n]$。由于 $x_3[n+L]$的$(P-1)$个点的值等于 $x_3[n]$的最后$(P-1)$个点的值，所以我们可以用另一种观点来看待形成循环卷积 $x_{3p}[n]$的过程，即通过线性卷积加上用 $x_3[n]$的从 $n=L$ 到 $n=L+P-2$ 的$(P-1)$个值加在 $x_3[n]$的最初$(P-1)$个值上的混叠来形成。图 8.21 说明当取 $P=4$ 和 $L=8$ 时的这一过

程。图8.21(a)表示线性卷积 $x_3[n]$,对于 $n \geqslant L$ 的点用空心方块符号来标记。注意,对于 $n \geqslant L$ 只有$(P-1)$个点非零。图 8.21(b)表示利用"$x_3[n]$的自身卷绕"来形成 $x_{3p}[n]$。最初的$(P-1)$点有时间混叠掺入,而其余的从 $n = P-1$ 到 $n = L-1$ 个点(即最后 $L-P+1$ 点)不受破坏,也就是等于用线性卷积所得到的那些点的值。

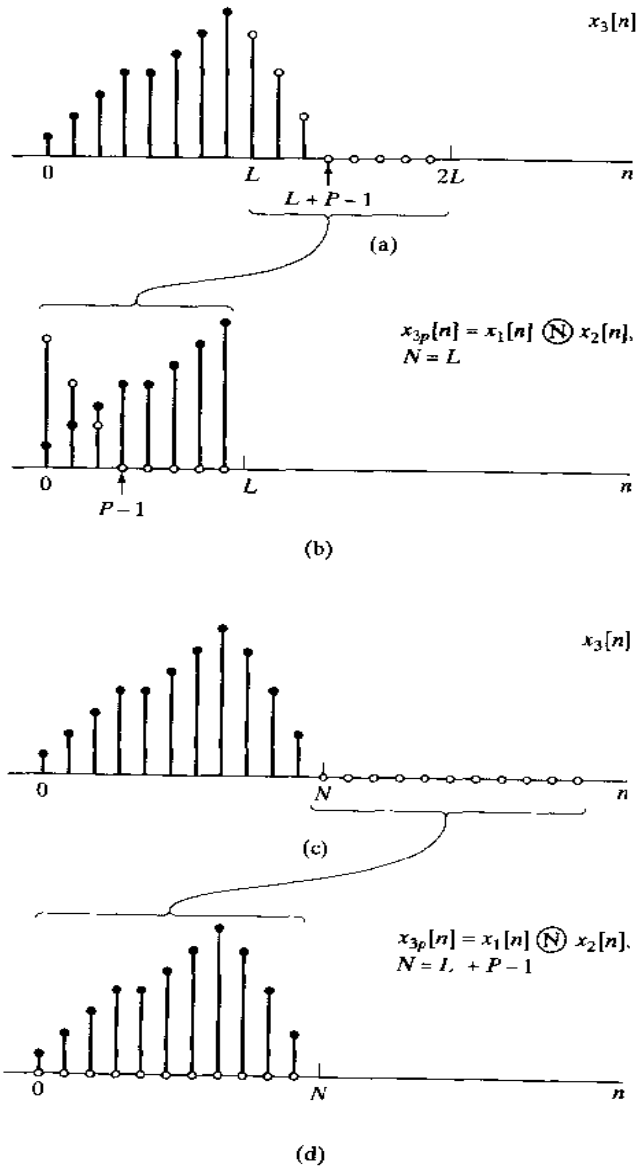


图 8.21 举例说明循环卷积的结果如何产生"卷绕"(wraps around)
(a)和(b)$N = L$,则混叠的"尾部"(tail)重叠在最初$(P-1)$点上;
(c)和(d)$N = (L+P-1)$,则不产生重叠

由以上的讨论可知，如果循环卷积的长度相对于序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的长度足够长话，就可以避免非零值的混叠，在这种情况下，循环卷积就等于线性卷积。具体讲，若对于刚才考虑的情况，$x_3[n]$ 以 $N \geqslant L + P - 1$ 的周期重复，则不会产生非零的重叠。图 8.21(c)和图 8.21(d)举例说明这种情况，此时 $P = 4, L = 8$，且 $N = 11$。

8.7.3 用 DFT 实现线性时不变系统

以上的讨论集中在从循环卷积得到线性卷积的方法上。因为线性时不变系统可以用卷积来实现，这就意味着循环卷积(可用 8.7 节开头所建议的步骤来完成)可以用于实现这类系统。要了解如何做到这一点，我们首先考虑一个 L 点输入序列 $x[n]$ 和一个 P 点脉冲响应 $h[n]$。这两个序列的线性卷积 $y[n]$ 是长度为 $(L + P - 1)$ 的有限长序列。因此，正如在 8.7.2 节中所讨论的，要使循环卷积等于线性卷积，循环卷积的长度至少为 $(L + P - 1)$ 点。循环卷积可以通过 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 DFT 相乘来完成。由于我们希望该乘积表示 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的线性卷积的 DFT，该 DFT 的长度为 $(L + P - 1)$，因此我们所要计算的 DFT 也必须有同样长度，即 $x[n]$ 和 $h[n]$ 必须加长，而加长部分的序列值为零。这种方法通常称为**补零**。

这种做法使两个有限长序列的线性卷积的计算可用离散傅里叶变换来完成，也就是说，其输入也为有限长序列的 FIR 系统的输出可以用 DFT 来计算。在许多应用场合(如语音波形滤波)，输入信号是无限长的。尽管理论上我们可以储存全部波形，紧接着对于大量点数实行上面所讨论的利用 DFT 的方法，但是通常要计算这样一个 DFT 是不现实的。另外对于这种滤波方法，只有当采集完全部的输入样本后才能计算出滤波后的样本。一般说来，我们总希望在处理过程中避免这种很长的延时。这两个问题的解决方法是用**块卷积**，此时把被滤波的信号分割成长度为 L 的段。然后每段信号就可以与有限长脉冲响应进行卷积，并且用一种适当的方法把滤波后的信号段衔接在一起。每一块的线性滤波可用 DFT 来实现。

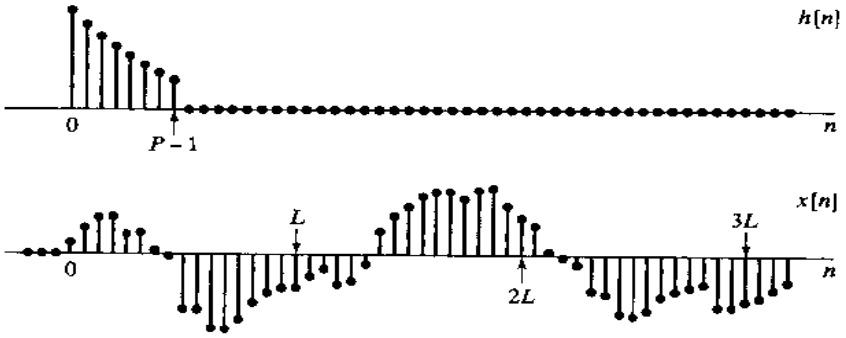


图 8.22 有限长脉冲响应 $h[n]$ 和要过滤的未定义长度的信号 $x[n]$

为了举例说明这一过程，并且得出把滤波后的信号段衔接在一起的方法，我们来研究如图 8.22 所示长度为 P 的脉冲响应 $h[n]$ 和信号 $x[n]$。以下我们假设，对于 $n < 0, x[n] = 0$，并且 $x[n]$ 得长度要比 P 大许多。序列 $x[n]$ 可以表示成长度为 L 的平移有限长序列之和，即

$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n - rL] \tag{8.140}$$

式中

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n+rL], & 0 \leqslant n \leqslant L-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.141}$$

图 8.23(a)表示出对于图 8.22 中的 $x[n]$的分割方法。注意,每段中的第一个样本均在 $n=0$ 处,然而,$x_r[n]$的第零个样本是序列 $x[n]$的第 rL 个样本。这一点如图 8.23(a)所示,该图中画出了在它们平移后位置上的序列段。

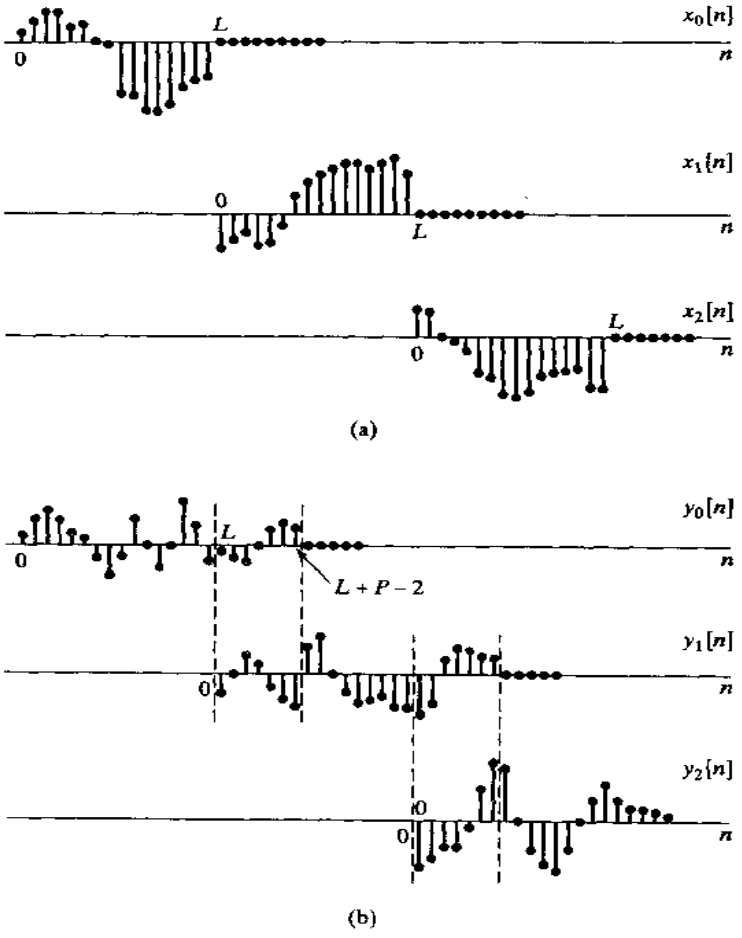


图 8.23 (a) 把图 8.22 中的 $x[n]$分解为长度为 L 的不重叠序列段;
(b) 每段与 $h[n]$卷积的结果

因为卷积是一种线性时不变运算,所以由(8.140)式有

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - rL] \tag{8.142}$$

式中

$$y_r[n] = x_r[n] * h[n] \tag{8.143}$$

由于序列 $x_r[n]$只有 L 个非零点，并且 $h[n]$的长度为 P，因此每一项 $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$的长度为$(L + P - 1)$。这样，线性卷积 $x_r[n] * h[n]$可用 N 点 DFT 按照上面介绍的步骤来计算，其中 $N \geqslant L + P - 1$。因为每个输入段的开头与相邻段相隔 L 点，并且每个滤波后的序列段的长度为$(L + P - 1)$，所以滤波后的序列段的非零点将重叠$(P - 1)$点，并且这些重叠样本必须参与(8.142)式要求的求和运算。这一点如图 8.23(b)所示，图中表示出滤波后的序列段 $y_r[n] = x_r[n] * h[n]$。if如输入波形是由将图 8.23(a)中的延迟波形相加而重构成的一样，滤波后的结果 $x_r[n] * h[n]$是由将图 8.23(b)中示出的滤波后延迟的序列段相加而形成的。这种由滤波后的序列段形成滤波后输出序列的方法，通常称为**重叠相加法**，这是因为滤波后的序列段相互有重叠，并且相加在一起形成输出序列。之所以发生重叠，是因为每个序列段与脉冲响应的线性卷积通常大于序列段长度。块卷积的重叠相加法**没有**受 DFT 和循环卷积的制约。很显然，唯一的要求是计算较小的卷积，并将结果适当组合。

另外一种块卷积方法通常称为**重叠保留法**。这种方法相应于实现一个 P 点脉冲响应 $h[n]$与一个 L 点的序列段 $x_r[n]$的 L 点循环卷积，然后确认出在该循环卷积中对应于线性卷积的那一部分。最后将所得出的输出序列段“补在一起”形成输出。特别是，我们曾指出过，如果一个 L 点序列与一个 P 点序列$(P < L)$作循环卷积，则最后结果中的第一个$(P - 1)$点是不正确地，而其余点等于我们执行一个线性卷积所应该得到的。因此我们可以将 $x[n]$分为长度为 L 的序列段，使得每个输入段与先前的序列段重叠$(P - 1)$点。也就是说，我们定义序列段为

$$x_r[n] = x[n + r(L - P + 1) - P + 1], \quad 0 \leqslant n \leqslant L - 1 \tag{8.144}$$

和前面一样，式中我们已经定义了每个序列段的时间原点是在该序列段的起始点处，而不是在 $x[n]$的原点。这种分段的方法绘于图 8.24(a)中，每个序列段与 $h[n]$的循环卷积记做

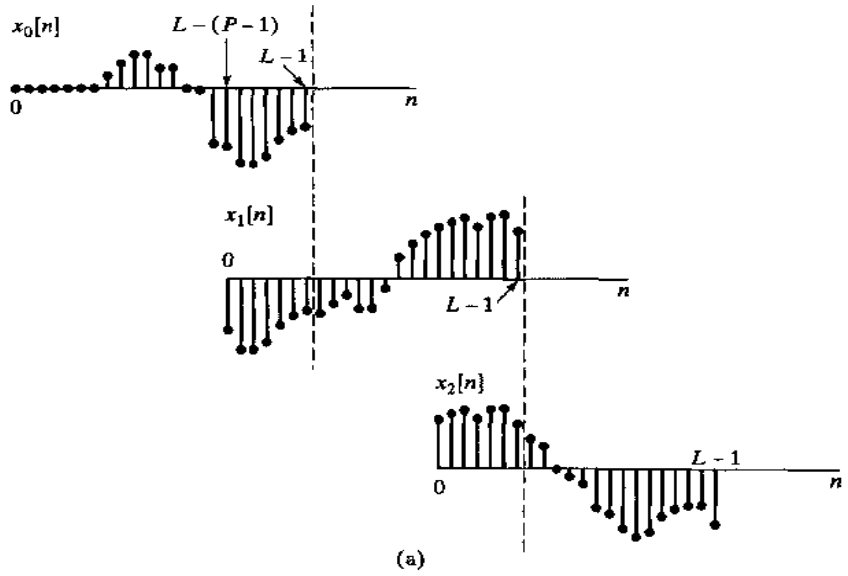
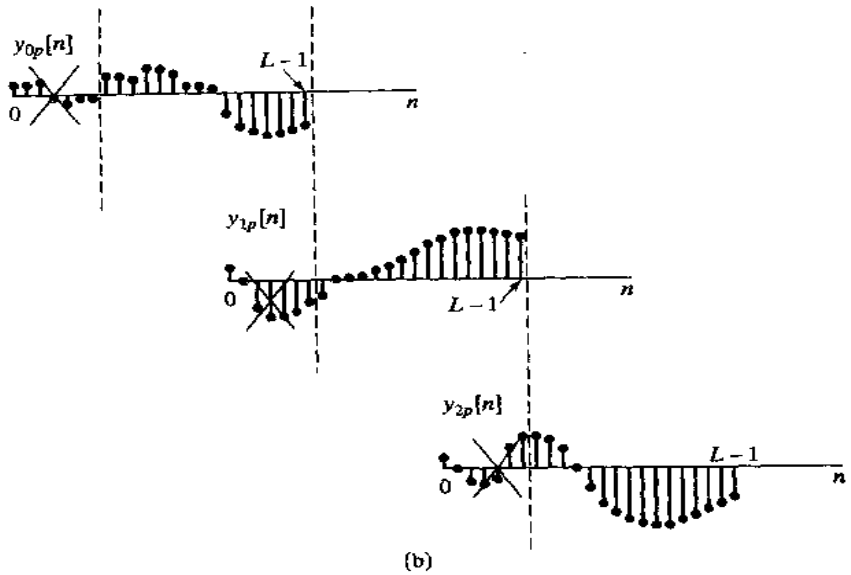


图 8.24 (a) 将图 8.22 中的 $x[n]$分解为相互重叠的长度为 L 的序列段；



(b)

图 8.24(续) (b) 每段与 $h[n]$卷积的结果,图中表示出为了得出线性卷积对过滤后的每段序列应当去掉的部分

$y_{rp}[n]$,多加的下标 P 表示 $y_{rp}[n]$是已经产生了时间混叠的循环卷积的结果。在图 8.24(b)中绘出了这些序列。每个输出序列段在区间 $0 \leqslant n \leqslant P-2$ 中的部分是必须去掉的。最后把来自后续序列段的其余样本邻接起来构成最终的滤波输出。这就是

$$y[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n - r(L - P + 1) + P - 1] \tag{8.145}$$

其中

$$y_r[n] = \begin{cases} y_{rp}[n], & P-1 \leqslant n \leqslant L-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8.146}$$

这种方法称为重叠保留法,因为输入序列段有重叠,所以每个接续的输入序列包括有$(L-P+1)$个新点,并且从先前的序列段保留下来$(P-1)$个点。

如何利用块卷积的重叠相加法可能不容易立刻就明白。在第 9 章中我们将研究计算 DFT 的高效算法。这些算法通称为快速傅里叶变换(FFT),它们是十分有效的,对于平坦的适当长度(数量级为 25 或 30)的 FIR 脉冲响应,用 DFT 来计算块卷积可能要比直接计算线性卷积更有效。当然,确定使 DFT 方法更加有效地长度 P 与进行计算可利用的硬件和软件有关(参见 Stockham,1966 和 Helms,1967)。

8.8 离散余弦变换(DCT)

在一般类有限长变换中,

$$A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\phi_k^*[n] \tag{8.147}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} A[k]\phi_k[n] \tag{8.148}$$

DFT 也许是最常见的例子，其中序列 $\phi_k[n]$称为**基序列**，它们相互正交，即

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \phi_k[n]\phi_m^*[n] = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases} \tag{8.149}$$

在 DFT 中，基序列是复周期序列 $e^{j2\pi kn/N}$，并且若 $x[n]$是实序列，则 $A[k]$是复对称序列。很自然，人们会问道当 $x[n]$是实序列时，是否存在一组实数基序列使得当 $x[n]$是实序列时得到实变换序列 $A[k]$。由此可导出许多其它的正交变换表示的定义，例如 Haar 变换，Hadamard 变换(Elliott 和 Rao,1982)，及 Hartley 变换(Bracewell,1983,1984,1986)(Hartley 变换定义和性质的讨论见习题 8.65)。另一种实序列的正交变换是 DCT，或称离散余弦变换。(见 Ahmed 等,1974 及 Rao 和 Yip,1990)。DCT 与 DFT 有密切联系，并且在许多信号处理的应用中尤其是在语音和图像压缩方面特别有用和十分重要。在本节中，我们将引入 DCT 并讨论它与 DFT 的联系作为有关 DFT 论述的结尾。

8.8.1 DCT 的定义

DCT 变换的形式如(8.147)式和(8.148)式，其中的基序列 $\phi_k[n]$为余弦函数。因为余弦函数既是周期的又是偶对称的，所以综合式(8.148)式中 $x[n]$在区间 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 外的延伸也是周期的和对称的。换句话说，正如 DFT 隐含着周期性假设一样，DCT 同时隐含着周期性和偶**对称性**的假设。

在 DFT 的推导中，我们首先构造出能够唯一地恢复原有限长序列的周期序列，然后利用周期复指数的展开式来表示该有限长序列。与此相类似，DCT 相应地由有限长序列构造出一个周期的对称序列，由此可唯一地恢复原有限长序列。因为这样做有许多方式，所以 DCT 有多种定义。在图 8.25 中，我们给出一个 4 点序列对称周期延拓的 4 种方式，对每种方式画出了 17 个样本点。在每个小图中原有限长序列的样本都用实心点表示。这些序列都是周期的(周期为 16 或更小)和偶对称的。在每种情况中，均可很容易地将原 4 点有限长序列作为一个周期的前 4 个点。为了方便起见，我们把图 8.25(a)，(b)，(c)和(d)中的 4 个子序列均作周期为 16 的延拓，从而得到周期序列，且分别用 $\tilde{x}_1[n]$，$\tilde{x}_2[n]$，$\tilde{x}_3[n]$和 $\tilde{x}_4[n]$表示。我们注意到 $\tilde{x}_1[n]$的周期为$(2N-2)=6$，且 $\tilde{x}_1[n]$关于 $n=0$ 和 $n=(N-1)=3$ 为偶对称。序列 $\tilde{x}_2[n]$的周期为 $2N=8$，且 $\tilde{x}_2[n]$关于“半样本”点即 $n=-\frac{1}{2}$和$\frac{7}{2}$和为偶对称。序列 $\tilde{x}_3[n]$的周期为 $4N=16$，且 $\tilde{x}_3[n]$关于 $n=0$ 和 $n=8$ 为偶对称。序列 $\tilde{x}_4[n]$的周期为 $4N=16$，且 $\tilde{x}_4[n]$也关于“半样本”点 $n=-\frac{1}{2}$和 $n=\left(2N-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}$为偶对称。

图 8.25 中给出的 4 种不同情况表明了 DCT 的 4 种常用形式中所隐含的周期性，这 4 种形式分别称为 DCT－1，DCT－2，DCT－3 和 DCT－4。可以证明(见 Martucci，1994)至少有 4 种方法可由 $x[n]$来产生一个偶周期序列。这表明可能还有 4 种 DCT 的表示式。此外，也有可能由 $x[n]$产生 8 种奇对称周期序列，由此可导出**离散正弦变换**(DST)的 8 种不同形式，其中正交归一化表示的基序列为正弦函数。对于实序列这些变换构成了一族含有 16 种形式的正交归一化变换。这些变换中最常使用的是 DCT－1 和 DCT－2 表示式，因此下面我们将重点讨论 DCT－1 和 DCT－2 表示式。

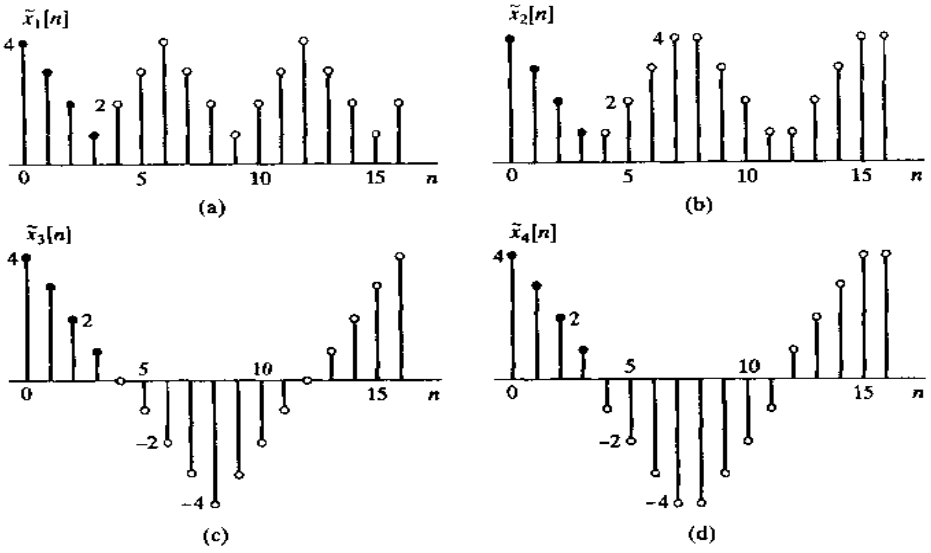


图 8.25　将一个 4 点序列 $x[n]$进行周期和对称扩展的 4 种方式。有限长序列 $x[n]$用实心点表示
(a) 1 型周期扩展 DCT－1；(b) 2 型周期扩展 DCT－2；
(c) 3 型周期扩展 DCT－3；(d) 4 型周期扩展 DCT－4

8.8.2　DCT－1 和 DCT－2 的定义

导致不同形式 DCT 的各种周期延拓均可看作是 N 点序列 $\pm x[n]$和 $\pm x[-n]$平移复本的和。DCT－1 和 DCT－2 的延拓之间的区别取决于它们的端点是否与它们自身平移后的部分重叠，如果重叠，取决于端点中重叠的部分。对于 DCT－1，$x[n]$先在端点处作一改变，然后进行周期为 $2N-2$ 的延拓，所得周期序列为

$$\tilde{x}_1[n] = x_a[((n))_{2N-2}] + x_a[((-n))_{2N-2}] \tag{8.150}$$

式中 $x_a[n]$是改变后的序列，为 $x_a[n]=\alpha[n]x[n]$，其中

$$\alpha[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & n = 0 \text{ 且 } N-1 \\ 1, & 1 \leqslant n \leqslant N-2 \end{cases} \tag{8.151}$$

端点的加权抵消了当(8.150)式的两项在 $n=0$，$n=(N-1)$以及与它们相隔$(2N-2)$整数倍的点处重叠时所产生的加倍。利用这个加权，很容易证明，当 $n=0,1,\cdots,N-1$ 时，$x[n]=\tilde{x}_1[n]$。所得到的周期序列 $\tilde{x}_1[n]$关于点 $n=0, n=N-1, 2N-2$ 等为偶周期对称，称该对称性为 1 型周期对称。DCT－1 定义为如下变换对

$$X^{c1}[k] = 2\sum_{n=0}^{N-1}\alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right),\ 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{8.152}$$

$$x[n] = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha[k]X^{c1}[k]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.153}$$

式中 $\alpha[n]$与(8.151)式中定义相同。

对于 DCT－2，$x[n]$延拓为周期为 $2N$ 的周期序列，用下式表示：

$$\tilde{x}_2[n] = x[((n))_{2N}] + x[((-n-1))_{2N}], \tag{8.154}$$

由于序列的端点没有重叠，所以不需要对它们进行调整，以保证当 $n=0,1,\cdots,N-1$ 时 $x[n]=\tilde{x}_2[n]$。这种对称性称为 **2 型**周期对称。在这种情况下周期序列 $\tilde{x}_2[n]$关于"半样本"点 $-\frac{1}{2}$，$N-\frac{1}{2}$，$2N-\frac{1}{2}$等为偶周期对称。DCT－2 定义为如下变换对

$$X^{c2}[k] = 2\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\ 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{8.155}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]X^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{8.156}$$

式中 DCT－2 反变换用到权函数

$$\beta[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k=0 \\ 1, & 1 \leqslant k \leqslant N-1 \end{cases} \tag{8.157}$$

在许多处理中，DCT 定义包括使该变换成为**单式**的归一化因子①。例如，DCT－2 通常定义为

$$\tilde{X}^{c2}[k] = \sqrt{\frac{2}{N}}\,\tilde{\beta}[k]\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\ 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{8.158}$$

$$x[n] = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\beta}[k]\tilde{X}^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\ 0 \leqslant n \leqslant N \quad 1 \tag{8.159}$$

式中

$$\tilde{\beta}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k=0 \\ 1, & k=1,2,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{8.160}$$

将上式与(8.155)式、(8.156)式进行比较，可知乘积因子 2，$1/N$ 和 $\beta[k]$在正、反变换式中处于不同的位置(一种类似的归一化可用来定义 DCT－1 的归一化形式)。虽然这种归一化产生了一种单式变换表示式，但是(8.152)式和(8.153)式以及(8.155)式和(8.156)式的定义更容易与我们本章所定义的 DFT 联系在一起。因此，在下面的讨论中，我们采用自己的定义而不是如在 Rao 和 Yip(1990)及其他文献中所涉及到的归一化定义。

虽然通常我们只计算当 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 时的 DCT，但是在这个区间外我们也可以毫无困难的计算 DCT，正如图 8.26 所示，图中当 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 时的 DCT 值用实心点表示。这些图说明了 DCT 也是偶周期序列。然而，变换序列的对称性并不总与隐含周期性的输入序列的对称性相同：虽然 $\tilde{x}_1[n]$及 $X^{c1}[k]$的延拓均具有 1 型对称性，但是通过比较图 8.25(c)和 8.26(b) 可以看出 $X^{c2}[k]$具有与 $\tilde{x}_3[n]$相同而不是与 $\tilde{x}_2[n]$相同的对称性。

由于 DCT 都是正交变换表示，因此它们具有形式上与 DFT 特性相似的性质。在 Ahmed 等人(1974)和 Rand 和 Yip(1990)的论文中对这些性质的一些细节进行了较详细的论述。

① 如果 DCT 是正交的，且有如下特性：$\sum_{n=0}^{N-1}(x[n])^2 = \sum_{k=0}^{N-1}(X^{c2}[k])^2$，则它为归一化变换。

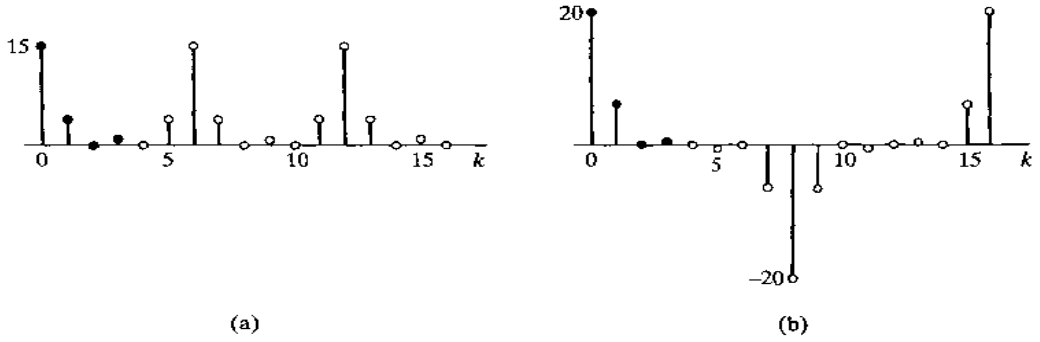


图 8.26　图 8.25 中 4 点序列的 DCT－1 和 DCT－2
(a) DCT－1；(b) DCT－2

8.8.3　DFT 与 DCT－1 的关系

正如我们所预见到的，有限长序列的 DFT 和它们的各种 DCT 之间有着密切的联系。为了表明这种联系，我们注意到，由于对于 DCT－1，$\tilde{x}_1[n]$是由 $x_1[n]$根据(8.150)式和(8.151)式得出的，因此周期序列 $\tilde{x}_1[n]$的一个周期就定义了有限长序列：

$$x_1[n] = x_a[((n))_{2N-2}] + x_a[((-n))_{2N-2}] = \tilde{x}_1[n],\ n = 0,1,\cdots,2N-3 \tag{8.161}$$

式中 $x_a[n] = \alpha[n]x[n]$是一个端点除以 2 的 N 点实序列。由(8.161)式可以得出$(2N-2)$点序列 $x_1[n]$的$(2N-2)$点 DFT 为

$$X_1[k] = X_a[k] + X_a^*[k] = 2\mathrm{Re}\{X_a[k]\},\ k = 0,1,\cdots,2N-3 \tag{8.162}$$

式中 $X_a[k]$为 N 点序列$\alpha[n]x[n]$的$(2N-2)$点 DFT；即，$\alpha[n]x[n]$补了$(N-2)$个零点。根据补零后序列的$(2N-2)$点 DFT 的定义，可得

$$X_1[k] = 2\mathrm{Re}\{X_a[k]\} = 2\sum_{n=0}^{N-1}\alpha[n]x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-2}\right) = X^{c1}[k] \tag{8.163}$$

因此，N 点序列的 DCT－1 与对称延拓序列 $x_1[n]$的$(2N-2)$点 DFT 相同，而且也与加权序列 $x_a[n]$的$(2N-2)$点 DFT 的前 N 点值的实部的二倍相同。

正如在第 9 章中所讨论的，由于 DFT 有快速算法，可用于计算(8.163)式中的 DFT $X_a[k]$或 $X_1[k]$。因此，DCT－1 也有一个方便的可行的快速算法。因为 DCT－1 的定义只涉及到实值系数，所以也有直接计算实序列的 DCT－1 的有效算法，而不需进行复数的乘加运算(见 Ahmed 等，1974 和 Chen 等，1977)。

DCT－1 反变换也可用 DFT 的反变换来计算。只需要利用(8.163)式由 $X^{c1}[k]$得出 $X_1[k]$，然后计算$(2N-2)$点 DFT 反变换，特别是

$$X_1[k] = \begin{cases} X^{c1}[k], & k = 0,\cdots,N-1 \\ X^{c1}[2N-2-k], & k = N,\cdots,2N-3 \end{cases} \tag{8.164}$$

且利用$(2N-2)$点 DFT 反变换的定义，我们可计算出对称延拓序列

$$x_1[n] = \frac{1}{2N-2}\sum_{k=0}^{2N-3}X_1[k]e^{j2\pi kn/(2N-2)},\ n = 0,1,\cdots,2N-3 \tag{8.165}$$

抽取该序列的前 N 个点得到 $x[n]$，即 $x[n]=x_1[n]$，$n=0,1,\cdots,N-1$。将(8.164)式代入(8.165)式，得出 DCT－1 反变换可用 $X^{c1}[k]$ 和余弦函数来表示，如(8.153)式所示(见习题 8.68)。

8.8.4 DFT 和 DCT－2 的关系

用 DFT 来表示有限长序列 $x[n]$ 的 DCT－2 也是有可能的。为了导出这一关系，我们注意到，周期序列 $\tilde{x}_2[n]$ 的一个周期定义一个 $2N$ 点序列：

$$x_2[n]=x[((n))_{2N}]+x[((-n-1))_{2N}]=\tilde{x}_2[n],\ n=0,1,\cdots,2N-1 \tag{8.166}$$

式中 $x[n]$ 是原 N 点实序列。由(8.166)式可得出 $2N$ 点序列 $x_2[n]$ 的 $2N$ 点 DFT 为

$$X_2[k]=X[k]+X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)},\ k=0,1,\cdots,2N-1 \tag{8.167}$$

式中 $X[k]$ 是 N 点序列 $x[n]$ 的 $2N$ 点 DFT；也就是说，在这种情况下，给 $x[n]$ 补了 N 个零点。由(8.167)式，可得

$$\begin{aligned}X_2[k]&=X[k]+X^*[k]e^{j2\pi k/(2N)}\\&=e^{j2\pi k/(2N)}(X[k]e^{-j\pi k/(2N)}+X^*[k]e^{j\pi k/(2N)})\\&=e^{j\pi k/(2N)}2\mathrm{Re}\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\}\end{aligned} \tag{8.168}$$

根据补零后序列 $2N$ 点 DFT 的定义可以得出

$$\mathrm{Re}\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\}=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right) \tag{8.169}$$

因此，根据(8.155)式，(8.167)式和(8.169)式，可用 N 点序列 $x[n]$ 的 $2N$ 点 DFT $X[k]$ 来表示 $X^{c2}[k]$，为

$$X^{c2}[k]=2\mathrm{Re}\{X[k]e^{-j\pi k/(2N)}\},\ k=0,1,\cdots,N-1 \tag{8.170}$$

或用(8.166)式所定义的 $2N$ 点对称延拓序列 $x_2[n]$ 的 $2N$ 点 DFT 表示作：

$$X^{c2}[k]=e^{-j\pi k/(2N)}X_2[k],\ k=0,1,\cdots,N-1 \tag{8.171}$$

或等同的

$$X_2[k]=e^{j\pi k/(2N)}X^{c2}[k],\ k=0,1,\cdots,N-1 \tag{8.172}$$

在 DCT－1 的情况中，快速算法可用于计算(8.170)式和(8.171)式中的 DFT。Makhoul (1980)讨论了用 DFT 来计算 DCT－2 的其他方法(也可见习题 8.69)。另外，已经推导出计算 DCT－2 的特别快速算法(Rao 和 Yip，1990)。

DCT－2 反变换也可用 DFT 的反变换来计算。计算过程中用到(8.172)式和 DCT－2 的对称性质。特别是，直接代入(8.155)式后可以很容易的证明

$$X^{c2}[2N-k]=-X^{c2}[k],\ k=0,1,\cdots,2N-1 \tag{8.173}$$

由此可得出

$$X_2[k]=\begin{cases}X^{c2}[0], & k=0\\ e^{j\pi k/(2N)}X^{c2}[k], & k=1,\cdots,N-1\\ 0, & k=N\\ -e^{j\pi k/(2N)}X^{c2}[2N-k], & k=N+1,N+2,\cdots,2N-1\end{cases} \tag{8.174}$$

利用 DFT 反变换的定义，可以计算对称延拓序列

$$x_2[n] = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} X_2[k]e^{j2\pi kn/(2N)},\ n = 0,1,\cdots,2N-1 \tag{8.175}$$

由此可得 $x[n] = x_2[n]$, $n = 0,1,\cdots,N-1$。将(8.174)式代入(8.175)式,可以很容易的证明,DCT－2 反变换的关系式可由(8.156)式给出(见习题 8.70)。

8.8.5 DCT－2 的能量压缩性质

在许多数据压缩的应用中,DCT－2 优于 DFT,这是因为它具有一种通常称为"能量压缩"的性质。特别是,有限长序列的 DCT－2 的系数通常比 DFT 更多的集中在较低序号的部分。由 Parseval 定理可说明这一性质的重要性,对于 DCT－1,有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha[n] \mid x[n] \mid^2 = \frac{1}{2N-2}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k] \mid X^{c1}[k] \mid^2 \tag{8.176}$$

而对 DCT－2,有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mid x[n] \mid^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] \mid X^{c2}[k] \mid^2 \tag{8.177}$$

式中 $\beta[k]$如(8.157)式中所定义的。如果信号能量没有受到显著压缩,除低序号 DCT 系数外的系数可设为零,则此时 DCT 可看做是集中于 DCT 的低序号部分。我们将在下面例子中来说明这一能量压缩性质。

例 8.13 DCT－2 中的能量压缩

考虑一个形式如下式所示的测试输入序列

$$x[n] = a^n\cos(\omega_0 n + \phi),\ n = 0,1,\cdots,N-1 \tag{8.178}$$

当 $a=9$, $\omega_0=0.1\pi$, $\phi=0$ 及 $N=32$ 时的这种信号如图 8.27 所示。

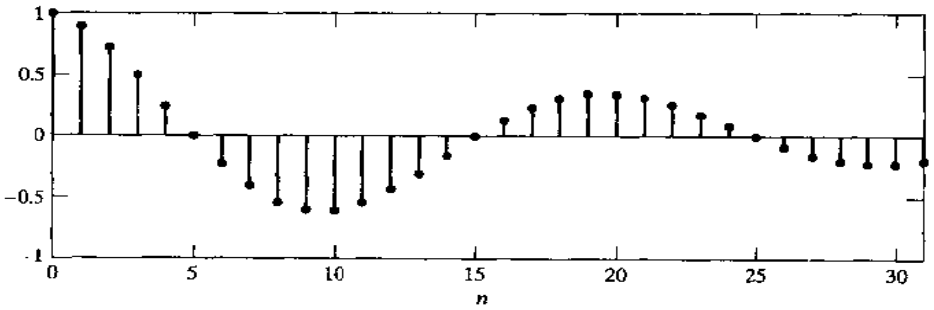


图 8.27 比较 DFT 和 DCT 的测试信号

图 8.27 中 32 点序列的 32 点 DFT 的实部和虚部分别见图 8.28(a)和(b),该序列的DCT－2见图 8.28(c)。在 DFT 的情况下,给出了当 $k=0,1,\cdots,16$ 时的实部和虚部。由于信号是实信号,所以 $X[0]$和 $X[16]$都为实数。其余值均为复数且共轭对称。因此,图 8.28(a)和(b)所示的 32 个实数完全决定了 32 点 DFT。在 DCT－2 的情况下,我们画出了 DCT－2 的全部 32 个实数值。显然,DCT－2 的值主要集中在低序号部分,所以 Parseval 定理指出序列的能量在 DCT－2 表示比在 DFT 表示中更加集中。

对于具有相同数目的实系数的两种表示,通过采用截断且比较它们的均方逼近误差可以定量的描述能量集中特性。为了做到这一点,我们定义

$$x_m^{\mathrm{dft}}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} T_m[k]X[k]e^{j2\pi kn/N},\ n = 0,1,\cdots,N-1 \tag{8.179}$$

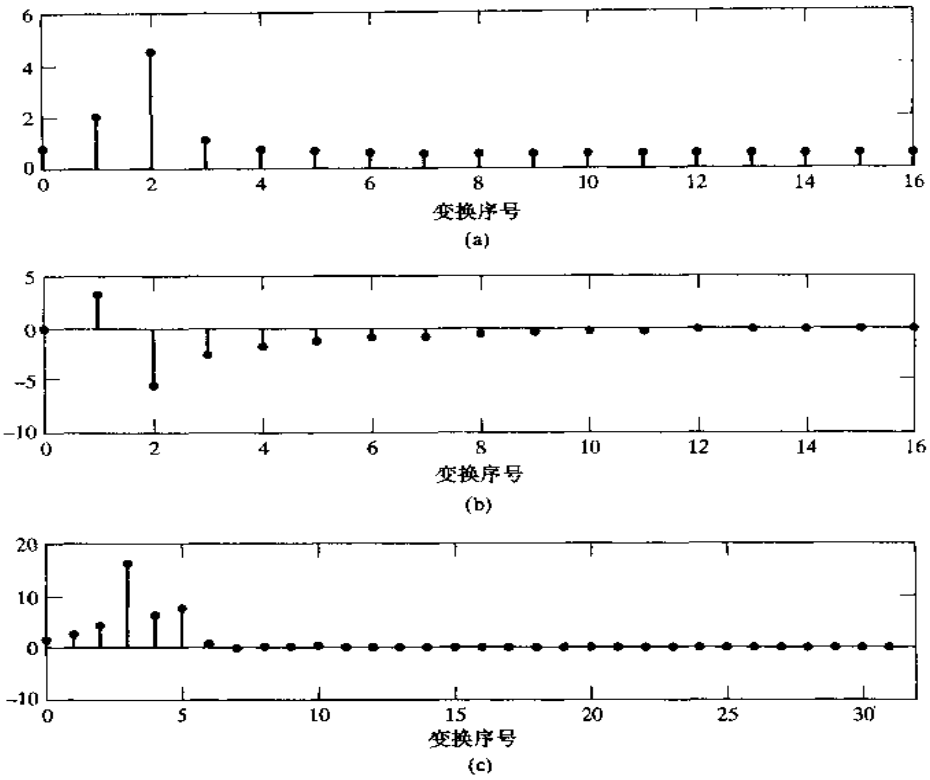


图 8.28 (a) N 点 DFT 的实部;(b) N 点 DFT 的虚部;
(c) 图 8.27 所示测试信号的 N 点 DCT－2

在这种情况下,$X[k]$为 $x[n]$的 N 点 DFT,并且

$$T_m[k]=\begin{cases}1, & 0\leqslant k\leqslant (N-1-m)/2\\ 0, & (N+1-m)/2\leqslant k\leqslant (N-1+m)/2\\ 1, & (N+1+m)/2\leqslant k\leqslant N-1\end{cases}$$

如果 $m=1$,则 $X[N/2]$这一项就会消失。若 $m=3$,则 $X[N/2]$项,$X[N/2-1]$及其相应的复共轭项 $X[N/2+1]$均会消失,以此类推;也就是说,当 $m=1,3,5,\cdots,N-1$ 时 $x_m^{\mathrm{dct}}[n]$是对称的省略掉 m 个 DFT 系数后所构成的序列。① 而对于 DFT 的值有例外,$X[N/2]$为实数,每个所去掉的 DFT 复数值及其相应的复共轭值实际上相当于去掉了两个实数值。例如,由图 8.28(a)和(b)所示的 32 点 DFT 合成 $x_5^{\mathrm{dct}}[n]$时,$m=5$,对应于将系数 $X[14],X[15],X[16],X[17]$和 $X[18]$设为零。

同样,我们也可截断 DCT－2 表示得到

$$x_m^{\mathrm{dct}}[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1-m}\beta[k]X^{c2}[k]\cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right),\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{8.180}$$

在这种情况下,若 $m=5$,在由图 8.28(c)所示的 DCT－2 组合成 $x_m^{\mathrm{dct}}[n]$的情况下,我们就会省略掉 DCT－2 的系数 $X^{c2}[27],\cdots,X^{c2}[31]$。因为这些系数很小,所以 $x_5^{\mathrm{dct}}[n]$与 $x[n]$差别很小。

为了说明 DFT 和 DCT 的逼近误差取决于 m,我们定义

① 为了简化期起见,我们假设 N 为偶数。

$$E^{\mathrm{dft}}[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]-x_m^{\mathrm{dft}}[n]|^2$$

及

$$E^{\mathrm{dct}}[m]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]-x_m^{\mathrm{dct}}[n]|^2$$

分别为截断后的 DFT 和 DCT 的均方逼近误差。在图 8.29 中画出了这些误差，其中用“。”表示 $E^{\mathrm{dft}}[m]$，用“·”表示 $E^{\mathrm{dct}}[m]$。对于 $m=0$（无截断）和 $m=N-1$（只保留直流分量）的特殊情况下，DFT 的截断函数为 $T_0[k]=1,0\leqslant k\leqslant N-1$，$T_{N-1}[k]=1,1\leqslant k\leqslant N$ 1 及 $T_{N-1}[0]-1$。在这些情况下，两种表示有同样的误差。当 $1\leqslant m\leqslant 30$ 时，DFT 的误差随着 m 的增加而稳步增大，而 DCT 的误差大约在 $m=25$ 之前均很小。这意味着序列 $x[n]$32 个样本值可用 7 个 DCT－2 的系数来表示，且误差很小。

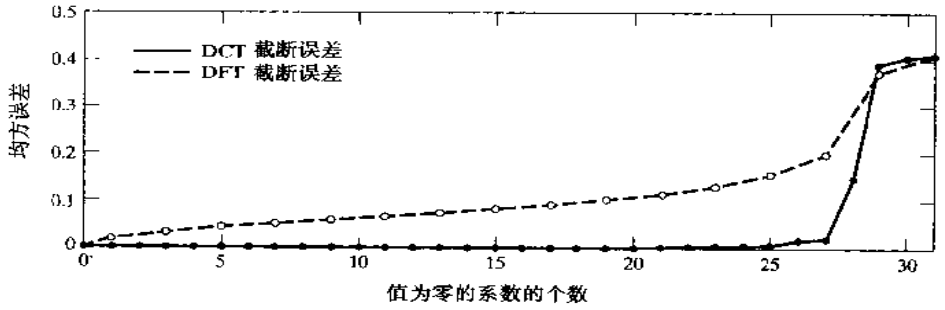


图 8.29　DFT 和 DCT－2 截断误差的比较

例 8.13 中的信号是一个具有零相位的低频指数衰减信号。我们认真地选出这个例子来重点说明这一能量压缩性质。并不是每一个 $x[n]$都能给出如此理想的结果。高通信号，以及如(8.178)式给出的具有不同参数的一些信号均不能给出如此理想的差别。然而，在许多人们关心的数据压缩的场合，DCT－2 比 DFT 具有显著的优点。可以证明(Rao 和 Yip,1990)，对于具有复指数相关函数的序列在使均方截断误差最小的意义上，DCT－2 是接近最优的。

8.8.6　DCT 的应用

DCT－2 的主要应用在信号压缩方面，它是许多标准化算法的关键部分。(见 Jayant 和 Noll,1984 与 Rao 和 Hwang,1996)此时在这种应用场合，信号各段用它们的余弦变换来表示。在信号压缩中广泛使用 DCT 主要是因为它具有能量集中特性，我们在上一节通过一个简单的例子已说明了该特性。

DCT 表示与 DFT 一样同属正交变换，有许多与 DFT 相类似的性质，这使得它们可以很灵活地来处理所表示的信号。DFT 最重要的性质之一是两个有限长序列的周期卷积对应于它们的 DFT 的乘积。在 8.7 节中我们看出，有可能利用这一性质使得通过只计算 DFT 来实现线性卷积的计算。在 DCT 的情况下，相应的结果是序列 DCT 的乘积对应于基本对称延拓后序列的周期卷积。但是，还有另外的困难。例如，两个 2 型对称周期序列的周期卷积不是 2 型序列，而是一个 1 型序列。另一方面，一个 1 型序列与一个具有相同隐含周期的 2 型序列的周期卷积是一个 2 型序列。因此 DCT 乘积的反变换要求不同 DCT 的组合使周期对称卷积

成立。由于我们有许多不同的DCT定义可供选择，所以存在很多不同的方法来实现这一点。每种不同的组合都相应于一对对称延拓的有限长序列的周期卷积。Murtucci(1994)全面讨论了将DCT和DST变换用于实现对称周期卷积的情况。

DCT的乘积对应于特殊形式的周期卷积，它具有在一些应用中可能有用的特性。正如我们对于DFT所看到的，端点效应或"卷绕"效应决定了周期卷积的特性。实际中，两个有限长序列的偶线性卷积和由输入的接入和断开引起的脉冲响应一样，具有端点效应。周期对称卷积的端点效应与普通卷积以及由DFT乘积得出的周期卷积不同。对称延拓在端点产生对称性。"平滑"的边界意味着通常会减轻有限长序列卷积时所产生的端点效应。在对称卷积极为有用的一个领域是图像滤波，在滤波处理中对称卷积可发觉有害的边缘效应且被看做是有碍的人为现象。在这类表示方法中，DCT可能要比DFT或通常的线性卷积优越。当通过DCT的乘积来计算周期对称卷积时，我们可把它看做是将足量的零样本点加在每个序列的起始和结束处而形成的扩展序列的一般卷积。

8.9 小结

在这一章中，我们讨论了有限长序列的傅里叶表示。我们的讨论大部分集中于离散傅里叶变换(DFT)，它以周期序列的离散傅里叶级数表示为基础。通过定义一个每个周期都等于某有限长序列的周期序列，DFT就等于一个周期中的傅里叶级数系数。因为基本周期性的重要性，我们首先研究了离散傅里叶级数表示的性质，然后利用有限长序列来解释这些性质。一个重要的结论是DFT的值等于在单位圆等间隔点上变换的采样值。这就引起了在解释DFT性质时对时间混叠的关注，当研究循环卷积以及它和线性卷积的关系时广泛地用到这一概念。我们又利用了这一研究成果说明如何利用DFT来实现一个有限长脉冲响应与一个长度相等的输入信号之间的线性卷积。

本章最后引入了对离散余弦变换的介绍，说明了DCT和DFT两者是紧密联系在一起的，并都对周期性有着隐含的假设。本章用一个例子说明了能量压缩性质，它是DCT在数据压缩中广泛应用的重要原因。

习 题

基本题(附答案)

8.1 假设 $x_c(t)$是一个周期的连续时间信号，其周期为1ms，它的傅里叶级数为

$$x_c(t) = \sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

对于$|k|>9$，傅里叶系数 a_k 为零。以采样间隔 $T=\frac{1}{6}\times 10^{-3}$s对 $x_c(t)$采样得到$x[n]$：

$$x[n] = x_c\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$$

(a) $x[n]$是周期的吗？如果是，周期为多少？

(b) 采样率是否高于奈奎斯特采样率，也就是说 T 是否充分小而可以避免混叠？

(c) 利用 a_k 求出$x[n]$的离散傅里叶级数系数。

8.2 设 $\tilde{x}[n]$是一个周期为 N 的周期序列，$\tilde{x}[n]$还是一个周期为 $3N$ 的周期序列。令$\tilde{X}[k]$表示作为周期

为 N 的周期序列的 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数，$\tilde{X}_3[k]$ 表示作为周期为 $3N$ 的周期序列的 $\tilde{x}[n]$ 的 DFS 系数。

(a) 用 $\tilde{X}[k]$ 表示出 $\tilde{X}_3[k]$。

(b) 用公式计算 $\tilde{X}[k]$ 和 $\tilde{X}_3[k]$，当 $\tilde{x}[n]$ 为图 P8.2 中给定的序列时，证明你在(a)中得出的结果。

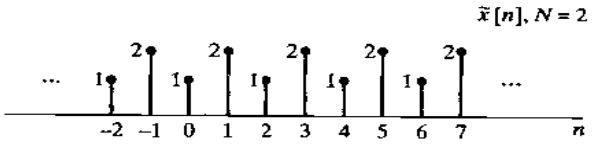


图 P8.2

8.3 图 P8.3 画出三个的周期序列 $\tilde{x}_1[n]$ 到 $\tilde{x}_3[n]$。这些序列可用傅里叶级数表示为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn}$$

(a) 哪一个序列可通过选择时间起始点使所有的 $\tilde{X}[k]$ 为实数？

(b) 哪一个序列可通过选择时间起始点使所有的 $\tilde{X}[k]$ 为虚数(k 为 N 的整数倍时除外)？

(c) 哪一个序列有 $\tilde{X}[k]=0, k=\pm 2, \pm 4, \pm 6$ 等？

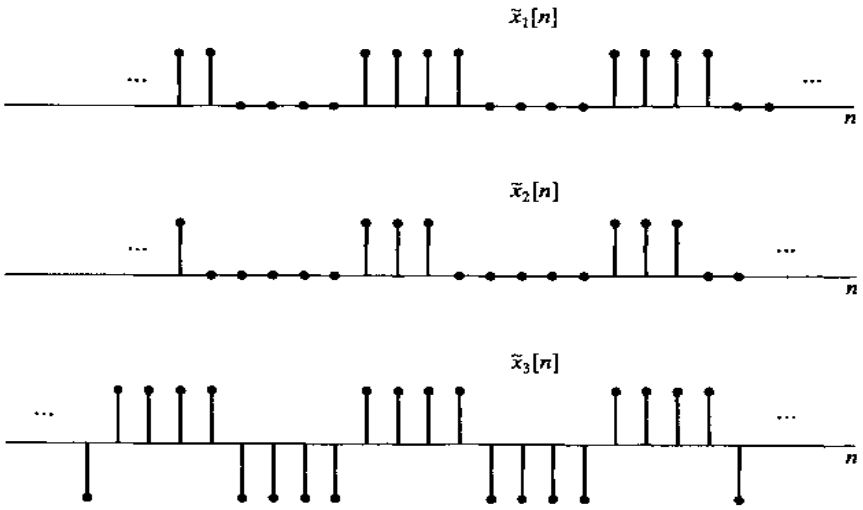


图 P8.3

8.4 考虑由式 $x[n]=a^n u[n]$ 给出的序列 $x[n]$。周期序列 $\tilde{x}[n]$ 由 $x[n]$ 用下列方式构成：

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

(a) 求 $x[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

(b) 求 $\tilde{x}[n]$ 的离散傅里叶级数 $\tilde{X}[k]$。

(c) $\tilde{X}[k]$ 与 $X(e^{j\omega})$ 有何联系？

8.5 计算下列每一个长度为 N(N 为偶数)的有限长序列的 DFT：

(a) $x[n]=\delta[n]$

(b) $x[n]=\delta[n-n_0]$, $0 \leqslant n_0 \leqslant N-1$

(c) $x[n]=\begin{cases}1, & n \text{ 为偶数}, 0 \leqslant n \leqslant N-1\\ 0, & n \text{ 为奇数}, 0 \leqslant n \leqslant N-1\end{cases}$

(d) $x[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N/2-1\\ 0, & N/2\leqslant n\leqslant N-1\end{cases}$

(e) $x[n]=\begin{cases}a^n, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

8.6 考虑复序列

$$x[n]=\begin{cases}e^{j\omega_0 n}, & 0\leqslant n\leqslant N-1,\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(a) 求 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

(b) 求有限长序列 $x[n]$的 N 点 DFT $X[k]$。

(c) 对于 $\omega_0=2\pi k_0/N$,其中 k_0 为整数的情况,求 $x[n]$的 DFT。

8.7 考虑图 P8.7 中的有限长序列 $x[n]$。令 $X(z)$为 $x[n]$的 z 变换。如果我们在$z=e^{j(2\pi/4)k}$, $k=1,2,3$ 处对 $X(z)$采样,则可得到

$$X_1[k]=X(z)\Big|_{z=e^{j(2\pi/4)k}},\ k=0,1,2,3$$

画出作为 $X[k]$的 IDFT 而得出的序列 $x_1[n]$的草图。



图 P8.7

8.8 设 $X(e^{j\omega})$为序列$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$的傅里叶变换。令 $y[n]$表示一个长度为 10 的有限长序列,即 $y[n]=0, n<0$ 和 $y[n]=0, n\geqslant 10$。$y[n]$的 10 点 DFT 用 $Y[k]$表示,它对应于 $X(e^{j\omega})$的 10 个等间隔样本,即 $Y[k]=X(e^{j2\pi k/10})$。求 $y[n]$。

8.9 研究 20 点有限长序列 $x[n]$,使得在 $0\leqslant n\leqslant 19$ 之外 $x[n]=0$,并且令 $X(e^{j\omega})$表示$x[n]$的傅里叶变换。

(a) 如果希望通过计算一个 M 点 DFT 来求出在 $\omega=4\pi/5$ 处的 $X(e^{j\omega})$,请确定最小可能的数 M 并提出一种用最小的 M 求出在$\omega=4\pi/5$ 处之 $X(e^{j\omega})$的方法。

(b) 如果希望通过计算一个 L 点 DFT 来求出在 $\omega=10\pi/27$ 处的 $X(e^{j\omega})$,请确定最小可能的数 L 并提出一种用最小的 L 求出 $X(e^{j10\pi/27})$的方法。

8.10 两个 8 点序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$如图 P8.10 所示,其 DFT 分别为 $X_1[k]$和 $X_2[k]$。试确定 $X_1[k]$和 $X_2[k]$之间的关系式。

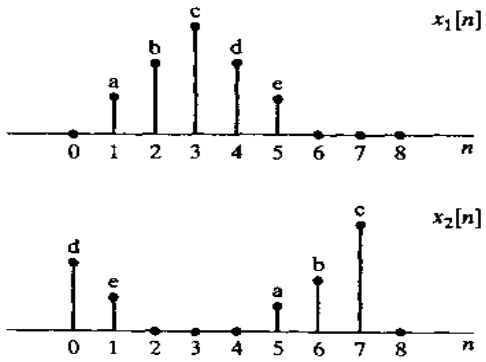


图 P8.10

8.11 图 P8.11 表示两个有限长序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$。绘出它们 6 点循环卷积的图形。

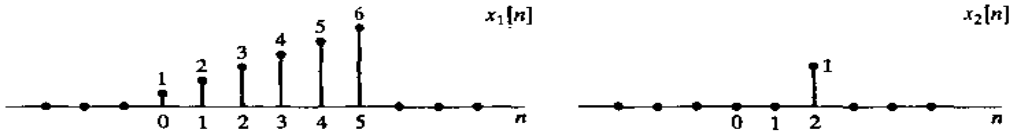


图 P8.11

8.12 假设我们有两个 4 点序列 $x[n]$和 $h[n]$,表示式如下:

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n=0,1,2,3$$

$$h[n]=2^n,\ n=0,1,2,3$$

(a) 计算 4 点 DFT $X[k]$。

(b) 计算 4 点 DFT $H[k]$。

(c) 直接作循环卷积计算 $y[n]=x[n]④h[n]$。

(d) 利用将 $x[n]$和 $h[n]$的 DFT 相乘,然后求其 IDFT 的方法,计算(c)中的 $y[n]$。

8.13 考虑如图 P8.13 所示的有限长序列 $x[n]$。用 $X[k]$表示 $x[n]$的 5 点 DFT。画出序列 $y[n]$,其 DFT 为

$$Y[k]=W_5^{-2k}X[k]$$



图 P8.13

8.14 如图 P8.14 所示的两个有限长信号 $x_1[n]$和 $x_2[n]$。假设 $x_1[n]$,$x_2[n]$在图中所示区域之外均为零。设 $x_3[n]$为 $x_1[n]$与 $x_2[n]$的 8 点循环卷积,即

$x_3[n]=x_1[n]⑧x_2[n]$,求 $x_3[2]$。

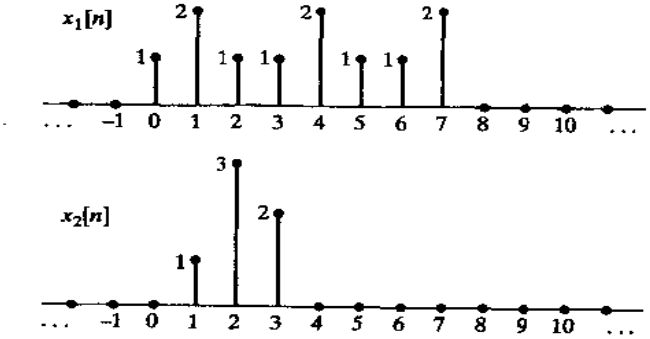


图 P8.14

8.15 图 P8.15－1 画出两个序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$。$x_2[n]$在时间 $n=3$ 处的值未知，但可用变量 a 表示。图 P8.15－2 表示 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 4 点循环卷积 $y[n]$。根据图示的$y[n]$，能否唯一的确定 a？如果可以，a 是多少？如果不行，给出可产生如图示序列$y[n]$的可能的两个 a 值。

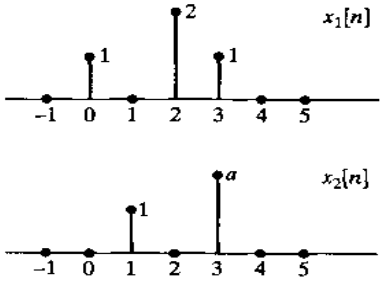


图 P8.15－1

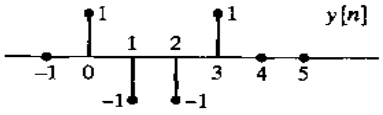


图 P8.15－2

8.16 图 P8.16－1 表示一个 6 点离散时间序列 $x[n]$。假设在图示区间外 $x[n]=0$。$x[4]$的值未知且用 b 表示。注意，图中用 b 表示的样本并不一定是按比例画出的。令$X(e^{j\omega})$表示$x[n]$的 DTFT，$X_1[k]$表示 $X(e^{j\omega})$在每隔 $\pi/2$ 处的样本，即

$$X_1[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(\pi/2)k}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 3$$

由 $X_1[k]$的 4 点 DFT 反变换得到的 4 点序列 $x_1[n]$如图 P8.16－2 所示。根据这幅图，能否唯一的确定 b 值？如果可以，请求出 b 的值。

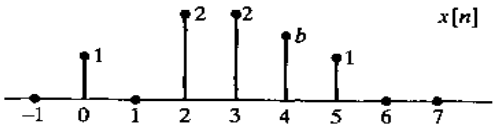


图 P8.16－1

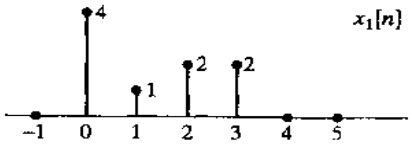


图 P8.16－2

8.17 两个有限长序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$如图 P8.17 所示。使得 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 N 点循环卷积等于这两个

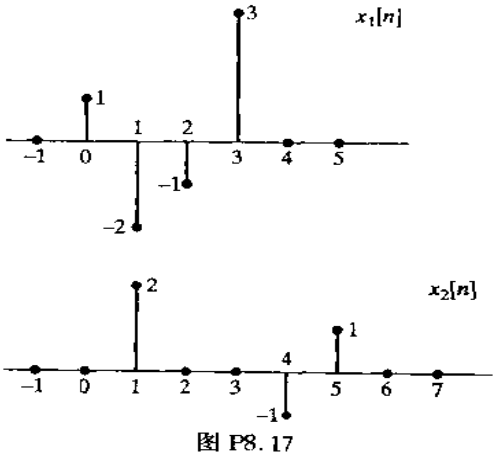


图 P8.17

序列的线性卷积，即 $x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$，的最小 N 值是多少？

8.18 图 P8.18－1 表示一个序列 $x[n]$，其 $x[3]$的值是未知常数 c。幅度为 c 的样本并不一定是按比例画出的。设

$$X_1[k] = X[k]e^{j2\pi 3k/5}$$

式中 $X[k]$是 $x[n]$的 5 点 DFT。图 P8.18－2 画出的序列 $x_1[n]$是 $X_1[k]$的 DFT 反变换。求 c 值是多少？

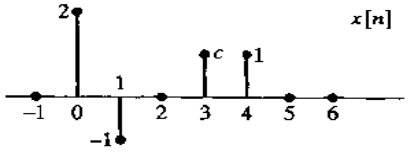


图 P8.18－1

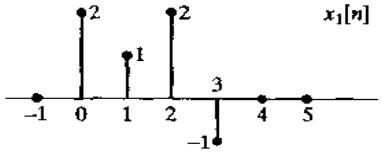


图 P8.18－2

8.19 两个有限长序列 $x[n]$和 $x_1[n]$如图 P8.19 所示。它们的 DFT 分别为 $X[k]$和 $X_1[k]$，且有如下关系：

$$X_1[k] = X[k]e^{-j(2\pi km/6)}$$

式中 m 是未知常数。能否求出与图 P8.19 相一致的 m 值？m 值是否唯一？如果唯一，说明理由。如果不唯一，求出另一个符合上述条件的 m 值。

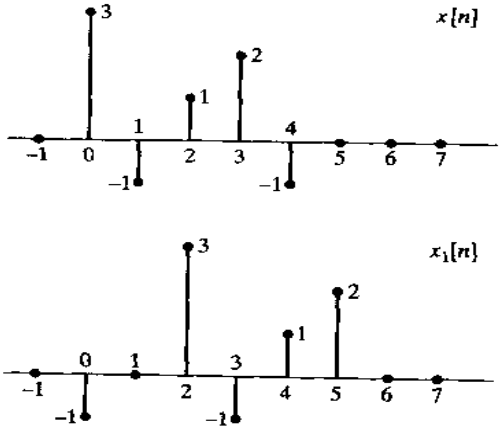


图 P8.19

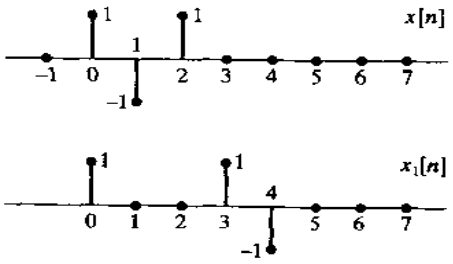


图 P8.20

8.20 两个有限长序列 $x[n]$和 $x_1[n]$如图 P8.20 所示。它们的 DFT 分别记为 $X[k]$和 $X_1[k]$，关系如下式：

$$X_1[k] = X[k]e^{-j(2\pi k2/N)}$$

其中 N 是未知常量。可否求出与图 P8.20 相一致的 N？N 是否唯一？若是，验证你的答案。若不是，求出另一个符合条件的 N。

基本题

8.21 (a) 图 P8.21－1 表示两个周期 $N=7$ 的周期序列 $\tilde{x}_1[n]$和 $\tilde{x}_2[n]$。求序列的 $\tilde{y}_1[n]$，使其 DFS 等于 $\tilde{x}_1[n]$的 DFS 和 $\tilde{x}_2[n]$的 DFS 的乘积，即

$$\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

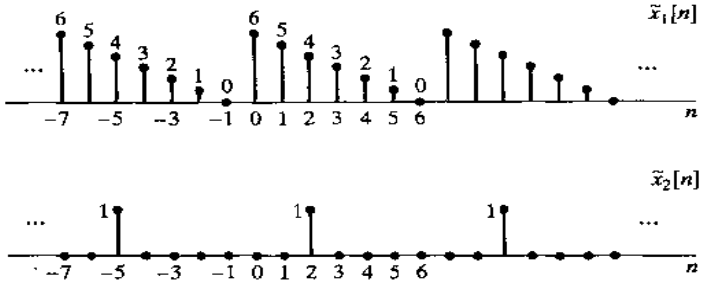


图 P8.21－1

(b) 图 P8.21－2 表示一个周期序列 $\tilde{x}_3[n]$，其周期 $N=7$. 求序列 $\tilde{y}_2[n]$，使其 DFS 等于 $\tilde{x}_1[n]$ 的 DFS 和 $\tilde{x}_3[n]$ 的 DFS 的乘积，即

$$\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_3[k]$$



图 P8.21－2

8.22 $x[n]$表示一个长度为 N 的有限长序列。证明

$$x[((-n))_N] = x[((N-n))_N]$$

8.23 考虑一个长度为 P 的有限长序列$x[n]$，也就是说，当 $n<0$ 和 $n\geqslant P$ 时$x[n]=0$。我们希望在 N 个等间隔频率处

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N},\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

计算傅里叶变换的样本。确定并说明只利用一个 N 点 DFT 在下列两种情况下来计算傅里叶变换的 N 个样本的步骤：

(a) $N>P$；

(b) $N<P$。

8.24 考虑实有限长序列 $x[n]$，其傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，DFT 为 $X[k]$。若

$$\mathrm{Im}\{X[k]\} = 0,\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

则我们是否可以得出结论：

$$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0,\ -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$$

如果你认为可以，请详细说明原因。如果你认为不可以，请举出一个与结论相反的例子。

8.25 研究图 P8.25 中的有限长序列 $x[n]$。$x[n]$ 的 4 点 DFT 用 $X[k]$表示。绘出序列$y[n]$ 的图形，其 DFT 为

$$Y[k] = W_4^{3k}X[k]$$

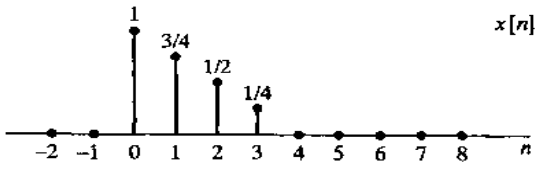


图 P8.25

8.26 考虑如图 P8.26 所示的实有限长序列$x[n]$。

(a) 简略画出有限长序列 $y[n]$的图形，其 6 点 DFT 为

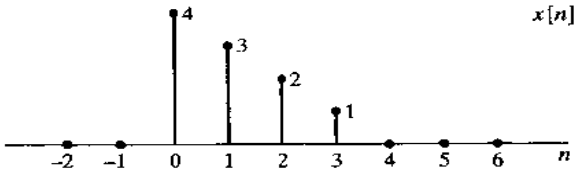


图 P8.26

$$Y[k] = W_6^{4k} X[k]$$

式中 $X[k]$为 $x[n]$的 6 点 DFT。

(b) 简略画出有限长序列 $w[n]$的图形，其 6 点 DFT 为

$$W[k] = \mathrm{Re}\{X[k]\}$$

(c) 简略画出有限长序列 $q[n]$的图形，其 3 点 DFT 为

$$Q[k] = X[2k], \quad k = 0,1,2$$

8.27 图 P8.27 给出两个序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$，其中

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant 99 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

且

$$x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant 9 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(a) 求线性卷积 $x_1[n] * x_2[n]$，并作图。

(b) 求 100 点循环卷积 $x_1[n] \textcircled{100} x_2[n]$，并作图。

(c) 求 110 点循环卷积 $x_1[n] \textcircled{110} x_2[n]$，并作图。

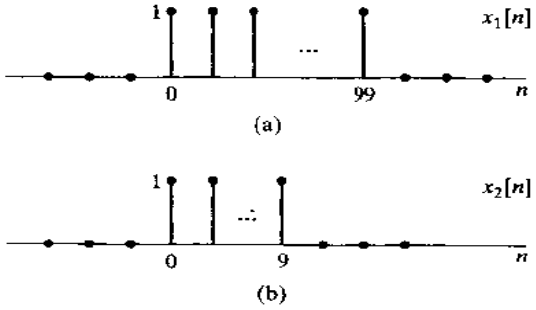


图 P8.27

8.28 图 P8.28 表示一个有限长序列 $x[n]$。画出由下式规定的序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的草图：

$$x_1[n] = x[((n-2))_4], \quad 0 \leqslant n \leqslant 3$$

且

$$x_2[n] = x[((-n))_4], \quad 0 \leqslant n \leqslant 3$$

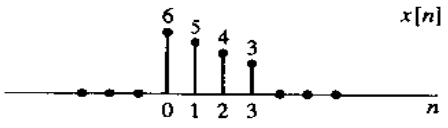


图 P8.28

8.29 图 P8.29 表示两个有限长序列。分别绘出当 $N=6$ 和 $N=10$ 时它们的 N 点循环卷积的图形。

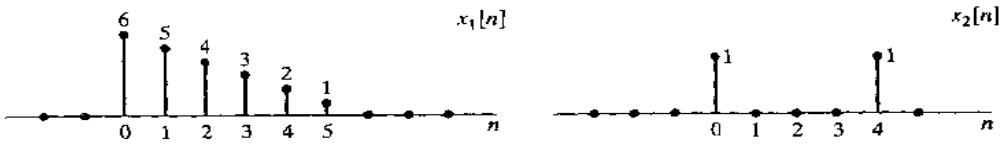


图 P8.29

深入题

8.30 考虑一个长度为 N 的有限长序列 $x[n]$，即，在 $0 \leqslant n \leqslant N-1$ 之外

$$x[n] = 0$$

$X(e^{j\omega})$ 表示 $x[n]$ 的傅里叶变换。$\tilde{X}[k]$ 表示由 $X(e^{j\omega})$ 的 64 个等间隔样本构成的序列，即

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = 2\pi k/64}$$

已知 $0 \leqslant k \leqslant 63$ 在范围内，$\tilde{X}[32] = 1$，而其余值均为零。

(a) 如果序列长度 $N = 64$，按照给定的信息求出序列 $x[n]$。说明答案是否是唯一的。如果是，请解释清楚原因。如果不是，请给出第二种不同的选择。

(b) 如果序列的长度 $N = 192 = 3 \times 64$，求序列 $x[n]$，使其在 $0 \leqslant k \leqslant 63$ 的范围内，$\tilde{X}[32] = 1$ 而其余值为零。说明答案是否是唯一的。如果是，请解释清楚原因。如果不是，请给出第二种不同的选择。

8.31 一个有限长序列的 DFT 对应于它的 z 变换在单位圆上的样本。例如，一个 10 点序列 $x[n]$ 的 DFT 对应于 $X(z)$ 在如图 P8.31－1 所示的 10 个等间隔点处的样本。我们希望求出 $X(z)$ 在如图 P8.31－2 所示的围线上的等间隔的样本，也就是说，我们要得出

$$X(z)\Big|_{z = 0.5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}$$

证明如何修正 $x[n]$ 以得到一个序列 $x_1[n]$，使其 DFT 与 $X(z)$ 的所希望的样本相对应。

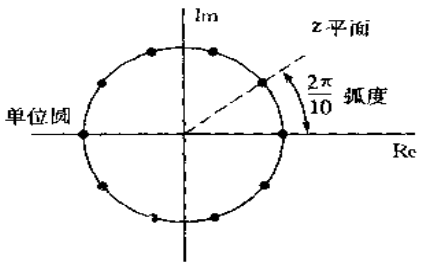


图 P8.31－1

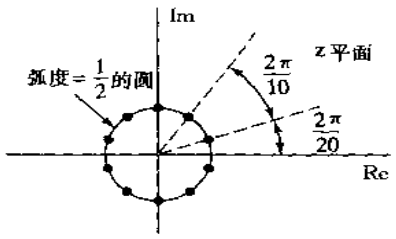


图 P8.31－2

8.32 一个长度为 8 的有限长序列 $x[n]$，其 8 点 DFT $X[k]$ 如图 P8.32－1 所示。另一个长度为 16 的新序

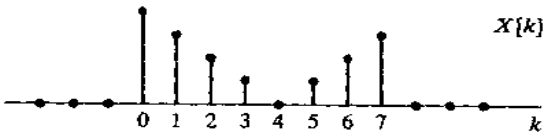


图 P8.32－1

列 $y[n]$定义为

$$y[n]=\begin{cases}x[n/2], & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

从图 P8.32－2 中列出的序列中选出大致与 $y[n]$的 16 点 DFT，$Y[k]$所对应的序列图。

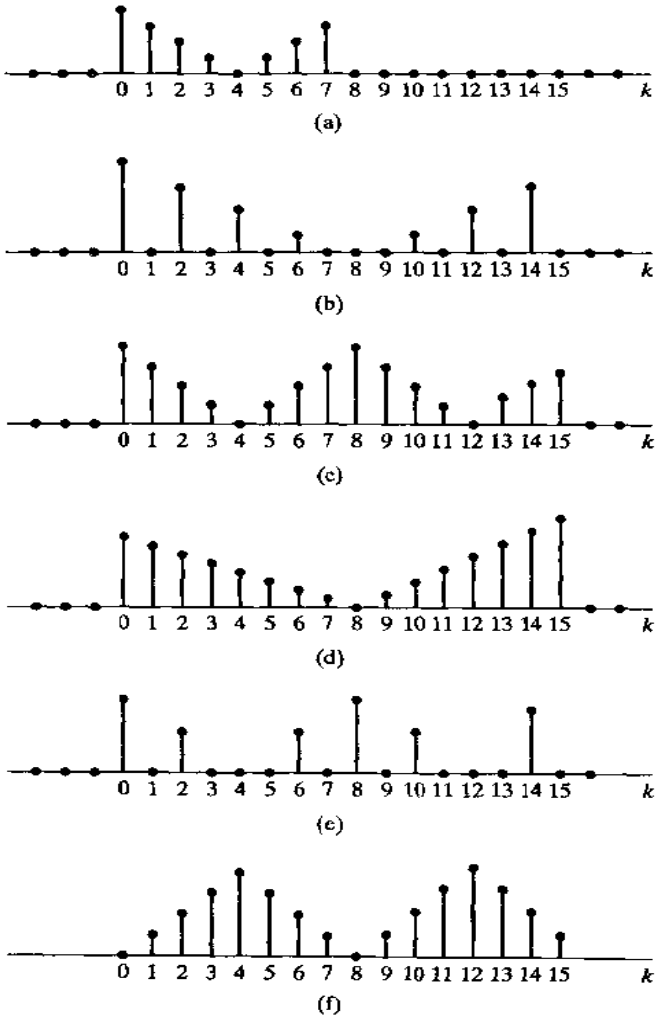


图 P8.32－2

8.33 研究一个长度为 N 的有限长序列$x[n]$，如图 P8.33－1 所示(实线表明序列在 0 和 $N-1$ 之间取值的包络)。两个长度为 $2N$ 的有限长序列$x_1[n]$和 $x_2[n]$由如图P8.33－2所示的 $x[n]$构成，并由下式给出：

$$x_1[n]=\begin{cases}x[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

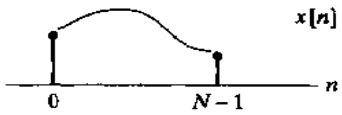


图 P8.33－1

$$x_2[n]=\begin{cases}x[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ -x[n-N], & N\leqslant n\leqslant 2N-1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$x[n]$的 N 点 DFT 用 $X[k]$表示，$x_1[n]$和 $x_2[n]$ 的 $2N$ 点 DFT 分别用 $X_1[k]$和$X_2[k]$表示。

(a) 说明若 $X[k]$已知，能否得出 $X_2[k]$？请详细叙述你的理由。

(b) 确定由 $X_1[k]$得出 $X[k]$的最简单可行的关系式。

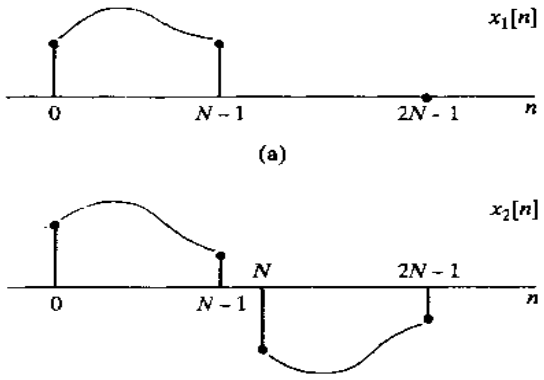


图 P8.33－2

8.34 一个实序列 $x[n]$的偶部定义为

$$x_e[n]=\frac{x[n]+x[-n]}{2}$$

假定 $x[n]$是一个有限长序列，且限定当 $n<0$ 和 $n\geqslant N$ 时 $x[n]=0$。令 $X[k]$表示$x[n]$的 N 点 DFT.

(a) $\mathrm{Re}\{X[k]\}$是 $x_e[n]$的 DFT 吗？

(b) 求出利用 $x[n]$表示的 $\mathrm{Re}\{X[k]\}$ 的 IDFT。

8.35 求一个序列 $x[n]$，它全部能满足下述三个条件：

条件 1：$x[n]$的傅里叶变换有如下形式：

$$X(e^{j\omega})=1+A_1\cos\omega+A_2\cos 2\omega$$

其中 A_1 和 A_2 为某未知常数。

条件 2：当 $n=2$ 时所算出的序列 $x[n]*\delta[n-3]$的值为 5。

条件 3：对于图 P8.35 所示 3 点序列 $w[n]$，当 $n=2$ 时 $w[n]$ 和 $x[n-3]$的 8 点循环卷积的结果等于 11，即

$$\sum_{m=0}^{7}w[m]x[((n-3-m))_8]\Big|_{n=2}=11$$



图 P8.35

8.36 考虑有限长序列

$$x[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-3]$$

我们对该序列实行下列运算：

(i) 计算 5 点 DFT $X[k]$。

(ii) 计算 $Y[k]=X[k]^2$ 的 IDFT 得出序列 $y[n]$。

(a) 求对于 $n=0,1,2,3,4$ 时的序列 $y[n]$。

(b) 如果在(i)(ii)两步中用 N 点 DFT，我们如何选择 N 使得当 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 时 $Y[n]=x[n]*x[n]$？

8.37 研究有限长序列 $x[n]$，当 $n<0$ 和 $n\geqslant N$ 时其值为零，其中 N 为偶数。$x[n]$的 z 变换用 $X(z)$表示。表 P8.37－1 列出了由 $x[n]$得到的 7 个序列。表 P8.37－2 列出了由 $X(z)$得到的 9 个序列。对于表 P8.37－1 中的每一个序列找出其在表 P8.37－2 中对应的 DFT。所考虑的变换长度必须大于或等于序列 $g_k[n]$的长度。为了说明问题起见，只假设 $x[n]$可以用在图 P8.37 中所示的包络来表示。

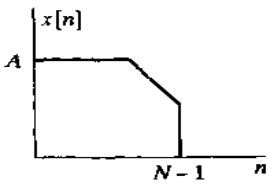


图 P8.37

表 P8.37－1

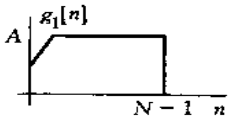
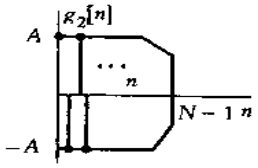
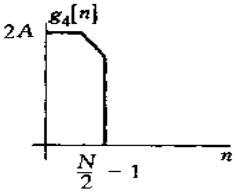
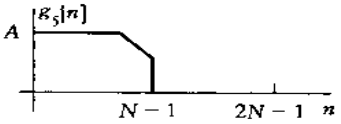
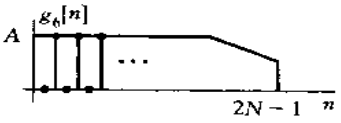
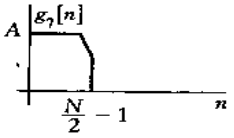
$g_1[n]=x[N-1-n]$	
$g_2[n]=(-1)^n x[n]$	
$g_3[n]=\begin{cases}x[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ x[n-N], & N\leqslant n\leqslant 2N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	
$g_4[n]=\begin{cases}x[n]+x[n+N/2], & 0\leqslant n\leqslant N/2-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	
$g_5[n]=\begin{cases}x[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & N\leqslant n\leqslant 2N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	
$g_6[n]=\begin{cases}x[n/2], & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$	
$g_7[n]=x[2n]$	

表 P8.37－2

$H_1[k]=X(e^{j2\pi k/N})$

$H_2[k]=X(e^{j2\pi k/2N})$

$$X_3[k]=\begin{cases}2X(e^{j2\pi k/2N}), & k\text{ 为偶数}\\ 0, & k\text{ 为奇数}\end{cases}$$

$H_4[k]=X(e^{j2\pi k/(2N-1)})$

$H_5[k]=0.5[X(e^{j2\pi k/N})+X(e^{j2\pi(k+N/2)/N})]$

$H_6[k]=X(e^{j4\pi k/N})$

$H_7[k]=e^{j2\pi k/N}X(e^{-j2\pi k/N})$

$H_8[k]=X(e^{j(2\pi/N)(k+N/2)})$

$H_9[k]=X(e^{j2\pi k/N})$

8.38 $x[n]$是一个长度为 10 的实有限长序列，并且在从 0 到 9 的区间内其值为非零，即

$$x[n]=0,\ n<0,\ n\geqslant 10$$

$$x[n]\neq 0,\ 0\leqslant n\leqslant 9$$

$X(e^{j\omega})$表示$x[n]$的傅里叶变换，$X[k]$表示 $x[n]$的 10 点 DFT。

请确定 $x[n]$，使得 $X[k]$对于全部的 k 为实数，并且

$$X(e^{j\omega})=A(\omega)e^{j\alpha\omega},\ |\omega|<\pi$$

式中 $A(\omega)$为实数，α 是一个非零实常数。

8.39 有两个有限长序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$，其值在区间 $0\leqslant n\leqslant 99$ 之外为零，它们进行循环卷积形成一个新的序列 $y[n]$，即

$$y[n]=x_1[n]\textcircled{100}x_2[n]=\sum_{k=0}^{99}x_1[k]x_2[((n-k))_{100}],\ 0\leqslant n\leqslant 99$$

若 $x_1[n]$只有当 $10\leqslant n\leqslant 39$ 时才为非零，试确定一组可保证 $y[n]$等于 $x_1[n]$和$x_2[n]$的线性卷积的 n 值。

8.40 考虑两个有限长序列 $x[n]$和 $h[n]$，并有在区间 $0\leqslant n\leqslant 49$ 之外 $x[n]=0$ 和在区间 $0\leqslant n\leqslant 9$ 之外 $h[n]=0$。

(a) 在 $x[n]$和 $h[n]$的线性卷积中最多有多少项可能取非零值？

(b) $x[n]$和 $h[n]$的 50 点循环卷积为

$$x[n]\textcircled{50}h[n]=10,\ 0\leqslant n\leqslant 49$$

$x[n]$和 $h[n]$的线性卷积的前 5 点是

$$x[n]*h[n]=5,\ 0\leqslant n\leqslant 4$$

求出线性卷积 $x[n]*h[n]$尽可能多的点。

8.41 研究两个有限长序列 $x[n]$和 $y[n]$。当 $n<0$，$n\geqslant 40$ 和 $9<n<30$ 时 $x[n]$为零，并且为 $n<10$ 和 $n>19$ 时 $y[n]$为零，如图 P8.41 所示。

令 $w[n]$表示 $x[n]$和 $y[n]$的线性卷积，令 $g[n]$表示 $x[n]$和 $y[n]$的 40 点循环卷积：

$$w[n]=x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]y[n-k]$$

$$g[n] = x[n] \textcircled{40} y[n] = \sum_{k=0}^{39} x[k]y[((n-k))_{40}]$$

(a) 求可使 $w[n]$为非零的 n 值。

(b) 求可由 $g[n]$得出 $w[n]$的 n 值。清楚地说明在 $g[n]$中 n 取哪些数时$w[n]$的这些值会出现。

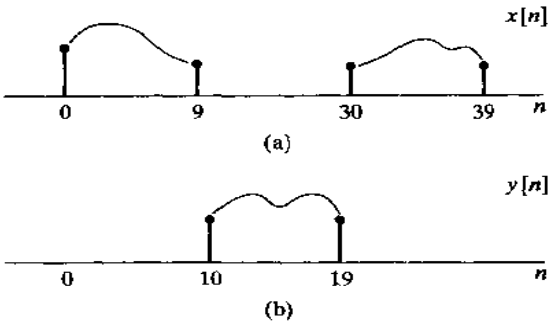


图 P8.41

8.42 两个长度为 8 的有限序列 $h_1[n]$和 $h_2[n]$示于图 P8.42 中。它们之间有循环平移的关系。即,$h_1[n] = h_2[((n-m))_8]$

(a) 说明 8 点 DFT 的幅度是否相等。

(b) 我们希望构造一个 FIR 低通滤波器,并且必须用 $h_1[n]$或 $h_2[n]$作为脉冲响应。在下列论述中哪一个是正确的?

(i) $h_1[n]$是一个比 $h_2[n]$好的低通滤波器。

(ii) $h_2[n]$是一个比 $h_1[n]$好的低通滤波器。

(iii) 作为低通滤波器它们大体上同样好(或同样坏)。

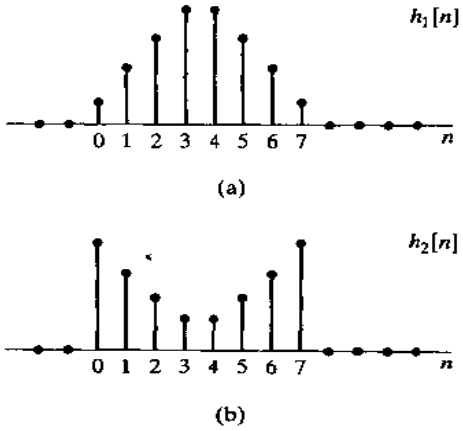


图 P8.42

8.43 我们希望实现一个 10 000 点的序列与一个 100 点长的 FIR 冲激响应的线性卷积。这个卷积是利用长度为 256 的 DFT 和 IDFT 来实现的。

(a) 如果利用重叠相加法,对于全部的10 000点序列完成卷积需要最少多少次 256 点 DFT 和最少多少次 256 点的 IDFT? 详细说明理由。

(b) 如果利用重叠保留法,对于全部的10 000点序列完成卷积需要最少多少次 256 点 DFT 和最少多少次 256 点的 IDFT? 详细说明理由。

(c) 我们将会在第 9 章中知道,当 N 为 2 的幂时,一个 N 点 DFT 或 IDFT 需要$(N/2)\log_2 N$次复数乘法和$N\log_2 N$次复数加法。对于在(a)和(b)中所考虑的同样滤波器和冲激响应的长度,比较在重叠相加法、重叠保留法和直接卷积法中所需要的算术运算(乘法和加法)的次数。

8.44 将序列 $x[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$以因子 4 展开,所得到的序列为 $x_1[n]$,即

$$x_1[n] = \begin{cases} x[n/4], & k = 0, \pm 4, \pm 8, \cdots, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求出并画出 6 点序列 $q[n]$,使得其 6 点 DFT $Q[k]$满足如下两个条件:

$$Q[0] = X_1(1)$$

$$Q[3] = X_1(-1)$$

式中 $X_1(z)$为 $x_1[n]$的 z 变换。

8.45 设 $x_2[n]$是一个实值 5 点序列，其 7 点 DFT 记作 $X_2[k]$。如果 $X_2[k]$的实部是 $g[n]$的 7 点 DFT，证明 $g[0]=x_2[0]$，并且求出 $g[1]$和 $x_2[1]$之间的关系。请说明理由。

8.46 如图 P8.46 所示，有三个长度为 5 的有限长序列：$x_1[n]$，$x_2[n]$及 $x_3[n]$。$X_i(e^{j\omega})$表示 $x_i[n]$的 DTFT，$X_i[k]$则表示 $x_i[n]$的 5 点 DFT。对于下列每一个性质，说明哪一个序列符合(不符合)此性质。对每一个序列，每一个性质清楚地证明你的答案。

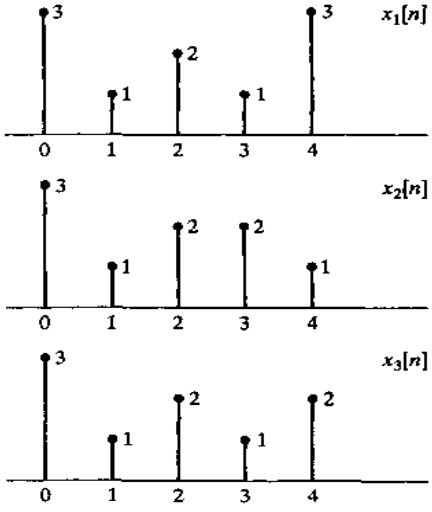


图 P8.46

(i) $X_i[k]$对所有 k 为实数。

(ii) $X_i(e^{j\omega})=A_i(\omega)e^{j\alpha_i\omega}$，其中 $A_i(\omega)$是实数，α_i 为常量。

(iii) $X_i[k]=B_i[k]e^{j\gamma_i k}$，其中 $B_i[k]$是实数，γ_i 为常量。

8.47 设一 8 点实序列

$$x[n] = 0, n < 0, n > 7$$

并设 $X[k]$为其 8 点 DFT。

(a) 利用 $x[n]$计算

$$\left(\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j(2\pi/8)kn}\right)\Big|_{n=9}$$

(b) 设

$$v[n] = 0, n < 0, n > 7$$

是一个 8 点实序列，并设 $V[k]$是其 8 点 DFT。

如果当 $k=0,\cdots,7$ 时，在 $z=2\exp(j(2\pi k+\pi)/8)$处 $V[k]=X(z)$，其中 $X(z)$是 $x[n]$的 z 变换，试用 $x[n]$表示 $v[n]$。

(c) 设

$$w[n] = 0, n < 0, n > 3$$

是一个 4 点序列，并设 $W[k]$为其 4 点 DFT。

如果 $W[k]=X[k]+X[k+4]$，试用 $x[n]$表示 $w[n]$。

(d) 设

$$y[n] = 0, n < 0, n > 7$$

是一个 8 点序列，并设 $Y[k]$是其 8 点 DFT。

如果

$$Y[k] = \begin{cases} 2X[k], & k = 0,2,4,6 \\ 0, & k = 1,3,5,7 \end{cases}$$

试用 $x[n]$表示 $y[n]$。

8.48 (a) 设

$$x[n] = 0, n < 0, n > (N-1)$$

是一个至少有一个非零样本的 N 点序列。这一序列是否可能有一个如下形式的 DTFT：

$$X(e^{j2\pi k/M}) = 0, k = 0,1,\cdots,M-1$$

式中 M 是一个大于或等于 N 的整数？如果可能，请举一例说明。如果不可能，请解释原因。

(b) 若 $M<N$，重复(a)。

8.49 设 $x_1[n]$是一个无限长且稳定的(即，绝对可和的)序列，其 z 变换为

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

设 $x_2[n]$是一个长度为 N 的有限长序列，其 N 点 DFT 为

$$X_2[k] = X_1(z)\Big|_{z=e^{j2\pi k/N}},\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

求 $x_2[n]$。

8.50 仔细阅读本题的各部分，并注意各部分间的不同之处。

(a) 考虑信号

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0.5\cos(3\pi n/4), & 0 \leqslant n \leqslant 7 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

它可用 IDFT 表示为

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X_8[k]e^{j(2\pi k/8)n}, & 0 \leqslant n \leqslant 7 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $X_8[k]$是 $x[n]$的 8 点 DFT。画出当 $0 \leqslant k \leqslant 7$ 时 $X_8[k]$的图形。

(b) 求一个 16 点序列的 16 点 DFT $V_{16}[k]$，该序列为：

$$v[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0.5\cos(3\pi n/4), & 0 \leqslant n \leqslant 15 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

画出当 $0 \leqslant k \leqslant 15$ 时 $V_{16}[k]$的图形。

(c) 最后，考虑一个 8 点序列的 16 点 DFT 的幅度 $|X_{16}[k]|$，该序列为：

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0.5\cos(3\pi n/4), & 0 \leqslant n \leqslant 7 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

不用计算 DFT 的解析表达式，画出当 $0 \leqslant k \leqslant 15$ 时 $|X_{16}[k]|$的图形。由(a)和(b)的结果不能求出 $|X_{16}[k]|$的全部值，但可以准确地求出一部分值。用实心点画出你能准确求出的全部值，并用空心点画出其它值的估计值。

扩充题

8.51 在推导 DFS 的分析式(8.11)式中我们用到等式(8.7)式。为了证明这个等式，我们分别考虑 $k - r = mN$ 和 $k - r \neq mN$ 这两种条件。

(a) 当 $k - r = mN$ 时，证明 $e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1$，并由此式证明

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 1 \quad \text{当 } k - r = mN \text{ 时}$$

因为在(8.7)式中 k 和 r 均为整数，所以可用 $k - r = l$ 进行替换，并且考虑到求和式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)ln} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j(2\pi/N)l}\right]^n$$

因为这是几何级数中有限项的求和，可写成闭合形式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[e^{j(2\pi/N)l}\right]^n = \frac{1}{N}\frac{1 - e^{j(2\pi/N)lN}}{1 - e^{j(2\pi/N)l}}$$

(b) l 取何值时，上式右边为不定式，即分子和分母均为零？

(c) 由(b)的结果证明：当 $k - r \neq mN$ 时，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = 0$$

8.52 在 8.2 节中我们曾叙述过如下性质：

若

$$\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m]$$

则

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km}\tilde{X}[k]$$

式中 $\tilde{X}[k]$和 $\tilde{X}_1[k]$分别为 $\tilde{x}[n]$和 $\tilde{x}_1[n]$的 DFS 系数。本题中我们来证明这一性质。

(a) 利用(8.11)式并作适当的变量替换,证明 $\tilde{X}_1[k]$可表示成

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km}\sum_{r=-m}^{N-1-m}\tilde{x}[r]W_N^{kr} \qquad \text{(P8.52-1)}$$

(b) (P8.52-1)式中的求和可写为

$$\sum_{r=-m}^{N-1-m}\tilde{x}[r]W_N^{kr} = \sum_{r=-m}^{-1}\tilde{x}[r]W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{N-1-m}\tilde{x}[r]W_N^{kr} \qquad \text{(P8.52-2)}$$

利用 $\tilde{x}[r]$和 W_N^{kr} 均是周期的这一事实,证明

$$\sum_{r=-m}^{-1}\tilde{x}[r]W_N^{kr} = \sum_{r=N-m}^{N-1}\tilde{x}[r]W_N^{kr} \qquad \text{(P8.52-3)}$$

(c) 由在(a)和(b)中得出的结果,证明

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km}\sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}[r]W_N^{kr} = W_N^{km}\tilde{X}[k]$$

8.53 (a)在表 8.1 中我们列出了许多周期序列离散傅里叶级数的对称性质,下面我们重新列出其中的几个。试证明下列每个性质均是正确的。证明中你可以利用离散傅里叶级数的定义和表中列出的任何性质(如在证明性质 3 中可利用性质 1 和 2)。

序列	离散傅里叶序列
1. $\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
2. $\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$
3. $\mathrm{Re}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k]$
4. $j\mathrm{Im}\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k]$

(b) 由在(a)中证明过程的性质,证明对于一个实周期序列 $\tilde{x}[n]$,下列离散傅里叶级数的对称性质成立:

1. $\mathrm{Re}\{\tilde{X}[k]\} = \mathrm{Re}\{\tilde{X}[-k]\}$
2. $\mathrm{Im}\{\tilde{X}[k]\} = -\mathrm{Im}\{\tilde{X}[-k]\}$
3. $|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[-k]|$
4. $\measuredangle\tilde{X}[k] = -\measuredangle\tilde{X}[-k]$

8.54 在 8.4 节我们曾指出,可以推导出 $X(e^{j\omega})$和 $\tilde{X}[k]$之间的直接关系式,其中 $\tilde{X}[k]$是周期序列的 DFS 系数,而 $X(e^{j\omega})$是一个周期的傅里叶变换。因为 $\tilde{X}[k]$对应于 $X(e^{j\omega})$的样本,所以这一关系式相当于一个内插公式。

要得出所希望的关系式,有一种方法是以 8.4 节的讨论和(8.54)式,以及 2.9.7 节的调制性质为基础的,其步骤如下:

1. 用 $\tilde{X}[k]$代表 $\tilde{x}[n]$的 DFS 系数,把 $\tilde{x}[n]$的傅里叶变换 $\tilde{X}(e^{j\omega})$表示成一个脉冲串。
2. 由(8.57)式,$x[n]$可以表示成 $x[n]=\tilde{x}[n]w[n]$,其中 $w[n]$是一个适当的有限长窗。
3. 由 2.9.7 节可知,因为 $x[n]=\tilde{x}[n]w[n]$,所以 $X(e^{j\omega})$可以表示为 $\tilde{X}(e^{j\omega})$和 $W(e^{j\omega})$的(周期)卷积。

经过上述步骤的详细推导,证明 $X(e^{j\omega})$可以表示成

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_k \tilde{X}[k]\frac{\sin[(\omega N-2\pi k)/2]}{\sin[(\omega-(2\pi k/N))/2]}e^{-j[(N-1)/2](\omega-2\pi k/N)}$$

并说明上式求和的极限。

8.55 设 $X[k]$表示 N 点序列$x[n]$的 N 点 DFT。

(a) 证明:若 $x[n]$满足关系式

$$x[n] = -x[N-1-n]$$

则 $X[0]=0$。分别考虑 N 为偶数和N 为奇数时的情况。

(b) 证明:若 N 为偶数且

$$x[n] = x[N-1-n]$$

则 $X[N/2]=0$。

8.56 在 2.8 节中,序列 $x[n]$的共轭对称分量和共轭非对称分量分别定义为

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[-n])$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n])$$

在 8.6.4 节中我们可以很方便地将一个有限长为 N 的序列的周期共轭对称分量和非周期共轭非对称分量分别定义为

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\{x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]\},\ 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\{x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]\},\ 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

(a) 证明:$x_{ep}[n]$与 $x_e[n]$之间以及 $x_{op}[n]$与 $x_o[n]$之间有如下关系:

$$x_{ep}[n] = (x_e[n] + x_e[n-N]),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

$$x_{op}[n] = (x_o[n] + x_o[n-N]),\ 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

(b)设 $x[n]$是一个长度为 N 的序列,通常不能由 $x_{ep}[n]$得出 $x_e[n]$,也不能由 $x_{op}[n]$得出 $x_o[n]$。证明:若认为 $x[n]$是一个长度为 N 的序列,但是当 $n>N/2$ 时 $x[n]=0$,则可以由 $x_{ep}[n]$得出 $x_e[n]$,且可由 $x_{op}[n]$得出 $x_o[n]$。

8.57 设 $x[n]$为一个 N 点序列,且 $X[k]$是其 N 点 DFT。由(8.65) 式和(8.66) 式说明

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

以上通常称为对于 DFT 的 Parseval 关系式。

8.58 $x[n]$是一个长度为 N 的实非负有限长序列,也就是说,对于 $0\leqslant n\leqslant N-1$,$x[n]$为实数和非负的,否则均为零。$x[n]$的 N 点 DFT 是 $X[k]$,且 $x[n]$的傅里叶变换为$X(e^{j\omega})$。

试确定下面的每一种表述是正确的还是错误的。如果你认为是正确的,请详述原因。如果认为是不正确的,请给出一个这种表述不成立的例子。

(a) 若 $X(e^{j\omega})$可用下述形式表示:

$$X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega}$$

其中 $B(\omega)$是实数,且 α 为实常数,则 $X[k]$可表示成

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k}$$

式中 $A[k]$为实数,且 γ 为实常数。

(b) 若 $X[k]$可表示为

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k}$$

其中 $A[k]$为实数,且 γ 为实常数,则 $X(e^{j\omega})$可表示成如下形式:

$$X(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega}$$

式中 $B(\omega)$为实数,且 α 为实常数。

8.59 $x[n]$和 $y[n]$是两个长度为 256 的正实值有限长序列,即

$$x[n] > 0,\ 0 \leqslant n \leqslant 255$$

$$y[n] > 0,\ 0 \leqslant n \leqslant 255$$
$$x[n] = y[n] = 0,\ \text{其它}$$

$r[n]$表示 $x[n]$和 $y[n]$的线性卷积。$R(e^{j\omega})$表示$r[n]$的傅里叶变换。$R_s[k]$表示$R(e^{j\omega})$的 128 个等间隔样本，即

$$R_s[k] = R(e^{j\omega})\Big|_{\omega = 2\pi k/128},\quad k = 0,1,\cdots,127$$

若已知 $x[n]$和 $y[n]$，我们希望尽可能有效地求出 $R_s[k]$。只有列于图 P8.59 中的模型可以利用。与每种模型相关的成本如下：

模型 I 和 II：免费
模型 III：10
模型 IV：50
模型 V：100

适当地把其中的一个或几个连接起来，构造一个输入为 $x[n]$和 $y[n]$，输出为 $R_s[k]$的系统。应当考虑的重要问题是：(a)系统能否工作，并且(b)它的有效性如何？我们认为总成本越低，则越有效。

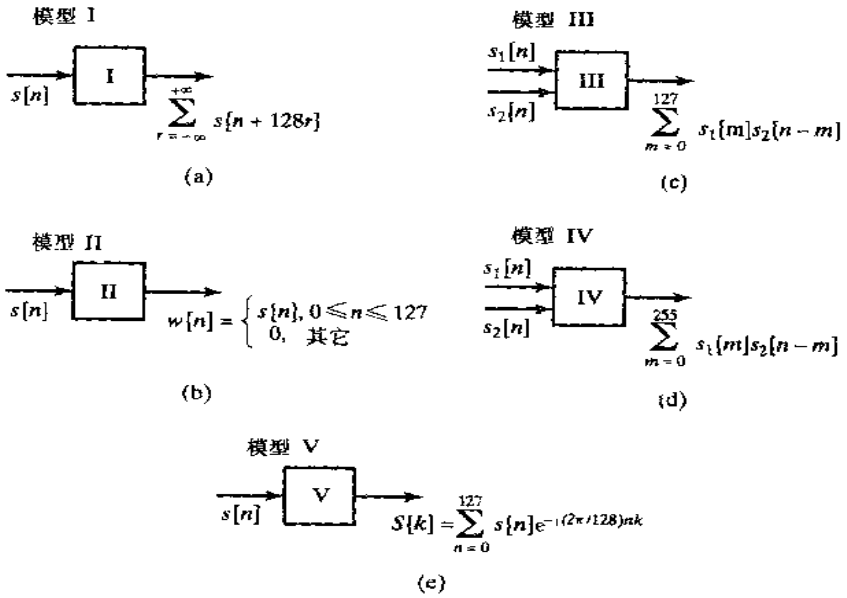


图 P8.59

8.60 $y[n]$是系统函数为 $H(z) = 1/(z - bz^{-1})$的稳定 LTI 系统的输出，其中 b 是一个已知常数。我们希望通过对 $y[n]$进行一定的运算来恢复输入信号 $x[n]$。

这里提出以下步骤从数据 $y[n]$中恢复部分 $x[n]$：

1. 利用 $y[n]$，$0 \leqslant n \leqslant N-1$ 计算 $y[n]$的 N 点 DFT $Y[k]$。
2. 按照下式构造 $V[k]$：

$$V[k] = (W_N^{-k} - bW_N^k)Y[k]$$

3. 计算 $V[k]$的 IDFT 得出 $v[n]$。

在 $n = 0,1,\cdots,N-1$ 的范围内 n 取何值可保证

$$x[n] = v[n]?$$

8.61 曾有人提出一种修正的离散傅里叶变换法(MDFT)(Vernet,1971),用以计算在单位圆上 z 变换的样本,这些样本偏离用 DFT 计算出的样本。具体讲,用 $X_M[k]$ 表示 $x[n]$ 的 MDFT,

$$X_M[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j(2\pi k/N+\pi/N)}},\quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

假设 N 为偶数。

(a) 序列 $x[n]$ 的 N 点 MDFT 对应于序列 $x_M[n]$ 的 N 点 DFT,$x_M[n]$ 很容易由 $x[n]$ 构造出来。请利用 $x[n]$ 求出 $x_M[n]$。

(b) 若 $x[n]$ 为实数,则 DFT 的全部点不都是独立的,因为 DFT 是共轭对称的,即对于 $0\leqslant k\leqslant N-1$,$X[k]=X^*[((-k))_N]$。同样,若 $x[n]$ 是实数,在 MDFT 中的全部点也不都是独立的。当 $x[n]$ 为实数时,试确定在 $X_M[k]$ 中各点之间的关系。

(c) (i) 令 $R[k]=X_M[2k]$;即 $R[k]$ 包含 $X_M[k]$ 中偶数点。利用你在(b)中的答案,证明 $X_M[k]$ 可以由 $R[k]$ 来恢复。

(ii) $R[k]$ 可以看作是 $N/2$ 点序列 $r[n]$ 的 $N/2$ 点 MDFT。求出将 $r[n]$ 直接与 $x[n]$ 连系在一起的简单表示式。

按照(b)和(c)部分的结果,要计算实序列 $x[n]$ 的 N 点 MDFT,可以首先由 $x[n]$ 构成 $r[n]$,然后计算 $r[n]$ 的 $N/2$ 点 MDFT。下面两部分直接表明,MDFT 可以用于实现线性卷积。

(d) 考虑三个长度均为 N 的序列 $x_1[n]$,$x_2[n]$ 和 $x_3[n]$。令 $X_{1M}[k]$,$X_{2M}[k]$ 和 $X_{3M}[k]$ 分别表示这三个序列的 MDFT。若

$$X_{3M}[k] = X_{1M}[k]X_{2M}[k]$$

则可利用 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 来表示 $x_3[n]$。你的表示式必须是对于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的"组合"进行单求和的形式,与循环卷积有同样的(但不是完全相等的)形式。

(e) 为了方便起见,把(d)的结果称为修正循环卷积。如果对于 $n\geqslant N/2$,序列 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 均为零,证明 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的修正循环卷积等于 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的线性卷积。

8.62 在编码理论的一些应用中需要计算两个 63 点序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积。假设可供使用的计算器件只有乘法器、加法器和计算 N 点 DFT 的处理器(限制 N 为 2 的某次幂)。

(a) 可以利用一系列的 64 点 DFT,IDFT 以及重叠相加法来计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积。需要多少次 DFT?[提示:可将每个 63 点序列看作是一个 32 点序列和一个 31 点序列之和]

(b) 确定一种算法,它可以用二次 128 点的 DFT 和一次 128 点的 IDFT 算出 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积。

(c) 我们也可以用先在时域计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的线性卷积、然后将结果混叠在一起的方法,来计算 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的 63 点循环卷积。若使用乘法,上面三种方法中哪一种是最有效的?哪一种是最无效的?(假定 1 次复数乘法需要 4 次实数乘法,且 $x[n]$ 和 $h[n]$ 均为实数)

8.63 我们想要用一个脉冲响应为 50 个样本长的 FIR 滤波器对一个很长的数据串滤波。并且希望用重叠保留技术通过 DFT 来实现这一滤波。过程如下:

1. 输入数据段必须重叠 V 个样本。

2. 从每段的输出我们必须抽取 M 个样本,以使当这些样本从每段中抽出相接在一起时,所得到的序列正是所希望的滤波后的输出。

假设输入序列长为 100 个样本点,且 DFT 的长度为 128($=2^7$)点。还假定循环卷积的输出序列的序号为 0 到 127。

(a) 求 V。

(b) 求 M。

(c) 确定所抽取的 M 点样本的起始和终止的序号,即要与先前一段的结果相接在一起,确定从循环卷积中抽取哪 128 点?

8.64 在实际中常常会出现的一个问题是，用一个线性时不变系统对信号 $x[n]$ 进行滤波，而系统的输出是受到畸变的信号 $y[n]$。我们希望通过对 $y[n]$ 作处理来恢复原始信号 $x[n]$。理论上，将 $y[n]$ 通过一个逆滤波器就可从 $y[n]$ 中恢复出 $x[n]$，而该逆滤波器的系统函数应等于原畸变滤波器系统函数的倒数。

假设畸变是由一个 FIR 滤波器引起的，其脉冲响应为

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]$$

式中 n_0 为正整数，也就是说，对 $x[n]$ 的干扰是在延时 n_0 处出现的一个回波。

(a) 求脉冲响应 $h[n]$ 的 z 变换 $H(z)$ 和 N 点 DFT $H[k]$。设 $N=4n_0$。

(b) 令 $H_i(z)$ 表示逆滤波器系统函数，$h_i[n]$ 为所对应的脉冲响应。求 $h_i[n]$。它是一个 FIR 滤波器或 IIR 滤波器吗？$h_i[n]$ 的长度是多少？

(c) 如果我们试图利用一个长度为 N 的 FIR 滤波器来实现该逆滤波器，并且假定 FIR 滤波器的 N 点 DFT 为

$$G[k] = 1/H[k],\ k = 0,1,\cdots,N-1$$

则 FIR 滤波器的脉冲响应 $g[n]$ 是什么？

(d) 用其 DFT $G[k]=1/H[k]$ 的 FIR 滤波器来实现逆滤波器似乎是很好的。于是有人可能会认为，FIR 畸变滤波器有 N 点 DFT $H[k]$，并且串联的 FIR 滤波器有 N 点 DFT $G[k]=1/H[k]$，因为对于全部的 k，$G[k]H[k]=1$，所以我们已经实现了一个全通无畸变滤波器。简要说明这种说法的错误之处。

(e) 试完成 $g[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积，并且确定如何能用其 N 点 DFT $G[k]=1/H[k]$ 的 FIR 滤波器很好地实现逆滤波。

8.65 一个长度为 N 的序列 $x[n]$ 的离散 Hartley 变换(DHT)定义为

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]H_N[nk],\ k = 0,1,\cdots,N-1 \qquad \text{(P8.65-1)}$$

式中

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a]$$

且

$$C_N[a] = \cos(2\pi a/N),\ S_N[a] = \sin(2\pi a/N)$$

最初这是由 R. V. L. Hartley 在 1942 年针对连续时间的情况提出来的。Hartley 变换在离散时间情况下也是非常有用和有吸引力的(Bracewell,1983,1984)，具体地讲，由(P8.65-1)式，可明显看出一个实序列的 DHT 也是一个实序列。此外，DHT 具有卷积性质，并且有快速计算算法。

对 DFT 的全面分析可知，DHT 具有必须在它的使用中才能了解的隐含周期性。这就是说，如果我们将 $x[n]$ 看作是当 $n<0$ 且 $n>N-1$ 时 $x[n]=0$ 的有限长序列，则我们可构造出一个周期序列：

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n + rN]$$

使得 $x[n]$ 仅是 $\tilde{x}[n]$ 的一个周期。这个周期序列 $\tilde{x}[n]$ 可以用离散 Hartley 级数(DHS)表示，如果只取周期序列的一个周期，则 DHS 可以看作是 DHT。

(a) DHS 的解析式定义为

$$\tilde{X}_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]H_N[nk] \qquad \text{(P8.65-2)}$$

证明 DHS 的系数也构成一个周期为 N 的周期序列，即对所有的 k

$$\tilde{X}_H[k] = \tilde{X}_H[k + N]$$

(b) 还可证明序列 $H_N[nk]$ 是正交的，即

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_N[nk]H_N[mk] = \begin{cases} N, & ((n))_N = ((m))_N \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

利用这一性质和 DHS 的解析式(P8.65－2)式,证明 DHS 的综合式为

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_H[k]H_N[nk] \tag{P8.65-3}$$

注意,DHT 仅是 DHS 系数的一个周期,同样 DHT 综合式(逆问题)等于 DHS 的综合式(P8.65－3)式,当我们只抽取 $\tilde{x}[n]$的一个周期时例外;即 DHT 的综合式是

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_H[k]H_N[nk], \quad n = 0,1,\cdots,N-1 \tag{P8.65-4}$$

对于 DHT,分别用(P8.65－1)式和(P8.65－4)式分别作为解析式和综合式的定义。由此我们可推导出有限长离散时间信号的这种表示的有用性质。

(c) 证明 $H_N[a] = H_N[a+N]$,并证明 $H_N[a]$的下列有用的性质:

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= H_N[a]C_N[b] + H_N[-a]S_N[b] \\ &= H_N[b]C_N[a] + H_N[-b]S_N[a] \end{aligned}$$

(d) 考虑一个循环平移序列

$$x_1[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n-n_0] = x[((n-n_0))_N], & n = 0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{P8.65-5}$$

换句话说,$x_1[n]$是由抽取平移周期序列 $\tilde{x}[n-n_0]$的一个周期而得到的序列。利用在(c)中所证明的等式证明平移周期序列的 DHS 系数为

$$\tilde{x}[n-n_0] \overset{\text{DHS}}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_H[k]C_N[n_0k] + \tilde{X}_H[-k]S_N[n_0k] \tag{P8.65-6}$$

由此,可以得出结论,有限长循环平移序列 $x[((n-n_0))_N]$的 DHT 是

$$x[((n-n_0))_N] \overset{\text{DHT}}{\longleftrightarrow} X_H[k]C_N[n_0k] + X_H[-k]S_N[n_0k] \tag{P8.65-7}$$

(e) 假设 $x_3[n]$是两个 N 点序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的 N 点循环卷积,即

$$\begin{aligned} x_3[n] &= x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N], \quad n = 0,1,\cdots,N-1. \end{aligned} \tag{P8.65-8}$$

对(P8.65－8)式的两边作 DHT,并利用(P8.65－7)式证明当 $k = 0,1,\cdots,N-1$ 时有

$$\begin{aligned} X_{H3}[k] &= \frac{1}{2}X_{H1}[k](X_{H2}[k] + X_{H2}[((-k))_N]) \\ &+ \frac{1}{2}X_{H1}[((-k))_N](X_{H2}[k] - X_{H2}[((-k))_N]) \end{aligned} \tag{P8.65-9}$$

这就是所要求的卷积性质。

注意,DHT 可用于计算线性卷积同样 DFT 也可用来计算线性卷积。虽然由 $X_{H1}[k]$和 $X_{H2}[k]$ 计算 $X_{H3}[k]$和从 $X_1[k]$和 $X_2[k]$计算 $X_3[k]$所需要的计算量相同,但是计算 DHT 所需要的实数乘法次数仅是计算 DFT 所要求的一半。

(f) 假设我们要计算一个 N 点序列 $x[n]$的 DHT,并且已有计算 N 点 DFT 的方法,找出一种当 $k = 0,1,\cdots,N-1$ 时由 $X[k]$得到 $X_H[k]$的方法。

(g) 假设我们要计算一个 N 点序列 $x[n]$的 DFT,并且已有计算 N 点 DHT 的方法,找出一种当 $k = 0,1,\cdots,N-1$ 时由 $X_H[k]$得到 $X[k]$的方法。

8.66 设 $x[n]$为当 $n<0$ 和 $n>N-1$ 时 $x[n]=0$ 的 N 点序列。令 $\hat{x}[n]$为将 $x[n]$重复所得到的 $2N$ 点序列;即

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ x[n-N], & N \leqslant n \leqslant 2N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

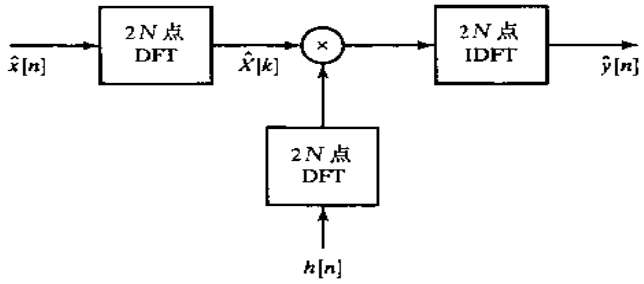


图 P8.66－1

考虑如图 P8.66－1 所示的离散时间滤波器的实现。该系统具有一个 $2N$ 点长的脉冲响应 $h[n]$，即当 $n<0$ 和 $n>2N-1$ 时，$h[n]=0$。

(a) 在图 P8.66－1 中，用 $x[n]$ 的 N 点 DFT $X[k]$ 表示的 $\hat{x}[n]$ 的 $2N$ 点 DFT $\hat{X}[k]$ 是什么形式？

(b) 正如图 P8.66－2 所示，恰当选取系统 A 和系统 B，就可只用图 P8.66－2 中的 N 点 DFT 来实现图 P8.66－1 所示的系统。确定系统 A 和系统 B，使得当 $0\leqslant n\leqslant 2N-1$ 时图 P8.66－1 中的 $\hat{y}[n]$ 等于图 P8.66－2 中的 $y[n]$。注意，在图 P8.66－2 中的 $h[n]$ 和 $y[n]$ 均为 $2N$ 点序列，$w[n]$ 和 $g[n]$ 均为 N 点序列。

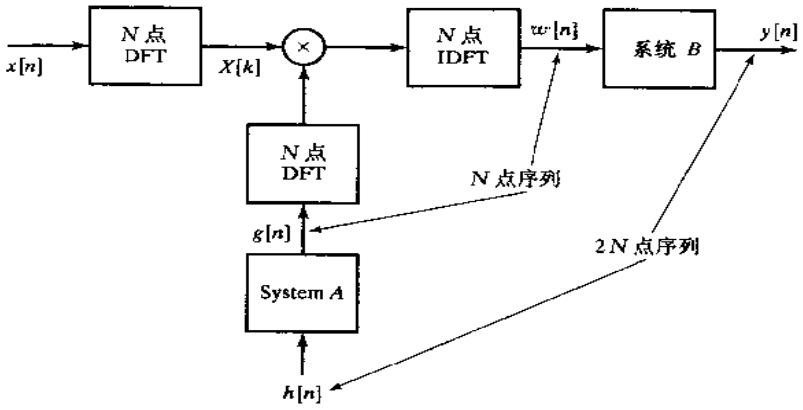


图 P8.66－2

8.67 在本题中，你将深入了解如何用 DFT 对一个信号的离散时间内插进行必要的滤波或对这个信号进行过采样。假设离散时间信号 $x[n]$ 是以采样周期 T 对一个连续时间信号 $x_c(t)$ 采样所得到的。而且，连续时间信号是恰当带限的；即当 $|\Omega|\geqslant 2\pi/T$ 时 $X_c(j\Omega)=0$。对这个问题，我们假设 $x[n]$ 的长度为 N；即当 $n<0$ 或 $n>N-1$ 时 $x[n]=0$，其中 N 为偶数。严格地讲，一个信号不可能既是完全带限的，同时又是有限长的，但在实际系统中经常假设所处理的是在 $|\Omega|\leqslant 2\pi/T$ 的频带之外只有很少能量的有限长信号。

我们要实现一个 1:4 的内插，也就是将采样频率提高到 4 倍。正如在图 4 24 中所看到的，我们可以利用一个采样率倍增器并跟随一个适当的低通滤波器来实现采样率的改变。在本章中，我们已经知道，如果低通滤波器具有 FIR 脉冲响应，则该滤波器可用 DFT 来实现。本题假设该滤波器有 $N+1$ 点

的脉冲响应 $h[n]$。图 8.67-1 画出了这样一个系统，其中 $H[k]$是这个低通滤波器脉冲响应的 $4N$ 点 DFT。注意，$v[n]$和$y[n]$都是 $4N$ 点序列。

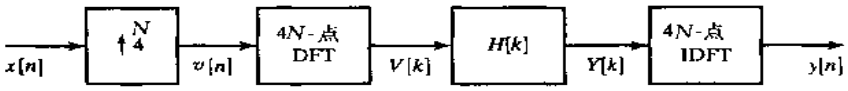


图 P8.67-1

(a) 求可使图 P8.67-1 中的系统来实现所求的过采样系统的 DFT $H[k]$。仔细考虑$H[k]$值的相位。

(b) 也可用图 8.67-2 中的系统对 $x[n]$过采样。确定中间方框中的系统 A 使得图中的 $4N$ 点信号 $y_2[n]$等于图 P8.67-2 中的 $y[n]$。注意系统 A 可包含多次操作。

(c) 是否有理由表明图 P8.67-2 的实现方法优于图 P8.67-1?



图 P8.67-2

8.68 利用(8.164)式和(8.165)式推导(8.153)式。

8.69 考虑下列步骤：

(a) 构造一序列 $v[n]=x_2[2n]$，其中 $x_2[n]$由(8.166)式给出，由此可得出

$$v[n] = x[2n] \quad n = 0,1,\cdots,N/2-1$$

$$v[N-1-n] = x[2n+1], \quad n = 0,1,\cdots,N/2-1$$

(b)计算 $v[n]$的 N 点 DFT，$V[k]$。

证明下式成立：

$$X^{c2}[k] = 2\mathrm{Re}\{e^{-j2\pi k/(4N)}V[k]\}, \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$= 2\sum_{n=0}^{N-1} v[n]\cos\left[\frac{\pi k(4n+1)}{2N}\right], \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$= 2\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left[\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right], \quad k = 0,1,\cdots,N-1$$

注意，这一算法用 N 点DFT 而不是(8.167)式中所要求的 $2N$ 点 DFT。此外，由于$v[n]$是实序列，我们可利用奇偶对称性来计算一个 $N/4$ 点复 DFT 中的 $V[k]$。

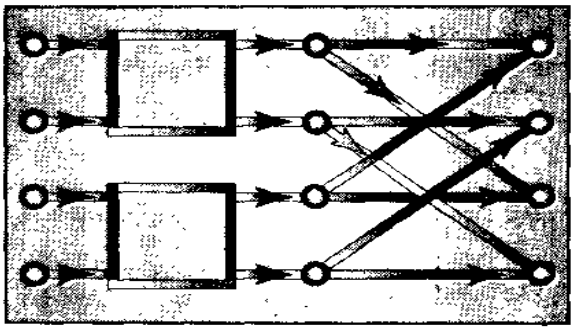
8.70 利用(8.174)式和(8.175)式推导(8.156)式。

8.71 (a) 利用 DFT 的 Parseval 定理推导 $\sum |X^{c1}[k]|^2$ 和 $\sum |x[n]|^2$ 之间的关系。

(b) 利用 DFT 的 Parseval 定理推导 $\sum |X^{c2}[k]|^2$ 和 $\sum |x[n]|^2$ 之间的关系。

第9章

离散傅里叶变换的计算



9.0 引言

离散傅里叶变换(DFT)在离散时间信号处理算法和系统的分析、设计及实现中起着十分重要的作用。第2章和第8章中所讨论的傅里叶变换和离散傅里叶变换的基本性质使得我们在傅氏域中来分析和设计系统非常方便。同样重要的是,已经有了用显式来计算DFT的各种有效算法。因此,在离散时间系统的许多实际应用中DFT是十分重要的一部分。

正如在第8章中所讨论的,DFT就是以等间隔频率对傅里叶变换进行采样的样本。所以,计算N点DFT对应于在N个等间隔频率$\omega_k=2\pi k/N$处,即在z平面单位圆的N个点上计算傅里叶变换的N个样本。在这一章中,我们将讨论计算DFT值的几种方法。本章主要介绍对于N点DFT的数学计算特别有效的算法。概括地说,把这些有效算法统称为**快速傅里叶变换(FFT)**算法,我们将在9.3~9.4节中讨论。为了取得最高的效率,FFT算法必须计算DFT的所有N个值。而当我们只需要计算在$0\leqslant\omega<2\pi$范围内的一部分频率上的DFT值时,可能其它的一些算法更加灵活有效,尽管这些算法在计算DFT的全部值时不具有FFT算法那么高的效率。这类算法中的代表就是将在9.2节中讨论的Goertzel算法和将在9.6.2节中讨论的线性调频变换算法。

度量某一实现方法或算法的复杂性和有效性有许多方式,而最终评价同时取决于可以利用的技术和打算应用的场合。我们将利用算术乘法和加法的次数来作为计算复杂性的度量。

这种度量方法使用起来很简单，如果在通用计算机或专用微处理机上来实现这些算法，则乘法和加法的次数就直接与计算速度有关。但是，有时其它的度量方法更合适。例如，在常用的VLSI实现时，芯片的面积和功率要求往往是最重要的考虑因素，而它们有可能与算法的运算次数没有直接的关系。

若采用乘法和加法，FFT类算法的计算效率要比其它高出几个数量级。事实上由于FFT的高效率，以至于在许多情况下使得实现卷积最有效地方法成为首先计算参与卷积之序列的变换，然后将它们的变换相乘，最后计算这些变换乘积的逆变换。这一技术的细节曾在8.7节中讨论过。似乎矛盾的一个方面是，一些计算DFT(或者更一般的计算一组傅里叶变换的样本)的算法(将在9.6节中简要介绍)之所以能提高计算效率，是从利用卷积来重新改写傅里叶变换计算式出发，并借此利用与卷积有关的高效计算方法来实现傅里叶变换的计算。这表明能够用DFT的相乘来实现卷积，其中DFT的实现是首先将它们表示成卷积，然后利用高效的算法来实现相应的卷积。虽然从表面上看这似乎是十分矛盾的，但是在9.6节中将会看到，在某些情况下这是一种十分合理的方法，并且完全不矛盾。

9.1 离散傅里叶变换的高效计算

正如第8章中所定义的，一个长度为N的有限长序列的DFT为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{9.1}$$

式中$W_N = e^{-j(2\pi/N)}$。离散傅里叶反变换为

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \qquad n = 0,1,\cdots,N-1 \tag{9.2}$$

在(9.1)式和(9.2)式中，$x[n]$和$X[k]$均可以是复数。因为在(9.1)式和(9.2)式的右边仅在W_N指数上差一个符号，并相差一个比例因子$1/N$，所以有关(9.1)式计算步骤的讨论稍加修改可以直接用于(9.2)式。(参见习题9.1)

为了建立一个讨论DFT计算参考框架，让我们首先研究一下(9.1)式DFT方程的直接计算法。由于$x[n]$可能是复数，所以，若我们直接用(9.1)式作为计算公式，则计算DFT每一个值就需要N次复数乘法和$(N-1)$次复数加法。因此，计算全部的N个值总共需要N^2次复数乘法和$N(N-1)$次复数加法。若用实数运算来表示(9.1)式，可以得到

$$\begin{aligned} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} & [(\mathrm{Re}\{x[n]\}\mathrm{Re}\{W_N^{kn}\} - \mathrm{Im}\{x[n]\}\mathrm{Im}\{W_N^{kn}\}) + \\ & j(\mathrm{Re}\{x[n]\}\mathrm{Im}\{W_N^{kn}\} + \mathrm{Im}\{x[n]\}\mathrm{Re}\{W_N^{kn}\})], \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{9.3}$$

上式表明，每个复数乘法需要4次实数乘法和2次实数加法，并且每个复数加法需要2次实数加法。所以，对于每一个k值，直接计算$X(k)$就需要$4N$次实数乘法和$(4N-2)$次实数加法。[①] 因为必须计算对于N个不同k值的$X[k]$，所以序列$x[n]$的傅里叶变换的直接计算法需要$4N^2$次实数乘法和$N(4N-2)$次实数加法。除了(9.3)式要求的乘法和加法之外，通用

① 在整个讨论中，有关计算次数的数字只是近似的。例如，与W_N^0相乘，实际上并不需要作一次乘法。尽管如此，包括这种情况的乘法在内而得出的计算复杂性的估计仍然是相当精确的，可以用于两种不同类型算法间的比较。

计算机或专用硬件来作 DFT 数字计算还需求储存和读取 N 个复数输入序列值 $x[n]$ 以及复系数 W_N^{kn} 值的设备。由于计算的总次数以及所需的时间大致上正比于 N^2，显然当 N 值很大时用直接法计算 DFT 所需要的算术运算的次数就非常大。正是这个原因，我们才十分关注能减少乘法和加法次数的计算方法。

改善 DFT 计算效率的大多数方法均利用了 W_N^{kn} 的对称性和周期性。具体地讲，有

1. $W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^*$（复共轭对称性）；

2. $W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$（对 n 和 k 的周期性）。

举一个例子来说明。利用第一个性质，即隐含的余弦和正弦函数的对称性，我们可以将(9.3)式的和式中含有 n 和 $(N-n)$ 的项组合在一起。例如，

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{x[n]\}\mathrm{Re}\{W_N^{kn}\} + \mathrm{Re}\{x[N-n]\}\mathrm{Re}\{W_N^{k[N-n]}\}\\&= (\mathrm{Re}\{x[n]\} + \mathrm{Re}\{x[N-n]\})\mathrm{Re}\{W_N^{kn}\}\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&-\mathrm{Im}\{x[n]\}\mathrm{Im}\{W_N^{kn}\} - \mathrm{Im}\{x[N-n]\}\mathrm{Im}\{W_N^{k[N-n]}\}\\&= -(\mathrm{Im}\{x[n]\} - \mathrm{Im}\{x[N-n]\})\mathrm{Im}\{W_N^{kn}\}\end{aligned}$$

对于(9.3)式中的其它项可作类似的组合。这样，乘法的次数大约可以减少 1/2。我们还可以利用如下事实：对于乘积 kn 的某些值，正弦和余弦函数取值为 1 或 0，因此就可以省略掉这些乘法。尽管如此，这种减少仍然使我们面临着正比于 N^2 的大量计算。值得庆幸的是，可以利用第二个性质，即复数序列 W_N^{kn} 的周期性，使得计算量显著减少。

同时利用序列 W_N^{kn} 的对称性和周期性的计算算法在高速数字计算出现的年代之前很长时间已为人们所知。在那时，任何即便仅能减少手工计算量一半的方法都是很受欢迎的。Heideman 等人(1984)已经追溯 FFT 的源由是始于 1805 年的高斯。Runge(1905)以及后来的 Danielson 和 Lanczos(1942)曾论述过计算量大体上正比于 $N\log N$ 而不是 N^2 的算法。但是，当 N 的值很小时，这种差别并不很重要，在这种情况下手工计算还是可行的。大约直到 1965 年，人们才普遍注意到显著减少计算量的可行性，当时 Cooley 和 Tukey(1965)发表了一种计算离散傅里叶变换的算法，当 N 为一个复合数，即 N 是两个或多个整数的乘积时，该算法是行之有效的。这篇论文的发表掀起了研究将离散傅里叶变换用于信号处理的高潮，并导致发现了一大批高效的计算算法。总起来说，全部这类算法被人们称为**快速傅里叶变换，或 FFT**。①

FFT 算法是基于可以将一个长度为 N 的序列的离散傅里叶变换逐次分解为较短的离散傅里叶变换来计算这一基本原理。这一原理产生了许多不同的算法，但它们在计算速度上均取得了大致相当的改善。在本章中我们集中讨论两类基本的 FFT 算法。第一类称为按时间抽取的 FFT 算法，它的命名来自如下事实：在把原计算安排成较短变换的过程中，序列 $x[n]$（通常看作是一个时间序列）可逐次分解为较短的子序列。第二类称为按频率抽取的 FFT 算法，因为在这类算法中是将离散傅里叶变换系数序列 $X[k]$ 分解为较短的子序列。

在这一章中我们还要研究几种计算离散傅里叶变换的算法。这类算法在效率上各不相同，但是均比(9.3)式的直接计算法使用较少的乘法和加法次数。我们首先在下一节中讨论 Goertzel 算法(Goertzel 1958)，它的计算量正比于 N^2，但具有比直接法要小的比例常数。

① 对于与 FFT 有关的研究结果之发展史的总结见 Cooley 等人(1967)的论文。

Goertzel 算法的主要优点之一是，它不只限于计算 DFT，实际上对于计算序列傅里叶变换的任何一组所需样本均有效。

在 9.3～9.4 节中我们将仔细讨论计算量正比于 $N\log N$ 的 FFT 算法。当采用算术运算次数来比较时，这类算法要比 Goertzel 算法有效的多，但是它主要适用于计算全部的 DFT 值。我们并不打算毫无遗漏地讲解所有的这类算法，而只是想仔细讨论几个较常用的方案来举例说明所有这类算法共用的一般原理。

在 9.5 节中我们将讨论实现 FFT 时所遇到的实际问题。在 9.6 节中我们将讨论以采用卷积来构成计算 DFT 公式的算法。最后，在 9.7 节中我们研究在 DFT 计算中运算量化的影响。

9.2 Goertzel 算法

Goertzel 算法(Goertzel，1958)是一个如何利用序列 W_N^{kn} 的周期性来减少计算量的例子。为了推导这一算法，我们首先注意到

$$W_N^{-kN} = e^{j(2\pi/N)Nk} = e^{j2\pi k} = 1 \tag{9.4}$$

当然，这是 W_N^{-kn} 周期性的直接结果。因为(9.4)式，所以我们可以用 W_N^{-kN} 乘以(9.1)式的右边而不影响该式。因此，

$$X[k] = W_N^{-kN}\sum_{r=0}^{N-1}x[r]W_N^{kr} = \sum_{r=0}^{N-1}x[r]W_N^{-k(N-r)} \tag{9.5}$$

为了联想到最终的结果，定义序列

$$y_k[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]W_N^{-k(n-r)}u[n-r] \tag{9.6}$$

由(9.5)式和(9.6)式，以及当 $n<0$ 和 $n\geqslant N$ 时，$x[n]=0$ 的事实，可得

$$X[k] = y_k[n]\Big|_{n=N} \tag{9.7}$$

(9.6)式可以解释为，有限长序列 $x[n]$，$0\leqslant n\leqslant N-1$，与序列 $W_N^{-kn}u[n]$ 的离散卷积。所以，$y_k[n]$ 可以看作是脉冲响应为 $W_N^{-kn}u[n]$ 的系统对有限长输入 $x[n]$ 的响应。特别是 $X[k]$ 就是 $n=N$ 时的输出值。

图 9.1 中绘出了具有脉冲响应为 $W_N^{-kn}u[n]$ 的系统，其中已经假设初始松弛条件。因为通常的输入 $x[n]$ 和系数 W_N^{-k} 均为复数，所以利用图 9.1 的系数来计算 $y_k[n]$ 的每个新的值需要 4 次实数乘法和 4 次实数加法。为了计算 $y_k[n]=X[k]$，必须计算所有的 $y_k[1], y_k[2], \cdots, y_k[N-1]$ 值，因此利用图 9.1 中的系数作为一种计算算法来计算特定 k 值下的 $X[k]$ 时，需要 $4N$ 次实数乘法和 $4N$ 次实数加法。所以这种方法比直接法稍差一些。但是，图 9.1 的方法避免了计算或存储系数 W_N^{kN}，因此已通过图 9.1 所示的递推过程计算出了这些量。

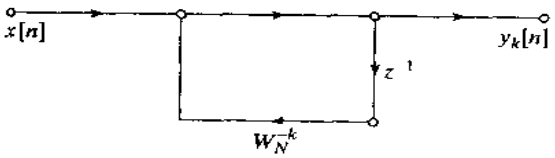


图 9.1 $X[k]$的一阶复递推计算流图

保持这种简化而将乘法次数再减少一半是可能的。为了看出如何才能做到这一点，我们

注意到图 9.1 所示系统的系统函数是

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \tag{9.8}$$

用因子$(1 - W_N^k z^{-1})$乘以 $H_k[z]$的分子和分母，可得

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{(1 - W_N^{-k} z^{-1})(1 - W_N^k z^{-1})} \\ &= \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned} \tag{9.9}$$

图 9.2 所示的信号流图就对应于(9.9)式的系统。

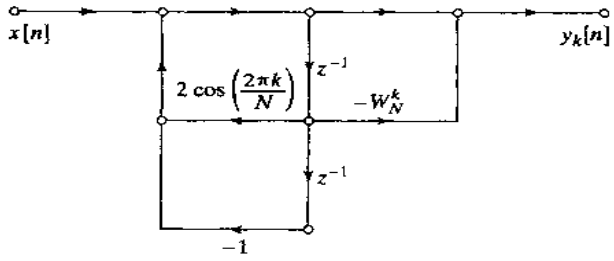


图 9.2　$X[k]$的二阶递推计算流图(Goertzel 算法)

若输入为复数，由于系数是实数并且因子 - 1 不必算作一次乘法，所以实现该系统的极点只需要每个样本作 2 次实数乘法。和一阶系统的情况相同，对于复输入，实现极点需要每个样本作 4 次实数加法。因为我们只须使该系统处于可以计算出 $y_k[n]$的状态，所以实现系统函数的零点所要求的与$(-W_N^k)$作复数相乘就不必在差分方程的每一步迭代中进行，只须在第 N 次迭代后完成。这样，全部的计算量是：对于极点作 $2N$ 次实数乘法和 $4N$ 次实数加法，加上对于零点作 4 次实数乘法和 4 次实数加法(当输入为复数时)。因此，总计算量是 $2(N+2)$次实数乘法和 $4(N+1)$次实数加法，所需要的实数乘法次数大约是直接法的一半。在这种比较有效的方法中，仍然保持着只需计算和储存 $\cos(2\pi k/N)$和 W_N^k 这些系数的优点。系数 W_N^{kn} 已在图 9.2 所示的递推公式的迭代中再次被隐含地计算出了。

为了说明利用这种网络的另一个优点，我们研究一下如何计算 $x[n]$的 z 变换在单位圆上位于共轭位置的值，即计算 $X[k]$和 $X[N-k]$。可以直接证明，计算 $X[N-k]$所要求得图 9.2 形式的网络与计算 $X[k]$所要求得图 9.2 中的网络有完全相同的极点，但前者零点的系数与后者零点的系数是复共轭的关系(见习题 9.21)。因为仅在最后的迭代中实现零点，所以，可以利用极点所要求得 $2N$ 次乘法和 $4N$ 次加法来计算两个 DFT 值。这样，当利用 Goertzel 算法来计算离散傅里叶变换所有的 N 个值时，所需要的实数乘法次数大约为 N^2，并且实数加法次数大约为 $2N^2$。尽管这比直接计算离散傅里叶变换要有效得多，但是计算量仍然正比于 N^2。

无论是在直接法中还是 Goertzel 法中，我们并不需要计算全部 N 个 k 值的 $X[k]$。的确，因为由图 9.2 形式的具有适当系数的递推系统可以计算出每一个 DFT 值，所以我们可以计算任意 M 个 k 值的 $X[k]$。在这种情况下，总计算量正比于 NM。当 M 很小时，Goertzel 法和直接法都是可取的；但是如前所示，当 N 为 2 的整数幂时还有计算量正比于 $N\log_2 N$ 的算法。因此，当 M 小于 $\log_2 N$ 时，无论 Goertzel 算法或直接法实际上都是最有效的方法，但是当需要计算 $X[k]$的全部 N 个值时，下面将要研究的按时间抽取算法的效率约为直接法或 Goertzel 算法的$(N/\log_2 N)$倍。

9.3 按时间抽取的 FFT 算法

当计算 DFT 时，把整个计算逐次分解成较短的 DFT 计算将会显著地提高效率。在这一过程中，我们将同时利用复指数 $W_N^{kn}=e^{-j(2\pi/N)kn}$ 的对称性和周期性。这些算法是以将序列 $x[n]$ 逐次分解为较短的子序列为基础的，我们称这类算法为**按时间抽取算法**。

通过研究 N 为 2 的整数幂，即 $N=2^\nu$ 的这种特殊情况，可以最方便地证明按时间抽取算法的原理。因为 N 为偶整数，所以我们可以将 $x[n]$ 分解成两个 $(N/2)$ 点[①] 序列来计算 $X[k]$，其中一个序列由 $x[n]$ 的偶数点组成，而另一个序列则由 $x[n]$ 的奇数点组成。由于 $X[k]$ 为

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{nk},\qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{9.10}$$

并且将 $x[n]$ 分解为偶数点和奇数点，因此可得到

$$X[k]=\sum_{n\text{为偶数}}x[n]W_N^{nk}+\sum_{n\text{为奇数}}x[n]W_N^{nk} \tag{9.11}$$

或者，对于偶数 n 用变量 $n=2r$ 代替，对于奇数 n 用变量 $n=2r+1$ 代替，有

$$\begin{aligned}X[k]&=\sum_{r=0}^{(N/2)-1}x[2r]W_N^{2rk}+\sum_{r=0}^{(N/2)-1}x[2r+1]W_N^{(2r+1)k}\\&=\sum_{r=0}^{(N/2)-1}x[2r](W_N^2)^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{(N/2)-1}x[2r+1](W_N^2)^{rk}\end{aligned} \tag{9.12}$$

但是 $W_N^2=W_{N/2}$，因为

$$W_N^2=e^{-2j(2\pi/N)}=e^{-j(2\pi/(N/2))}=W_{N/2} \tag{9.13}$$

因此(9.12)式可以写作(9.14)

$$\begin{aligned}X[k]&=\sum_{r=0}^{(N/2)-1}x[2r]W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{(N/2)-1}x[2r+1]W_{N/2}^{rk}\\&=G[k]+W_N^kH[k],\qquad k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned} \tag{9.14}$$

在(9.14)式中的每一个和式可以看作是一个 $(N/2)$ 点 DFT，第一个和式是原序列偶数点的 $(N/2)$ 点 DFT，而第二个和式是原序列奇数点的 $(N/2)$ 点 DFT。虽然标号 k 取遍 N 个值，$k=0,1,\cdots,N-1$，但是因为 $G[k]$ 和 $H[k]$ 都是周期为 $N/2$ 的 k 的周期函数，所以每一个和式只需计算 k 取 0 至 $(N/2)-1$ 之间的值。计算出两个 DFT 后，按照(9.14)式将两者组合成 N 点 DFT $X[k]$。图 9.3 绘出了当 $N=8$ 时的这一计算过程。在该图中使用了信号流图的规定，这些我们曾在第 6 章中表示差分方程时介绍过。这就是说，进入一个节点的支路相加后就得到该节点的变量。当支路上没有标明系数时，就假定该支路的传输比为 1。对于其它支路而言，一个支路的传输比为 W_N 的整数幂。

在图 9.3 中计算了两个 4 点 DFT，$G[k]$ 表示偶数点的 4 点 DFT，而 $H[k]$ 表示奇数点的 4 点 DFT。$H[0]$ 乘以 W_N^0 并与 $G[0]$ 相加就得到 $X[0]$。$H[1]$ 乘以 W_N^1 再加 $G[1]$ 就得到 $X[1]$。(9.14)式表明，要计算 $X[4]$，我们应当用 W_N^4 乘以 $H[4]$ 并加上 $G[4]$。但是，因为

① 当讨论 FFT 算法时，我们交替使用"样本"和"点"这两个词来表示序列值。同样，我们也可把一个长为 N 的序列称为 N 点序列，把一个长度为 N 的序列的 DFT 称为 N 点 DFT。

$G[k]$和$H[k]$都是周期为4的k的周期函数，所以$H[4]=H[0]$，$G[4]=G[0]$。因此，$X[4]$可以用$H[0]$乘以W_N^4再加上$G[0]$得到。如图9.3所示，类似地可以得到$X[5]$，$X[6]$和$X[7]$的值。

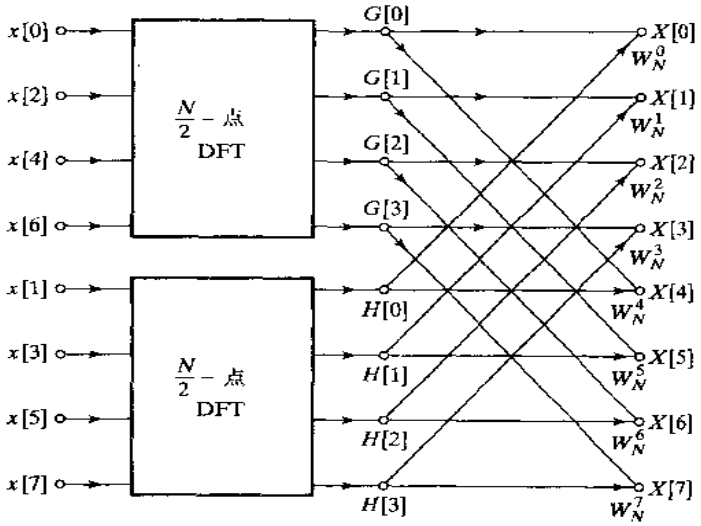


图9.3 把一个N点DFT计算分解成为两个$(N/2)$点DFT计算的按时间抽取信号流图($N=8$)

对于按照(9.14)式安排的计算，我们可以将其所需要的乘法和加法次数与直接计算DFT所需要的加以比较。前面已经看出，对于没有利用对称性的直接计算，需要N^2次复数乘法和加法[①]。通过比较，(9.14)式需要计算两个$(N/2)$点DFT，而如果用直接法计算$(N/2)$点DFT则需要$2(N/2)^2$次复数乘法和大约$2(N/2)^2$次复数加法。然后必须将两个$(N/2)$点DFT组合在一起，对应于第二个和式乘以W_N^k需要N次复数乘法，而对应于把乘积加到第一个和式上需要N次复数加法。因此，若对于所有的k值计算(9.14)式至多要求$N+2(N/2)^2$或$N+N^2/2$次复数乘法和加法。很容易证明，当$N>2$时，$N+N^2/2$将会小于N^2。

(9.14)式相当于将原来的N点计算分解为两个$(N/2)$点DFT计算。若$N/2$为偶数，N等于2的整数幂时就是这样，则我们可以认为计算(9.14)式中的每一个$(N/2)$点DFT可以通过将(9.14)式中的每个和式分解为2个$(N/4)$点DFT来进行，然后再把它们组合在一起得到$(N/2)$点DFT。这样，(9.14)式中的$G[k]$可表示成

$$G[k]=\sum_{r=0}^{(N/2)-1}g[r]W_{N/2}^{rk}=\sum_{l=0}^{(N/4)-1}g[2l]W_{N/2}^{2lk}+\sum_{l=0}^{(N/4)-1}g[2l+1]W_{N/2}^{(2l+1)k} \tag{9.15}$$

或

$$G[k]=\sum_{l=0}^{(N/4)-1}g[2l]W_{N/4}^{lk}+W_{N/2}^{k}\sum_{l=0}^{(N/4)-1}g[2l+1]W_{N/4}^{lk} \tag{9.16}$$

同样，$H[k]$应当表示成

① 为了简便起见，我们假定N较大，因此$(N-1)$可近似为N。

$$H[k] = \sum_{l=0}^{(N/4)-1} h[2l]W_{N/4}^{lk} + W_{N/2}^{k}\sum_{l=0}^{(N/4)-1} h[2l+1]W_{N/4}^{lk} \tag{9.17}$$

所以，将序列 $g[2l]$ 和 $g[2l+1]$ 的 $(N/4)$ 点 DFT 组合在一起，可以得到 $(N/2)$ 点 DFT $G[k]$。同样，将序列 $h[2l]$ 和 $h[2l+1]$ 的 $(N/4)$ 点 DFT 组合起来，就可以得到 $(N/2)$ 点 DFT $H[k]$。因此，如果按照(9.16)式和(9.17)式来计算图 9.3 中的 4 点 DFT，则计算将按照图 9.4 所示的那样进行。若将图 9.4 的计算流图插入到图 9.3 所示的流图中去，则我们就可以得到图 9.5 所示的完整流图，图中因为可利用 $W_{N/2} = W_N^2$ 这一性质，所以已用 W_N 的幂而不是 $W_{N/2}$ 的幂来表示系数。

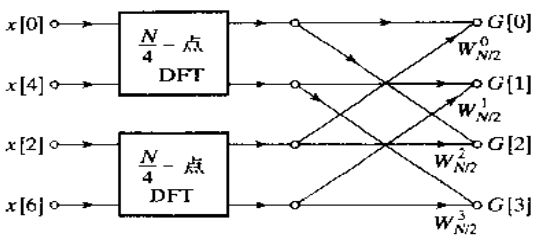


图 9.4　按时间抽取将 $(N/2)$ 点 DFT 的计算分解为 2 个 $(N/4)$ 点 DFT 来计算的流图 $(N=8)$

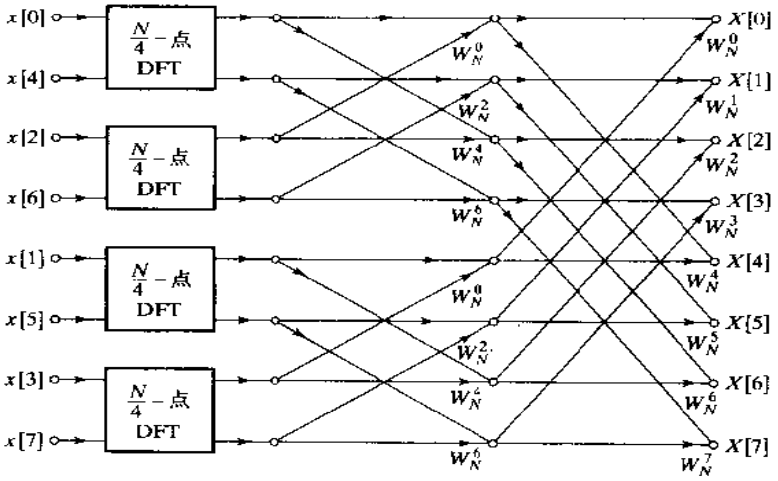


图 9.5　将图 9.4 代入图 9.3 的结果

对于举例用到的 8 点 DFT，已经将计算简化为 2 点 DFT 的计算。例如，包括 $x[0]$ 和 $x[4]$ 序列的 2 点 DFT 绘于图 9.6 中。将图 9.6 的计算再插到图 9.5 流图中去，就可以得到计算 8 点 DFT 的完整流图，如图 9.7 所示。

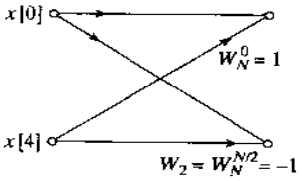


图 9.6　两点 DFT 的流图

对于更一般的情况，但 N 仍为 2 的整数幂时，我们应当将(9.16)式和(9.17)式中的 $(N/4)$ 点变换分解为 $(N/8)$ 点变换，继续进行下去一直到只剩下 2 点变换为止。这需要作 ν 级的这种运算，其中 $\nu = \log_2 N$。以前我们曾求得，当一个 N 点的变换最初分解成两个 $(N/2)$ 点变换时，所要求的复数乘法和加法次数为 $N + 2(N/2)^2$。当 $(N/2)$ 点的变换分解为 $(N/4)$ 点变换时，则用 $N/2 + 2(N/4)^2$ 代替因子 $(N/2)^2$，这样所要求的全部计算次

数为$N+N+4(N/4)^2$次复数乘法和加法。若 $N=2^\nu$，这样最多可以分解 $\nu=\log_2 N$ 次，所以这种分解全部完成之后，复数乘法和加法的次数 $N\nu=N\log_2 N$。

图 9.7 所示的流图很清楚地表现出了这种运算过程。若计算一下转输比为 W_N^r 的支路数目，我们就会注意到每一级有 N 次复数乘法和 N 次复数加法。因为一共有 $\log_2 N$ 级，所以全部有 $N\log_2 N$ 次复数乘法和加法。这就是我们前面曾提到过的可以显著节省计算量的情况。例如，若 $N=2^{10}=1\,024$，则 $N^2=2^{20}=1\,048\,576$ 而 $N\log_2 N=10\,240$，减少了不止两个数量级！

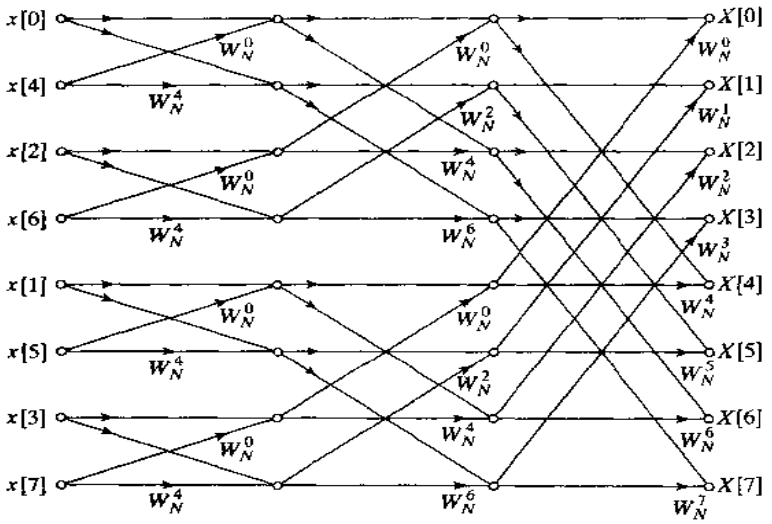


图 9.7　按时间抽取将 8 点 DFT 计算完全分解的流图

利用系数 W_N^r 的对称性和周期性可以进一步减少图 9.7 所示流图的计算量。首先我们注意到图 9.7 从某一级到下一级的过程中，基本的计算是图 9.8 的形式，即先用前一级的一对数值求得这一级的一对数值，其中系数总是 W_N 的幂，而其指数总要相差 $N/2$。由于流图的形状像蝴蝶，因此这种基本的运算称为**蝶形计算**。因为

$$W_N^{N/2}=e^{-j(2\pi/N)N/2}=e^{-j\pi}=-1 \qquad (9.18)$$

所以因子 $W_N^{r+N/2}$ 可以写成

$$W_N^{r+N/2}=W_N^{N/2}W_N^r=-W_N^r \qquad (9.19)$$

根据这一点，图 9.8 的蝶形计算可以简化成图 9.9 所示的形式。它只需要一次复数乘法而不是两次。利用图 9.9 所示的基本流图来代替图 9.8 形式的蝶形图，我们可以由图 9.7 得到图 9.10 的流图。特别是，复数乘法的次数已经比图 9.7 中所需的次数减少了一半。

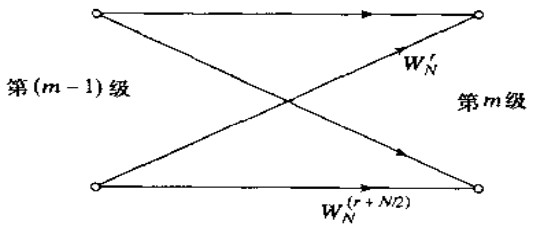


图 9.8　在图 9.7 中基本蝶形计算流图

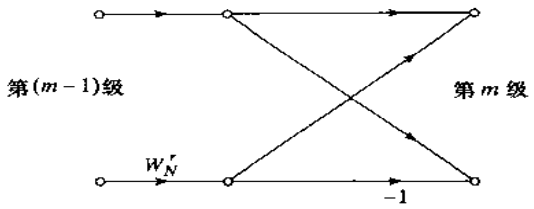


图 9.9　只需要一次复数乘法的简化蝶形计算流图

9.3.1　同址计算

图 9.10 所示流图描述了计算离散傅里叶变换的一种算法。流图中特别重要的连接节点的支路和每个支路的传输比。只要节点间的连接和连接的传输比维持不变，则无论在流图中的诸节点如何重新排列，它始终表示相同的计算。图 9.10 中特定形式的流图来自如下算法的推导过程：首先将原始序列分成偶数点和奇数点，然后用同样方式不断地分成越来越短的子序列。这一推导的一种有益的附带结果是，该流图除了证明对于计算离散傅里叶变换的一种有效方法外，还提出存储始数据以及存储中间各列计算结果的有效方式。

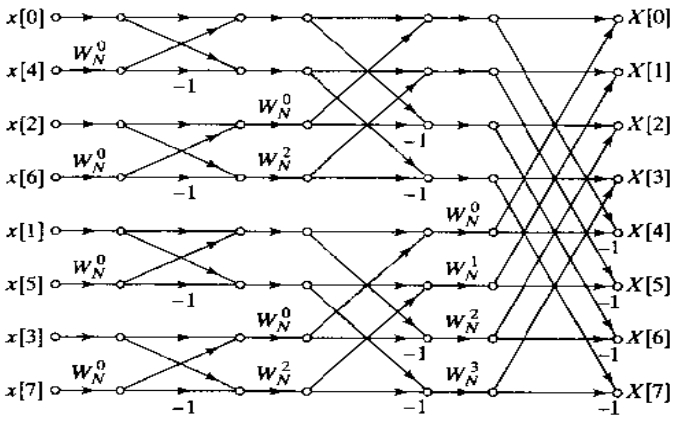


图 9.10　用图 9.9 所示蝶形计算实现 8 点 DFT 的流图

为了证明这一点，我们注意到：按照图 9.10，每一级运算均需要一组 N 个复数，并通过图 9.9 形式的基本蝶形计算把它们变换成另一组的 N 个复数。这种过程重复 $\nu=\log_2 N$ 次，最后得到所要求得离散傅里叶变换。当实现图 9.10 中描述的计算时，我们可以想象使用两列（复数的）存储寄存器，一列存储要计算得数，另一列存储计算中要用到的数据。例如，当计算图 9.10 中的第一列时，第一组存储寄存器应当存放输入数据，而第二组存储寄存器应当存放第一级计算出的结果。因为图 9.10 的有效性与输入数据存放的顺序无关，所以我们用与在图 9.10 中出现的同样顺序（从上到下）来排列该组复数。把从第 m 级计算得出的复数序列记作 $X_m[l]$，其中 $l=0,1,\cdots,N-1$，且 $m=0,1,\cdots,\nu$。此外，为了方便起见，我们把输入样本集记为 $X_0[l]$。对于第 m 级计算，可以认为 $X_{m-1}[l]$ 是输入列，$X_m[l]$ 是输出列。这样，对于图

9.10 中所示的 $N=8$ 的情况，有

$$\begin{aligned} X_0[0] &= x[0] \qquad X_0[1] = x[4] \\ X_0[2] &= x[2] \qquad X_0[3] = x[6] \\ X_0[4] &= x[1] \qquad X_0[5] = x[5] \\ X_0[6] &= x[3] \qquad X_0[7] = x[7] \end{aligned} \tag{9.20}$$

利用这种表示法，可将图 9.9 中蝶形计算的输入和输出标记为图 9.11 所示的那样，并有相应的方程

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q] \tag{9.21a}$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q] \tag{9.21b}$$

在(9.21)式中，p，q 和 r 从一级到另一级是不同的，其变化规律很容易从图 9.10 以及 (9.11)式、(9.14)式和(9.16)式中得出。从图 9.10 和图 9.11 中可以清楚地看出，要计算第 m 列的 p 和 q 位置上的复数节点值，只需要第$(m-1)$列在 p 和 q 位置上的复数节点值。因此，若将 $X_m[p]$和 $X_m[q]$分别存放在原存放 $X_{m-1}[p]$和 $X_{m-1}[q]$的同一存储寄存器中，则实现全部计算实际上只需要一列存储 N 个复数的寄存器。这种计算通常称为**同址计算**。事实上，图 9.10(或图 9.7)代表了同址计算，这是因为我们已经把流图中位于同一水平线上的节点与相同位置的寄存器联系起来，并且使两列之间的计算由输入节点和输出节点是水平相邻的蝶形计算组成。

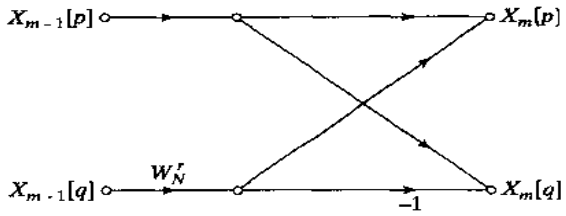


图 9.11 (9.21)式的流图

为了实现以上讨论的同址计算，输入序列不能按照原来的先后顺序存储(或至少不能这样读取)，而应如图 9.10 的流图中所示的那样。事实上，这种输入数据存储和读取的次序称为**倒位序**。为了证明该术语的含义，我们注意到，对于已经讨论过的 8 点流图，只需用三位二进制代码来标注整个数据。如果用二进制形式写出(9.20)式中的标号，就会得到如下一组式子：

$$\begin{aligned} X_0[000] &= x[000] \qquad X_0[100] = x[001] \\ X_0[001] &= x[100] \qquad X_0[101] = x[101] \\ X_0[010] &= x[010] \qquad X_0[110] = x[011] \\ X_0[011] &= x[110] \qquad X_0[111] = x[111] \end{aligned} \tag{9.22}$$

若(n_2, n_1, n_0)为序列 $x[n]$中标号的二进制表示，则序列值 $x[n_2, n_1, n_0]$存放在数列 $X_0[n_0, n_1, n_2]$的位置上。这就是说，要确定 $x[n_2, n_1, n_0]$在输入序列中的位置，我们必须将标号 n 的位序颠倒。

为了通过连续检查代表数据标号的码位而将一个数据序列排成正常序列，首先让我们研究一下图 9.12 所表示的过程。如果数据标号的最高位是零，则 $x[n]$就属于已排序数列的上半部分；否则 $x[n]$属于下半部分。其次，通过检查次高位，就可排出上半部和下半部子序列的顺序，依此类推。

为了证明为什么倒位序对于同址运算是必须的，回顾一下得出图 9.7 和图 9.10 的过程。序列 $x[n]$首先分为偶序号样本和奇序号样本两部分，前者出现在图9.13的上半部分，后者

出现在下半部分。通过检查序号 n 中的最低位[n_0]就可实现数据的这种划分。若最低位为零，则序列值对应于偶序号的样本，因此将出现在数列 $X_0[l]$ 的上半部分；若最低位为 1，则序列值对应于奇序号的样本，因此将出现在数列 $X_0[l]$ 的下半部分。然后，通过检查标号 n 中的次低位就可把偶序号和奇序号的子序列再分成偶序号部分和奇序号部分。首先研究一下偶序号的子序列，若次低位为 0，则序列值是子序列中的某个偶序号项；若次低位为 1，则序列值在这个子序列中具有奇序号。对于由原来奇序号的序列值构成的子序列执行同样的过程。这种过程重复进行直到得出 N 个长度为 1 的子序列为止。图 9.13 的树状图绘出了将数据划分为偶序号子序列和奇序号子序列的过程。

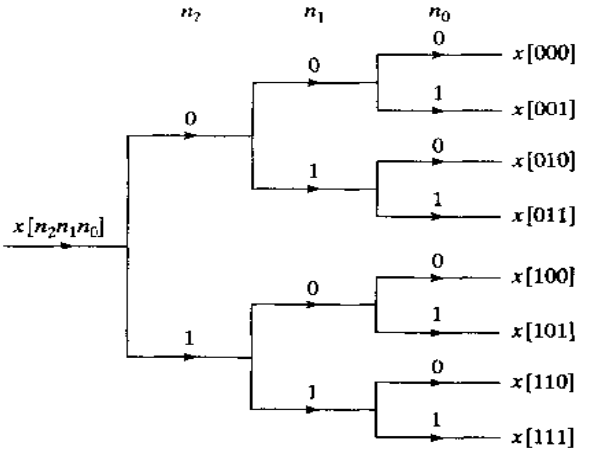


图 9.12　描述正常排序的树状图

图 9.12 和图 9.13 的树状图基本上相同，只是对于正常排列我们从左到右检查表示序号的二进制数码；而对于自然得出图 9.7 或图 9.10 的排列方式，我们从右到左以相反的次序来检查数码，导致了倒位排序。因此，序列 $x[n]$ 之所以需要倒位排序是由于 DFT 的计算要逐次分解为较短的 DFT 计算以得到如图 9.7 和图 9.10 所示的形式所致。

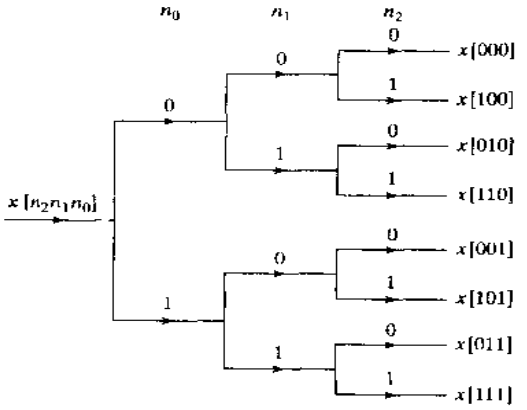


图 9.13　描述倒位排序的树状图

9.3.2　其它形式

虽然按照在图 9.10 中出现的节点的顺序来存储每级计算的结果是合理的，但是却完全没有必要这样作。无论图 9.10 的节点如何重新排列，只要支路的传输比不变，则最后结果总是 $x[n]$ 的离散傅里叶变换的一种有效计算，只是数据读取和存储的次序将会改变。从以上的讨论显然可见，如果我们把节点与一列复数寄存器的标号联系起来，则只有当重新排列节点使得每个蝶形运算的输入节点和输出节点呈水平相邻时才可以得到对应于同址运算的流图，否则需要两列复数寄存器，自然，图 9.10 就是这样排列的。另一种排列方式如图 9.14 所示。在这种情况下输入序列是正常序列，而 DFT 序列是倒位序。图 9.14 可以由图 9.10 得出，过程如下：在图 9.10 中与 $x[4]$ 水平相邻的全部节点和与 $x[1]$ 水平相邻的全部节点互换。同样，在图 9.10 中与 $x[6]$ 水平相邻的全部节点和与 $x[3]$ 水平相邻的全部节点互换。与 $x[0]$，$x[2]$，$x[5]$ 和 $x[7]$ 水平相邻的诸节点不变。这样所得到的图 9.14 中的流图就对应于最初由 Cooley 和 Tukey(1965)提出的按时间抽取算法的形式。

图 9.10 和图 9.14 之间的唯一差别是节点的排序不同。支路的传输比（W_n 的各次幂）不

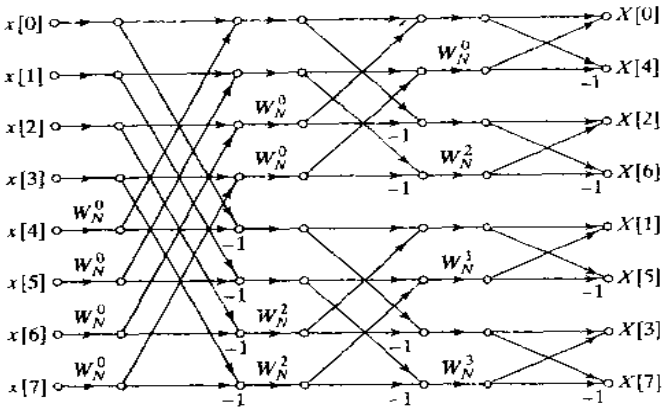


图 9.14　将图 9.10 重新排列成输入为正常位序而输出为倒位序

变。当然，也存在着许多其它可能的排序。但是，从计算的观点看大多数都没有多大的意义。试举一个例子，假设诸节点的输入和输出均按正常位序排列。这种形式的流图示于图 9.15 中。但是在这种情况下，因为蝶形结构在第一级后就不能继续存在，所以就无法实现同址运算。这样，完成图 9.15 所示的计算就需要两列长度为 N 的复数寄存器。

在实现图 9.10，9.14 和 9.15 所示的计算时，显然不能按顺序来读取中间各列的数。因此，对于较快的计算速度，复数必须存放在随机存储器中。例如，在图 9.10 中由输入数据列计算第一列时，每个蝶形计算的两个输入都是相邻的节点变量，并且可以认为存放在相邻的存储位置上。由第一列计算第二个中间列时，蝶形计算的两个输入端间隔两个存储位置；由第二中间列计算第三中间列时，蝶形计算的两个输入端间隔四个存储单元。如果 $N>8$，对于第四级蝶形计算两输入端间隔为 8，第五级为 16，等等。最后一级（第 ν）的间隔为 $N/2$。

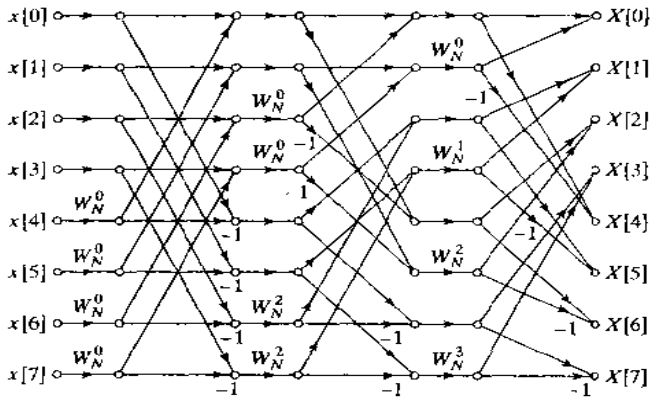


图 9.15　图 9.10 的输入和输出均为正常位序的重新排列

在图 9.14 中，情况是类似的，由输入数据计算第一列时我们用间隔为 4 的数据，由第一列计算第二列时我们用间隔为 2 的输入数据，最后在计算最后一列时我们用相邻的数据。虽然

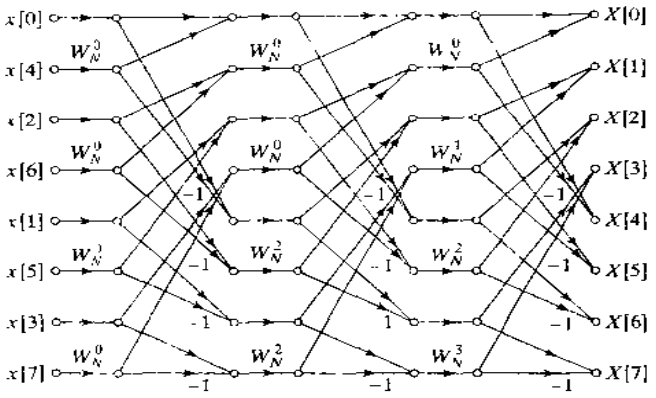


图 9.16　图 9.10 的重新排列，对于每一级具有相同的几何形状，因此可以顺序读取和存储数据

不难构思一种简单的算法来修正存取图 9.10 或图 9.14 流图中数据的标号寄存器的内容，但是数据不是按顺序存取的，所以十分需要随机存取存储器。在图 9.15 的流图中，数据不按顺序存取，计算也不是同址的，对数据标号的方案比上面的两种情况均复杂得多。因此，这种结构没有明显的优点。

即使同址计算不可能，但某些形式仍有优点。当没有随机存取存储器时，如图 9.16 所示从新排列图 9.10 中的流图是特别有用的。这种流图表示最初由 Singleton(1969)提出的按时间抽取的算法(有关用串行存储器的程序，参见 DSP Committee，1976)。首先应当指出，在这个流图中输入是倒位序，而输出是正常位序。这种流图的重要特点是，对每一级来说几何形状完全相同；只有支路的传输比从一级到另一级有变化。这样可能使存取数据按顺序进行。例如我们假设有 4 个独立的磁盘文件，并假设输入序列(为倒位序)的前一半存放在一个文件中，而后一半存放在第二个文件中。接着该序列可以按顺序从文件 1 和 2 中存取，并且将结果按顺序写入文件 3 和 4 中，新数列的前一半写入文件 3，而后一半写入文件 4。然后在计算下一级时，文件 3 和文件 4 成为输入，而输出写入文件 1 和文件 2。对于 ν 级中的每一级均如此重复进行。这一算法在计算很长序列的 DFT 时是很有用的。

9.4　按频率抽取的 FFT 算法

按时间抽取的 FFT 算法完全是以把序列 $x[n]$分成越来越短的子序列这种 DFT 计算的分解为基础的。另外，我们也可以考虑用同样的方法把输出序列 $x[k]$分成越来越短的子序列。以这种处理方式为基础的 FFT 算法通常称为**按频率抽取算法**。

为了推导出这类 FFT 算法，我们再次只限于讨论 N 为 2 的幂次的情况，并且考虑分别计算偶序号频率样本和奇序号频率样本。因为 $X[k]$为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{9.23}$$

所以其偶序号频率样本是

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r)}, \qquad r = 0,1,\cdots,(N/2)-1 \tag{9.24}$$

上式可表示成

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{2nr} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{2nr} \tag{9.25}$$

替换在(9.25)式中第二个和式的变量，可以得到

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{2nr} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{2r[n+(N/2)]} \tag{9.26}$$

最后，由于 W_N^{2rn} 的周期性，有

$$W_N^{2r[n+(N/2)]} = W_N^{2rn} W_N^{rN} = W_N^{2rn} \tag{9.27}$$

并且因为 $W_N^2 = W_{N/2}$，所以(9.26)式可以表示为

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n+(N/2)]) W_{N/2}^{rn}, \qquad r = 0,1,\cdots,(N/2)-1 \tag{9.28}$$

(9.28)式是把前一半和后一半输入序列加在一起得到的$(N/2)$点序列的$(N/2)$点 DFT。把输入序列的两部分加在一起代表时间混叠，这与只计算偶序号频率样本时我们对 $x[n]$的傅里叶变换进行了减抽样这一事实相一致。

现在我们可以考虑求得奇序号频率样本：

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)}, \qquad r = 0,1,\cdots(N/2)-1 \tag{9.29}$$

和前面一样，可将(9.29)式重新写成

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} \tag{9.30}$$

在(9.30)式中第二个和式的另一种形式是

$$\begin{aligned} \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] W_N^{n(2r+1)} &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{[n+(N/2)](2r+1)} \\ &= W_N^{(N/2)(2r+1)} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{n(2r+1)} \\ &= -\sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] W_N^{n(2r+1)} \end{aligned} \tag{9.31}$$

其中我们已经用到 $W_N^{(N/2)2r} = 1$ 和 $W_N^{(N/2)} = -1$。将(9.31)式代入(9.30)式并将两个和式合并，得

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] - x[n+(N/2)]) W_N^{n(2r+1)} \tag{9.32}$$

或者，因为 $W_N^2 = W_{N/2}$，有

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] - x[n+(N/2)]) W_N^n W_{N/2}^{rn}$$
$$r = 0,1,\cdots,(N/2)-1 \tag{9.33}$$

(9.33)式是从输入序列的前一半中减去后一半然后乘以 W_N^n 所得到之序列的$(N/2)$点 DFT。因此，根据(9.28)式和(9.33)式以及 $g[n] = x[n] + x[n+N/2]$和 $h[n] = x[n] - x[n+N/2]$，DFT 的计算为：首先形成序列 $g[n]$和 $h[n]$，然后计算 $h[n]W_N^n$，最后分别计算这两

个序列的($N/2$)点 DFT,就得到偶序号输出样本和奇序号输出样本。图 9.17 举例说明对于一个 8 点 DFT 的情况出(9.28)式和(9.33)式所建议的方法。

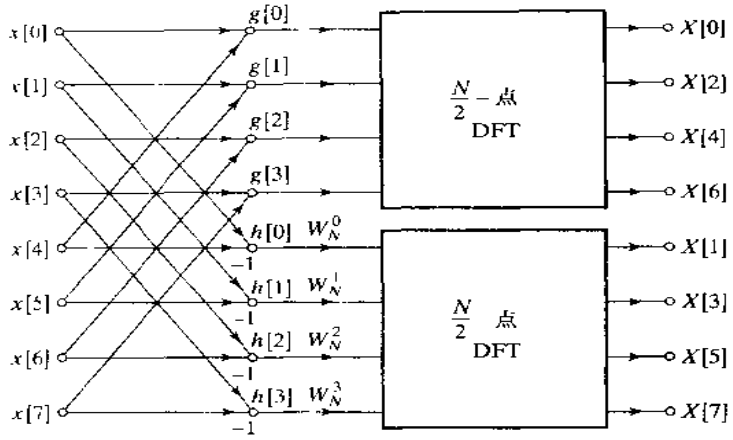


图 9.17 将一个 N 点 DFT 分解为两个($N/2$)点 DFT 计算的按频率抽取流图($N=8$)

当用类似于推导按时间抽取算法所采用的方式逐步进行时,我们注意到,由于 N 是 2 的整数幂则 $N/2$ 为偶数,因此可以通过计算偶序号输出点和奇序号输出点来分别计算这些($N/2$) 点 DFT。正如导出(9.28)式和(9.33) 式所用的方法一样,可以首先将每个($N/2$)点 DFT 的输入点的前半部分和后半部分合在一起,然后再计算($N/4$)点 DFT。对于 8 点的例子,用这种方法得出的流图如图 9.18 所示。在该例中,8 点 DFT 已经简化为 2 点 DFT 的计算。如前所述,它可以通过将输入点相加和相减来实现。这样,图 9.18 中的 2 点 DFT 可以用图 9 19 所示的计算来代替,因此 8 点的 DFT 可以用图 9.20 绘出的算法来完成。

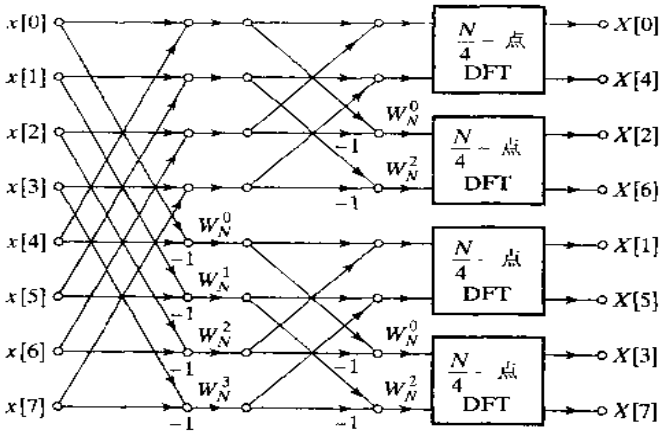


图 9.18 将一个 8 点 DFT 分解为 4 个 2 点 DFT 计算的按频率抽取流图

计算一下在图 9.20 中算术运算的次数,并推广至 $N=2^v$ 的情况,我们可以看出,图 9.20 的计算需要($N/2$)$\log_2 N$ 次复数乘法和 $N\log_2 N$ 次复数加法。因此,对于按频率抽取算法和按

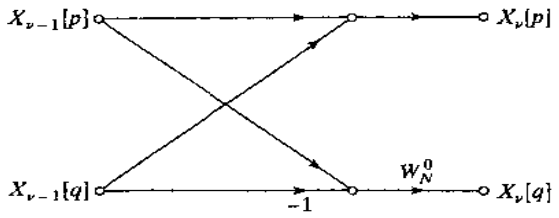


图 9.19　按频率抽取分解方法的最后一组中所要求的典型 2 点 DFT 的流图

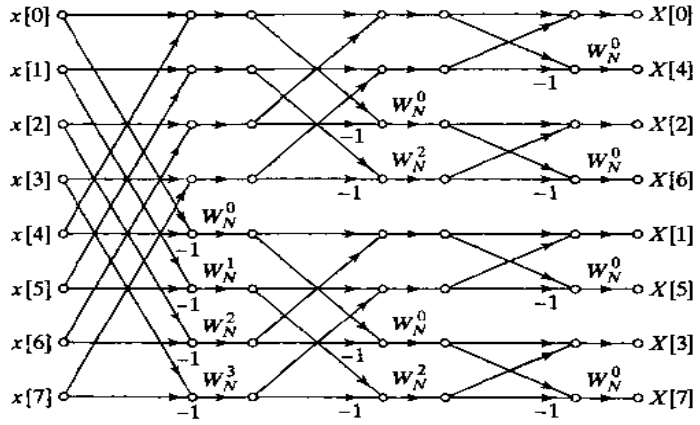


图 9.20　一个 8 点 DFT 计算按频率抽取完全分解的流图

时间抽取算法，总的计算量是相同的。

9.4.1　同址计算

图 9.20 所示流图示出了一种以按频率抽取为基础的 FFT 算法，将这一流图与根据按时间抽取推导出的流图加以比较，我们可以看出它们的许多相似之处以及不同之处。当然，如像按时间抽取那样，只要图 9.20 中用适当的传输比将同样的节点相互联系起来，图 9.20 的流图就对应于同一离散傅里叶变换的计算，而与如何画出该流图无关。换句话说，图 9.20 的流图不依赖于任何有关存放输入序列值次序的假设。但是，正如对按时间抽取算法所做的那样，我们可以把图 9.20 流图中相继的垂直节点解释为所对应的在数字存储器中相继的存储寄存器。在这种情况下，图 9.20 所示流图以正常位序的输入序列开始，而给出倒位序的输出 DFT。虽然蝶形计算与按时间抽取算法中的不同，但是基本计算仍然是蝶形计算的形式。然而，因为计算上的蝶形特点，所以图 9.20 的流图就可以看作是离散傅里叶变换的一种同址运算。

9.4.2　其它形式

通过对在 9.3.2 节中推导出的按时间抽取得形式进行转置可以得到各种按频率抽取算法的其它形式。如果我们把由计算的第 m 级得出的复数列记作 $X_m[l]$，其中 $l=0,1,\cdots,N-1$ 和 $m=1,2,\cdots,\nu$，则图 9.21 所示的基本蝶形计算有如下形式：

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q] \tag{9.34a}$$

$$X_m[q] = (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N^r \tag{9.34b}$$

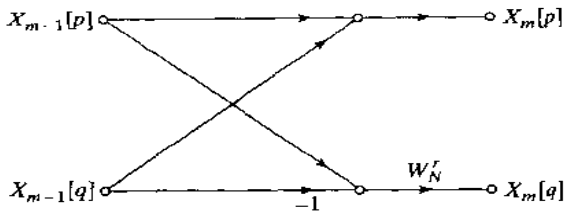


图 9.21　图 9.20 中所要求的典型蝶形计算的流图

比较图 9.11 和 9.21 或(9.21)式和(9.34)式可以看出，对于这两类 FFT 算法它们的蝶形计算是不同的。但是我们也注意到图 9.11 和 9.21 的基本蝶形流图之间以及图 9.10 和 9.20 的 FFT 流图之间的相似之处。具体地讲，图 9.20 和图 9.21 可分别通过对图 9.10 和图 9.11 将信号流反向并且将输入和输出互换而得到。这就是说，若用第 6 章的术语，图 9.20 就是图 9.10中流图的转置，而图 9.21 就是图 9.11 的转置。因为 FFT 流图有多个输入和输出节点，所以转置定理不能直接用于这种情况。尽管如此，图 9.10 和图 9.20 中流图的输入/输出特性相同是确定的。这一点可以通过(9.34)式的蝶形方程由输出数列开始反向求解而得到证明(习题 9.23 给出了证明这一点结果的要点)。更一般地讲，对于每一个按时间抽取的 FFT 算法，的确存在一个按频率抽取的 FFT 算法，它们都相应于将流图中的输入和输出互换并且将所有箭头的方向反向。

这个结果意味着 9.3 节的所有流图均有按频率抽取之类的算法与之对应。当然，这也对应于如前所述的能够重新排列流图的节点而不改变最终结果这一事实。

将转置方法用于图 9.14 就得到图 9.22。在这个流图中，输出是正常位序，而输入是倒位序。另外，图 9.15 所示流图的转置是图 9.23 的流图，图中输入和输出均是正常位序。如同图

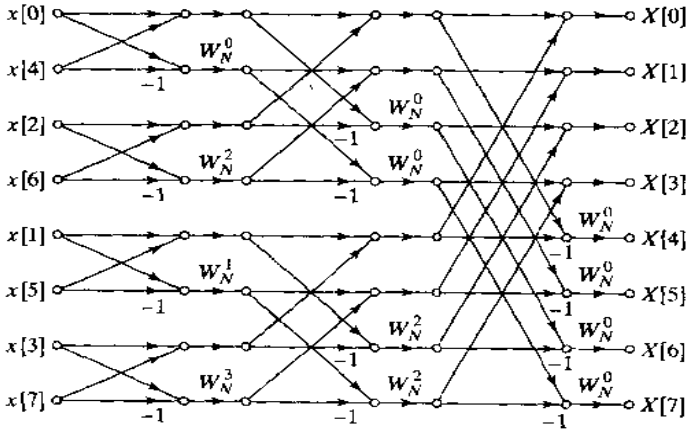


图 9.22　由图 9.20 所得出的按频率抽取 DFT 算法的流图。输入为倒位序，输出为正常位序(图 9.14 的转置)

9.15 的情况，这种流图不符合同址运算。

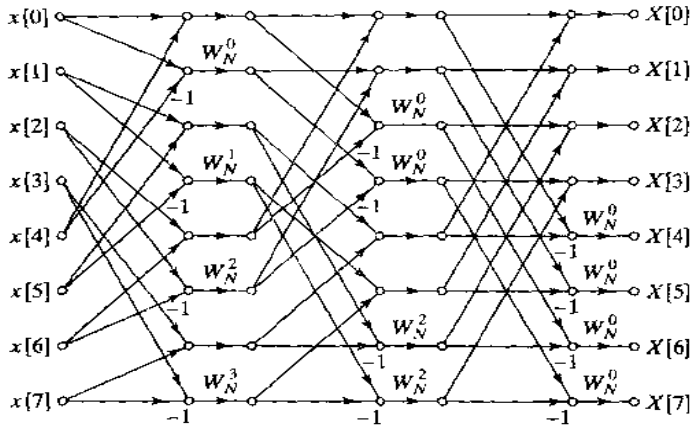


图 9.23　图 9.20 的重新排列，输入和输出均为正常位序（图 9.15 的转置）

图 9.16 的转置如图 9.24 所示。图 9.24 的每一级都有同样的几何形状，正如前面所讨论的，当使用按顺序的数据存储器计算很长的变换时，这一性质是十分有用的。

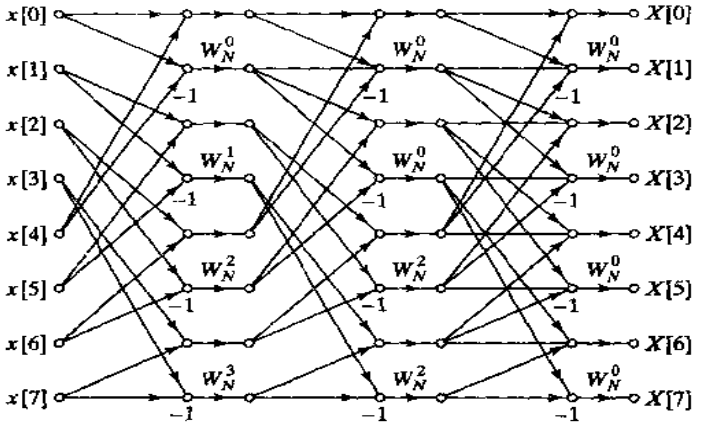


图 9.24　重新排列图 9.20 使每一级都有相同的几何形状，因此可以读取和存储按顺序的数据（图 9.16 的转置）

9.5　实现问题考虑

在 9.3 和 9.4 节中，我们讨论了当 N 为 2 的整数幂时，DFT 高效计算的基本原则。在这些讨论中，我们喜欢用信号流图表示法而不明显地给出这些流图所表示的方程式的细节。当然对特定的 N 值，我们应画出信号流图。但是，对一特定 N 值，由图 9.10 所示的流图可看出如何构造适合于任意 $N=2^v$ 的通用计算算法。

虽然，上一节给出的流图的确抓住了所描述的 FFT 算法的本质，但是在实现一个给定算法时，必须考虑各种细节。在本节中我们主要讨论其中的一部分。特别是，在 9.5.1 节中我们讨论与 FFT 中间数列的数据的读取和存储有关的问题。在 9.6.2 节中我们讨论有关信号流图中计算或读取支路系数的问题。我们的重点是 N 为 2 的整数幂时的算法，但是许多讨论可用于一般的情况。为了举例说明，我们侧重于图 9.10 的按时间抽取算法。在 9.5.3 节中，我们主要讨论 N 为更一般值时的算法。

9.5.1 标号排列

在图 9.10 所示的算法中，输入必须是倒位序，这样才能实现同址运算。由此得到的 DFT 则是正常位序。通常，输入序列不是倒位序的。因此实现图 9.10 的第一步就是将输入序列排成倒位序。正如从图 9.10 及(9.20)式和(9.22)式所能看出来的，倒位序的排列可以同址进行，这是因为样本只是成对的互换，即给定标号的样本与由倒位序标号所要求的位置上的样本互换。这可以很方便的用两个计数器用同址方式来实现，一个为正常位序而另一个为倒位序，然后将两个计数器所限定的两个位置上的数据简单的互换即可。只要输入是倒位序的，我们就可以进行第一级运算。在这种情况下，蝶形的输入都是数列 $X_0[\cdot]$的相邻节点值。在第二级中蝶形的输入相隔为 2。在第 m 级中蝶形的输入相隔为 2^{m-1}。第 m 级中的系数是 $W_N^{(N/2^m)}$ 的幂次，并且若蝶形计算从图 9.10 所示流图的顶部开始则要求是正常位序。上面的论述规定了在给定的级中数据存取的方式，当然它与具体实现的流图有关。例如，在图 9.14 的第 m 级中，蝶形是间隔是 $2^{\nu-m}$，并且在这种情况下要求系数为倒位序。正如前面所讨论的，输入是正常位序，但是输出是倒位序，所以通常需要利用一个正常位序计数器和一个倒位序计数器把输出排列成正常位序。

一般说来，如果我们考虑在 9.3 节和 9.4 节中所有的流图，则我们会看到，每一种算法都有自己所特有的排序问题。一种具体算法的选取取决于许多因素。利用同址运算的算法具有高效使用存储器的优点。但是也有两个缺点：一个是要求存储器是随机存储器而不是顺序存储器，另一个是输入序列或输出序列必须为倒位序。此外，根据选取的是按时间抽取算法还是按频率抽取算法，以及输入或输出是倒位序，决定于存取系数是按正常位序还是倒位序。如果不用随机存储器，但是输入或输出必须为倒位序。虽然，这种算法的流图可以排列成使其输入、输出和系数均为正常位序，但是实现这些算法所要求的标号排列的结构就很复杂，需要两倍的随机存取存储器。因此，使用这些算法就表现不出什么优越性。

图 9.10，9.14，9.20 和 9.22 所示的同址 FFT 算法是最常用的算法。如果一个序列只作一次变换，则倒位序排列就必须在输入端或在输出端来实现。但是，在某些情况下现对一个序列进行离散傅里叶变换然后对其结果作一些修改后再计算离散傅里叶反变换。例如，当利用离散傅里叶变换通过块卷积实现 FIR 数字滤波器时，先对一段输入序列的 DFT 乘以滤波器脉冲响应的 DFT，然后对所得结果作离散傅里叶反变换，得出滤波器的一段输出。同样，当利用离散傅里叶变换计算自相关函数或互相关函数时，首先对序列进行变换，并将其 DFT 相乘，然后再对乘积作反变换。当两个变换用这种方式级联在一起时，有可能适当地选择 FFT 算法来避免倒位序的算法。例如，在用 DFT 实现 FIR 数字滤波器时，我们可以选择一种直接变换的算法，它利用正常位序的数据，而给出倒位序的 DFT。这样一来，既可以利用基于按时间抽

取算法与图 9.14 相对应的流图，也可以利用基于按频率抽取算法与图 9.20 相对应的流图。这两种形式的差别是，按时间抽取形式要求倒位序的系数，而按频率抽取形式则要求正常位序的系数。

在使用者两种算法时，变换均为倒位序。因此，当利用 DFT 作块卷积时，若已用倒位序存储了滤波器脉冲响应的 DFT，则两个 DFT 之间可以简单地按照已存储的顺序点点相乘。对于 IDFT，我们可以选取一种算法形式，使其要求输入数据为倒位序，并能给出正常位序的结果。这里无论是以按时间抽取算法为基础的图 9.10 所示流图，还是以按频率抽取算法为基础的图 9.22 所示流图均可以使用。但是，图 9.10 利用正常位序的系数，而图 9.22 则要求倒位序的系数。如果对于正变换选取按时间抽取的算法形式，则对于反变换应当选取按频率抽取的算法形式，要求系数为倒位序。同样，对于正变换选取按频率抽取算法则对于反变换应当选取按时间抽取算法，可以使用正常位序系数。

9.5.2 系数

我们已经看到，系数 W_N^r 可以要求是倒位序，也可以是正常位序。无论哪一种情况，都必须存储一个能够查阅到所需要的全部数值的数表，或者当需要时必须能够计算出所需要的数值。前一种方式具有速度快的优点，但是需要额外的存储器。从流图中可以看出，我们需要 $r=0,1,\cdots,(N/2)-1$ 时的 W_N^r。这样对于 W_N^r 值的一个完整数表，需要$(N/2)$个复数存储寄存器①。在算法要求系数为倒位序的情况下，我们可以简单地按倒位序存储该数表。

虽然当需要时计算系数可以节省存储器，但是没有存储一个查阅表效率高。如果系数是需要计算的，则通常利用递推公式是最有效的。在给定的任何一级，所需要的系数都是复数 W_N^q 的幂次，其中 q 与算法和级数有关。因此，若系数要求是正常位序，则可使用递推公式

$$W_N^q = W_N^1 \cdot W_N^{q(l-1)} \tag{9.35}$$

从第$(l-1)$个系数得到第 1 个系数。显然，要求倒位序系数的算法就不适合用这种方法。应当注意，(9.35)式实质上是习题 6.21 的耦合形式振荡器。当使用有限精度的算术算法时，在这个差分方程的迭代过程中就产生误差。所以，通常需要重新设置预定点上的值(如 $W_N^{N/4}=-j$)，以使误差在允许范围内。

9.5.3 更一般 N 值时的算法

虽然 N 为 2 的整数幂的特殊情况可得出一种简单结构的算法，但是这并不是可减少 DFT 计算量的 N 值的唯一情况。的确，在很多情况下，都需要对 N 取其它值时也能高效的计算 DFT，而且当 N 为复合数即两个或更多整数因子的乘积时，可采用适用于 2 的整数幂情况的按时间抽取和按频率抽取算法的一些方法。例如：若 $N=RQ$，则有可能将 N 点 DFT 表示为 R 个 Q 点 DFT 的和或 Q 个 R 点 DFT 的和，这样可以减少计算的次数。如果 N 有许多因子，则对每个因子均可重复这一过程。对更一般的复合数 N 的算法涉及到比 2 的整数幂情况更为复杂的标号排列。在一些情况下，这些算法是 9.3 节和 9.4 节讨论的算法的直接推广，在这种情况下称为“Cooley－Tukey”型算法。如果 N 的因子为互素数，乘法次数的减少是以“素因子”算法中更为复杂的序号排列为代价的。在 Burrus 和 Parks(1985)，Burrus(1988)和 Blahut

① 若利用对称性，则可减少这个数目，但是增加了读取所需要数值的复杂性。

(1985)的论文中讨论了更通用的 Cooley－Tukey 算法及素因子算法的细节。

9.6 用卷积实现 DFT

因为 FFT 惊人的高效性，人们常常通过计算两个互相卷积的序列的 DFT 及其乘积的 IDFT 来实现卷积运算，其中使用 FFT 算法来计算正向和反向 DFT。与此相反，并且看上去显然(当然实际上并不)是一种矛盾的作法，人们有时喜欢首先把 DFT 的计算转换为卷积来进行。我们已经在 Goertzel 算法中见到这样一个例子，并且许多其他较复杂的算法也以这种方法为基础。

9.6.1 Winograd 傅里叶变换算法概述

S. Winograd(1978)曾提出并推导一种通常称为 Winograd 傅里叶变换算法(WFTA)，该算法利用多项式乘法或与之等效的卷积实现了 DFT 的高效计算。WFTA 使用对于将 DFT 分解成长度为互素数的许多短长度的 DFT 的序号排列方式。然后把短 DFT 转变为周期卷积。Rader(1968)曾提出一种当输入样本数为素数时把 DFT 转化成卷积的方法，但是这种方法的应用尚等待着计算周期卷积的高效方法的出现。Winograd 将上面的各种方法与计算循环卷积的高效算法合为一体，形成了一种计算 DFT 的新方法。因为推导计算短卷积高效算法的技术是以像用于多项式的中国余数定理之类的高等数论概念为基础的，所以我们在这里不介绍其细节。但有关 WFTA 细节全面深入的讨论可见 McClellan 和 Rader(1979)，Blahut(1985)及 Burrus(1988)的论文。

使用 WFTA 方法时，对于一个 N 点 DFT 所需要的乘法次数正比于 N，而不是 $N\log N$。虽然这种方法可以得出在使乘法次数最少方面最优的算法，但是与 FFT 相比加法次数却明显增加。因此，WFTA 最适用于乘法运算比加法运算慢得多的场合，如像通常遇到的定点数字算术运算的情况。但是，在乘法和累加为一体的处理器中，Cooly－Turkey 或素因子算法常常是比较好的。WFTA 的另一个缺点是标号排列比较复杂，不可能同址计算，而且对于不同 N 值，算法的主要结构也各不同。

因此，虽然从作为衡量 DFT 计算(利用乘法)所能达到的有效程度为基准来看，WFTA 是非常重要的，但是在确定实现 DFT 计算的软机或硬件的速度和有效性时，往往其它因素占主导地位。

9.6.2 线性调频变换算法

以把 DFT 表示成卷积为基础的另一种算法称为线性调频变换算法(CTA)。这种算法虽然在减少计算复杂性方面不是最优的，但是在许多应用场合，特别是当实现一个固定的预先给定的脉冲响应进行卷积的技术时，它是十分有用的。CTA 也比 FFT 具有更广泛的适应性，因为它可以用于计算在单位圆上离散傅里叶变换的任意一组等间隔样本。

为了推导出线性调频变换算法(CTA)，令 $x[n]$表示一个 N 点序列，$X(e^{jw})$表示其傅里叶变换。我们来研究计算 $X(e^{jw})$的 M 个样本，这些样本在单位圆上以等角度间隔排列，如图 9.25 所示，即在如下频率处：

$$\omega_k = \omega_0 + k\Delta\omega, \qquad k = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.36}$$

其中起始频率 ω_0 和频率增量 $\Delta\omega$ 可任意选取。(对于 DFT 的特殊情况，$\omega_0 = 0$，$M = N$ 和

$\Delta\omega = 2\pi/N$。)与这个通常的频率样本集相对应的傅里叶变换是

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_k n}, \qquad k = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.37}$$

或者,若定义 W 为

$$W = e^{-j\Delta\omega} \tag{9.38}$$

且利用(9.36)式,有

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{nk} \tag{9.39}$$

为了将 $X(e^{j\omega_k})$表示成一个卷积,我们利用等式

$$nk = \frac{1}{2}[n^2 + k^2 - (k-n)^2] \tag{9.40}$$

可将(9.39)式表示为

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2}W^{k^2/2}W^{-(k-n)^2/2} \tag{9.41}$$

若令

$$g[n] = x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2} \tag{9.42}$$

则可以得出

$$X(e^{j\omega_k}) = W^{k^2/2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} g[n]W^{-(k-n)^2/2}\right) \qquad k = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.43}$$

为了能把(9.43)式看作是一个线性时不变系统的输出,我们在(9.43)式中用 n 代替 k 和用 k 代替 n,得到较熟悉的形式

$$X(e^{j\omega_n}) = W^{n^2/2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} g[k]W^{-(n-k)^2/2}\right) \qquad n = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.44}$$

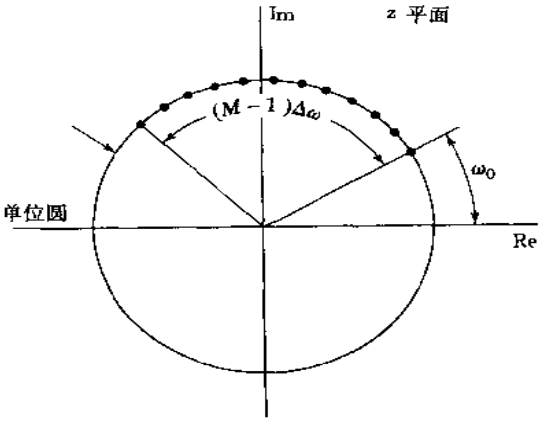


图 9.25　线性调频变换的频率样本

在(9.44)式的形式中,$X(e^{j\omega_n})$相当于序列 $g[n]$与序列 $W^{-n^2/2}$的卷积,然后乘以序列 $W^{n^2/2}$。用独立变量 n 标注的输出序列是频率样本序列 $X(e^{j\omega_n})$。根据这一解释,(9.44)式的计算过程绘于图 9.26 中。可以认定序列 $W^{-n^2/2}$是频率以间隔 $n\Delta\omega$ 线性增加的复指数序列。在雷达系统中,这种信号称为线性调频信号,所以该方法取名为**线性调频变换**。在雷达和声纳信号处理中常常用与图 9.26 类似的系统作脉冲压缩(Skolnik,1980)。

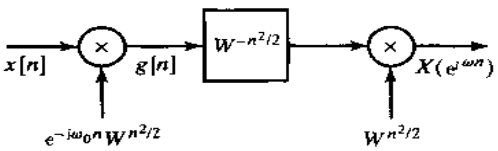


图 9.26　线性调频变换算法的方框图

为了计算(9.44)式表示的傅里叶变换的样本,我们只需要计算图 9.26 的系统在一个有限区间上的输出。在图 9.27 中绘出了序列 $g[n]$,$W^{-n^2/2}$和 $g[n] * W^{-n^2/2}$。因为 $g[n]$是有限长的,所以在区间 $n=0,1,\cdots,M-1$ 上得出 $g[n] * W^{-n^2/2}$只用到序列 $W^{-n^2/2}$的有限部分,具体讲是从 $n=-(N-1)$到 $n=M-1$ 的部分。让我们定义 $h[n]$为

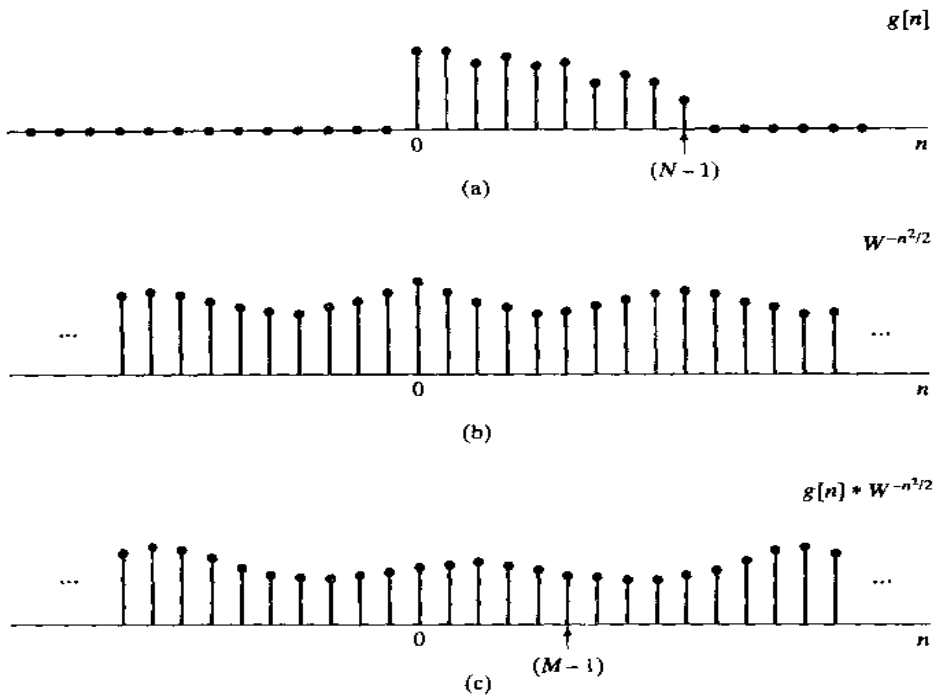


图 9.27　在线性调频变换算法中所用到的序列。注意，实际上所涉及到的序列是复数值
(a) $g[n]=x[n]e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2}$; (b) $W^{-n^2/2}$; (c) $g[n]*W^{-n^2/2}$

$$h[n]=\begin{cases}W^{-n^2/2}, & -(N-1)\leqslant n\leqslant M-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{9.45}$$

如图 9.28 所示。利用卷积过程的图形表示，很容易证明：

$$g[n]*W^{-n^2/2}=g[n]*h[n],\qquad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{9.46}$$

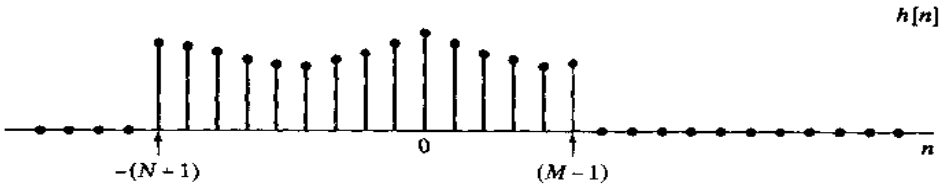


图 9.28　FIR 线性调频滤波器的支撑区。注意，由(9.45)式给出的 $h[n]$为复数

因此，在图 9.26 所示系统中的无限长脉冲响应 $W^{-n^2/2}$可用图 9.28 的有限长脉冲响应来代替。新得系统如图 9.29 所示，其中 $h[n]$由(9.45)式表示，频率样本 $X(e^{j\omega_n})$由下式给出：

$$X(e^{j\omega_n})=y[n],\qquad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{9.47}$$

利用图 9.29 所示过程计算频率样本有许多潜在的优点。总的来说，不像 FFT 算法那样

要求 $N=M$，并且 N 或 M 均不要求是合成数(Composite Numbers)。事实上，如果需要的话，它们可以是素数。此外，参数 ω_0 是任意的。这种比 FFT 更广泛的适应性并不排除计算的高效性，因为可以利用 FFT 算法以及 8.7 节所介绍的计算卷积的技术高效的实现图 9.29 中的卷积。正如在 8.7 节中所讨论的，为了使循环卷积当 $0\leqslant n\leqslant M-1$ 时等于 $g[n]*h[h]$，FFT 的长度必须大于等于$(M+N-1)$。另外 FFT 的长度可以是任意的，例如，它可以取作 2 的幂次。我们十分有趣地注意到，用于计算隐含在线性调频变换算法中的卷积的 FFT 算法可以是 Wignorad 类型的。这些算法本身利用卷积去实现 DFT 计算。

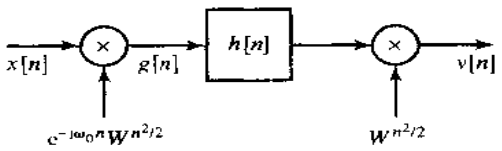


图 9.29 有限长脉冲响应的线性调频变换系统的方框图

在图 9.29 所示系统中，因为 $h[n]$是非因果的，而对于某些实时的实现，为了得到一个因果系统必须对 $h[n]$加以修正，因为 $h[n]$是有限长的，所以这种修正很容易完成，只需把 $h[n]$延迟$(N-1)$就可得到一个因果脉冲响应

$$h_1[n]=\begin{cases}W^{(n-N+1)^2/2}, & n=0,1,\cdots,M+N-2\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{9.48}$$

因为在输出端的线性调频解调因子和输出信号也均延迟$(N-1)$个样本，所以傅里叶变换值为

$$X(e^{j\omega_n})=y_1[n+N-1],\qquad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{9.49}$$

为了得到一个因果系统而对图 9.29 所示系统加以修正，可得出图 9.30 所示的因果系统。图 9.30 所示系统的优点在于：它涉及到输入信号(受到某一线性频率调制率的调制)和一个固定的、因果的脉冲响应的卷积。如像电荷耦合器件(CCD)和声表面波(SAW)器件之类的技术对于实现与固定的预先规定的脉冲响应的卷积特别有用。这些器件可以用于实现 FIR 滤波器，该滤波器在制造时就由电极的几何形状确定了它的脉冲响应。Hewes 等人(1979)在用 CCD 器件实现线性调频变换算法时使用了类似的方法。

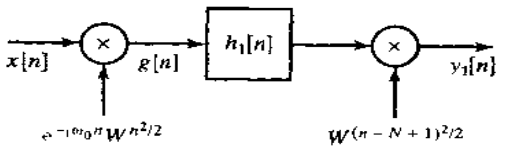


图 9.30 因果有限长脉冲响应的线性调频变换系统的方框图

当要计算的频率样本与 DFT 一致时，线性调频变换算法可以进一步简化。在这种情况下，$\omega_0=0$ 和 $W=e^{-j2\pi/N}$，所以 $\omega_n=2\pi n/N$。这是可以很方便的对图 9.30 所示系统加以修正。特别是，令 $\omega_0=0$ 和 $W=e^{-j2\pi/N}=W_N$，并且考虑将一个附加的单位延迟加到图 9.30 所示的脉冲响应上、若 N 为偶数，则 $W_N^N=e^{j2\pi}=1$，因此

$$W_N^{-(n-N)^2/2}=W_N^{-n^2/2} \tag{9.50}$$

所以，此时的系统如图 9.31 所示，其中

$$h_2[n]=\begin{cases}W_N^{-n^2/2}, & n=1,2,\cdots,M+N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{9.51}$$

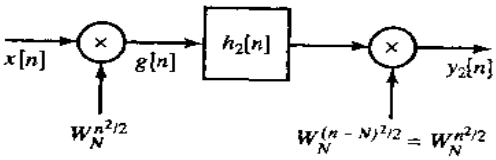


图 9.31 得出 DFT 样本的线性调频变换系统的方框图

在这种情况下，调制 $x[n]$的线性调频信号和调制 FIR 滤波器输出的线性调频信号是相同的，并且

$$X(e^{j2\pi n/N}) = y_2[n+N], \qquad n = 0,1,\cdots,M-1 \tag{9.52}$$

例 9.1　线性调频变换的参数

假设有限长序列 $x[n]$仅在区间 $n=0,\cdots,25$ 上为非零，且要计算当 $k=0,\cdots,15$ 时在频率点 $\omega_k = 2\pi/27 + 2\pi k/1\,024$ 上 DTFT $X(e^{j\omega})$处的 16 个样本。我们可利用图 9.30 所示选择适当参数的系统通过与一个因果脉冲响应的卷积来计算所要求的频率样本。设所求样本个数 $M=16$ 及序列长度 $N=26$。初始样本的频率 ω_0 为 $2\pi/27$，而相邻频率样本的间隔 $\Delta\omega$ 为 $2\pi/1\,024$。这样选择参数后，由(9.38)式可知 $W=e^{-j\Delta\omega}$，且由(9.48)式可得出所要求的因果脉冲响应为：

$$h_1[n] = \begin{cases} [e^{-j2\pi/1\,024}]^{-(n-25)^2/2}, & n = 0,\cdots,40 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

对于这个因果脉冲，输出 $y_1[n]$就是在 $y_1[25]$处为起点的所要求的频率样本，即

$$y_1[n+25] = X(e^{j\omega_n})\Big|_{\omega_n = 2\pi/27 + 2\pi n/1\,024} \qquad n = 0,\cdots,15$$

Bluestein(1970)首次提出了与线性调频变换算法类似的算法，他曾证明，对于 $\Delta\omega = 2\pi/N$ 和 N 为某整数的平方的情况，可以递推的实现图 9.30 所示的系统(见习题 9.41)。Rabiner 等人(1969)归纳提出了在 z 平面的螺旋曲线上计算等角度间隔的 z 变换样本的算法。这种线性调频变换更一般的形式称为线性调频 z 变换算法(CZT)。我们称作线性调频算法的计算方法是线性调频 z 变换算法的一种特殊情况。

9.7　有限寄存器长度的影响

因为在数字滤波和谱分析中广泛的用到快速傅里叶变换，所以了解在计算中有限寄存器长度的影响是十分重要的。但是，如像数字滤波器的情况一样，精确分析这种影响是很困难的，为了达到选取合适的寄存器长度的目的，通常进行简化分析就可以满足要求。我们将要论述的分析方法类似于在 6.8 节中所采用的形式。具体地讲，我们将采用线性噪声模型来分析运算舍入问题，该模型通过在计算算法中产生舍入现象的每个点上插入一个加性噪声(additive noise)源而得到。此外，为了简化分析过程，我们将作一系列的假设。我们得出的一些结果将导出几种简化但有用的可以估计运算舍入所产生之影响的方法。虽然分析是对舍入而言，但是通常可以很容易的将结果加以修正而用于截尾的情况。

我们已经看到，对于 FFT 有许多不同的算法结构。但是在不同类的算法中舍入噪声的影响是非常相似的。因此，虽然我们只考虑基 2 按时间抽取算法，但是我们得出的结果也可以作为其它形式算法的代表。

描述当 $N=8$ 时按时间抽取算法的流图绘于图 9.10 中现在重绘于图 9.32 中。这个图的一些关键环节也是其它所有的标准基 2 算法所共同的。计算 DFT 需用 $\nu = \log_2 N$ 级。在每一级中新数列的 N 个数均由先前数列中的两个元素线性组合在一起而产生。第 ν 级数列就是所要求得 DFT。对于基 2 按时间抽取算法，基本的 2 点 DFT 计算(使用旋转因子)的表示式为

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^r X_{m-1}[q] \tag{9.53a}$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q] \tag{9.53b}$$

这里下标 m 和$(m-1)$分别表示第 m 级数列和第$(m-1)$级数列，p 和 q 表示在每个数列中数的位置(应注意，$m=0$ 指输入数列，而 $m=\nu$ 指输出数列)。图 9.33 绘出了表示该蝶形计算的流图。

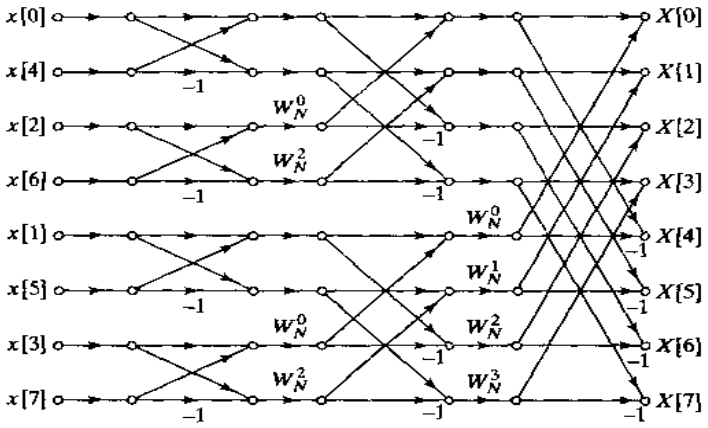


图 9.32　按时间抽取 FFT 算法的流图

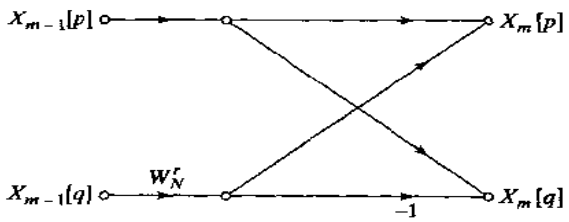


图 9.33　按时间抽取的蝶形计算

在每一级均进行 $N/2$ 次单独的蝶形计算以产生下一级数列。整数 r 随着 p，q 和 m 的变化而改变，它取决于所用 FFT 算法的具体形式。然而，我们的分析与 r 变化的具体方式没有关系。而且，用以确定如何对整个第 m 级数列进行标号的有关 p，q 和 m 之间的具体关系对于分析并不重要。由于不同的蝶形形式，所以对于按时间抽取和按频率抽取得分析细节也略有不同，但是得出的基本结果没有多大变化。在分析中假定蝶形计算为对应于按时间抽取的由(9.53a)式和(9.53b)式所描述的基本形式。

我们把每个定点乘法运算与一个加性噪声发生器联系在一起来建立舍入噪声的模型。当分析舍入噪声效应时，由于使用这种模型，图 9.33 所示的蝶形将由图 9.34 所示的蝶形来代替。记号 $\varepsilon[m,q]$清楚地表明，这个量代表在由第$(m-1)$级数列计算第 m 级数列的第 q 个元素与一个复系数相乘的结果进行量化时所产生的误差。

因为我们假设在一般情况下 FFT 的输入均为复序列，所以每次相乘的结果也是复数，实际上它由 4 个实数乘法组成。我们假设每个实数乘法产生的误差有下列性质：

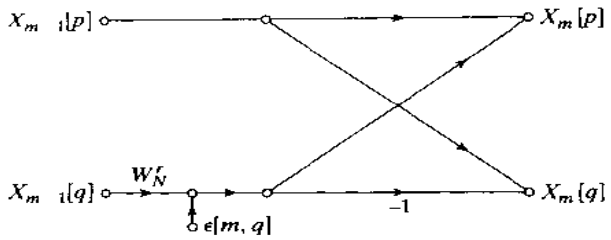


图 9.34　在按时间抽取得蝶形算法中定点舍入噪声的线性噪声模型

1. 误差是在 $-(1/2)\times 2^{-B}$ 到 $(1/2)\times 2^{-B}$ 区间上均匀分布的随机变量，这里将数表示作 $(B+1)$ 位带符号的小数，与 6.6.1 节中定义的一样。因此每个噪声源的方差为 $2^{-2B}/12$。

2. 误差相互之间不相关。

3. 所有的误差均与输入不相关，因此与输出也不相关。

由于四个噪声序列都是互不相关的零均值白噪声，并且有相同的方差：

$$\mathscr{E}\{|\varepsilon[m,q]|^2\} = 4\cdot\frac{2^{-2B}}{12} = \frac{1}{3}\cdot 2^{-2B} = \sigma_B^2 \tag{9.54}$$

为了确定在任何输出节点上输出噪声的均方值，我们必须考虑传至该节点的每个噪声源的贡献。从图 9.32 的流图可以看出以下几点：

1. 从流图中任一节点到相连接的任一其它节点的传输函数均与单位幅度的复常数相乘（因为每个支路的传输比或者为 1，或者为 W_N 的整数次幂）。

2. 每个输出节点均与流图中的 7 个蝶形相连接。（在一般情况下，每个输出节点应当与 $(N-1)$ 个蝶形相连接）例如，图 9.35(a)绘出了除去不与 $X[0]$ 相连接的蝶形后所有蝶形构成的流图，而图 9.35(b)绘出了除去不与 $X[2]$ 连接的蝶形后所有蝶形构成的流图。这两点结论可以推广到 N 为 2 的任意幂的情况。

由第一点结论可知，由每个基元噪声源产生的输出噪声分量幅度的均方值相同，均为 σ_B^2。每个输出节点的全部输出噪声等于传播到该节点的噪声之和。因为我们假设所有的噪声源之间均不相关，所以输出噪声幅度的均方值等于传播到该节点的噪声源数目的 σ_B^2 倍。每一个蝶形至多引入一个复噪声源；因此，由第二结论可知，最多有 $(N-1)$ 个噪声源的噪声传播至每个输出节点。事实上，并不是所有的蝶形都产生舍入噪声，因为一些蝶形（如 $N=8$ 时，在第一级和第二级中的所有蝶形）只涉及到与 1 相乘。但是，如果为了简化假定每个蝶形均有舍入发生，则我们可以把所有结果作为输出噪声的上限。根据这一假设，在第 k 个 DFT 值 $F[k]$ 的计算中，输出噪声的均方值为

$$\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} = (N-1)\sigma_B^2, \tag{9.55}$$

当 N 较大时，可近似为

$$\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} \simeq N\sigma_B^2, \tag{9.56}$$

按照这一结果，输出噪声的均方值正比于变换的点数 N。将 N 加倍或在 FFT 中增加另外一级的影响是，将输出噪声的均方值加倍。在习题 9.45 中，当我们并没有给只涉及到与 1 或 j 相乘的那些蝶形中插入噪声源时，研究如何对上面的结果作出修正。请注意，对于 FFT 算法，长度加倍的累加器并不能帮助我们减少舍入噪声，因为在每一级的输出端蝶形计算的输出必

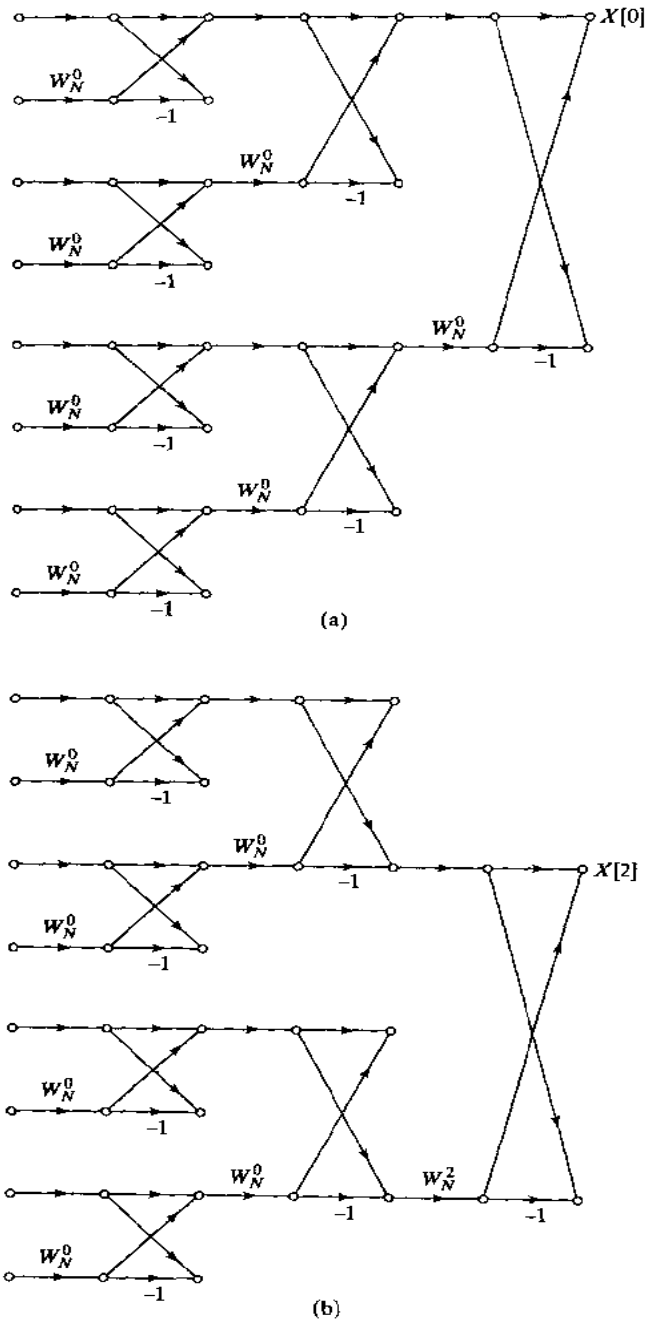


图 9.35 (a) 对 $X[0]$有影响的蝶形；(b) 对 $X[2]$有影响的蝶形

须存储在$(B+1)$位的寄存器中。

在实现定点运算的FFT算法时，我们必须保证没有溢出。由(9.53a)式和(9.53b)式可得

$$\max(|X_{m-1}[p]|, |X_{m-1}[q]|) \leqslant \max(|X_m[p]|, |X_m[q]|) \tag{9.57}$$

以及

$$\max(|X_m[p]|, |X_m[q]|) \leqslant 2\max(|X_{m-1}[p]|, |X_{m-1}[q]|) \tag{9.58}$$

(见习题9.44)(9.57)式表明，最大幅度不是逐级递减的。如果FFT的输出幅度小于1，则在每个数列中各节点的幅度必小于1，也就是说，在任一数列中均不会出现溢出①。

为了把这一限制表示成输入序列的幅度上限，注意到，条件

$$|x[n]| < \frac{1}{N}, \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{9.59}$$

是保证

$$|X[k]| < 1, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{9.60}$$

的必要和充分条件。这可由DFT的定义得出，因为

$$|X[k]| = \left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{9.61}$$

因此，要保证算法的每一级均无溢出发生，(9.59)式是充分条件。

为了得出FFT算法输出噪声－信号比的解析表示式，考虑输入为相邻序列值互不相关的序列，即白噪声输入信号。仍然假定输入序列的实部和虚部是不相关的，而且各部分的幅度密度在$-1/(\sqrt{2}N)$和$+1/(\sqrt{2}N)$之间是均匀分布的(注意，这个信号满足(9.59)式)。因此，复输入序列的均方幅度为

$$\mathscr{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{3N^2} = \sigma_x^2 \tag{9.62}$$

输入序列的DFT是

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{kn}, \tag{9.63}$$

在上述有关输入序列的假设条件下，由上式可以证明：

$$\mathscr{E}\{|X[k]|^2\} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathscr{E}\{|x[n]|^2\} |W^{kn}|^2 = N\sigma_x^2 = \frac{1}{3N} \tag{9.64}$$

同时利用(9.56)式和(9.64)式可得

$$\frac{\mathscr{E}\{|F[k]|^2\}}{\mathscr{E}\{|X[k]|^2\}} = 3N^2\sigma_B^2 = N^2 2^{-2B} \tag{9.65}$$

按照(9.65)式，噪声-信号比随N^2的增加而增大，或者每一级增加1位。这就是说，若N增大一倍，相当于给FFT又附加了一级，则要维持同样的噪声-信号比，就必须使寄存器的长度增加1位。实际上，输入信号为白噪声的假设在这里并不是关键的。对于各种其它的输入信号，噪声-信号比仍然正比于N^2，只是比例常数有所不同。

(9.58)式提供了另一种改变信号比例的方法。因为从上一级到下一级最大幅度至多增加一倍，所以只要有$|x[n]|<1$并且在每一级的输入加入1/2的衰减就可防止溢出。在这种情

① 实际上应当利用数据的实部和虚部而不是幅度来讨论溢出。但是，$|x|<1$意味着$|\mathrm{Re}\{x\}|<1$和$|\mathrm{Im}\{x\}|<1$，若以实部和虚部为基础调整比例因子，只能使允许的信号电平有少量增加。

况下，输出是 DFT 的 $1/N$ 倍。虽然均方输出信号是没有引入比例因子时输出的 $1/N$ 倍，但是输入信号幅度可以增大 N 倍而不引起溢出。对于白噪声输入信号，这就意味着可以假设其实部和虚部都是在区间 $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ 上的均匀分布，因此 $|x[n]|<1$。所以，若用 2 除 ν 次，则（对于白噪声输入信号）所能得到的 DFT 幅度平方的最大期望值与(9.64)式给出的相同。但是，输出噪声级将比(9.56)式得出的要小的多，因为由 FFT 最初几级引入的噪声将被在后面几级数列中加入的比例因子所衰减。具体来说，若在每个蝶形的输入端均加入 1/2 的比例因子，则图 9.34 的蝶形就修改成为图 9.36 的蝶形，图中特别是每个蝶形均与两个噪声源

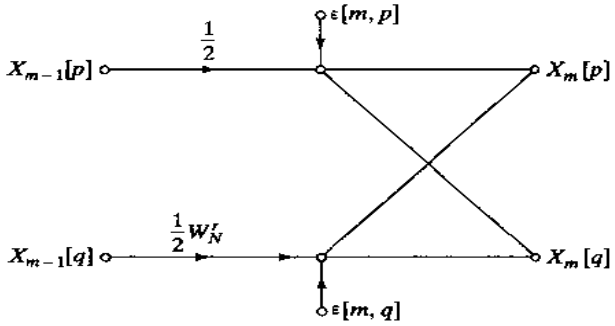


图 9.36　表示比例因子乘法器和有关定点舍入噪声的蝶形结构

有联系。如前所述，我们仍假设这些噪声源的实部和虚部是不相关的，并且与其它噪声源也不相关，另外实部和虚部在 $\pm(1/2)2^{-B}$ 之间为均匀分布。因此，和前面一样，有

$$\mathscr{E}\{|\varepsilon[m,q]|^2\} = \sigma_B^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^{-2B} = \mathscr{E}\{|\varepsilon[m,p]|^2\} \tag{9.66}$$

因为各噪声源之间均不相关，所以在各输出节点处噪声的均方幅度仍然是流图中各噪声源的贡献之和。但是有一点与上述情况不同，每个噪声源经历整个流图时所受到的衰减与该噪声源最初所在的数列有关。起始于第 m 列的噪声源传播至输出端时要乘以幅值为 $(1/2)^{\nu-m-1}$ 的复常数。通过考察图 9.32 可以看出，对于 $N=8$ 的情况，每个输出节点与下列蝶形相连接：

起始于第 $(\nu-1)$ 列的 1 个蝶形。

起始于第 $(\nu-2)$ 列的 2 个蝶形。

起始于第 $(\nu-3)$ 列的 4 个蝶形，等等。

对于 $N=2^\nu$ 的一般情况，每个输出节点起始于第 m 列的 $2^{\nu-m-1}$ 个蝶形相连接，因而也就与 $2^{\nu-m}$ 个噪声源相连接。所以，在每个输出节点处，噪声的均方幅度为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\{|F[k]|^2\} &= \sigma_B^2\sum_{m=0}^{\nu-1}2^{\nu-m}(0.5)^{2\nu-2m-2}\\ &= \sigma_B^2\sum_{m=0}^{\nu-1}(0.5)^{\nu-m-2}\\ &= \sigma_B^2\cdot 2\sum_{k=0}^{\nu-1}0.5^k\\ &= 2\sigma_B^2\,\frac{1-0.5^\nu}{1-0.5} = 4\sigma_B^2(1-0.5^\nu)\end{aligned} \tag{9.67}$$

当 N 较大时，假设 0.5^{ν}（即 $1/N$）与 1 相比可以忽略，则

$$\mathcal{E}\{|F[k]|^2\} \cong 4\sigma_B^2 = \frac{4}{3} \cdot 2^{-2B} \tag{9.68}$$

上式比所有的比例因子都加到输入数据上时所得出的噪声方差要小的多。

现在我们可以将(9.68)式和(9.64)式联立，得出在逐级改变比例和输入为白噪声情况下的输出噪声-信号比，有

$$\frac{\mathcal{E}\{|F[k]|^2\}}{\mathcal{E}\{|X[k]|^2\}} = 12N\sigma_B^2 = 4N \cdot 2^{-2B} \tag{9.69}$$

这个结果正比于 N 而不是 N^2。对(9.69)式的一种解释是，输出噪声-信号比随 N 而增加，相当于每一级增加半个码位，该结果首次由 Welch(1969)得出。特别还应当注意，白噪声信号的假设在分析中并不是必不可少的。每增加一级输出，噪声-信号比就相当于增加半个码位，这一基本结论对于其他许多信号也成立，只是在(9.69)式中的常数因子与信号形式有关。

我们还应当注意，导致噪声-信号比随 N 增大而增加的主要原因是，当信号逐级通过时，信号电平会逐级减少(这是限制溢出所要求的)。按照(9.68)式可知，在最后一列只有很小的噪声(只有一位或两位)。由于改变比例的作用大部分噪声被移位移掉了。

在前面的讨论中我们已经假设采用直接定点运算，也就是说，只允许预先设置衰减，而不允许在溢出检验的基础上重新调整比例。显然，如果使用只能作直接定点运算的硬件或编程设备，我们应当在(如果可能)每一列加入 1/2 的衰减，而不是在输入列用一个大的衰减。

避免溢出的第三种方法是利用**块浮点**(block－floating point)运算。在这种方法中由于限制 $|x[n]|<1$，将原始数列归一化到计算机字的最左边；计算按定点运算进行，只是在每次加法之后不进行溢出检验。如果查出有溢出，则用 2 除全部数列并继续进行计算。为了确定最后整个数列的比例因子，要算出必须用 2 除的次数。输出噪声－信号比密切依赖于发生溢出的次数以及计算中是哪一级发生溢出的。溢出发生的位置和时间由所变换的信号而决定，因此，为了分析在 FFT 的块浮点实现中的噪声-信号比，我们必需要知道输入信号。

以上分析表明，当确定定点实现 FFT 算法的噪声-信号比时改变比例是避免溢出的主要方法。因此，浮点运算应当能改善性能。Gentleman 和 Sande(1966)，Weinstein(1969)以及 Kaneko 和 Liu(1970)等人从理论和试验上分析了浮点舍入对 FFT 的影响。这些研究表明，因为不再需要改变比例，所以与定点运算相比，其噪声-信号比随 N 的增加而大幅度的减小。

例如，Weinstein(1969a)从理论上证明，对于 $N=2^{\nu}$ 的情况，噪声-信号比正比于 ν 而不像定点运算那样正比于 N。因此，将 ν 增大 4 倍(即把 N 提高到原来的 4 次方)只能把噪声-信号比增加 1 位。

9.8 小结

在本章中我们研究了计算离散傅里叶变换的方法，并且认识到如何利用复因子 $e^{-j(2\pi/N)kn}$ 的周期性和对称性来提高 DFT 计算的效率。

我们论述了 DFT 表示的 Goertzel 算法和直接算法，因为在不需要计算全部 N 个 DFT 值的情况下这些方法是十分重要的。但是，我们重点阐述快速傅里叶变换(FFT)算法。我们比较详细的讨论了按时间抽取和按频率抽取类的 FFT 算法和一些解释所要考虑的，例如标号及

系数量化。讨论的大部分细节是关于要求 N 为 2 的幂的算法，因为这些算法经常使用，容易理解且编程简单。

本章中还简要论述了利用卷积作为计算 DFT 的基础。概述了 Winograd 傅里叶变换算法，较详细的讨论了线性调频变换算法。

本章最后一节集中讨论了 DFT 计算中量化的影响。利用线性噪声模型证明，DFT 计算的噪声-信号比随序列长度的不同而改变，这取决于如何设置比例因子。我们还简要讨论了浮点表示的作用。

习　题

基本题(附答案)

9.1　假设有一个计算机程序可用来计算如下 DFT：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

即，程序的输入是序列 $x[n]$，而输出是 DFT $X[k]$证明如何将输入和/或输出序列重新安排，使得该程序也可用来计算 IDFT：

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn} \qquad n = 0,1,\cdots,N-1$$

即，程序的输入应当是 $X[k]$或与 $X[k]$有简单联系的一个序列，而输出应当是 $x[n]$或与 $x[n]$有简单联系的一个序列。有好几种可能的方法。

9.2　图 P9.2 给出 $N=8$ 时按时间抽取 FFT 算法的流图表示。粗线指出从样本 $x[7]$到 DFT 样本 $X[2]$的一条路径。

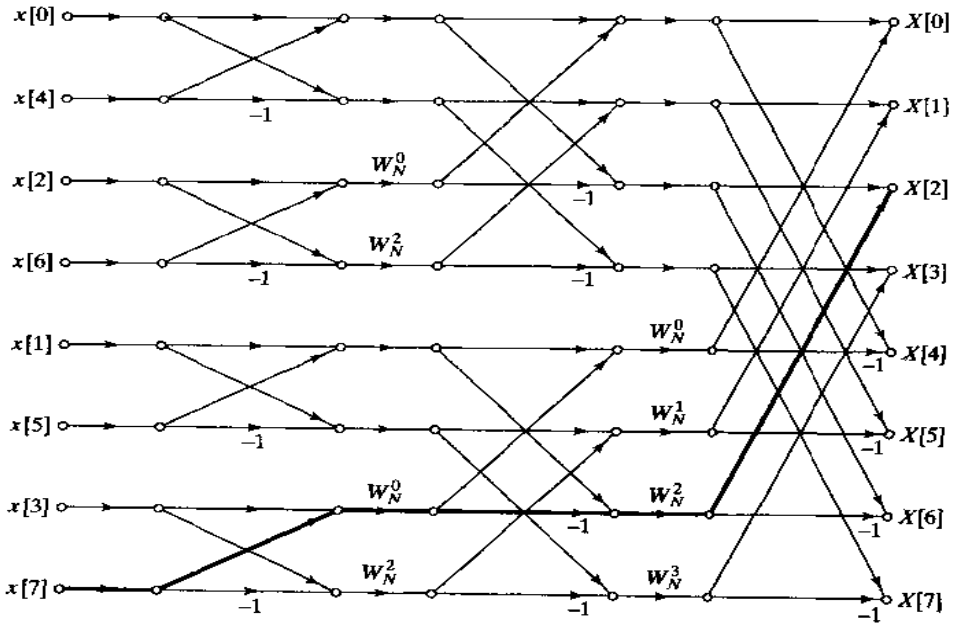


图 P9.2

(a) 沿着图 P9.2 中粗线所示路径的"增益"是多少?

(b) 在流图中始于 $X[7]$且止于 $X[2]$的路径有多少条? 在一般情况下这个结果是否也正确,即,在每个输入样本和每个输出样本之间有多少条路径?

(c) 现在考虑 DFT 样本 $X[2]$。沿着图 P9.2 所示流图中的路径,证明每个输入样本都对输出的 DFT 样本有适量的贡献,即证明

$$x[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)2n}$$

9.3 图 P9.3 表示一个 8 点按时间抽取 FFT 算法的流图。令序列 $x[n]$的 DFT 是 $X[k]$。在流图中,$A[\cdot]$, $B[\cdot]$,$C[\cdot]$和 $D[\cdot]$表示分开的不同数列,这些数列连续的标号与流图中所标出的节点有相同的顺序。

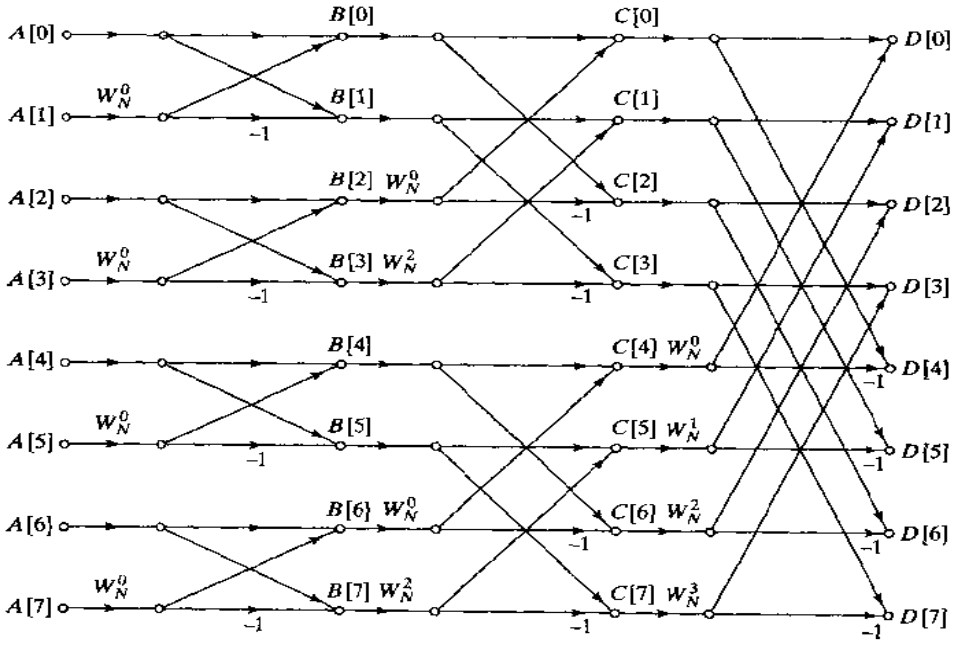


图 P9.3

(a) 说明如何将序列 $x[n]$的元素放在 $A[r]$中,$r=0,1,\cdots,7$,还说明如何将 DFT 序列中的元素从数列 $D[r]$,$r=0,1,\cdots,7$ 中取出。

(b) 如果输入序列为 $x[n]=(-W_N)^n$,$n=0,1,\cdots,7$,不用求出中间数列 $B[\cdot]$和 $C[\cdot]$的值而求出数列 $D[r]$,$r=0,1,\cdots,7$ 的值,并作图。

(c) 如果输出傅里叶变换为 $X[k]=1$,$k=0,1,\cdots,7$,求序列 $C[r]$,$r=0,1,\cdots,7$,并作图。

9.4 在实现一种 FFT 算法时,利用递归差分方程或振荡器产生 W_N 的幂往往是很有用的。在本习题中我们来研究当 $N=2^\nu$ 时的一种基 2 按时间抽取算法。图 9.10 绘出当 $N=8$ 时的这种算法。为了有效地产生这些系数,应当逐级地改变振荡器的频率。

假设数列的编号是从 0 到 $\nu=\log_2 N$,因此有初始输入序列的数列是第零列,而 DFT 是第 ν 列。当计算某一给定级的蝶形运算时,所有要求相同系数的蝶形在得到新系数之前都计算出来。在给全部数列标号时我们假定数列中的数据存储在编号从 0 到$(N-1)$依次排列的复数寄存器中。下面的所有问题都是关于从第$(m-1)$号数列来计算第 m 号数列,其中 $1\leqslant m\leqslant\nu$。答案应当用 m 表示。

(a) 在第 m 级中应当计算多少个蝶形？在第 m 级中需要多少个不同的系数？

(b) 写出一个冲激响应 $h[n]$包括第 m 项蝶形所要求的系数 W_N^r 的差分方程。

(c) (b)中的差分方程具有振荡器形式，即 $n\geqslant 0$ 时 $h[n]$是周期的。则 $h[n]$的周期为多少？根据这个写出此振荡器频率作为 m 的函数表示式。

9.5 计算 DFT 通常需要作复数乘法。考虑乘积 $X+jY=(A+jB)(C+jD)=(AC-BC)+j(BC+AD)$。在这个式子中，1 次复数乘法需要 4 次实数乘法和 2 次实数加法。证明利用算法

$$X=(A-B)D+(C-D)A$$
$$Y=(A-B)D+(C+D)B$$

可用 3 次实数乘法和 5 次加法完成 1 次复数乘法。

9.6 考虑图 P9.6 中的蝶形。这个蝶形是从实现某种 FFT 算法的信号流图中取出的。从下列论述中选择出最准确的一个：

1. 这个蝶是从一个按时间抽取的 FFT 算法中取出的。
2. 这个蝶形是从一个按频率抽取的 FFT 算法中取出的。
3. 由图无法判断该蝶形取自何种 FFT 算法。

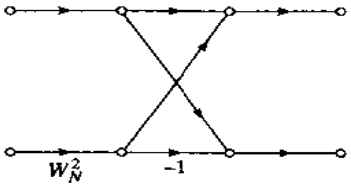


图 P9.6

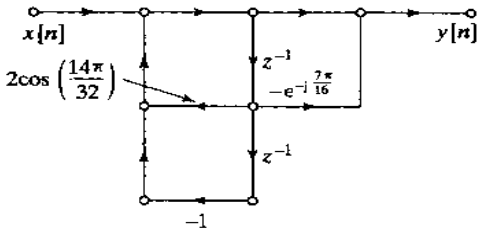


图 P9.7

9.7 考虑如图 P9.7 所示的系统。如果该系统的输入 $x[n]$是一个在区间 $0\leqslant n\leqslant 31$ 上的 32 点序列，输出 $y[n]$在 $n=32$ 处的值等于 $X(e^{j\omega})$在某一特定频率 ω_k 处的值。对于如图 P9.7 所示的系数，ω_k 应为多少？

9.8 有限长信号 $x[n]$在区间 $0\leqslant n\leqslant 19$ 上为非零，该信号是如图 P9.8 所示系统的输入，其中

$$h[n]=\begin{cases}e^{j(2\pi/21)(n-19)^2/2}, & n=0,1,\cdots,28\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$
$$W=e^{-j(2\pi/21)}$$

系统的输出 $y[n]$在区间 $n=19,\cdots,28$ 上的值可用 ω 取合适值的 DTFT $X(e^{j\omega})$表示。写出在此区间上用 $X(e^{j\omega})$来表示的 $y[n]$的表达式。

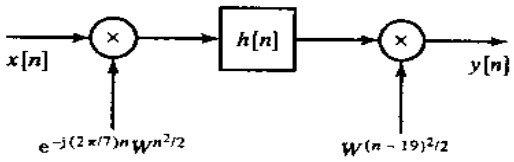


图 P9.8

9.9 在图 9.9 中的蝶形流图可用于计算长度为 $N=2^\nu$ 的序列的“同址”DFT，即利用复值寄存器的单一数列。假设，寄存器 $A[l]$地数列按 $0\leqslant l\leqslant N-1$ 标号。输入序列起始以倒位序置于 $A[l]$中。然后数列通过 ν 级蝶形处理。每个蝶形取两个数列元素 $A[l_0]$和 $A[l_1]$作为输入，然后将输出存入同样的数列位置。l_0 和 l_1 的值取决于级号和蝶形在信号流图中的位置。计算的级数依次用 $m=1,\cdots,\nu$ 标记。

(a) 作为级号 m 的函数的 $|l_1-l_0|$是多少？

(b) 许多级中都包含有同一“旋转”因子 W_N^r 的蝶形。对这些级，有同样 W_N^r 的蝶形的 l_0 值相距多远？

9.10 考虑如图 P9.10 所示的系统，有

$$h[n]=\begin{cases}e^{(2\pi/10)(n-11)^2/2}, & n=0,1,\cdots,15\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

需要求出该系统的输出 $y[n+11]=X(e^{j\omega_n})$，其中当 $n=0,\cdots,4$ 时，$\omega_n=(2\pi/19)+n(2\pi/10)$。求图 P9.10 中数列 $r[n]$ 的正确值使得输出 $y[n]$ 具有离散傅立叶变换所要求的样本值。

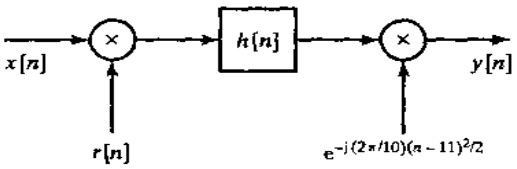


图 P9.10

9.11 假设要将一个长度 $N=16$ 的序列 $x[n]$ 重新排列为倒位序作为某一 FFT 算法的输入。给出新的倒位序后序列的样本序号。

9.12 在下面的命题中，假设序列 $x[n]$ 长度 $N=2^\nu$，且 $X[k]$ 是 $x[n]$ 的 N 点 DFT。判断该命题是否正确，并说明理由。

命题：要构造一个由 $x[n]$ 计算 $X[k]$ 的信号流图使得 $x[n]$ 和 $X[k]$ 均为正常顺序（非倒位序）是不可能的。

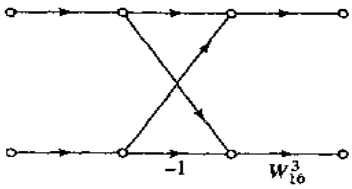


图 P9.13

9.13 图 P9.13 中的蝶形是从一个 $N=16$ 的按频率抽取的 FFT 中取出得，其中输入序列为正常顺序。注意：16 点 FFT 共 4 级，序号为 $m=1,\cdots,4$。则在这 4 级中哪一级具有这种形式的蝶形？说明理由。

9.14 图 P9.14 中的蝶形是从一个 $N=16$ 的按时间抽取的 FFT 中取出得。假设信号流图中 4 级的序号为 $m=1,\cdots,4$。则对每一级来说 r 的可能值为多少？

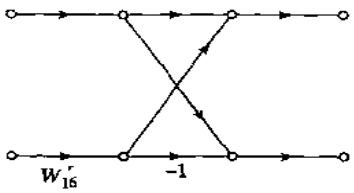


图 P9.14

9.15 假设有两个计算序列 $x[n]$ 的 DFT 的程序，其中 $x[n]$ 有 $N=2^\nu$ 个非零样本。程序 A 是直接按照(8.67)式给出的 DFT 求和定义式来计算 DFT，且计算时间需 N^2 s。程序 B 按时间抽取 FFT 算法来计算 DFT，所需计算时间为 $10N\log_2 N$ s。使得程序 B 的速度快于程序 A 的最短序列长度 N 是多少？

9.16 图 P9.16 中的蝶形取自 $N=16$ 的按时间抽取 FFT。设信号流图中 4 级的序号为 $m=1,\cdots,4$。则在这 4 级中哪一级具有这种形式的蝶形？

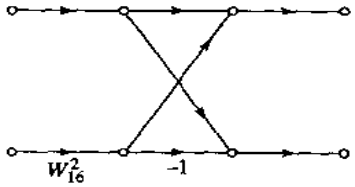


图 P9.16

9.17 假设已知一个 $N=32$ 的 FFT 算法在其第 5 级（最后一级）的一个蝶形中具有“旋转”因子 W_{32}^2。问该 FFT 算法为按时间抽取算法还是按频率抽取算法。

9.18 假设信号 $x[n]$ 具有 1 021 个非零样本的，且希望通过计算 DFT 来估计出该信号的离散时间傅里叶变换。已知计算机计算 $x[n]$ 的 1 021 点 DFT 需要 100 s。然后在序列末端补加 3 个零值样本构成一个 1 024 点的序列 $x_1[n]$。用同样的程序和计算机计算 $X_1[k]$ 只需 1s。这说明可以通过在序列 $x[n]$ 的末端补零且使序列仿佛加长的方法，使得在短的多得时间内计算出更多的 $X(e^{j\omega})$ 的样本。如何解释这种似乎矛盾的说法？

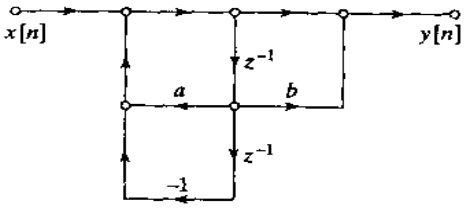


图 P9.19

9.19 考虑图 P9.19 中的信号流图。假设该系统的输入 $x[n]$ 是一个 8 点序列。选择 a 和 b 的值使得 $y[8]=X(e^{j\pi/8})$。

9.20 假设将一个实值的 32 点序列 $x[n]$ 作时间倒序并延迟

得到$x_1[n]=x[32-n]$。如果$x_1[n]$为图 P9.7 中系统的输入，求用原序列$x[n]$的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$表示的$y[32]$的表达式。

基本题：

9.21 在 9.2 节中我们利用 $W_N^{-kN}=1$ 推导出由有限长序列 $x[n]$ $(n=0,1,\cdots,N-1)$计算一个指定 DFT 值 $X[k]$的递推算法。

(a) 利用 $W_N^{kN}=W_N^{2kn}=1$，证明 $X[N-k]$可作为图 P9.21-1 所描述的差分方程经 N 次迭代后输出而求得。也就是说，证明

$$X[N-k]=y_k[N]$$

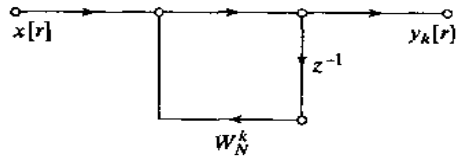


图 P9.21-1

(b) 证明 $X[N-k]$也等于图 P9.21-2 所示差分方程经 N 次迭代后的输出。注意，图 P9.21-2 的系统与图 9.2 的系统有相同的极点，但是实现图 P9.21-2 中复零点所要求的系统是图 9.2 中对应系数的复共轭，即 $W_N^{-k}=(W_N^k)^*$。

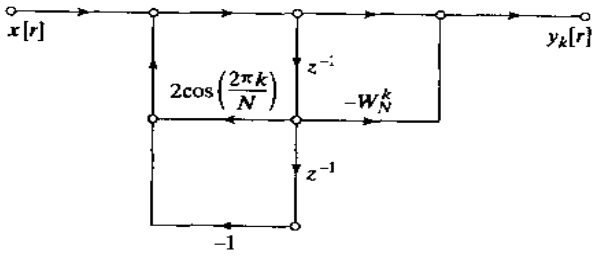


图 P9.21-2

9.22 画出 16 点基 2 按时间抽取 FFT 算法的一种流图。用 W_{16}的幂次来标出所有的乘法器，并且标出任何传输比等于 -1 的支路。用输入序列和 DFT 序列的适当值分别标出输入和输出节点，求执行流图运算所需要的实乘法次数和实加法次数。

深入题：

9.23 在 9.4.2 节中曾断言，一个 FFT 算法流图的转置仍然是一个 FFT 算法的流图。本习题的目的就是对基 2FFT 算法推导出这一结论。

(a) 按时间抽取基 2FFT 算法的基本蝶形图绘于图 P9.23-1 中。这个流图表示如下方程：

$$X_m[p]=X_{m-1}[p]+X_{m-1}[q]$$

$$X_m[q]=(X_{m-1}[p]-X_{m-1}[q])W_N^r$$

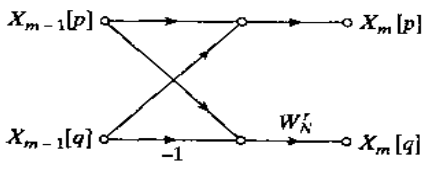


图 P9.23-1

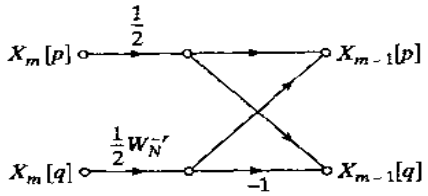


图 P9.23－2

从这些方程入手，证明利用图 P9.23－2 所示的蝶形图可由 $X_m[p]$ 和 $X_m[q]$ 计算出 $X_{m-1}[p]$ 和 $X_{m-1}[q]$。

(b) 在图 9.20 的按频率抽取算法中，$X_r[r], r=0,1,\cdots,N-1$ 为倒位序排列的 DFT $X[k]$，而第零号 $X_0[r]=x[r], r=0,1,\cdots,N-1$ 为正常位序排列的输入序列。如果图 9.20 中的每个蝶形都用图 P9.23－2 形式的适当蝶形来代替，则所得结果就是由 DFT $X[k]$（倒位序）来计算序列 $x[n]$（正常位序）的流图。画出当 $N=8$ 时所得结果的流图。

(c) 在(b)中得出的流图表示一种 IDFT 算法，即，计算下式的算法：

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn},\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

对(b)中所得流图加以修改，使其可计算 DFT

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

而不是 IDFT。

(d) 可以看出，(c)的结果就是图 9.20 按频率抽取算法的转置，它等同于图 9.10 所示的按时间抽取算法。是否可得出结论，对于每一种按时间抽取算法（如图 9.14～9.16），必有一种按频率抽取算法（它是按时间抽取算法的转置）与之对应，反之亦然？请说明原因。

9.24 我们知道，FFT 算法可以看作是称之为蝶形的计算单元间的一种互连。例如，对基 2 按频率抽取 FFT 算法的蝶形如图 P9.24－1 所示。该蝶形取两个复数作为输入而产生两个复数作为输出。它的实现需要一次与 W_N^r 的复数乘法，其中 r 是取决于算法流图中蝶形位置的整数。因为复数乘法器的形式为 $W_N^r=e^{j\theta}$，所以可以用在习题 9.39 中讨论的 CORDIC 旋转子算法来有效地实现复数乘法。可惜的是，虽然 CORDIC 旋转子算法可以获得要求的幅角变化，但同时也引入了一个依赖于幅角 θ 的固定放大系数。因此，如果用 CORDIC 旋转子算法来实现与 W_N^r 相乘，则图 P9.24－1 的蝶形将被图 P9.24－2 的蝶形所代替，其中 G 代表 CORDIC 旋转子的固定放大因子（我们假设在逼近旋转幅角时没有误差）。如果在按频率抽取 FFT 算法流图中的每个蝶形都用图 P9.24－2 的蝶形代替，则我们得到一种修正的 FFT 算法，当 $N=8$ 时该算法的流图如图 P9.24－3 所示。这个修正算法的输出却不是所要求的 DFT。

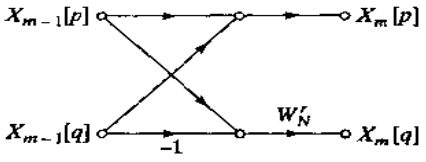


图 P9.24－1

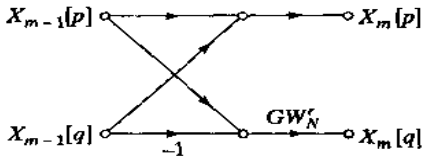


图 P9.24－2

(a) 证明该修正的 FFT 算法的输出是 $Y[k]=W[k]\cdot X[k]$，其中 $X[k]$ 是输入序列 $x[n]$ 的正确 DFT，而 $W[k]$ 是 G, N 和 k 的函数。

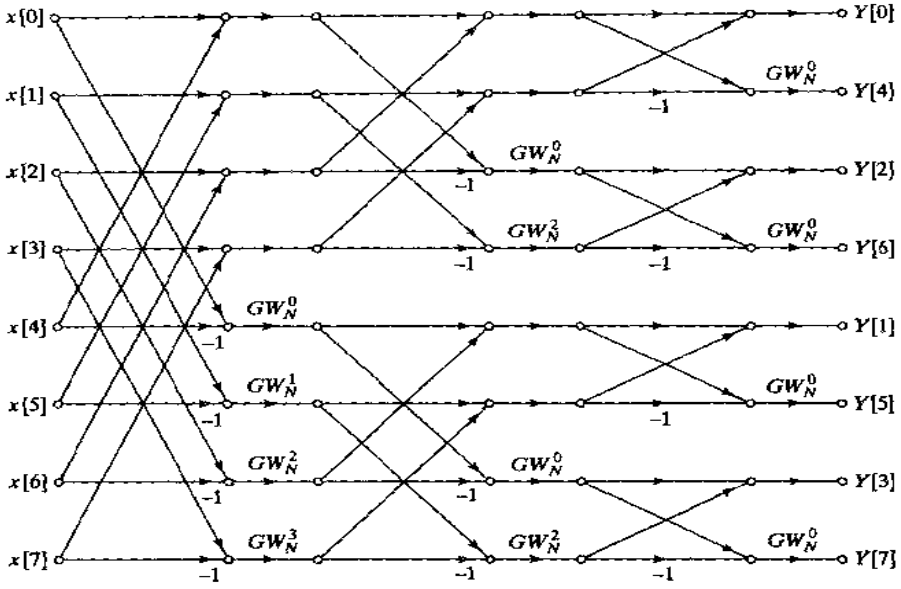


图 P9.24－3

(b) 希望序列 $W[k]$服从一种特别简单的规则。请找出该规则并指出它与 G,N 和 k 的依赖关系。

(c) 假设我们想通过对输入序列 $x[n]$作预处理来补偿修正 FFT 算法的影响。请找出一种是由 $x[n]$得到序列 $\hat{x}[n]$ 的方法,使得若 $\hat{x}[n]$ 为修正 FFT 算法的输入,则输出将是原始 $x[n]$的正确 DFT $X[k]$。

9.25 本习题涉及有限长序列 z 变换样本的有效计算问题。利用线性调频变换算法,给出计算在半径为 0.5,起始角为 $-\pi/6$ 和终止角为 $2\pi/3$ 的圆弧上均匀相间的 25 点 $X(z)$值的步骤。序列长度为 100 个样本。

9.26 当 N 为偶数时,N 点序列 $x[n]=e^{-j(\pi/N)n^2}$的 N 点 DFT 是

$$X[k] = \sqrt{N}e^{-j\pi/4}e^{j(\pi/N)k^2}$$

求 $2N$ 点序列 $y[n]=e^{-j(\pi/N)n^2}$的 $2N$ 点 DFT(设 N 为偶数)。

9.27 已知一长度为 627 的有限长序列 $x[n]$(即,当 $n<0$ 和 $n>626$ 时,$x[n]=0$),且有计算任何长度为 $N=2^\nu$ 的序列之 DFT 的 FFT 程序可供使用。

对于某一给定序列我们想在如下频率处计算离散时间傅里叶变换的样本:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{627} + \frac{2\pi k}{256}, \qquad k = 0,1,\cdots,255$$

说明如何由 $x[n]$得出一个新序列 $y[n]$,使得可以将所提供的 FFT 程序用于 $y[n]$,在 ν 尽可能小的情况下得出所要求频率的样本。

9.28 长度 $L=500$ 的有限长信号(对于 $n<0$ 和 $n>L-1$,$x[n]=0$)是用每秒 10 000 个样本的采样率对某一连续时间信号采样而得到的。我们希望在有效频率间隔为 50 Hz 或更小的 N 个等间隔点 $z_k=(0.8)e^{j2\pi k/N}(0\leqslant k\leqslant N-1)$处计算 $x[n]$之 z 变换的样本。

(a) 若 $N=2^\nu$,确定 N 的最小值。

(b) 当 N 为(a)所求出的值时,求一个长度为 N 的序列 $y[n]$,使得其 DFT $Y[k]$等于所要求的 $x[n]$

之 z 变换的样本。

9.29 假设有限长序列 $x[n]$有 N 点 DFT $X[k]$,并且还假设该序列满足对称条件

$$x[n] = -x[((n+N/2))_N], \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

式中 N 为偶数,$x[n]$为复数。

(a) 证明,当 $k=0.2,\cdots,N-2$ 时 $X[k]=0$。

(b) 说明如何只用一个 $N/2$ 点 DFT 外加少量的额外计算来计算奇序号 DFT 值$X[k], k=1,3,\cdots,N-1$。

9.30 考虑一个 N 点序列$x[n]$,其 DFT 为 $X[k], k=0,1,\cdots,N-1$。下面的算法只用一个 $N/2$ 点 DFT(N 为偶数)来计算偶序号 DFT 值 $X[k], k=0,2,\cdots,N-2$。

1. 用时间混叠构成序列 $y[n]$,即

$$y[n] = \begin{cases} x[n]+x[n+N/2], & 0 \leqslant n \leqslant N/2-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

2. 计算 $Y[r], r=0,1,\cdots,(N/2)-1$,$y[n]$的 $N/2$ 点 DFT。

3. $X[k]$的偶序号值为 $X[k]=Y[k/2], k=0,2,\cdots,N-2$。

(a) 证明上述算法可以得出所要求的结果。

(b) 假设我们用下式由序列 $x[n]$构造一个有限长序列 $y[n]$:

$$y[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM], & 0 \leqslant n \leqslant M-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

确定 M 点 DFT $Y[k]$与 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$之间的关系。证明(a)的结果是(b)的结果的一种特殊情况。

(c) 推导一种类似于(a)的算法,只用一个 $N/2$ 点 DFT(N 为偶数)来计算奇序号 DFT 值 $X[k], k=1,3,\cdots,N-1$。

9.31 假设有一个 FFT 程序,可用来计算复序列的 DFT。如果我们想要计算一个实序列的 DFT 则我们可以简单地将虚部设置为零,而直接使用该程序。但是,可以利用实序列 DFT 的对称性来减少计算量。

(a) 令 $x[n]$是长度为 N 的实序列,且 $X[k]$是其 DFT,它的实部和虚部分别记作$X_R[k]$和 $X_I[k]$

$$X[k] = X_R[k] + jX_I[k]$$

证明若 $x[n]$为实数,则当 $k=1,2,\cdots,N-1$ 时 $X_R[k]=X_R[N-k]$和 $X_I[k]=-X_I[N-k]$。

(b) 考虑两个实序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$,其 DFT 分别为 $X_1[k]$和 $X_2[k]$。令 $g[n]$是复序列 $g[n]=x_1[n]+jx_2[n]$,其对应的 DFT 为 $G[k]=G_R[k]+jG_I[k]$。如像(8.102)式所定义的,令 $G_{OR}[k], G_{ER}[k], G_{OI}[k]$和 $G_{EI}[k]$分别表示实部的奇部和偶部以及 $G[k]$虚部的奇部和偶部。具体地讲,对于 $1 \leqslant k \leqslant N-1$,

$$G_{OR}[k] = \frac{1}{2}\{G_R[k]-G_R[N-k]\},$$

$$G_{ER}[k] = \frac{1}{2}\{G_R[k]+G_R[N-k]\},$$

$$G_{OI}[k] = \frac{1}{2}\{G_I[k]-G_I[N-k]\},$$

$$G_{EI}[k] = \frac{1}{2}\{G_I[k]+G_I[N-k]\},$$

并且 $G_{OR}[0]=G_{OI}[0]=0, G_{ER}[0]=G_R[0], G_{EI}[0]=G_I[0]$。求利用 $G_{OR}[k], G_{ER}[k], G_{OI}[k]$和 $G_{EI}[k]$的 $X_1[k]$和 $X_2[k]$表示式。

(c) 假设 $N=2^\nu$,并且可用一个基 2 FFT 程序来计算 DFT。在以下两种情况下求出计算 $X_1[k]$和 $X_2[k]$ 两者所需要实数乘法次数和实数加法次数:(i)使用该程序两次(同时将输入序列的虚部设

为零)分别计算两个复 N 点 DFT $X_1[k]$和 $X_2[k]$;(ii)使用(b)中提出的方法,它只需要计算一次 N 点 DFT。

(d) 假定我们只有一个实 N 点序列$x[n]$,其中 N 为 2 幂。令 $x_1[n]$和 $x_2[n]$是两个实 $N/2$ 点序列 $x_1[n]=x[2n]$和 $x_2[n]=x[2n+1]$,其中 $n=0,1,\cdots,(N/2)-1$。借助$(N/2)$点 DFT $X_1[k]$和 $X_2[k]$求 $X[k]$。

(e) 利用(b),(c)和(d)的结果提出只用一次 $N/2$ 点,FFT 算法来计算实 N 点序列 $x[n]$的 DFT 的方法。求用这种方法所需要的实数乘法和实数加法的次数。将这一结果与利用一次设虚部为零的 N 点 FFT 算法来计算 $X[k]$所需要的次数作一比较。

9.32 令 $x[n]$和 $h[n]$是两个实有限长序列,使得

$$x[n]=0 \qquad \text{当 } n \text{ 在区间} \qquad 0\leqslant n\leqslant L-1 \text{ 之外时}$$

$$h[n]=0 \qquad \text{当 } n \text{ 在区间} \qquad 0\leqslant n\leqslant P-1 \text{ 之外时}$$

我们希望计算序列 $y[n]=x[n]*h[n]$,这里"$*$"号表示常规卷积。

(a) 序列 $y[n]$的长度是多少?

(b) 当直接计算卷积和时,计算 $y[n]$全部的非零样本需要多少次实数乘法?下述等式可能有用:

$$\sum_{k=1}^{N}k=\frac{N(N+1)}{2}$$

(c) 说出用 DFT 来计算 $y[n]$全部非零样本的方法。求用 L 和 P 表示的 DFT 和 IDFT 的最小长度。

(d) 假设 $L=P=N/2$,其中 $N=2^{\nu}$ 是 DFT 的长度。求利用(c)的方法计算 $y[n]$所有非零值时所需实乘法次数的计算公式,假设用基 2 FFT 算法来计算 DFT。利用这个公式计算 N 的最小值,在这种情况下 FFT 方法比直接计算卷积和需要较少的实数乘法。

9.33 在 8.7.3 节中我们曾表明,线性时不变滤波可以用以下步骤来实现:先把输入信号分成有限长的信号段,然后用 DFT 来实现这些信号段的循环卷积。曾讨论过的两种方法称为重叠相加法和重叠保留法。如果用一个 FFT 算法来计算 DFT,则这些分段的方法计算每个输出样本所需要的复数乘法要比直接计算卷积和来得少。

(a) 假设复输入序列 $x[n]$是有限长的,且复脉冲响应 $h[n]$有 P 个样本,因此只有当 $0\leqslant n\leqslant P-1$ 时 $h[n]\neq 0$。还假设用重叠保留法且利用由基 2FFT 算法实现的长度$L=2^{\nu}$的 DFT 来计算输出。请给出计算每个输出样本所需要的复数乘法次数的计算式,且该式为 ν 和 P 的函数。

(b) 假设脉冲响应的长度为 $P=500$。利用(a)得出的计算公式并使用重叠保留法,给出每个输出样本的乘法次数作为 ν 之函数的曲线($\nu\leqslant 20$)。ν 为何值时乘法次数最少?比较用 FFT 的重叠保留法计算每个输出样本所需的复数乘法次数与直接计算卷积和所需要的每个输出样本的复数乘法次数。

(c) 证明,当 FFT 很长时,计算每个输出样本的复数乘法次数大约为 ν。因此,超出一定的 FFT 长度,重叠保留法就没有直接法来得效率高。若 $P=500$,则 ν 为何值时直接法将更有效?

(d) 假定 FFT 的长度是脉冲响应长度的两倍(即 $L=2P$),且 $L=2^{\nu}$。利用(a)得出的公式,求 P 的最小值,使得用 FFT 的重叠保留法所需用的复乘法次数比直接卷积法来得少。

9.34 $x[n]$为一个 1 024 点的序列,在 $0\leqslant n\leqslant 1\,023$ 上为非零。令 $X[k]$为 $x[n]$的 1 024 点 DFT。若已知

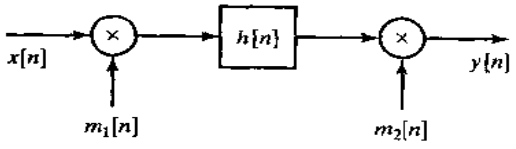


图 P9.34

$X[k]$，利用图 P9.34 中的系统计算当 $0 \leqslant n \leqslant 3$ 和 $1020 \leqslant n \leqslant 1023$ 时的 $x[n]$。注意，系统的输入是 DFT 系数的序列。通过选择 $m_1[k]$，$m_2[k]$和$h[k]$，说明系统可用以计算所要求的 $x[n]$的样本。注意当 $0 \leqslant n \leqslant 7$ 时 $y[n]$的样本必须包含所要求的 $x[n]$的样本。

9.35 研究一种以 DFT 为基础的用于实现因果 FIR 滤波器的算法，该滤波器的频率响应$h[n]$在区间 $0 \leqslant n \leqslant 63$ 外为 0。输入信号(FIR 滤波器的输入)$x[n]$分为无限多个可能重叠的 128 点系列块 $x_i[n]$，i 为整数且 $-\infty \leqslant i \leqslant \infty$，使得

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL \leqslant n \leqslant iL + 127 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

式中 L 为正整数。

给出 i 取任意值时计算下式的方法：

$$y_i[n] = x_i[n] * h[n]$$

答案应以方框图的形式给出，且只能采用图 P9.35－1 和图 P9.35－2 中的模块。每个模块可用多次也可不用。

图 P9.35－2 中的 4 个模块可利用基-2FFT 来计算 $x[n]$的 N 点 DFT $X[k]$，也可则用基-2FFT 反变换由 $X[k]$来计算 $x[n]$。

答案的条件必须包括所采用的 FFT 和 IFFT 的长度。对每一个“移位 n_0”的模块，必须确定出 n_0 的值，即输入序列的移位量。

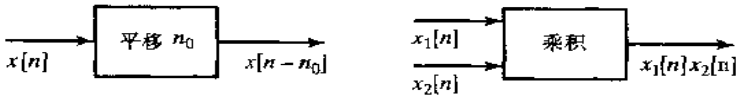


图 P9.35－1

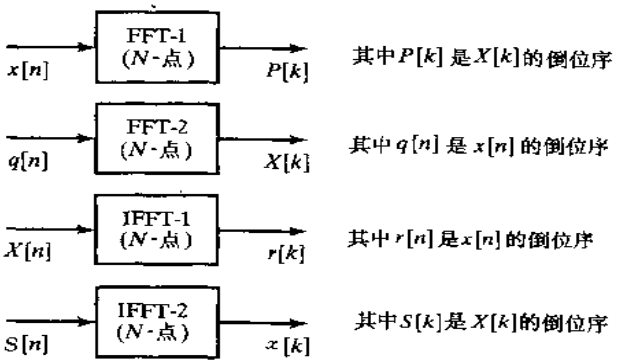


图 P9.35－2

深入题

9.36 在许多应用中(如计算频率响应或内插)，十分关心计算一个短序列“经补零后”的 DFT。在这种情况下可用一种特殊的(修剪)FFT 算法来提高计算效率(Markel, 1971)。在这个习题中我们来研究当输入序列的长度为 $M \leqslant 2^\mu$，而 DFT 的长度为 $N = 2^\nu$ $(\mu < \nu)$时，如何对基 2 按频率抽取算法进行修剪。

(a) 画出当 $N = 16$ 时按频率抽取基 2FFT 算法的完整流图。合理地标示出全部的分支。

(b) 假设输入序列的长度为 $M=2$，即，仅当 $N=0$ 和 $N=1$ 时 $x[n]\neq 0$。画出一个对于 $N=16$ 的新流图，说明非零输入样本是如何传送到输出 DFT 的，也就是说，除去或修剪掉在(a)的流图中代表零输入运算的所有分支。

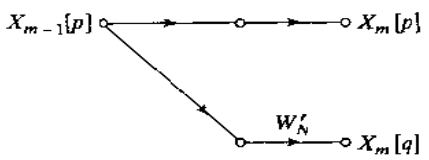


图 P9.36

(c) 在(b)中位于计算的前三级中所有的蝶形均由图 P9.36 所示的半蝶形来代替，而在最后一级中所有的蝶形仍用规范形式。对于输入序列的长度为 $M\leqslant 2^{\mu}$ 且 DFT 的长度为 $N=2^{\nu}(\mu<\nu)$ 的一般情况，求可以使用修剪的蝶形的级数。并求用修剪的 FFT 算法计算 M 点序列的 N 点所需要的复数乘法的次数。用 ν 和 μ 来表示你的答案。

9.37 在 9.3 节中已证明，若 N 可被 2 整除，则 N 点 DFT 可表示成

$$X[k]=G[k]+W_N^k[k]H[k] \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{P9.37-1}$$

其中 $G[k]$ 是如下偶序号样本序列的 $N/2$ 点 DFT：

$$g[n]=x[2n] \qquad 0\leqslant n\leqslant (N/2)-1$$

且 $H[k]$ 是如下奇序号样本序列的 $N/2$ 点 DFT：

$$h[n]=x[2n+1] \qquad 0\leqslant n\leqslant (N/2)-1$$

当 $N=2^{\nu}$ 时，重复使用这种分解方法可以得出按时间抽取 FFT 算法，对于 $N=8$ 的情况绘于图 9.10 中。正如我们所看到的，这类算法需要与旋转因子 W_N^k 作复数乘法。Rader 和 Brenner(1976)曾推导出一种新算法，它的乘法器系数均为纯虚数，这样只需要 2 次实数乘法，而不需要实数加法。在这一算法中，(P9.37-1)式由如下方程式来代替：

$$X[0]=G[0]+F[0] \tag{P9.37-2a}$$

$$X[N/2]=G[0]-F[0] \tag{P9.37-2b}$$

$$X[k]=G[k]-\frac{1}{2}\mathrm{j}\frac{F[k]}{\sin(2\pi k/N)} \qquad k\neq 0,N/2 \tag{P9.37-2c}$$

在这种情况下，$F[k]$ 是如下序列的 $N/2$ 点 DFT：

$$f[n]=x[2n+1]-x[2n-1]+Q$$

其中

$$Q=\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x[2n+1]$$

是一个只需要计算一次的量。

(a) 证明 $F[0]=H[0]$，因此 (P9.37-2a) 式和(P9.37-2b) 式给出相同的结果，如当 $k=0$ 和 $N/2$ 时 (P9.37-1) 式那样。

(b) 证明，对于 $k=1,2,\cdots,(N/2)-1$，有

$$F[k]=H[k]W_N^k(W_N^{-k}-W_N^k)$$

利用这一结果得出式(P9.37-2c)。为什么我们必须用不同的方程来计算 $X[0]$ 和 $X[N/2]$？

(c) 当 $N=2^{\nu}$ 时，我们可以重复使用(P9.37-2) 式得出一种完整的按时间抽取的 FFT 算法。求出作为 N 的函数计算实乘法次数和实加法次数的公式。在按照(P9.37-2c) 式计数运算次数时应利用其对称性和周期性，但不要排除“微不足道的”与 $\pm\mathrm{j}/2$ 的乘法。

(d) Rader 和 Brenner(1976)表明，根据(P9.37-2) 式的 FFT 算法具有“较差的噪声特性”。请解释为什么这可能是对的。

9.38 Duhamel 和 Hollman(1984)以及 Duhamel(1986)曾提出一种称为**分裂基**(split-radix)FFT 或 SRFFT 的修正 FFT 算法。分裂基算法的流图与基 2 算法的流图相似，但是它需要的实数乘法要少一些。在本习题中我们来说明计算一个长为 N 的序列 $x[n]$ 的 DFT $X[k]$ 之 SRFFT 算法的原理。

(a) 证明 $X[k]$的偶序号项可表示成对于 $k=0,1,\cdots,(N/2)-1$ 的 $N/2$ 点 DFT

$$X[2k]=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}(x[n]+x[n+N/2])W_N^{2kn}$$

(b) 证明 DFT $X[k]$的奇序号项可表示成 $N/4$ 点 DFT

$$X[4k+1]=\sum_{n=0}^{(N/4)-1}\{(x[n]-x[n+N/2])-$$
$$\mathrm{j}(x[n+N/4]-x[n+3N/4])\}W_N^nW_N^{4kn}\qquad k=0,1,\cdots,(N/4)-1$$

和

$$X[4k+3]=\sum_{n=0}^{(N/4)-1}\{(x[n]-x[n+N/2])+$$
$$\mathrm{j}(x[n+N/4]-x[n+3N/4])\}W_N^{3n}W_N^{4kn}\qquad k=0,1,\cdots,(N/4)-1$$

(c) 图 P9.38 中的流图表示对一个 16 点变换的这种 DFT 分解重新画出这一流图，用恰当的乘法器系数标出每一个支路。

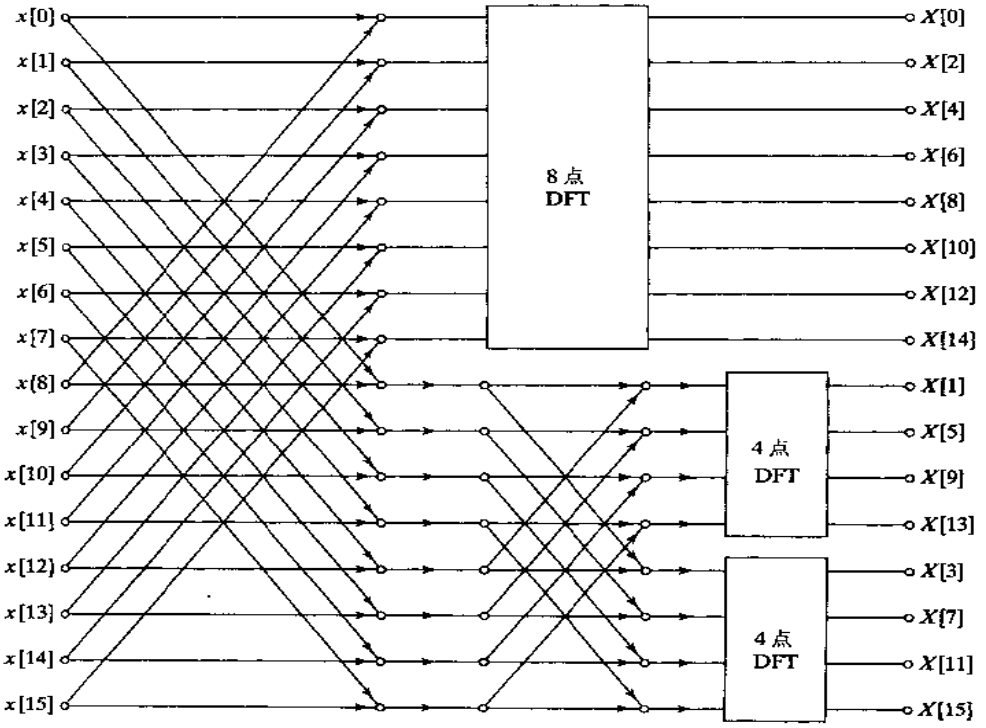


图 P9.38

(d) 当用 SRFFT 方法计算图 P9.38 中其它的 DFT 时，求实现 16 点变换所需要的实数乘法次数。将这个次数与实现一个 16 点基 2 按频率抽取算法所需要的实数乘法次数作一比较。在这两种情况下均假设与 W_N^0 的乘法可省去。

9.39 在计算 DFT 中，有必要使一个复数与另一个复值为 1 的复数相乘，即$(X+\mathrm{j}Y)e^{j\theta}$。显然，这样一种复数乘法只改变该复数的幅角，而不改变其幅值。正是这个原因，有时把乘以复数 $e^{j\theta}$的乘法称为旋转。在 DFT 或 FFT 算法中可能需要许多不同的幅角 θ 值。但是我们可能并不希望将 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 所需要

的值都贮存作一个数表，而用幂级数计算这些函数都需要许多次乘法和加法。若使用 Volder(1959)给出的 CORDIC 算法，则可用将加法，二进制移位和由一个小表来查表相结合的方法来高效地计算乘积 $(X+\mathrm{j}Y)\cdot e^{\mathrm{j}\theta}$。

(a) 定义 $\theta_i=\arctan(2^{-i})$。证明任何幅角 $0<\theta<\pi/2$ 可表示成

$$\theta=\sum_{i=0}^{M-1}\alpha_i\theta_i+\epsilon=\hat{\theta}+\epsilon$$

其中 $\alpha_i=\pm 1$，且误差 ϵ 的界限为

$$|\epsilon|\leqslant\arctan(2^{-M})$$

(b) 可以事先将幅角 θ 算出并储存在一个长度为 M 的小数表中。找出一种算法用以得到序列 $\{\alpha_i\}(i=0,1,\cdots,M-1)$，使得 $\alpha_i=\pm 1$。当 $M=11$ 时，用你的算法计算表示幅角 $\theta=100\pi/512$ 的序列 $\{\alpha_i\}$。

(c) 利用(a)的结果证明，递推

$$\begin{aligned}X_0&=X\\Y_0&=Y\\X_i&=X_{i-1}-\alpha_{i-1}Y_{i-1}2^{-i+1},\quad i=1,2,\cdots,M\\Y_i&=Y_{i-1}+\alpha_{i-1}X_{i-1}2^{-i+1},\quad i=1,2,\cdots,M\end{aligned}$$

将产生复数

$$(X_M+\mathrm{j}Y_M)=(X+\mathrm{j}Y)G_Me^{\mathrm{j}\hat{\theta}}$$

其中 $\hat{\theta}=\sum_{i=0}^{M-1}\alpha_i\theta_i$，$G_M$ 是实正数且与 θ 无关。这就是说，原始的复数以幅角自在复平面中旋转，且幅值由常数 G_M 确定。

(d) 求作为 M 函数的放大常数 G_M。

9.40 在 9.4 节中，我们推导了对于基 2($N=2^\nu$)的按频率抽取 FFT 算法。对于 $N=m^\nu$(m 为整数)的一般情况，也可以推导出相类似的算法。这种算法称为基-mFFT 算法。本题中，我们将对 $N=9$ 即当 $n<0$ 且 $n>8$ 时输入序列 $x[n]=0$ 的情况，考查按频率抽取基-3FFT 算法。

(a) 给出计算当 $k=0,1,2$ 时 DFT 样本 $X[3k]$的表达式。定义 $X_1[k]=X(e^{\mathrm{j}\omega_k})_{\omega_k=2\pi k/3}$，如何利用 $x[n]$ 来定义一个时间序列 $x_1[n]$使得 $x_1[n]$的 3 点 DFT $X_1[k]=X[3k]$?

(b) 利用 $x[n]$定义一个序列 $x_2[n]$使得当 $k=0,1,2$ 时 $x_2[n]$的 3 点 DFT $X_2[k]=X[3k+1]$。同样，定义 $x_3[n]$使得当 $k=0,1,2$ 时，它的 3 点 DFT $X_3[k]=X[3k+2]$。注意现在我们已经定义了 9 点 DFT 就是由一定结构的 3 点序列形成的三个 3 点 DFT。

(c) 画出当 $N=3$ 时的 DFT，即基 3 蝶形的信号流图。

(d) 利用(a)和(b)的结果，画出构成序列 $x_1[n]$，$x_2[n]$和 $x_3[n]$的系统的信号流图。然后利用这些序列的 3 点 DFT 方框产生当($k=0,\cdots,8$)时的 $X[k]$。注意，为了清楚起见，不需要画出 $N=3$ 时的 DFT 的信号流图，只需简单的在方框中标明“$N=3$ 的 DFT”。这些方框内部就是在(c)中所画出的系统。

(e) 适当的将(d)中所画系统中 W_9 的幂次因子化能够使得这些系统可化作 $N=3$ 的 DFT 以及与之级联的与基-2 算法类似的“旋转”因子。重画(d)中的系统，使得它完全包含带有“旋转”因子的 $N=3$ 的 DFT。这就是当 $N=9$ 时的按频率抽取基-3FFT 的完整表达式。

(f) 采用计算 DFT 的直接算法来计算 9 点 DFT 需要多少次复数乘法？将它与(e)中所画系统需要的复数乘法的次数相比较。通常，计算一个长度为 $N=3^\nu$ 的序列的基-3FFT 需要多少次复数乘法？

9.41 Bluestein(1970)曾证明，若 $N=M^2$，则线性调频变换算法具有递推实现方法。

(a) 证明 DFT 可表示成如下卷积：

$$X[k] = h^*[k]\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]h^*[n])h[k-n],$$

其中“*”号表示复共轭，且

$$h[n] = e^{j(\pi/N)n^2}, \qquad -\infty < n < \infty$$

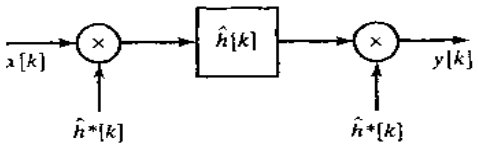


图 P9.41

(b) 证明所要求的 $X[k]$ 值(即对于 $k=0,1,\cdots,N-1$ 的值)也可以通过计算(a)的卷积(取 $k=N, N+1,\cdots,2N-1$)而得出。

(c) 利用(b)的结果证明，当 $k=N,N+1,\cdots,2N-1$ 时 $X[k]$ 也等于图 P9.41 所示系统的输出，其中 $\hat{h}[k]$ 是有限长序列

$$\hat{h}[k] = \begin{cases} e^{j(\pi/N)k^2}, & 0 \leqslant k \leqslant 2N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(d) 已知 $N=M^2$，证明对应于脉冲响应 $\hat{h}[k]$ 的系统函数是

$$\hat{H}(z) = \sum_{k=0}^{2N-1} e^{j(\pi/N)k^2} z^{-k}$$

$$= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j(\pi/N)r^2} z^{-r} \frac{1-z^{-2M^2}}{1+e^{j(2\pi/M)r}z^{-M}}$$

[提示：将 k 表示成 $k=r+lM$。]

(e) 在(d)中得出的 $\hat{H}[z]$ 表示式给出了 FIR 系统的一种递推实现方法。请画出这一实现方法的流图。

(f) 利用(e)的结果，求计算全部 N 个要求的 $X[k]$ 值所需要的复数乘法和加法的总次数。将这个次数与直接计算 $X[k]$ 所需要的次数作一比较。

9.42 在计算离散傅里叶变换 Goertzel 算法中，将 $X[k]$ 当作 $y_k[n]$ 来计算，即

$$X[k] = y_k[n]$$

式中 $y_k[n]$ 是图 P9.42 所示网络的输出。考虑用舍入的定点运算来实现 Goertzel 算法。假设寄存器长度为 B 位再加上一个符号位，并且假设在加法之前将乘积舍入。还假定舍入噪声源是相互独立的。

(a) 若 $x[n]$ 为实数，画出有限精度计算 $X[k]$ 实部和虚部的线性噪声模型的流图。假设与 ± 1 相乘不产生舍入噪声。

(b) 计算 $X[k]$ 实部和虚部二者舍入噪声的方差。

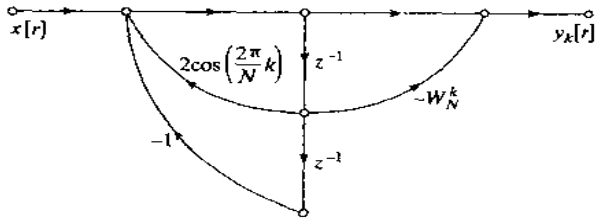


图 P9.42

9.43 考虑用舍入定点运算的 DFT 直接计算法。假设寄存器长度为 B 位再加上一个符号位(即总长为 $B+1$ 位)，并假设由任何实数乘法引入的舍入噪声和由任何其它的实数乘法所引入的舍入噪声不相关。若 $x[n]$ 为实数，求每个 DFT 值 $X[k]$ 的实部和虚部二者中舍入噪声的方差。

9.44 当执行按时间抽取 FFT 算法时基本的蝶形计算是

$$X_m[p] = X_{m-1}[p] + W_N^q X_{m-1}[q]$$

$$X_m[q] = X_{m-1}[p] - W_N^r X_{m-1}[q]$$

在用定点运算来实现计算时，通常假定改变所有数的比例使其小于 1。因此，为了避免溢出，必须保证由蝶形计算所得出的实数不大于 1。

(a) 证明，如果我们要求

$$|X_{m-1}[p]| < \frac{1}{2} \text{ 和 } |X_{m-1}[q]| < \frac{1}{2}$$

则溢出就不会在蝶形计算中出现，即

$$|\mathrm{Re}\{X_m[p]\}| < 1, \quad |\mathrm{Im}\{X_m[p]\}| < 1$$

和

$$|\mathrm{Re}\{X_m[q]\}| < 1, \quad |\mathrm{Im}\{X_m[q]\}| < 1$$

(b) 在实际中，比较容易且最方便的方法是要求

$$|\mathrm{Re}\{X_{m-1}[p]\}| < \frac{1}{2}, \quad |\mathrm{Im}\{X_{m-1}[p]\}| < \frac{1}{2}$$

和

$$|\mathrm{Re}\{X_{m-1}[q]\}| < \frac{1}{2}, \quad |\mathrm{Im}\{X_{m-1}[q]\}| < \frac{1}{2}$$

为了保证在按时间抽取蝶形计算中不出现溢出，这些条件充分吗？请说明原因。

9.45 在推导定点基 2 按时间抽取 FFT 算法的噪声-信号比计算公式时，假设每个输出节点都与 $(N-1)$ 个蝶形计算相连接，每个蝶形计算对输出噪声方差的贡献是 $\sigma_B^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^{-2B}$。但是当 $W_N^r = \pm 1$ 或 $\pm j$ 时，所做的乘法事实上没有误差。因此，若考虑到这种情况，而对 9.7 节导出的结果加以修正，就可以得到一种减少不利因素的量化噪声影响的估计。

(a) 对于 9.7 节中讨论的按时间抽取算法，对于每一级求出涉及到与 ± 1 或 $\pm j$ 相乘的蝶形个数。

(b) 对于 k 的奇数值，利用(a)中的结果求(9.55)式中的输出噪声方差和(9.65)式中信噪比的修正估计。讨论一下这些估计与 k 为偶数时的估计有何不同。不需要求出 k 为偶数时这些量的完整公式。

(c) 对于每一级的输出都衰减一半的情况重复(a)和(b)，即推导对应于输出噪声方差(9.68)式和输出噪声-信号比(9.69)式的修正表达式，假设与 ± 1 与 $\pm j$ 相乘不产生误差。

9.46 在 9.7 节中我们研究了图 9.10 按时间抽取 FFT 算法的噪声分析。对于图 9.20 的按频率抽取算法试进行类似的分析，当在计算的输入端设置比例因子且在每一级也设置 1/2 的比例因子时，得出输出噪声方差和噪声-信号比的计算式。

9.47 在这个习题中我们研究只用一次 N 点 DFT 算法来计算 4 个实对称或反对称 N 点序列之 DFT 的一种方法。因为我们只考虑有限长序列，所以正如在 8.6.4 节中定义的那样，可以用对称和反对称清楚地表明周期对称和周期反对称。令 $x_1[n], x_2[n], x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 分别表示 4 个长度为 N 的实序列，并且令 $X_1[k], X_2[k], X_3[k]$ 和 $X_4[k]$ 表示所对应的 DFT，我们首先假定 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是对称的，而 $x_3[n]$ 和 $x_4[n]$ 是反对称的，即，对于 $n = 1, 2, \cdots, N-1$，

$$x_1[n] = x_1[N-n] \quad x_2[n] = x_2[N-n]$$
$$x_3[n] = -x_3[N-n] \quad x_4[n] = -x_4[N-n]$$

和 $x_3[0] = x_4[0] = 0$。

(a) 定义 $y_1[n] = x_1[n] + x_3[n]$，并且令 $Y_1[k]$ 表示 $y_1[n]$ 的 DFT。求如何能由 $Y_1[k]$ 来恢复 $X_1[k]$ 和 $X_2[k]$？

(b) 若(a)中定义的 $y_1[n]$ 是一个实序列，并有对称部分 $x_1[n]$ 和反对称部分 $x_3[n]$。同样，我们定义实序列 $y_2[n] = x_2[n] + x_4[n]$，并且令 $y_3[n]$ 是复序列

$$y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n]$$

首先求如何由 $Y_3[k]$来计算 $Y_1[k]$和 $Y_2[k]$，然后利用(a)的结果证明，如何由 $Y_3[k]$得到 $X_1[k], X_2[k], X_3[k]$和 $X_4[k]$。

(b)的结果表明，我们只用一次 N 点 DFT 计算就可以同时算出 4 个实序列的 DFT，其中两个序列是对称的，而另外两个是反对称的。现在来研究所有 4 个序列均为对称的情况，即对于 $n = 0, 1, \cdots, N-1$

$$x_i[n] = x_i[N-n] \qquad i = 1,2,3,4$$

(c) 考虑一个实对称序列 $x_3[n]$。证明序列

$$u_3[n] = x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N]$$

是一个反对称序列，即当 $n = 1,2,\cdots,N-1$ 时 $u_3[n] = -u_3[N-n]$。

(d) 令 $U_3[k]$表示 $u_3[n]$的 N 点 DFT。求利用 $X_3[k]$表示 $U_3[k]$的表示式。

(e) 利用(c)的方法，我们构成实序列 $y_1[n] = x_1[n] + u_3[n]$，其中 $x_1[n]$是 $y_1[n]$的对称部分，而 $u_3[n]$ 是 $y_1[n]$的反对称部分。求如何由 $Y_1[k]$来恢复 $X_1[k]$和$X_3[k]$?

(f) 现在令 $y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n]$，其中对于 $n = 0,1,\cdots,N-1$，

$$y_1[n] = x_1[n] + u_3[n], \quad y_2[n] = x_2[n] + u_4[n]$$

以及

$$u_3[n] = x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N]$$
$$u_4[n] = x_4[((n+1))_N] - x_4[((n-1))_N]$$

求如何由 $Y_3[k]$得出 $X_1[k], X_2[k], X_3[k]$和 $X_4[k]$。(注意，$X_3[0]$和 $X_4[0]$不能由 $Y_3[k]$来恢复，并且当 N 为偶数时，$X_3[N/2]$和 $X_4[N/2]$也不能由 $Y_3[k]$来恢复)

9.48 某一线性时不变系统的输入和输出满足如下差分方程：

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

假设可用一 FFT 程序来计算长度 $N = 2^\nu$ 的任何有限长序列的 DFT。试提出一种方法，它可以用提供的 FFT 程序来计算

$$H(e^{j(2\pi/512)k}) \qquad k = 0,1,\cdots,511$$

其中 $H(z)$是该系统的系统函数。

9.49 假设我们要在一个 16 位计算机上计算两个十分长的数(可能有几千位长)的乘积。在本习题中就来研究用 FFT 完成此事的一种方法。

(a) 令 $p(x)$和 $q(x)$分别为两个多项式

$$p(x) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x^i$$

证明多项式 $r(x) = p(x)q(x)$的系数可用循环卷积计算。

(b) 说明如何用基 2FFT 程序计算 $r(x)$的系统。假定 $L + M = 2^\nu$(ν 为某些整数)。($L + M$)的值为多少幂次时可使这种方法比直接计算法更有效?

(c) 现在假设要计算两个十分长的正整数 u 和 v 的乘积。证明它们的乘积可用多项式乘法来计算，并且给出一种用 FFT 算法来计算该乘积的一种算法。如果 u 是一个8 000位的数，且 v 是一个1 000位的数，用这种方法计算乘积 $u \cdot v$ 需要大约多少次实数乘法和加法。

(d) 定性讨论在实现(c)的算法中有限精度运算的影响。

9.50 一个长度为 N 的序列 $x[n]$的离散 Hartley 变换(DHT)定义为

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] H_N[nk] \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

式中

$$H_N[a] = C_N[a] + S_N[a]$$

且

$$C_N[a] = \cos(2\pi a/N) \qquad S_N[a] = \sin(2\pi a/N)$$

习题 8.65 仔细研究了 DHT 的性质，特别是它的循环卷积特性。

(a) 证明 $H_N[a] = H_N[a+N]$，并证明 $H_N[a]$ 具有如下有用的性质：

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= H_N[a]C_N[b] + H_N[-a]S_N[b] \\ &= H_N[b]C_N[a] + H_N[-b]S_N[a] \end{aligned}$$

(b) 利用(a)中所推导的等式，将 $x[n]$ 分为偶序号点和奇序号点，给出基于按时间抽取原则的快速 DHT 算法。

9.51 本题中，我们将 FFT 写为用矩阵运算的序列。考虑如图 P9.51 所示的按时间抽取 8 点 FFT 算法。令 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别表示输入、输出向量。假设输入为倒位序而输出为正常顺序(与图 9.10 相比)。令 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 表示流图中的中间向量。

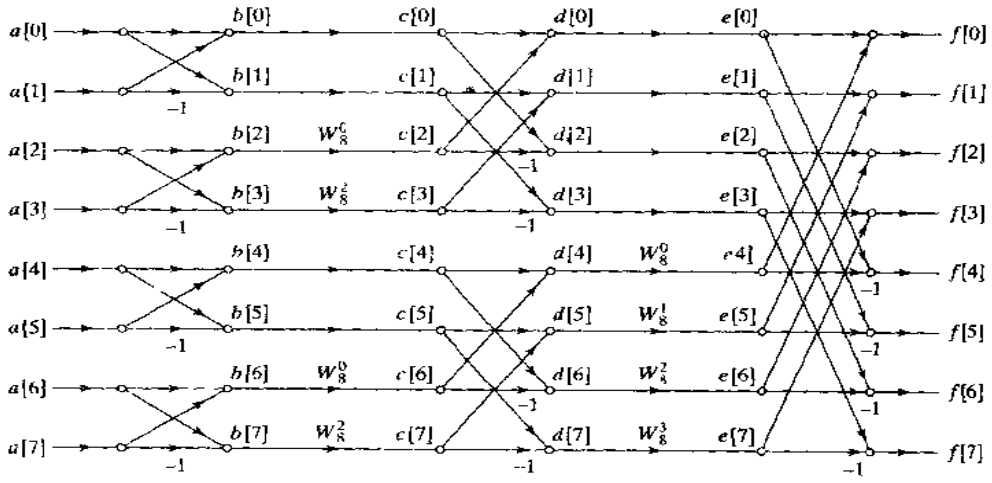


图 P9.51

(a) 求矩阵 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{T}_2$ 及 $\boldsymbol{F}_3$ 及使得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{f} &= \boldsymbol{F}_3\boldsymbol{e} \end{aligned}$$

(b) 将整个 FFT，看作是输入为 $\boldsymbol{a}$ 且输出为 $\boldsymbol{f}$，用一个矩阵表示的形式 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}$，其中

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}_3\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{F}_1$$

令 $\boldsymbol{Q}^H$ 表示矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的复(Hermitian)转置。画出用 $\boldsymbol{Q}^H$ 运算的序列信号流图。这一结构计算出的结果是什么？

(c) 求 $(1/N)\boldsymbol{Q}^H\boldsymbol{Q}$。

9.52 在许多应用中，需要将样本均为整数的长序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 进行卷积。由于序列具有整数系数，卷积的结果 $y[n] = x[n] * h[n]$ 自然也有整数系数。

用 FFT 计算整数序列的卷积的一个主要问题是浮点运算集成芯片要比整数运算芯片贵的多。而

且，浮点运算所引入的舍入噪声可能会使结果不可靠。本题中，我们考虑一类称为**数字理论变换**(NTT)的FFT算法，这种算法可以克服上述问题。

(a) 设 $x[n]$，$h[n]$均为 N 点序列，且 $X[k]$和 $H[k]$分别表示它们的DFT。推导DFT的循环卷积特性。具体地讲，证明 $Y[k]=X[k]H[k]$，其中 $y[n]$是 $x[n]$和 $h[n]$的 N 点循环卷积。证明只要DFT中的 W_N 满足下式，循环卷积性质就成立：

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \qquad \text{(P9.52-1)}$$

定义NTT的关键是求出一个满足(P9.52-1)式的整数值 W_N。这就导致DFT所要求的基向量具有正交性。不幸的是，对于标准整数运算并不存在具有这一性质的整数值 W_N。

为了克服这一难点，NTT采用以某些整数 P 为模定义的整数运算。对当前的整个问题，假设 $P=17$。也就是说，将加法和乘法定义为以 $P=17$ 为模衰减的标准整数的加法和乘法。例如，$((23+18))_{17}=7$，$((10+7))_{17}=0$，$((23\times 18))_{17}=6$，以及$((10\times 7))_{17}=2$。(即先按正常的方法计算和或积，再取以17为模所得的余数)

(b) 令 $P=17$，$N=4$ 和 $W_N=4$。证明

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk}\right)\right)_P = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

(c) 令序列 $x[n]$和 $h[n]$分别为：

$$x[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]$$
$$h[n]=3\delta[n]+\delta[n-1]$$

按下式计算 $x[n]$的4点NTT $X[k]$

$$X[k]=\left(\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk}\right)\right)_P$$

以同样的方式计算 $H[k]$。再计算 $Y[k]=X[k]H[k]$。假设 P，N，和 W_N 值由(a)中给出。**应记住对于整个计算每一步运算都要对17求模，并不只是对最后的结果。**

(d) $Y[k]$的NTT反变换定义为：

$$y[n]=\left(\left((N)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]W_N^{-nk}\right)\right)_P \qquad \text{(P9.52-2)}$$

为了正确的计算出这个量，必须求出整数$(1/N)^{-1}$及 W_N^{-1} 使得

$$(((N)^{-1}N))_P = 1$$
$$((W_N W_N^{-1}))_P = 1$$

利用(a)中给出的 P，N 和 W_N 的值，求出前面所说的整数。

(e) 利用(d)中所求出的$(N)^{-1}$和 W_N^{-1} 的值来计算(P9.52-2)式所示的NTT反变换。利用手工计算卷积 $y[n]=x[n]*h[n]$检验你的答案。

9.53 9.3节和9.4节重点讨论了当 N 为2的整数幂时序列的快速傅里叶变换。但是，当长度 N 有不止一个素因子时，也就是对于某些整数 m 不能表示为$N=m^r$ 时，也有可能找到计算DFT的有效算法。本题中将讨论当 $N=6$ 时的情况。所得出的方法也可容易地推广到其它合成数。Burrus和Parks(1985)详细讨论了这类算法。

(a) 分解当 $N=6$ 时FFT的关键是利用**标号图**的概念，这一概念是由Cooley和Tukey(1965)在他们关于FFT的早期论文中提出的。具体的讲，对于 $N=6$ 的情况，我们将标号 n 和 k 表示为

$$n=3n_1+n_2, n_1=0,1; \quad n_2=0,1,2 \qquad \text{(P9.53-1)}$$
$$k=k_1+2k_2, k_1=0,1; \quad k_2=0,1,2 \qquad \text{(P9.53-2)}$$

证明，利用 n_1 和 n_2 的每一个可能值一次性地计算出 $n=0,\cdots,5$ 的每一个值，且计算只有一种形式。并说明对于用 k_1 和 k_2 的每一个值来求 k 时也同样适用。

(b) 将(P9.53－1)式和(P9.53－2)式代入 DFT 的定义式得到一个新的用 n_1, n_2, k_1 和 k_2 表示的 DFT 表达式。所得表达式应当对 n_1 和 n_2 双重求和，而不是对 n 的单重求和。

(c) 仔细检查你所得出的表达式中的 W_6 项。可以将部分项写成用 W_2 和 W_3 表示等效的表达式。

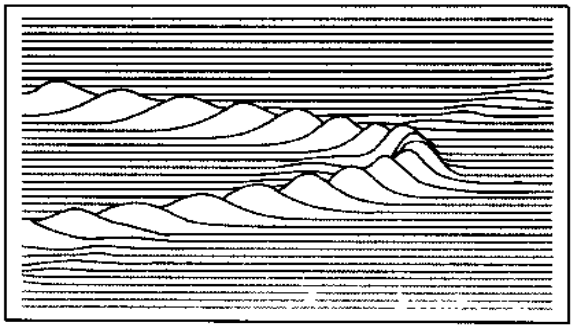
(d) 根据(c)的结果，组织 DFT 中各项使得先对 n_1 求和再对 n_2 求和。你可将所写表达式看成为三个 $N=2$ 的 DFT，级联一些"旋转"因子(W_6 的幂次)再级联两个 $N=3$ 的 DFT。

(e) 画出计算(d)中你所求出的表达式的信号流图。该流图需要多少次复数乘法？与直接计算 $N=6$ 的 DFT 方程式所需的复数乘法次数相比，结果如何？

(f) 求另一种类似于(P9.53－1)式和(P9.53－2)式的标号，使得所得的信号流图为两个 $N=3$ DFT 级联三个 $N=2$ DFT。

第10章

利用离散傅里叶变换的信号傅里叶分析



10.0 引言

在第8章我们推导出离散傅里叶变换(DFT)作为有限长信号的傅里叶表示。因为DFT可以通过第9章中所讨论的高效算法用显式来计算,所以在包括滤波和谱分析在内的信号处理应用的广泛领域中它起着核心作用。本章简要介绍如何用DFT来进行信号的傅里叶分析。

在显式计算傅里叶变换的算法和应用中,人们所希望的离散时间傅里叶变换是理想化的,而真正可以计算的却是DFT。对于有限长信号,DFT可以给出离散时间傅里叶变换的频域样本,但是对这一采样过程的本质还必须能清楚地加以理解和说明。例如在8.7节中所研究的用DFT相乘而不是傅里叶变换来实现线性滤波或卷积时,需要作循环卷积,此时要特别注意应该能保证其结果等于线性卷积。此外,在许多滤波和谱分析的应用中,信号本来并不是有限长的。正如我们所要讨论的,这种DFT要求的有限长度信号和实际的无限长信号之间的不一致性可以通过**加窗、块处理**及**依时傅里叶变换**的方法完全或近似地给予调节。

10.1 用 DFT 的信号傅里叶分析

DFT 的主要应用之一就是分析连续时间信号的频率成分。例如，我们在 10.5.1 节中将要讨论，在语音的分析和处理中语音信号的频率分析对于音腔谐振的辨识与建模特别有用。在 10.5.2 节将要介绍的另一个例子是 Doppler 雷达系统，在这个系统中用发射信号和接收信号之间的频移来表示目标的速度。

把 DFT 用于连续时间信号的基本步骤如图 10.1 所示。当连续时间信号转换为一个序列时，需要加入抗混叠滤波器以便消除混叠的影响，或者将它减小到最低程度。需要用 $w[n]$ 乘以 $x[n]$，即作加窗处理，这是 DFT 要求有限长度的必然结果。在许多有趣的实际场合，$s_c(t)$ 很长，甚至无限长，自然 $x[n]$ 也如此（如像语音和音乐的情况）。因此，在计算 DFT 之前，需将有限长度的窗 $w[n]$ 加到 $x[n]$ 上。图 10.2 说明了图 10.1 中的信号之傅里叶变换。具体讲，图 10.2(a)表示一个连续时间谱，它在高频区有逐渐减小的拖尾，而不是带限的。图中窄的尖锐谱峰还表明存在着一些窄带信号的能量。图 10.2(b)表示抗混叠滤波器的频率响应。正如图 10.2(c)所指出的，得出的连续时间傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$ 几乎不包含有 $S_c(j\Omega)$ 在滤波器截止频率以上部分的有用信息。因为 $H_{aa}(j\Omega)$ 不可能是理想的，所以输入信号在通带和过渡带的傅里叶频率成分也将受到滤波器频率响应的影响。

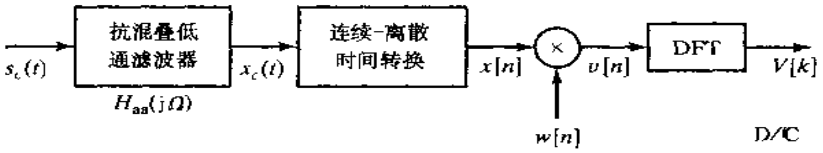


图 10.1 连续时间信号的离散时间傅里叶分析的处理步骤

$X_c(t)$ 向样本序列 $x[n]$ 的转换，可在频率上用周期重复和频率归一化来表示，即

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) \tag{10.1}$$

如图 10.2(d)所示。由于实际实现中抗混叠滤波器不可能在阻带有无限衰减，因此可以预见，(10.1)式中的项会有一些非零重叠，即混叠。但是用一个高质量的连续时间滤波器，或者使用如在 4.8.1 节所讨论过的初始过采样，接着通过十分有效的低通滤波和抽取，均可以将这一误差减小到可以忽略的程度。如果 $x[n]$ 是数字信号，则图 10.1 的 A/D 转换可以合并到第二个系统中去，但仍会引入量化误差。正如我们在 4.8.2 节中已经看到的，这种误差可以作为噪声序列加到 $x[n]$ 上。这种噪声也可以通过精细的量化而忽略不计。

如前所述，因为 DFT 的输入信号必须是有限长的，所以通常是用有限长窗 $w[n]$ 乘以序列 $x[n]$。这就产生了有限长序列 $v[n]=w[n]x[n]$。它在频域上表现为周期卷积，即

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{10.2}$$

图 10.2(e)表示一种典型窗序列的傅里叶变换。注意，我们总是假设主瓣集中在 $\omega=0$ 附近。若在 n 的某一范围内 $w[n]$ 为非零常数，则称其为矩形窗。但是，我们将会看到，有充分的理

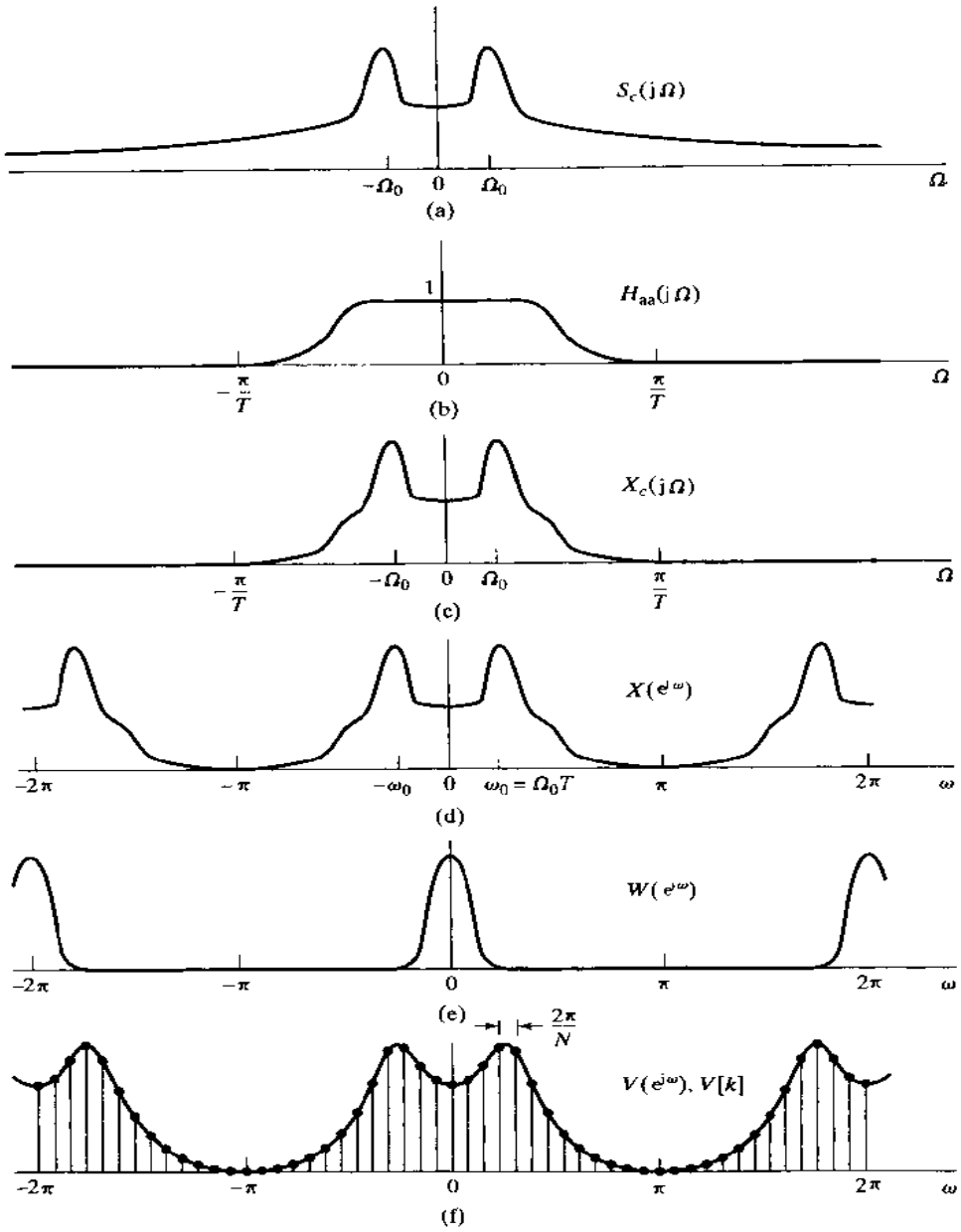


图 10.2　图 10.1 所示系统中傅里叶变换的说明

(a) 连续时间输入信号的傅里叶变换；(b) 抗混叠滤波器的频率响应；

(c) 抗混叠滤波器输出的傅里叶变换；(d) 采样信号的傅里叶变换；

(e) 窗序列的傅里叶变换；(f) 加窗信号段的傅里叶变换和用 DFT 样本得到的频率样本

由使窗函数在其边缘处呈拖尾状。如像 Bartlett 窗、Hamming 窗、Hanning 窗、Blackman 窗及 Kaiser 窗等窗函数的性质已在第 7 章且将在 10.2 节中讨论，从这一点上必然会看到，$W(e^{j\omega})$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的卷积将对 $X(e^{j\omega})$ 中的尖峰和不连续点起平滑作用。在图 10.2(f)中，这种现象用连续的曲线表示出来。

图 10.1 中最后的运算是 DFT。加窗序列 $v[n]=w[n]x[n]$ 后的 DFT 为

$$V[k]=\sum_{n=0}^{N-1}v[n]e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{10.3}$$

式中假定窗的长度 L 小于或等于 DFT 的长度 N。有限长序列 $v[n]$ 的 DFT，$V[k]$，对应于 $v[n]$ 的傅里叶变换的等间隔采样，即

$$V[k]=V(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N} \tag{10.4}$$

图 10.2(f)还说明 $V[k]$ 是 $V(e^{j\omega})$ 的样本。因为 DFT 相邻频率间的间隔为 $2\pi/N$，且归一化离散时间频率变量和连续时间频率变量之间的关系是 $\omega=\Omega T$，所在 DFT 的频率对应于连续时间频率：

$$\Omega_k=\frac{2\pi k}{NT} \tag{10.5}$$

许多商用实时谱分析仪就是基于图 10.1 和图 10.2 中所包含的原理。然而，由上面的讨论可以清楚地看出，利用加窗采样信号段 DFT 来解释输入信号的连续时间傅里叶变换，会受到许多因素的影响。考虑到这些因素，在对输入信号滤波和采样时必须十分小心。此外，要能够正确地解释所得出的结果，必须清楚地理解在 DFT 中固有的时域加窗和频域采样的影响。对于后面的讨论，我们假设抗混叠滤波和连续时间到离散时间的转换工作均已完成，并可不再考虑。在下一节我们特别集中讨论由 DFT 所带来的加窗和频域采样的影响。虽然我们选择正弦信号作为所讨论的典型例子，但是所讨论到的大部分问题均具有普遍性。

例 10.1　利用 DFT 作傅里叶分析

考虑一个带限连续信号 $x_c(t)$，且当 $|\Omega|\geqslant 2\pi(2\,500)$ 时 $X_c(j\Omega)=0$。我们要利用图 10.1 中的系统来估计连续时间谱 $X_c(j\Omega)$。假设抗混叠滤波器 $H_{aa}(j\Omega)$ 是理想的，且 C/D 转换器的采样率为 $1/T=5\,000$ 样本/s。如果想要使 DFT 样本 $V[k]$ 等于 $X_c(j\Omega)$ 的样本，且相邻样本间隔最多为 $2\pi(10)$ rad/s 或 10 Hz，则所用的 DFT 样本数 N 的最小值应为多少？

由(10.5)式，可以看出，DFT 中相邻的样本对应于间隔为 $2\pi/(NT)$ 的连续时间频率。因此，我们要求

$$\frac{2\pi}{NT}\leqslant 20\pi$$

这表明

$$N\geqslant 500$$

则可满足条件。如果我们要用基 2FFT 算法来计算图 10.1 中的 DFT，则我们应当选取 $N=512$，因为对应的连续时间频率间隔 $\Delta\Omega=2\pi(5\,000/512)=2\pi(9.77)$ rad/s。

例 10.2　DFT 值之间的联系

考虑例 10.1 所提出的问题，其中 $1/T=5\,000$，$N=512$ 且 $x_c(t)$ 的值为实数，并充分带限以避免在给定采样频率下避免混叠。如果已给定 $V[11]=2\,000(1+j)$，则 $V[k]$ 或 $X_c(j\Omega)$ 的其它值是多少？

参考表 8.2 给出的 DFT 的对称性，有 $V[k]=V^*[((-k))_N]$，$k=0,1,\cdots,N-1$，且可知 $V[N-k]=V^*[k]$，因此可得

$$V[512-11]=V[501]=V^*[11]=200(1-j)$$

我们还知道，DFT 样本点 $k=11$ 对应于连续时间频率 $\Omega_{11}=2\pi(11)(5\,000)/512=2\pi(107.4)$，同样 $k=501$ 对应于频率 $-2\pi(11)(5\,000)/512=-2\pi(107.4)$。虽然加窗可使频谱平滑，但我们可以认为

$$X_c(j\Omega_{11}) = X_c(j2\pi(107.4)) \approx T \cdot V[11] = 0.4(1+j)$$

注意，如同(10.1)式一样，因子 T 是用于补偿由采样所引入的因子 $1/T$。我们再次利用对称性，可以最后得出

$$X_c(-j\Omega_{11}) = X_c(-j2\pi(107.4)) \approx T \cdot V^*[11] = 0.4(1-j)。$$

10.2 正弦信号的 DFT 分析

正弦信号 $A\cos(\omega_0 n+\phi)$的离散时间傅里叶变换是在 $+\omega_0$ 和 $-\omega_0$ 处的一对冲激函数(以 2π 为周期重复)。当利用 DFT 分析正弦信号时，加窗和频谱采样有着重要的影响。我们在 10.2.1 节中将会看到，加窗使得理论的傅里叶表示中的冲激函数平滑或展宽，因此很难精确确定频率。加窗也降低了对频率上十分靠近的正弦信号的分辨能力。DFT 固有的频谱采样有可能给出正弦信号真实谱的错误导向或不准确的频谱图。这种影响将在 10.2.2 节中讨论。

10.2.1 加窗的影响

让我们来研究一个由两个正弦分量之和组成的连续时间信号，即

$$s_c(t) = A_0\cos(\Omega_0 t+\theta_0) + A_1\cos(\Omega_1 t+\theta_1), \qquad -\infty < t < \infty \tag{10.6}$$

假定采样是理想的，没有混叠和量化误差，这样我们可以得到离散时间信号

$$x[n] = A_0\cos(\omega_0 n+\theta_0) + A_1\cos(\omega_1 n+\theta_1), \qquad -\infty < n < \infty \tag{10.7}$$

式中 $\omega_0=\Omega_0 T$，且 $\omega_1=\Omega_1 T$。在图 10.1 中加窗后的序列 $v[n]$则为

$$v[n] = A_0 w[n]\cos(\omega_0 n+\theta_0) + A_1 w[n]\cos(\omega_1 n+\theta_1) \tag{10.8}$$

为了得到 $v[n]$的傅里叶变换，我们可以利用复指数将(10.8)式展开，并利用 2.9.2 节中(2.163)式中的频率平移性质。具体地讲，可将 $v[n]$写成

$$\begin{aligned} v[n] = {} & \frac{A_0}{2}w[n]e^{j\theta_0}e^{j\omega_0 n} + \frac{A_0}{2}w[n]e^{-j\theta_0}e^{-j\omega_0 n} \\ & + \frac{A_1}{2}w[n]e^{j\theta_1}e^{j\omega_1 n} + \frac{A_1}{2}w[n]e^{-j\theta_1}e^{-j\omega_1 n} \end{aligned} \tag{10.9}$$

由上式及(2.163)式，就可得到加窗序列的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega}) = {} & \frac{A_0}{2}e^{j\theta_0}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{A_0}{2}e^{-j\theta_0}W(e^{j(\omega+\omega_0)}) \\ & + \frac{A_1}{2}e^{j\theta_1}W(e^{j(\omega-\omega_1)}) + \frac{A_1}{2}e^{-j\theta_1}W(e^{j(\omega+\omega_1)}) \end{aligned} \tag{10.10}$$

根据(10.10)式，加窗信号的傅里叶变换包含重复出现在频率 $\pm\omega_0$ 和 $\pm\omega_1$ 处的以及按组成该信号的每个复指数的复振幅换算的窗函数的傅里叶变换。

例 10.3 加窗对正弦信号傅里叶分析的影响

让我们研究图 10.1 的系统，特别是对于采样率 $1/T=10$ kHz、矩形窗 $w[n]$长度为 64 的具体情况下的 $W(e^{j\omega})$和 $V(e^{j\omega})$。信号的幅度和相位参数为 $A_0=1$，$A_1=0.75$ 及 $\theta_0=\theta_1=0$。为了说明基本特性，我们有意只给出傅里叶变换的幅度。

图 10.3(a)画出了 $|W(e^{j\omega})|$，而图 10.3(b)，(c)，(d)和(e)分别画出了对于(10.6)式中的 Ω_0 和 Ω_1，

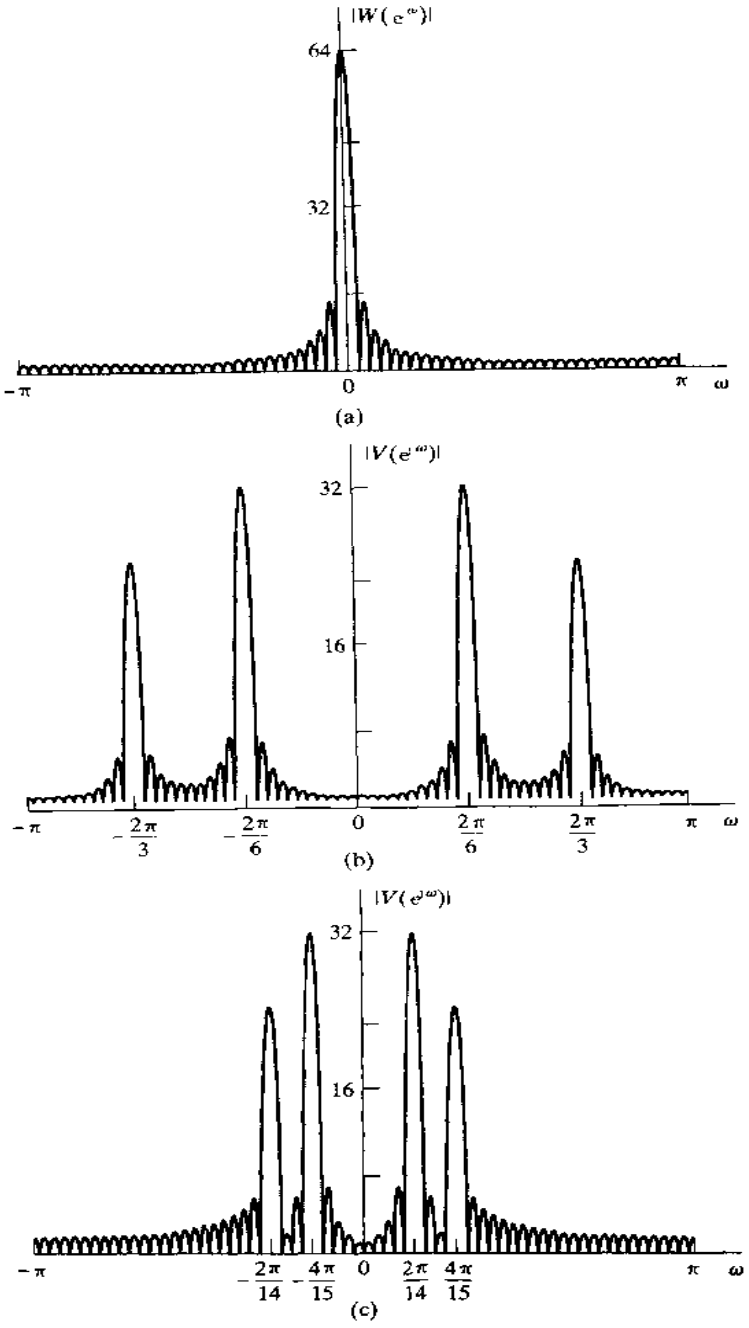


图 10.3　加矩形窗之余弦的傅里叶分析示例

(a) 窗的傅里叶变换；(b)～(e) 当频率间隔逐渐减小时加窗余弦的傅里叶变换；(b) $\Omega_0=(2\pi/6)\times10^4$，$\Omega_1=(2\pi/3)\times10^4$；(c) $\Omega_0=(2\pi/14)\times10^4$，$\Omega_1=(4\pi/15)\times10^4$；

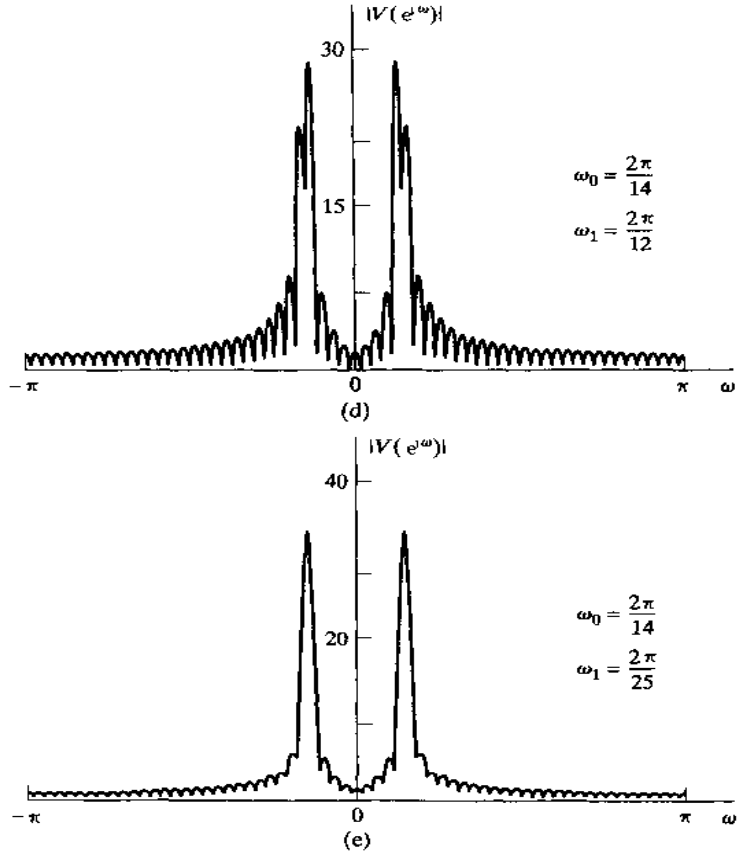


图 10.3(续)　(d) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4$, $\Omega_1 = (2\pi/12) \times 10^4$;
(e) $\Omega_0 = (2\pi/14) \times 10^4$, $\Omega_1 = (4\pi/25) \times 10^4$

或等效的(10.7)式中的 ω_0 和 ω_1 取几个不同值时的 $|V(e^{j\omega})|$ 的图形。在图 10.3(b)中 $\Omega_0 = (2\pi/6) \times 10^4$ 和 $\Omega_1 = (2\pi/3) \times 10^4$，或等效地，$\omega_0 = 2\pi/6$ 和 $\omega_1 = 2\pi/3$。在图 10.3(c)～(e)中这些频率逐渐靠近。对于图 10.3(b)中的参数，每个分量的频率和振幅是比较清楚的。具体地讲，从(10.10)式可以看出，由于 $W(e^{j\omega})$有一个高度为 64 的峰，并且在 ω_0 和 ω_1 处 $W(e^{j\omega})$的副本之间没有重叠，因此在 ω_0 处将会有一个高度为 $32A_0$ 的峰，在 ω_1 处有一高度为 $32A_1$ 的峰。在图 10.3(b)中，两个峰大约在 $\omega_0 - 2\pi/6$ 和 $\omega_1 = 2\pi/3$ 处，其高度之间有正确的比例。图 10.3(c)中在 ω_0 和 ω_1 处窗的副本之间有较多重叠，然而两个可区分的峰仍存在，在 $\omega = \omega_0$ 处谱的幅度受到在频率 ω_1 处正弦信号振幅的影响，反之亦然。这种相互影响称为**泄漏**：由于窗函数引入的谱平滑作用，使得在一个频率处的分量泄漏到相邻的另一个分量中去。图 10.3(d)表示泄漏很大的情况。要注意，加入异相的旁瓣将如何降低峰的高度。图 10.3(e)中在 ω_0 和 ω_1 处谱窗之间的重叠十分明显，使得在图(b)～(d)中可以看到的两个峰合并成一个。换句话说，由于这个窗的影响，使得与图 10.3(e)对应的两个频率在频谱中成为不可**分辨**的。

作为对信号加窗后的结果，分辨率降低和发生泄漏是对频谱的两种主要影响。分辨率主要受 $W(e^{j\omega})$主瓣宽度的影响，而泄漏的程度则取决于 $W(e^{j\omega})$的主瓣和旁瓣的相对幅度。在

第 7 章有关滤波器设计的论述中，我们曾指出，主瓣的宽度和相对旁瓣幅度主要取决于窗的长度 L 和窗的形状(拖尾的大小)。矩形窗的傅里叶变换为

$$W_r(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n} = e^{-j\omega(L-1)/2} \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \tag{10.11}$$

当长度给定时，它的主瓣最窄，但是在所有经常使用的窗函数中它的旁瓣幅度最大。正如在第 7 章中所定义的，Kaiser 窗为

$$w_K[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leqslant n \leqslant L-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{10.12}$$

式中 $\alpha = (L-1)/2$ 且 $I_0(\cdot)$ 为第一类零阶修正 Bessel 函数。(注意，(10.12)式中的记号与(7.59)式中的稍有差别。在(10.12)式中 L 表示窗的长度，而在(7.59)式中设计滤波器窗的长度记作 $M+1$)从滤波器设计问题中我们已经看出，这种窗有两个参数 β 和 L，它们可以用于在主瓣宽度和相对旁瓣幅度之间进行折衷。(应当记得，当 $\beta = 0$ 时 Kaiser 窗就变为矩形窗)主瓣宽度 Δ_{ml} 定义为在中央的两个过零交点之间的对称距离。相对旁瓣高度 A_{sl} 定义为以 dB 计的主瓣幅度与最大旁瓣幅度之比。图 10.4 为图 7.24 的重复，它表示 Kaiser 窗在不同长

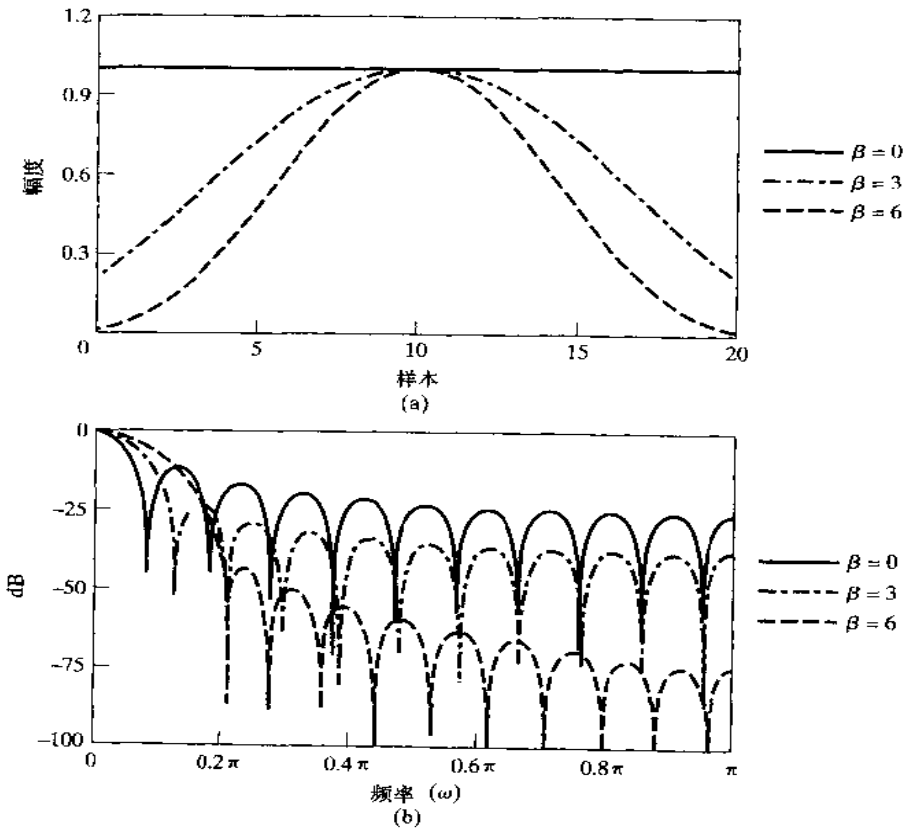
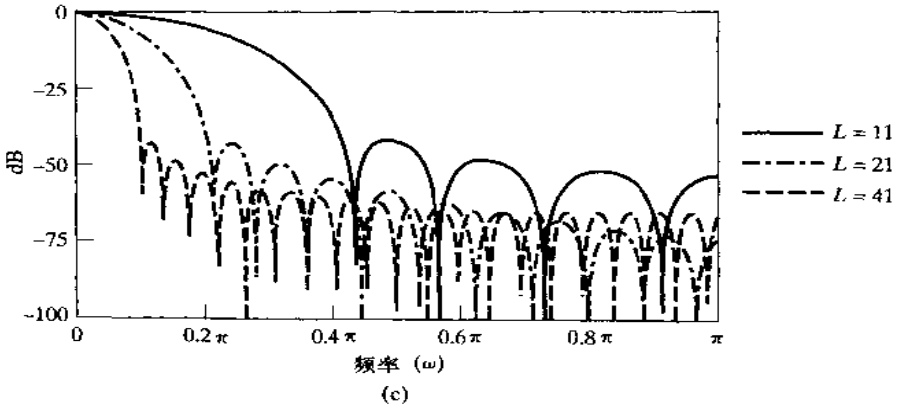


图 10.4 (a) $\beta = 0, 3, 6$ 和 $L = 21$ 的 Kaiser 窗；
(b) 与(a)中的窗对应的傅里叶变换；



(c)

图 10.4(续) (c) 取 $\beta=6$ 及 $L=11,21$ 和 41 的 Kaiser 窗的傅里叶变换

度和不同 β 值时的傅里叶变换。在设计用于谱分析的 Kaiser 窗时，我们总希望能事先给定所要求的 A_{sl}值并确定所要求的 β 值。图 10.4(c)表明相对旁瓣幅度基本上与窗的长度无关，因而只取决于 β，这一点已由 Kaiser 和 Schafer(1980)证实，他们得到作为 A_{sl}函数的 β 之最小二乘近似表示式如下：

$$\beta=\begin{cases}0, & A_{sl}<13.26\\ 0.766\,09(A_{sl}-13.26)^{0.4}+0.098\,34(A_{sl}-13.26), & 13.26<A_{sl}<60\\ 0.124\,38(A_{sl}+6.3), & 60<A_{sl}<120\end{cases}\qquad(10.13)$$

使用由(10.13)式得到的 β 值所给出的窗，其 A_{sl}的实际值在 $13.26<A_{sl}<120$ 范围内与所希望的值之差小于 0.36%。(注意，值 13.26 是矩形窗的相对旁瓣幅度，当 $\beta=0$ 时 Kaiser 窗降为矩形窗)

图 10.4(c)还表明，主瓣宽度与窗的长度成反比。主瓣宽度、相对旁瓣幅度和窗长度之间的折衷关系可以用如下近似关系式表示：

$$L\approx\frac{24\pi(A_{sl}+12)}{155\Delta_{tsl}}+1\qquad(10.14)$$

上式也是由 Kaiser 和 Schafer(1980)给出的。

当确定一个具有所要求的主瓣宽度和相对旁瓣幅度的 Kaiser 窗时，(10.12)式、(10.13)式和(10.14)式是必须用的。对于给定的 A_{sl}和 Δ_{ml}值，设计一个窗仅需要由(10.13)式计算 β，由(10.14)式计算 L，然后用(10.12)式计算窗。本章其余的许多例子均用 Kaiser 窗。Harris(1978)还研究了其它谱分析窗。

10.2.2 谱采样的影响

正如前面所提到的，加窗序列 $v[n]$的 DFT 给出了 $V(e^{j\omega})$在 N 个等间隔的离散时间域频率 $\omega_k=2\pi k/N$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 处的样本。这等效于在连续时间域频率 $\Omega_k=(2\pi k)/(NT)$，$k=0,1,\cdots,N-1$ 处的样本(假设 N 为偶数)。下标 $k=N/2+1,\cdots,N-1$ 对应于负连续时间频率 $-2\pi(N-k)/(NT)$。DFT 引入的谱采样有时可能导致错误的结果。对于这种情况，我们最好通过举例来加以说明。

例 10.4　谱采样影响的示例

首先我们来研究一下与例 10.3 中图 10.3(c)相同参数的情况，即在(10.8)式中 $A_0=1, A_1=0.75$，$\omega_0=2\pi/14, \omega_1=4\pi/15$ 和 $\theta_1=\theta_2=0$，$w[n]$是长度为 64 的矩形窗。这样

$$v[n]=\begin{cases}\cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right)+0.75\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right), & 0\leqslant n\leqslant 63\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{10.15}$$

图 10.5(a)绘出了加窗序列 $v[n]$。图 10.5(b),(c),(d)和(e)分别表示长度为 $N=64$ 的 DFT 的相

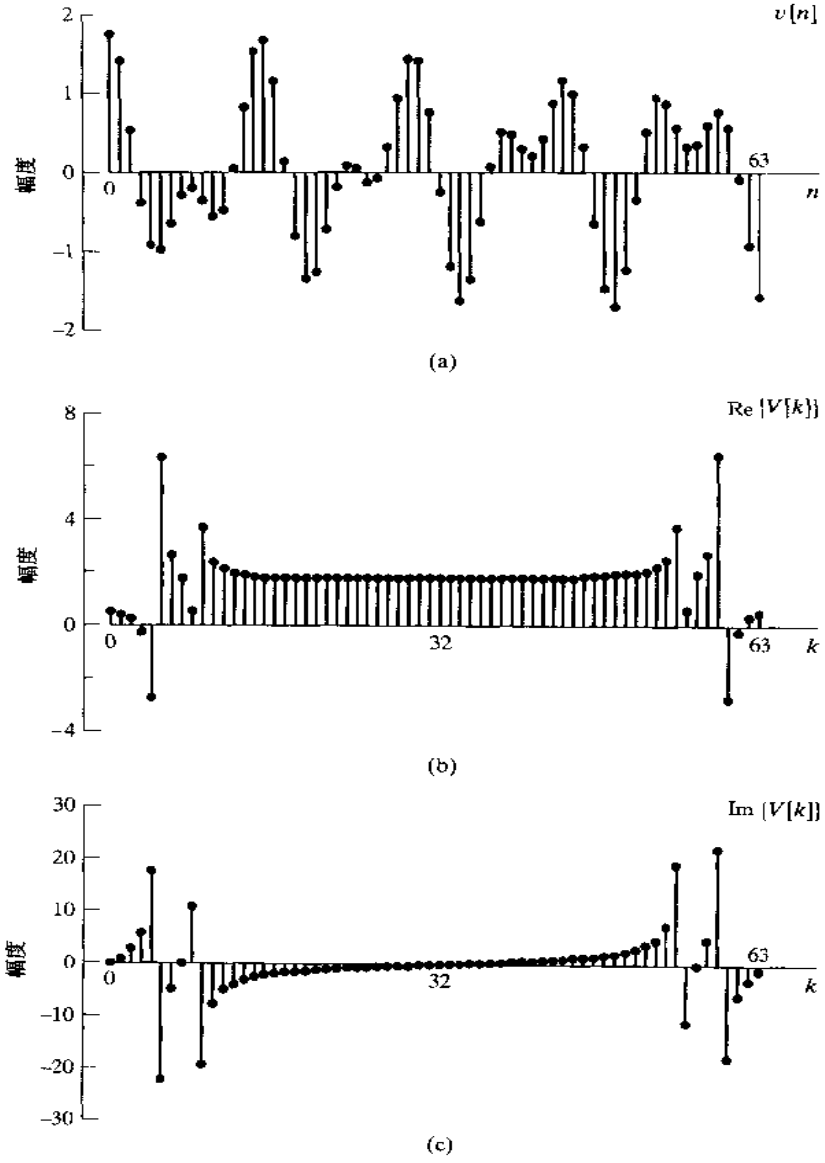


图 10.5　加了矩形窗的余弦序列及其离散傅里叶变换
(a) 加窗的信号；(b) DFT 的实部；(c) DFT 的虚部；

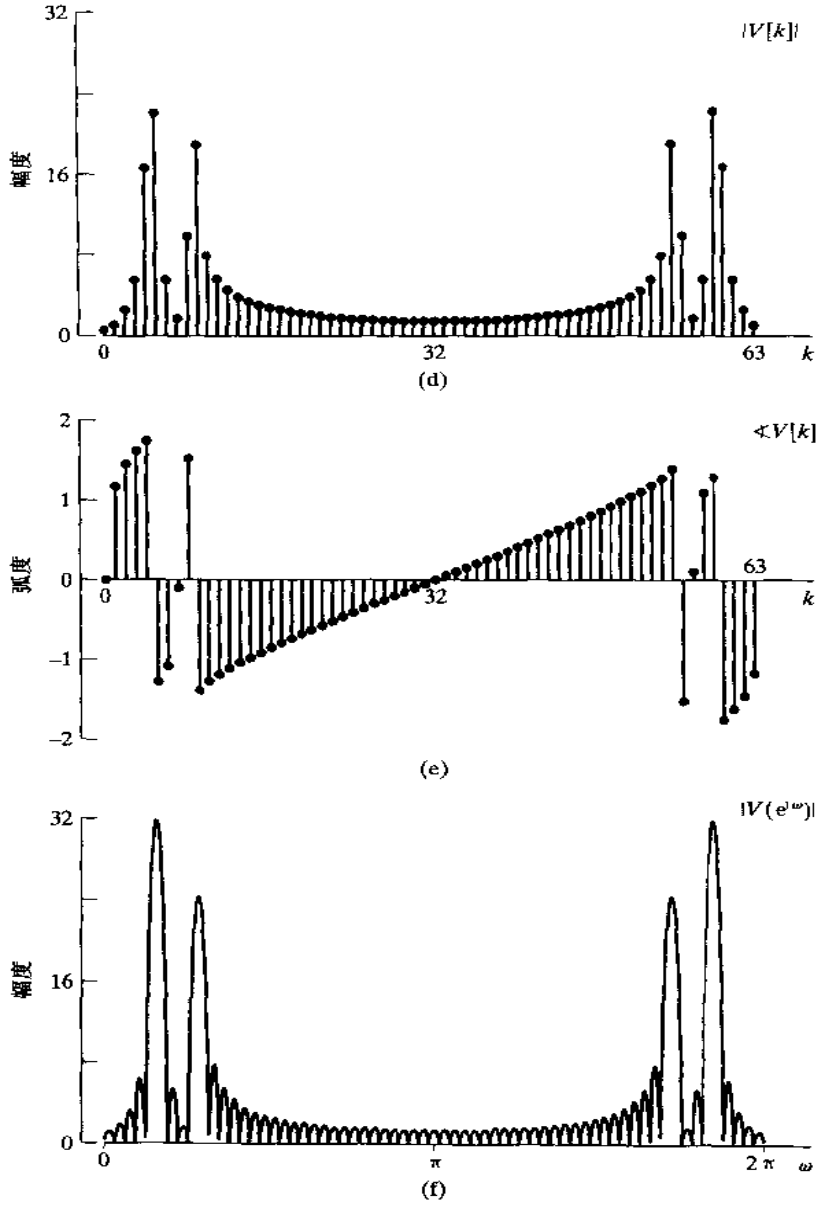


图 10.5(续)　(d) DFT 的幅度；(e) DFT 的相位；(f) 离散时间傅里叶变换的幅度

应实部、虚部、幅度和相位。图 10.5(f)表示 $|V(e^{j\omega})|$，与图 10.3(c)相对应，但是为了与图 10.5(d)的 DFT 比较而画出了从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$ 的图。

在图 10.5(b)～(e)中，水平(频率)轴用 DFT 的标号或频率样本数 k 来标注。值 $k=32$ 对应于 $\omega=\pi$ 或相当于 $\Omega=\pi/T$。正如通常表示一个时间序列之 DFT 的约定那样，给出在 $k=0$ 到 $k=N-1$ 范围内的 DFT 值，相当于给出在 0 到 2π 的频率范围内离散时间傅里叶变换的样本值。由于离散时

间傅里叶变换的固有周期性，这一范围内的前一半对应于正的连续时间频率，即 Ω 从零到 π/T；后一半对应于负的频率，即 Ω 从 $-\pi/T$ 到零；应注意到实部和幅度的偶周期对称性，以及虚部和相位的奇周期对称性。

图 10.5(d)中 DFT 的幅值相当于图 10.5(f)中画出的频谱幅度的样本，正如所料，它集中在输入信号的两个正弦分量的频率 $\omega=2\pi/7.5$ 和 $\omega=2\pi/14$ 的周围。具体讲，频率 $\omega_1=4\pi/15=2\pi(8.533\cdots)/64$ 位于 $k=8$ 到 $k=9$ 所对应的 DFT 样本之间。同样，频率 $\omega_0=2\pi/14=2\pi(4.571\ 4\cdots)/64$ 位于 $k=4$ 到 $k=5$ 所对应的 DFT 样本之间。注意，图 10.5(f)中谱峰的频率位置处于从 DFT 得到的谱样本之间。通常，DFT 值中峰的位置不一定与傅里叶变换中峰的真正频率位置相重合，这是因为真正的谱峰可以位于谱样本之间。因此，通过对图 10.5(f)与图 10.5(d)的比较，显而易见，在 DFT 中峰的相对幅度不一定能确切反映真实谱峰的相对幅度。

例 10.5　用与 DFT 频率一致的频率进行谱采样

研究如图 10.6(a)所示的序列

$$v[n]=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{2\pi}{16}n\right)+0.75\cos\left(\dfrac{2\pi}{8}n\right), & 0\leqslant n\leqslant 63\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{10.16}$$

再次选用 $N=L=64$ 的矩形窗。这与上面的例子非常相似，不同的是在这种情况下余弦函数的频率与两个 DFT 的频率完全重合。具体地讲，频率 $\omega_1=2\pi/8=2\pi 8/64$ 完全对应于 $k=8$ 的 DFT 样

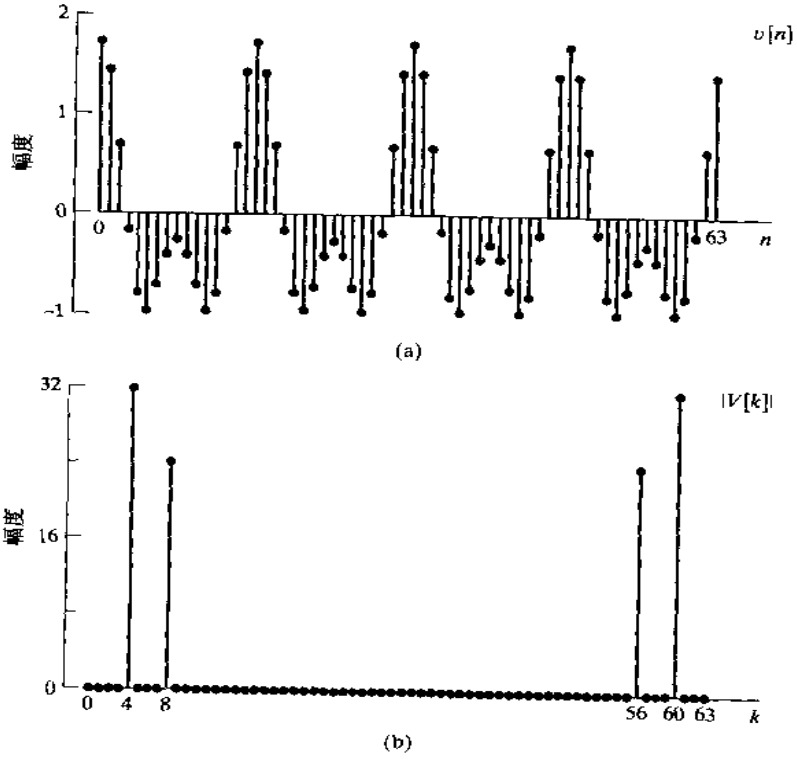


图 10.6　两个正弦之和的离散傅里叶分析，在这种情况下，除了与两个正弦分量对应的频率之外，在其它 DFT 频率处的傅里叶变换皆为零

(a) 加窗的信号；(b) DFT 的幅度；

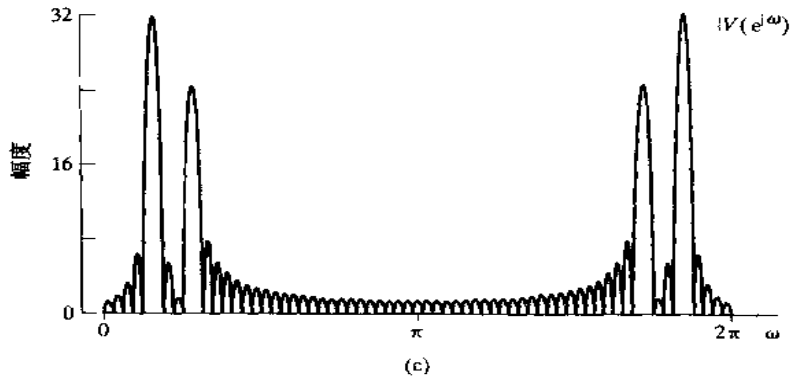


图 10.6(续) (c) 离散时间傅里叶变换的幅度($|V(e^{j\omega})|$)

本,并且频率 $\omega_0 = 2\pi/16 = 2\pi 4/64$ 完全对应于 $k=4$ 的 DFT 样本。

这个例子中 $v[n]$的 64 点 DFT 的幅值如图 10.6(b)所示,它对应于$|V(e^{j\omega})|$(绘于图 10.6(c)中)在间隔为 $2\pi/64$ 的各频率处的样本值。虽然这个例子的信号参数与例 10.4 非常相似,但是 DFT 的形状却完全不同。特别是,在本例中 DFT 在信号的两个正弦分量的频率处有两根很高的谱线,而在其它的 DFT 值处没有频率分量。事实上,图 10.6(b)中 DFT 的这种"干净"的外形主要是由谱的采样而得到的一种假象。比较图 10.6(b)和(c)后我们可以看出,之所以出现图 10.6(b)的这种干净外形,是因为对于这种参数的选择,傅里叶变换在 DFT 的采样频率处,除与 $k=4,8,56$ 和 60 对应的频率外,其它值完全为零。虽然图 10.6(a)的信号几乎在所有的频率处都有明显的值,但由图 10.6(c)显然可见,由于谱的采样,我们在 DFT 中却无法见到这些。了解这一点的另外一种方法是我们注意到由于信号频率均为 $2\pi/64$ 的整数倍,所以信号是周期为 $N=64$ 的周期信号。因此,64 点的矩形窗正好取为一个周期,这正是计算周期信号 DFS 所要求的(实际上我们可由图 10.6(a)看出,$v[n]$也是周期为 8 的周期序列)。这是一个如何用周期性的固有假设对于不同问题给出正确答案的例子。我们对于有限长的情况很感兴趣,但结果却往往误导。

为了进一步说明这一点,让我们用补零的方法将(10.16)式中的 $v[n]$扩展为一个 128 点的序列。所对应的 128 点 DFT 如图 10.7 所示。这种细化的谱采样,使得在另一些频率处存在的幅值就显露出来了。在这种情况下,加窗信号当然就不是周期为 128 的周期信号。

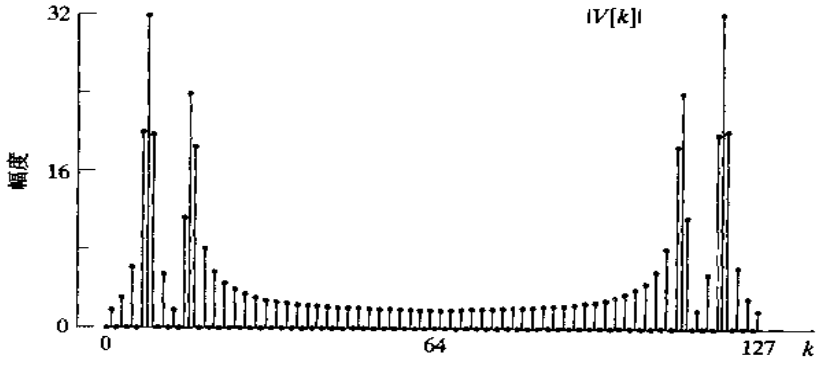


图 10.7 与 10.6(a)中同一信号的 DFT,但是频率样本数比图 10.6(b)增加一倍

图 10.5,10.6 和 10.7 中的窗均为矩形窗。在以下的一组例子中我们将说明选择不同窗所带来的影响。

例 10.6　加 Kaiser 窗时对正弦信号的 DFT 分析

让我们回到例 10.3 给出的频率、振幅和相位参数上,但是使用 Kaiser 窗,因此有

$$v[n] = w_K[n]\cos\left(\frac{2\pi}{14}n\right) + 0.75w_K[n]\cos\left(\frac{4\pi}{15}n\right) \tag{10.17}$$

式中 $w_K[n]$是由(10.12)式给出的 Kaiser 窗。我们选取 Kaiser 窗参数 $\beta=5.48$,此时按照(10.13)式将会得到相对旁瓣幅度 $A_s=-40$dB 的窗。图 10.8(a)表示加了一个长度为 $L-64$ 的窗后的序列 $v[n]$,图 10.8(b)表示所对应的 DFT 的幅值。从(10.15)式可以看出,两个频率之间的差为 $\omega_1-\omega_0=2\pi/7.5-2\pi/14=0.389$。由(10.14)式可以得到 $L=64$ 和 $\beta=5.48$ 的 Kaiser 窗的傅里叶变换的主瓣宽度为 $\Delta_{ml}=0.401$。这样,两个中心位于 ω_0 和 ω_1 的 $W_k(e^{j\omega})$之副本的主瓣在两个频率之间的频率区间上仅有很少的重叠。这一点在图 10.8(b)中已很明显,从图上我们看到两个频率分量可以清楚地加以分辨。

图 10.8(c)表示用 $L=32$ 和 $\beta=5.48$ 的 Kaiser 窗乘以相同的信号。因为窗的长度只有原来的一半,

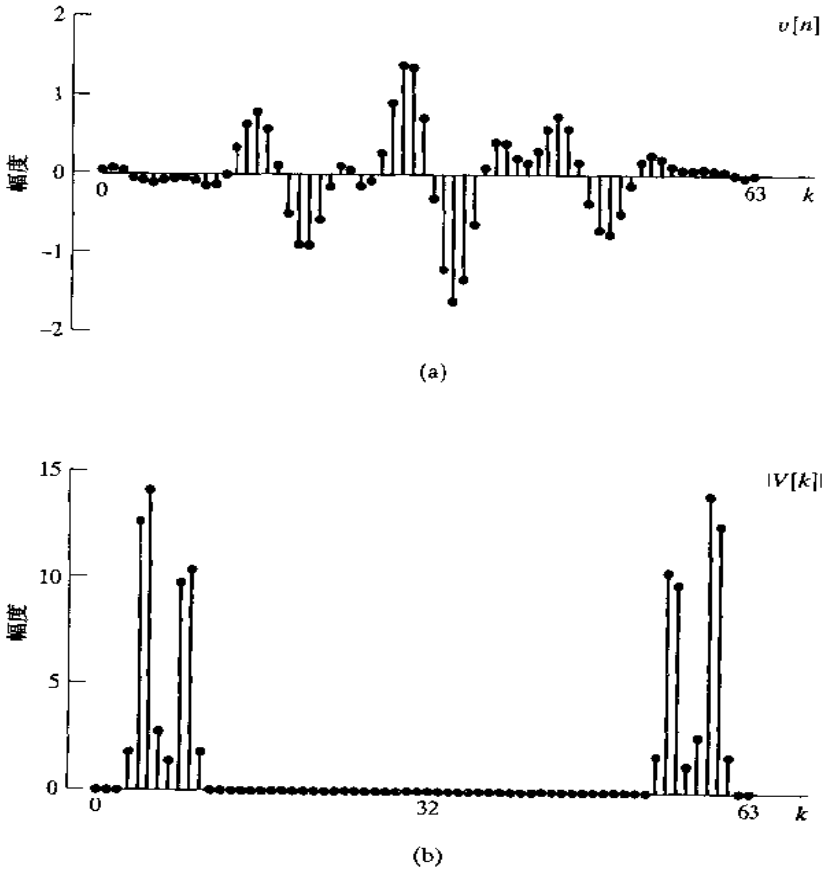


图 10.8　加 Kaiser 窗的离散傅里叶分析
(a) $L=64$ 的加窗序列;(b) $L-64$ 的 DFT 的幅度;

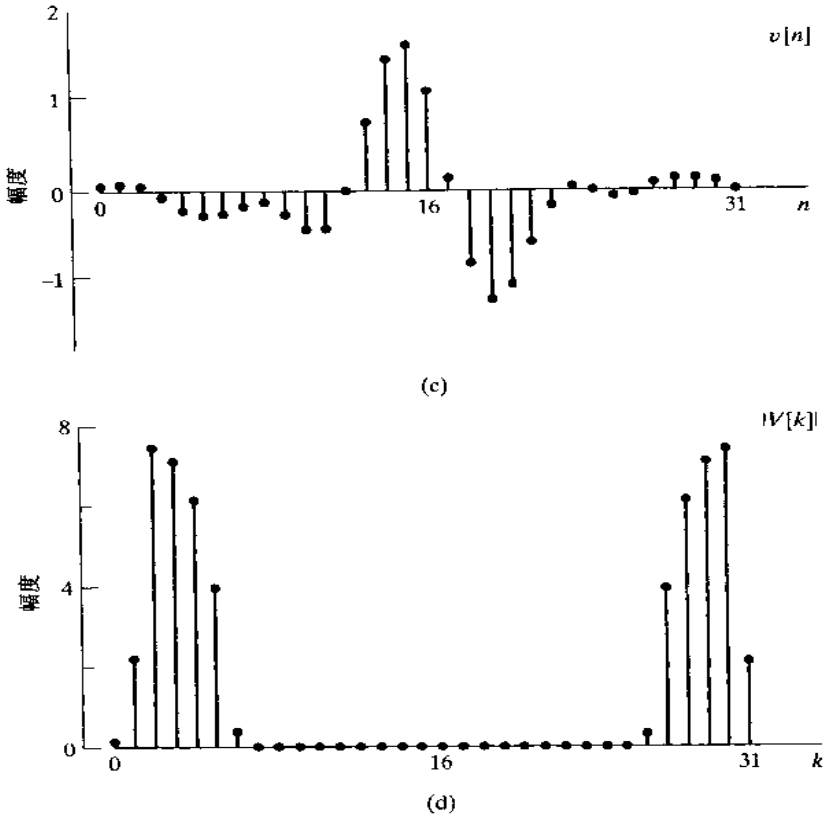


图 10.8(续) (c) $L=32$ 的加窗序列；(d) $L=32$ 的 DFT 的幅度

可以预计该窗的傅里叶变换的主瓣宽度将增加一倍，图 10.8(d)证实了这一点。具体地讲，(10.13)式和(10.14)式证实，对于 $L=32$ 和 $\beta=5.48$，主瓣宽度为 $\Delta_{ml}=0.815$。此时该窗的傅里叶变换的两个副本在两个余弦频率之间的范围内完全重叠，我们看不到两个可以区分开来的峰。

除图 10.7 中给出的示例之外，在前面的所有例子中，DFT 的长度 N 均等于窗的长度 L。图 10.7 中在计算 DFT 之前给窗序列补零以便能得到频率等分较密的傅里叶变换。但是我们必须认识到，补零并不能提高分辨率，分辨率只取决于窗的长度和形状。下面的例子将说明这一点。

例 10.7 用 32 点 Kaiser 窗和补零时的 DFT 分析

在这个问题中我们用 $L=32$ 和 $\beta=5.48$ 的 Kaiser 窗重复例 10.6，但是改变了 DFT 的长度。图 10.9(a) 表示 $N=L=32$ 时 DFT 的幅度，与图 10.8(d)相同。图 10.9(b)，(c)，(d)也表示 $L=32$ 时 DFT 的幅度，只是 DFT 的长度分别为 $N=64$，$N=128$ 和 $N=1\,024$。与例 10.5 类似，对 32 点序列补零可得到离散傅里叶变换较密的谱采样。图 10.9 中每个 DFT 幅度图的基本包络都相同。所以，用补零的方法增加 DFT 的长度并不能改变两个正弦频率分量的分辨率，但是可改变频率样本的间距。

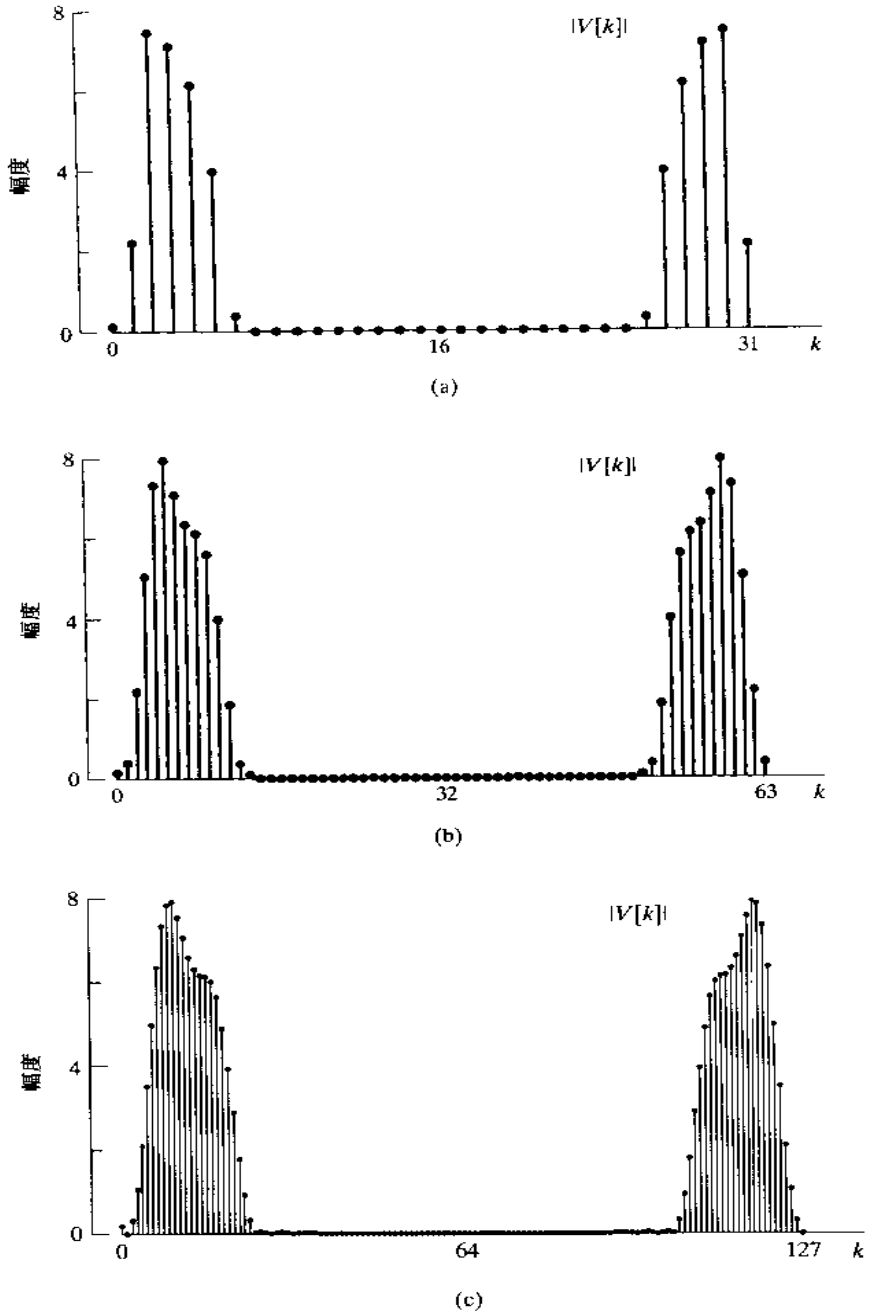
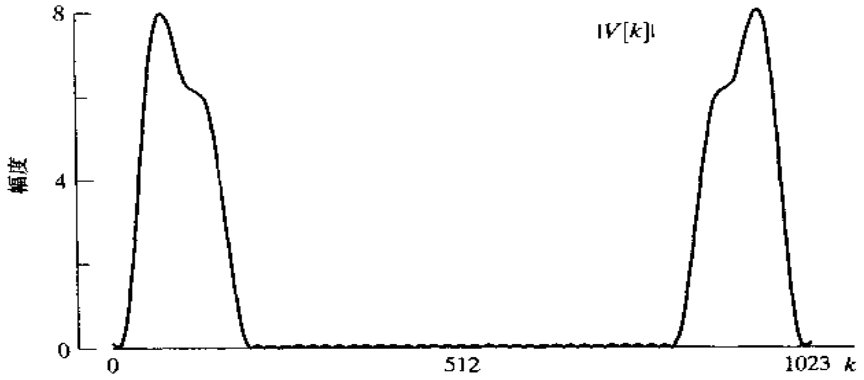


图 10.9　举例说明对于长度 $L=32$ 的 Kaiser 窗长度的影响
（a）$N=32$ 时 DFT 的幅度；（b）$N=64$ 时 DFT 的幅度；
（c）$N=128$ 时 DFT 的幅度；



(d)

图 10.9(续) (d) $N=1\,024$ 时 DFT 的幅度
(对 DFT 值作线性内插得到一条件平滑曲线)

要完全表示一个长度为 L 的序列，L 点的 DFT 就足够了，因为原序列可以由它完全恢复，然而，正如我们在前面的例子中所看到的，简单查看 L 点 DFT 能够导致错误的解释。正是这个原因，人们常常使用补零的方法，这样可以对频谱充分地过采样，因此能很容易地将一些重要的特性表现出来，随着大量地时域补零或频域过采样，在 DFT 值之间作简单的内插(即线性内插)就可以给出相当精确的傅里叶频谱图，它可以用以估计谱峰的位置和幅度。下面的例子将说明这一点。

例 10.8 对于频率估计的过采样和线性内插

图 10.10 说明如何用 1 024 点 DFT 得到加窗信号谱线加密的傅里叶变换的估计，并说明如何通过

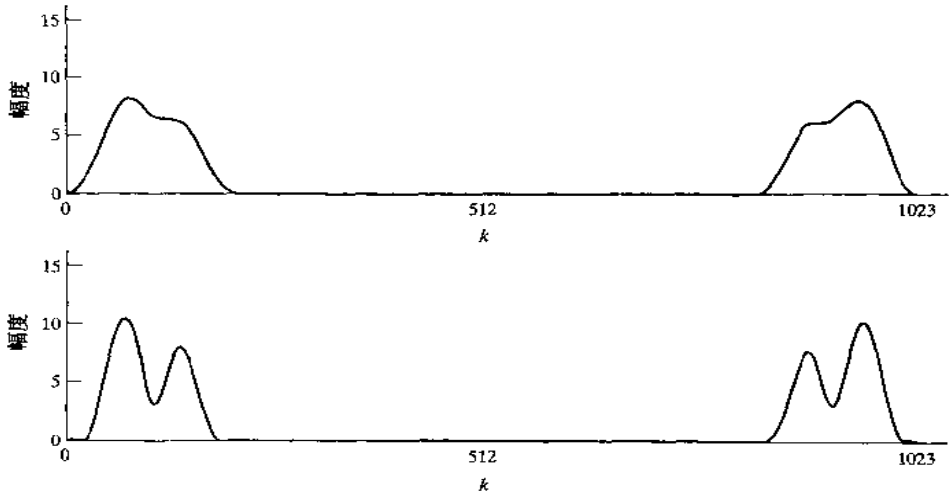


图 10.10 当 $N \gg L$ 且利用线性内插得出平滑曲线时的 DFT 计算举例
(a) $N=1\,024$，$L=32$；(b) $N=1\,024$，$L=42$；

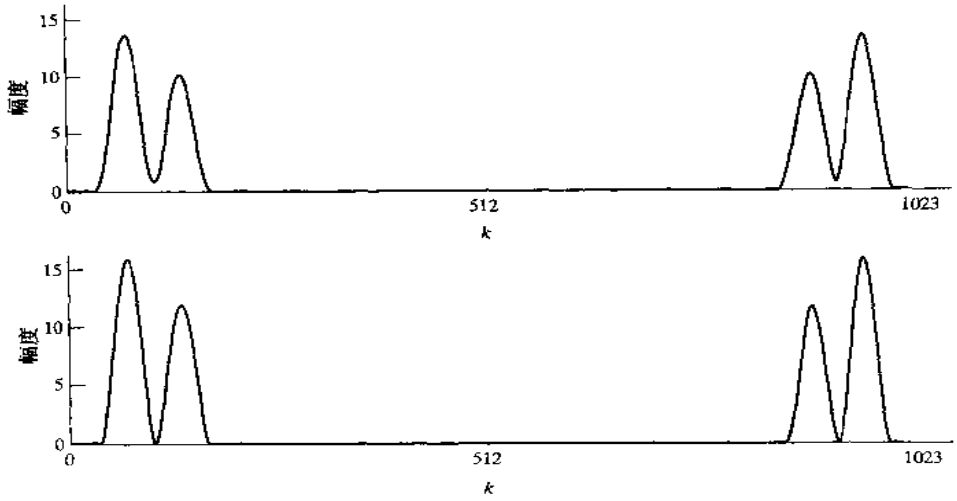


图 10.10(续) (c) $N=1\,024$, $L=54$; (d) $N=1\,024$, $L=64$

增加窗的宽度来提高对十分靠近的正弦分量的分辨能力。对例 10.6 的信号分别加长度 L 为 32, 42,54 和 64 且 $\beta=5.48$ 的 Kaiser 窗。首先我们注意到在各种情况下,1 024 点 DFT 当相邻点间都用直线相连接时给出平滑的结果。在图 10.10(a)中,$L=32$,无法分辨出两个正弦分量,当然增大 DFT 的长度只能使曲线更平滑。但是我们看到,随着窗长度的增加,区分两个频率以及逼近每个正弦分量幅度的能力也稳步得到提高。应注意,图 10.10(d)中的 1 024 点 DFT 在准确确定加窗傅里叶变换的谱峰的位置方面比图 10.8(b)中的稀疏采样的 DFT 要有效得多,后者在计算中也加了 64 点 Kaiser 窗。还应注意,图 10.10 中的两个谱峰的幅度非常接近于 0.75:1 的正确比值。

10.3 依时傅里叶变换

上一节说明如何使用 DFT 得到一个由正弦分量组成的信号之频率表示。在讨论中我们假定余弦函数的频率不随时间而变化,因此无论窗多么长,从窗的开始到结束,信号的特性应当是相同的。但是,在正弦信号模型的实际应用中,信号的特性(振幅、频率和相位)常常随时间而改变。例如,用来描述雷达、声纳、语音和数据通信的信号就需要这种类型的非平稳信号模型。要描述这类信号,单一的 DFT 估计是不够的,因此我们得出**依时傅里叶变换**的概念,也称短时傅里叶变换①。

一个信号 $x[n]$的依时傅里叶变换定义为

$$X[n,\lambda)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \tag{10.18}$$

式中 $w[n]$是一个窗序列。在依时傅里叶表示中,一维序列 $x[n]$是单个离散变量的函数,它转换为一个离散的时间变量 n 和连续的频率变量 λ 的二维函数②。注意,依时傅里叶变换对

① 有关依时傅里叶变换更深入的讨论可在多种参考文献中找到,其中包括 Allen 和 Rabiner(1977),Rabiner 和 Schafer (1978),Crochiere 和 Rabiner(1983),以及 Nawab 和 Quatieri(1988)的论文。

② 我们用 λ 表示依时傅里叶变换的频率变量,以区别有 ω 表示的传统离散时间傅里叶变换的频率变量,我们使用方、圆括号混合的记号 $X[n,\lambda)$以提示大家 n 是一个离散变量,而 λ 是一个连续变量。

于 λ 是以 2π 为周期的周期函数，因此我们只需要考虑 λ 在区间 $0 \leqslant \lambda \leqslant 2\pi$ 上，或长度为 2π 的其它区间上的值。

(10.18)式可以看作移位信号 $x[n+m]$ 通过窗 $w[m]$ 的傅里叶变换。窗有一个平稳的起始点，并且当 n 改变时信号滑动着通过窗，这样对于每一个 n 值，可以看到信号的一段不同部分。

例 10.9　线性调频信号的依时傅里叶变换

图 10.11 表示出了对于如下信号的平移信号和窗函数之间关系：

$$x[n] = \cos(\omega_0 n^2), \quad \omega_0 = 2\pi \times 7.5 \times 10^{-6} \tag{10.19}$$

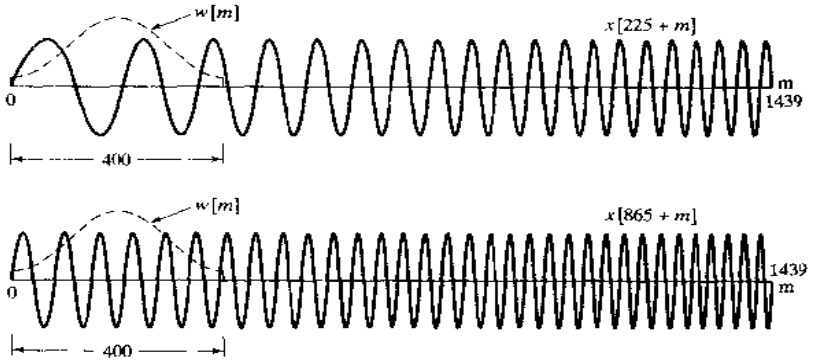


图 10.11　加窗的两段线性调频信号 $x[n]=\cos(\omega_0 n^2)$

当 $n=225$ 时 $X[n,\lambda)$ 是前部信号曲线乘以窗函数的离散傅里叶变换。

$X[865,\lambda)$ 是后部信号曲线与窗函数相乘的离散傅里叶变换。

它对应于一个线性频率调制(即"瞬时频率"为 $2\omega_0 n$)。正如我们在第 9 章有关线性调频变换算法的介绍中所看到的，这种类型的信号通常称为线性调频脉冲。典型的有，在(10.18)式中的 $w[m]$ 在 $m=0$ 附近有有限长度，因此 $X[n,\lambda)$ 表现出依赖于时间 n 的信号频率特性。例如，在图 10.12 中我们给出(10.19)式和图 10.11 所示信号的依时傅里叶变换的幅度图，其中 $w[m]$ 是一个长度为 400 的 Hamming 窗。该图称为**谱图**(spectrogram)，垂直轴为频率 $\lambda/2\pi$，水平轴为时间(n)。依时傅里叶变换的幅度用加黑的曲线表示。在图 10.12 中可清楚地看到频率是随着时间线性增长的。

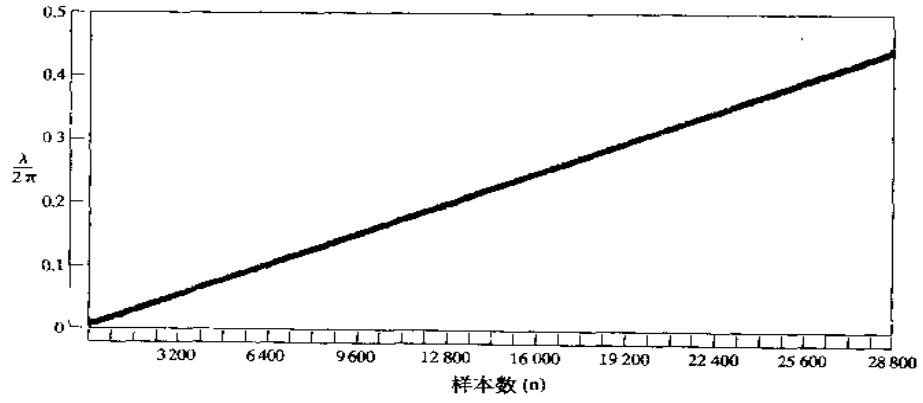


图 10.12　使用长度为 400 的 Hamming 窗时 $x[n]=\cos(\omega_0 n^2)$ 的依时傅里叶变换的幅度

因为 $X[n,\lambda]$是 $x[n+m]w[m]$的离散时间傅里叶变换，所以如果窗至少有一个非零样本，则依时傅里叶变换就是可逆的。具体地讲，由傅里叶变换的合成方程式(2.133)

$$x[n+m]w[m]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}X[n,\lambda)e^{j\lambda m}d\lambda,\qquad -\infty<m<\infty \tag{10.20}$$

若 $w[0]\neq 0$[①]，由上式可得

$$x[n]=\frac{1}{2\pi w[0]}\int_0^{2\pi}X[n,\lambda)d\lambda \tag{10.21}$$

利用(10.20)式以同样的方式不但可以恢复与非零窗样本相乘的单个样本 $x[n]$，而且可以恢复与非零窗样本相乘的其它所有样本。

重新安排(10.18)式中的求和顺序可以得出依时傅里叶变换的另外一种有用的表达式。如果在(10.18)式中我们作一替换 $m'=n+m$，则 $X[n,\lambda)$可以写为

$$X[n,\lambda)=\sum_{m'=-\infty}^{\infty}x[m']w[-(n-m')]e^{j\lambda(n-m')} \tag{10.22}$$

(10.22)式可以解释为卷积

$$X[n,\lambda)=x[n]*h_\lambda[n] \tag{10.23a}$$

式中

$$h_\lambda[n]=w[-n]e^{j\lambda n} \tag{10.23b}$$

由(10.23a)式可知，当 λ 固定时，依时傅里叶变换是 n 的函数，它可以看作是一个脉冲响应为 $h_\lambda[n]$，或等效地，频率响应为

$$H_\lambda(e^{j\omega})=W(e^{j(\lambda-\omega)}) \tag{10.24}$$

的线性时不变滤波器的输出。

通常将正时间部分为非零的窗称为**非因果窗**，因为用(10.18)式计算 $X[n,\lambda)$需要用到不同的**随着** n **变化**的样本。等效地，用线性滤波来解释，脉冲响应 $h_\lambda[n]=w[\quad n]e^{j\lambda n}$就是非因果的。

在(10.18)式的定义中，窗的时间原点保持固定，将信号平移通过窗的有效区间。实际上就是重新定义傅里叶分析的时间原点在信号的第几个样本处。另外一种可能是随着 n 的变化将窗平移，而保持傅里叶分析的时间原点固定在信号的最初时间原点处。由此可以得出依时傅里叶变换的另一个定义，形式为

$$\overset{\vee}{X}[n,\lambda)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]w[m-n]e^{-j\lambda m} \tag{10.25}$$

很容易证明，(10.18)式和(10.25)式两种定义之间的关系为

$$\overset{\vee}{X}[n,\lambda)=e^{-j\lambda n}X[n,\lambda) \tag{10.26}$$

当我们考虑用 DFT 得出依时傅里叶变换对于 λ 的样本时，(10.18)式的定义实际上是很方便的，因为若 $w[m]$在 $0\leqslant m\leqslant(L-1)$范围内为有限长，则 $x[n+m]w[n]$也为有限长。另一方面，(10.25)式的定义对于用滤波器组来解释傅里叶分析时也有一定的优越性。由于我们主要关心 DFT 的应用，因此我们将以(10.18)式为基础进行讨论。

① 因为 $X[n,\lambda)$是对于 λ 的以 2π 为周期的周期函数，所以在(10.20)和(10.21)式中的积分可以在长度为 2π 的任意区间上进行。

10.3.1 窗的影响

在依时傅里叶变换中窗的主要目的是限制被变换序列的所在范围，以便可以合理地认为谱特性在窗的持续时间内是平稳的。信号的特性变化越快，则窗应当越短。正如我们在 10.2 节中所看到的，随着窗变短，频率分辨率则降低。当然，对于 $X[n,\lambda)$，窗的确也有同样影响。另一方面，当窗的长度减小时，时间分辨能力将增强。因此，选择窗的长度应在频率分辨率和时间分辨率之间进行折衷。

通过假设信号 $x[n]$有一个常规的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$可以看出窗对于依时傅里叶变换性质的影响。首先设窗对于所有的 m 均为 1，也就是假设没有加窗。然后由(10.18)式得

$$X[n,\lambda) = X(e^{j\lambda})e^{j\lambda n} \tag{10.27}$$

当然，一个典型的用于谱分析的窗应递减至零，以便只选取信号的一部分作分析。如像在10.2节所讨论的，选择窗的长度和形状，应当使窗的傅里叶变换在频率上比信号的傅里叶变换中的变化要窄。图 10.13(a)给出了一种典型窗的傅里叶变换图。

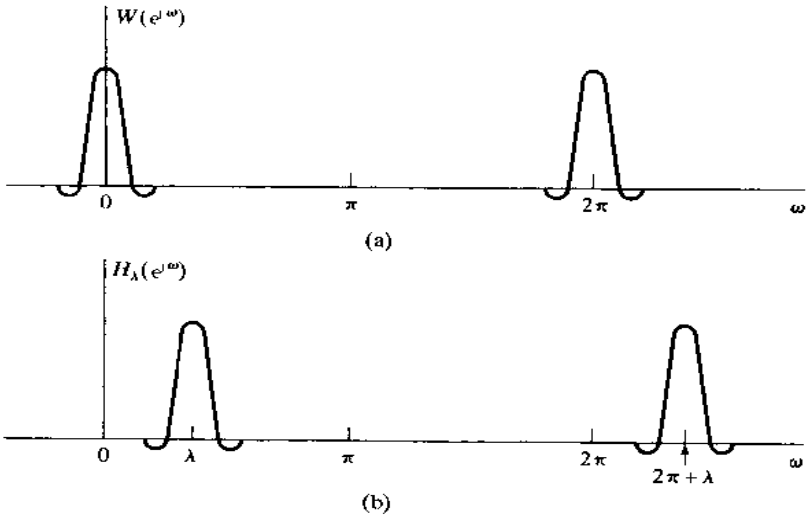


图 10.13 (a) 在依时傅里叶分析中窗的傅里叶变换；
(b) 用于依时傅里叶分析的等效带通滤波器

如果我们研究 n 固定时的依时傅里叶变换，则从傅里叶变换的性质可得

$$X[n,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j\theta n}X(e^{j\theta})W(e^{j(\lambda-\theta)})d\theta \tag{10.28}$$

这就是信号平移后的傅里叶变换与窗的傅里叶变换的卷积。上式与(10.2)式相似，但是在(10.2)式中我们假设信号相对于窗没有连续的平移。这里我们对每一个 n 值计算一次傅里叶变换。在 10.2 节中我们看到，分辨两个窄带信号分量的能力取决于窗的傅里叶变换主瓣的带宽，而一个分量泄漏到相邻另一个分量中去的程度决定于相对旁瓣幅度。不加窗的情况完全对应于对所有的 n，$w[n]=1$。在这种情况下，当 $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$ 时 $W(e^{j\omega})=2\pi\delta(\omega)$，它具有十分精细的频率分辨率，但没有时间分辨率。

在(10.23a)，(10.23b)和(10.24)式的线性滤波解释中，$W(e^{j\omega})$通常具有如图 10.13(a)所

示的低通特性，因此 $H_\lambda(e^{j\omega})$ 就是一个通带中心位于 $\omega=\lambda$ 处的带通滤波器，如图 10.13(b)所示。显然，这个滤波器的通带宽度近似等于窗的傅里叶变换之主瓣的宽度。抑制相邻频率分量的程度取决于相对旁瓣幅度。

以上的讨论表明，如果我们用依时傅里叶变换来得到一个信号的频谱的依时估计，最好用递减的窗以降低旁瓣，并且用尽可能长的窗以改善频率分辨率。我们将在 10.5 节研究一些例子。但是在此之前，我们首先讨论在用显式计算依时傅里叶变换时 DFT 的用法。

10.3.2 时间采样和频率采样

用显式计算 $X[n,\lambda)$只有对一组有限多个 λ 值才能进行，这就相当于在频域对依时傅里叶变换进行采样。正如有限长信号完全可以用离散时间傅里叶变换的样本来表示一样，如果在(10.18)式中窗为有限长，则不确定长度的信号可以通过依时傅里叶变换的样本来表示。例如，设窗长为 L 并且起始样本在 $m=0$ 处，即

$$w[m]=0 \qquad 0\leqslant m\leqslant L-1 \text{ 区间以外} \tag{10.29}$$

如果对 $X[n,\lambda)$在 N 个等间隔的频率 $\lambda_k=2\pi k/N$ 处采样，且 $N\geqslant L$，那么由采样后的依时傅里叶变换仍可以恢复原来的序列。具体地讲，若定义 $X[n,k]$为

$$X[n,k]=X[n,2\pi k/N)=\sum_{m=0}^{L-1}x[n+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km}, \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{10.30}$$

则 $X[n,k]$是加窗序列 $x[n+m]w[m]$的 DFT。利用 IDFT，有

$$x[n+m]w[m]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X[n,k]e^{j(2\pi/N)km}, \qquad 0\leqslant m\leqslant L-1 \tag{10.31}$$

由于假设对于 $0\leqslant m\leqslant L-1$，窗 $w[m]\neq 0$，则可以利用式

$$x[n+m]=\frac{1}{Nw[m]}\sum_{k=0}^{N-1}X[n,k]e^{j(2\pi/N)km}, \qquad 0\leqslant m\leqslant L-1 \tag{10.32}$$

在从 n 到$(n+L-1)$的区间内恢复序列值，式中假定对于 $0\leqslant m\leqslant L-1$，窗 $w[m]\neq 0$。重要的是，窗为有限长度，并且我们至少取 λ 维的样本与窗的非零样本一样多，即 $N\geqslant L$。虽然(10.29)式对应于一个非因果窗，我们也可以使用一个因果窗，即对于 $-(L-1)\leqslant m\leqslant 0$，$w[m]\neq 0$，或对称窗，也就是对于 $|m|\leqslant(L-1)/2$(L 为奇数)，$w[m]=w[-m]$。在(10.30)式中之所以使用非因果窗只是为了使我们的分析更方便些，因为很自然地可以作出如下解释：采样后的依时傅里叶变换可作为以样本 n 为起始的加窗序列的 DFT。

由于(10.30)式相当于把(10.18)式对 λ 进行采样，因此它也相当于把(10.22)，(10.23a)和(10.23b)式对 λ 进行采样。特别是，(10.30)式可以重新写为

$$X[n,k]=x[n]*h_k[n], \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{10.33a}$$

式中

$$h_k[n]=w[-n]e^{j(2\pi/N)kn} \tag{10.33b}$$

(10.33)式可以看作是一组 N 个滤波器，如图 10.14 所示，其中第 k 个滤波器的频率响应为

$$H_k(e^{j\omega})=W(e^{j[(2\pi k/N)-\omega]}) \tag{10.34}$$

我们的讨论表明，若将 $X[n,\lambda)$或 $X[n,k]$对时间 n 采样，则可以在 $-\infty<n<\infty$内重构 $x[n]$。具体地讲，利用(10.32)式我们可以由 $X[n_0,k]$在区间 $n_0\leqslant n\leqslant n_0+L-1$上重构该

信号，也可以由 $X[n_0+L,k]$ 在区间 $n_0+L\leqslant n\leqslant n_0+2L-1$ 上重构该信号，等等。这样，由同时在频率维和时间维采样的依时傅里叶变换完全可以重构 $x[n]$。通常对于如(10.29)式表示的窗的支撑区，我们定义这种采样的依时傅里叶变换为

$$X[rR,k]=X[rR,2\pi k/N]=\sum_{m=0}^{L-1}x[rR+m]w[m]e^{-j(2\pi/N)km} \tag{10.35}$$

这里 r 和 k 为整数，并有 $-\infty<r<\infty$ 和 $0\leqslant k\leqslant N-1$。

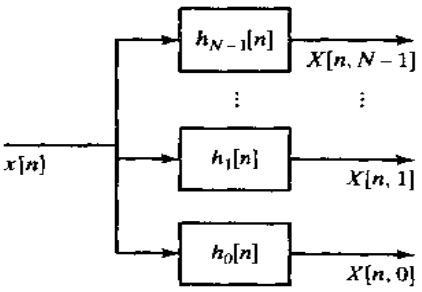


图 10.14 依时傅里叶变换的的滤波器组表示

为了进一步简化所用的符号，定义

$$X_r[k]=X[rR,k]=X[rR,\lambda_k],\quad -\infty<r<\infty,\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{10.36}$$

式中 $\lambda_k=2\pi k/N$。这一表达式清楚地说明，采样依时傅里叶变换就是加窗信号序列

$$x_r[m]=x[rR+m]w[m],\quad -\infty<r<\infty,\quad 0\leqslant m\leqslant L-1 \tag{10.37}$$

的 N 点 DFT 序列，且窗的位置上以 R 个样本为间隔跳跃移动。图 10.15 表示在 $N=10$ 和

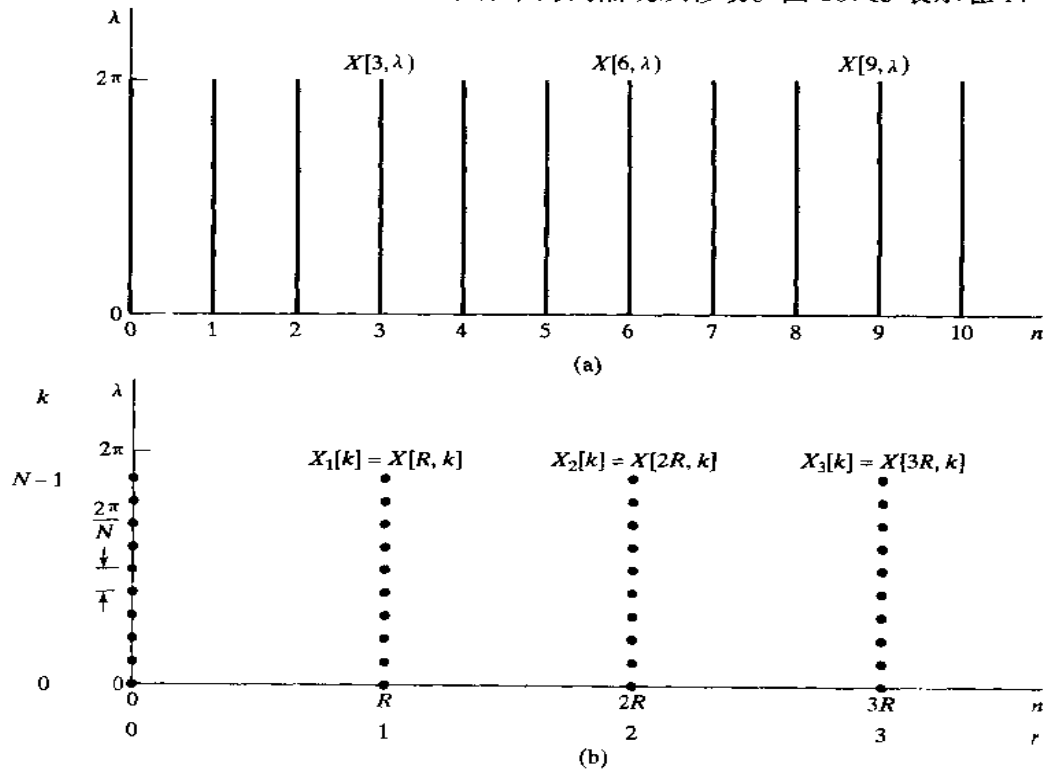


图 10.15 (a) 对 $X[n,\lambda)$ 的支持区域；(b) 对于 $N=10$ 和 $R=3$ 时采样依时傅里叶变换在 $[n,\lambda)$ 平面上采样点的栅格图

$R=3$的情况下，对应于 $X[n,\lambda)$在$[n,\lambda)$平面上的各条线和采样点的栅格图。正如我们已经证明的，由这样一个二维离散表示有可能唯一地重构原始信号。

(10.35)式涉及到如下整数型参数：窗的长度 L；在频率维中的样本数或 DFT 的长度 N；以及在时间维中的采样区间 R。然而并不是任意选择这些参数都能完全重构信号。选择 $L\leqslant N$保证我们可以由块变换(Block transform) $X_r[k]$来重构加窗信号段 $x_r[m]$。若 $R<L$ 则信号段有重叠；但是若 $R>L$，则信号的一些样本就用不上，这样由 $X_r[k]$也就不能重构信号。因此，通常采样的三个参数应当满足关系式 $N\geqslant L\geqslant R$。应当注意，在采样的依时傅里叶变换表示中每批 R 点信号样本用 N 个复数表示；或者如果信号是实的，由于 DFT 的对称性，只需要 N 个实数。正如上面证明过的，对于 $N=L=R$ 的特殊情况，由采样的依时傅里叶变换可以完全重构信号。在这种情况下，一个实信号的 N 个样本可以用 N 个实数来表示，并且这是对于一个任意选择的信号我们所希望能达到的最小表示。

可以用另一种方式理解依时傅里叶变换在时间维采样。回想一下当 λ 固定，或等效地 k 固定时，依时傅里叶变换是一个一维序列，它就是频率响应如(10.24)式所示带通滤波器的输出。因此可以预见，表示每个频率的序列采样率可以减小到 $2\pi/\Delta_{ml}$分之一，其中 Δ_{ml}是窗的傅里叶变换主瓣的宽度。图 10.16(a)表示对应于 $L=N=16$ 的矩形窗的一组带通滤波器。应注意，滤波器的通带明显有重叠，而且它们的频率选择性对任何标准来说都不是理想的。实际上任意一个带通滤波器的旁瓣都和它每一侧的通带部分完全重叠。这说明可能会遇到在时间

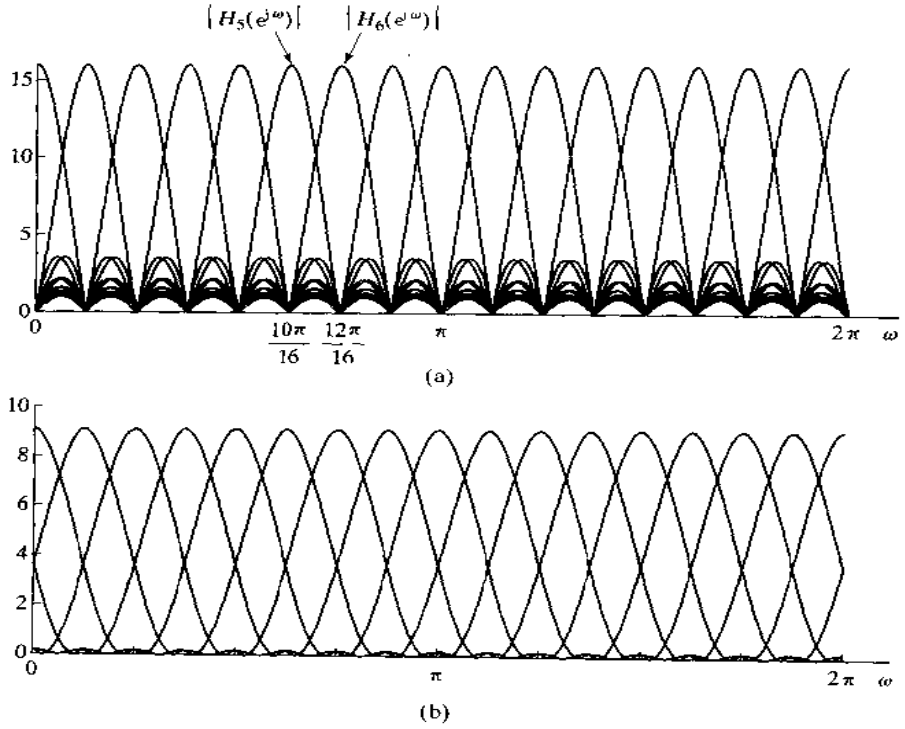


图 10.16　滤波器的频率响应
(a) 矩形窗；(b) Kaiser 窗

维混叠的问题，因为任何有限长窗的傅里叶变换都不是一个理想滤波器的响应。例如，图10.16(b)表明对于同样长度的Kaiser窗的情况，即 $L=N=16$。此时旁瓣很小，但主瓣却增大了许多，所以滤波器间有更多的重叠，虽然从图10.16中看上去这一点并不明显，但是，上面根据块处理观点的看法清楚地表明，我们完全可以由时间采样和频率采样依时傅里叶变换重构原始信号。从线性滤波观点较详细的分析表明，由于不理想的频率所产生的混叠失真可以在重构过程中去除掉。这一点将在习题10.40中研究，更详细的讨论见Rabiner和Schafer(1978)以及Crochiere和Rabiner(1983)的文献。

10.4 利用依时傅里叶变换的块卷积

依时傅里叶变换的一种用法是将它作为用频域修正来处理一个离散时间信号的基础。这可以通过以下步骤来完成：首先计算一个依时傅里叶变换的表达式，然后对该表达式加以修正，最后重构一个离散时间信号。这种方法广泛用于数字语音编码，在该情况下，并不对语音信号的样本进行量化，而是对采样的依时傅里叶变换进行量化和编码，以用于传输和贮存。讨论这类应用会使我们离题太远，但是这种对于离散时间信号的块处理技术在第8章中已作介绍。当时我们讨论的是，用DFT来实现一个有限长脉冲响应与不确定长度之输入信号的卷积问题。利用10.3节的定义和概念，对于这种实现线性时不变系统的方法可以有一种有用的解释。

假设当 $n<0$ 时 $x[n]=0$，并且假定对于 $R=L$ 和一个矩形窗来计算依时傅里叶变换。换句话说，采样了的依时傅里叶变换 $X_r[k]$ 包括一组输入序列段

$$x_r[m]=x[rL+m], \qquad 0\leqslant m\leqslant L-1 \tag{10.38}$$

的 N 点DFT。因为包括了信号 $x[n]$ 的每个样本，并且每批数据之间没有重叠，所以有

$$x[n]=\sum_{r=0}^{\infty}x_r[n-rL] \tag{10.39}$$

现在假设定义一个新的依时傅里叶变换

$$Y_r[k]=H[k]X_r[k], \qquad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{10.40}$$

式中 $H[k]$ 是一个有限长单位样本序列 $h[n]$ 的 N 点DFT，且当 $n<0$ 和 $n>P-1$ 时 $h[n]=0$。若我们计算 $Y_r[k]$ 的IDFT，可得

$$y_r[m]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}Y_r[k]e^{j(2\pi/N)km}=\sum_{l=0}^{N-1}x_r[l]h[((m-l))_N] \tag{10.41}$$

这表明，$y_r[m]$ 是 $h[m]$ 和 $x_r[m]$ 的 N 点循环卷积。因为 $h[m]$ 长为 P，有 P 个样本，$x_r[m]$ 长为 L，有 L 个样本，所以由8.7节的讨论可知：若 $N\geqslant L+P-1$，则在区间 $0\leqslant m\leqslant L+P-2$ 上 $y_r[m]$ 将等于 $h[m]$ 和 $x_r[m]$ 的线性卷积；在该区间以外，$y_r[m]$ 将为零。由此可得，如果我们按照

$$y[n]=\sum_{r=0}^{\infty}y_r[n-rL] \tag{10.42}$$

来构造一个输出信号 $y[n]$，则 $y[n]$ 是一个脉冲响应 $h[n]$ 的线性时不变系统的输出。刚才叙述的方法正是块卷积的**重叠相加法**。在8.7节中讨论过的重叠保留法也可归于依时傅里叶变换的范畴。

10.5 非平稳信号的傅里叶分析

在 10.4 节中我们研究了如何用依时傅里叶变换来实现线性滤波的一个简单例子。在这类应用中，我们十分关注是否有可能由修正的依时傅里叶变换重构一个修正的信号，而对谱的分辨率不是太关心。另一方面，依时傅里叶变换的概念大概是最广泛地用作获得非平稳离散时间信号谱估计的各种技术的一个框架，并且在这些应用中，谱的分辨率、时间变化以及其它一些问题是最重要的。

非平稳信号是一种信号特性随时间变化的信号，例如，一些振幅、频率或相位随时间变化的正弦分量。正如我们将在 10.5.1 节中对于语音信号以及将在 10.5.2 节中对于 Doppler 雷达信号所要说明的，依时傅里叶变换常常可以给出有关信号特性如何随时间变化的有用描述。

当我们把依时傅里叶分析用于一个采样了的信号时，10.1 节对于计算每个 DFT 的全部讨论均成立。换句话说，对于信号的每一段 $x_r[n]$，通过在 10.1 节中叙述的方法能把采样依时傅里叶变换 $X_r[k]$ 与原来的连续时间信号的傅里叶变换联系在一起。此外，如果我们要将依时傅里叶变换用于固定(即非时变)参数的正弦信号，则 10.2 节的讨论也可以用于我们计算的每个 DFT。当信号频率不随时间改变时，人们可能会想到依时傅里叶变换只在频率维以 10.2 节所描述的方式变化，但是这只有在十分特殊的情况下才成立。例如，如果信号是周期为 N_p 的周期信号，且 $L = l_0 N_p$ 以及 $R = r_0 N_p$(其中 l_0 和 r_0 为整数)，也就是窗正好包括 l_0 个周期并且在两次计算 DFT 之间窗正好移动 r_0 个周期，则依时傅里叶变换在时间维将是不变的。通常，即使信号完全是周期的，当不同段的波形平移到分析窗中时所产生的相位关系改变也会导致依时傅里叶变换在时间维变化。然而，对于平稳信号若我们用一个在两端递减至零的窗，则从一段信号到另一段信号时，幅度 $|X_r[k]|$ 只有轻微的改变，而大多数复数依时傅里叶变换的变化表现在相位上。

10.5.1 语音信号的依时傅里叶分析

语音是由激励一个声管，即**声道**而产生的，该声道的一端靠近嘴唇，另一端靠近声门。有三种基本类型的语音：

- **浊音**是由打开和关闭声门引起的准周期气流脉冲激励声道而产生的。
- **摩擦音**是由在声道某处形成一个缩颈并且迫使气流通过该缩颈产生湍流，由此形成一个类似噪声的激励而产生的。
- **爆破音**是在完全关闭声道后并形成一定的压力，然后突然将它释放而产生的。

对于语音信号模型的详细讨论以及依时傅里叶变换的应用可在如像 Flanagan(1972)，Rabiner 和 Schafer(1978)，O'Shaughnessy(1987)及 Parsons(1986)的著作中找到。

对于一个固定的声道形状，语音的模型可以看作是一个线性时不变系统(声道)在浊音时对准周期脉冲串的响应，或在清音时对宽带噪声的响应。声道是一个其特性由自己的自然频率所决定的声传输系统，该自然频率称为**谐振峰**，与其频率响应中的谐振点相对应。在正常的语音中，当舌和唇产生语音的姿态时，声道随时间相当慢地改变其形状，这样其模型可以当作一个慢速时变的滤波器，该滤波器将其频率响应特性强加在激励谱上。图 10.17 中给出了一个典型的语音波形。

从这段有关语音产生过程的简要叙述及图 10.17 中，我们可看出语音的确是非平稳信号。但是，正如图 10.17 中表明的，可假定语音信号的特性在 30 或 40ms 量级的时间范围内基本保持不变。显然，语音信号的频率范围上限可达 15kHz 或更高，但是即使当带宽限制到低于 3kHz 附近的频率时语音仍是较容易听懂的。例如，商用电话系统通常限制最高传输频率为大约 3kHz。对于数字电话通信系统标准采样率为 8 000 样本/s。用这样的采样率，40ms 的时间区间将覆盖 320 个样本。

图 10.17 说明该波形是由一串准周期浊音语音段与夹杂着类似噪声的清音语音段所组成的。这幅图提示我们，如果窗长 L 不是太长，则信号的特性从信号段的开始到结束将不会有明显改变。这样，一个加窗语音段的 DFT 应当在与窗位置相对应的时间内表现出该信号的频率特性。例如，若窗的长度足够长使得我们可以将谐波分辨出来，则某一段加窗浊音的 DFT

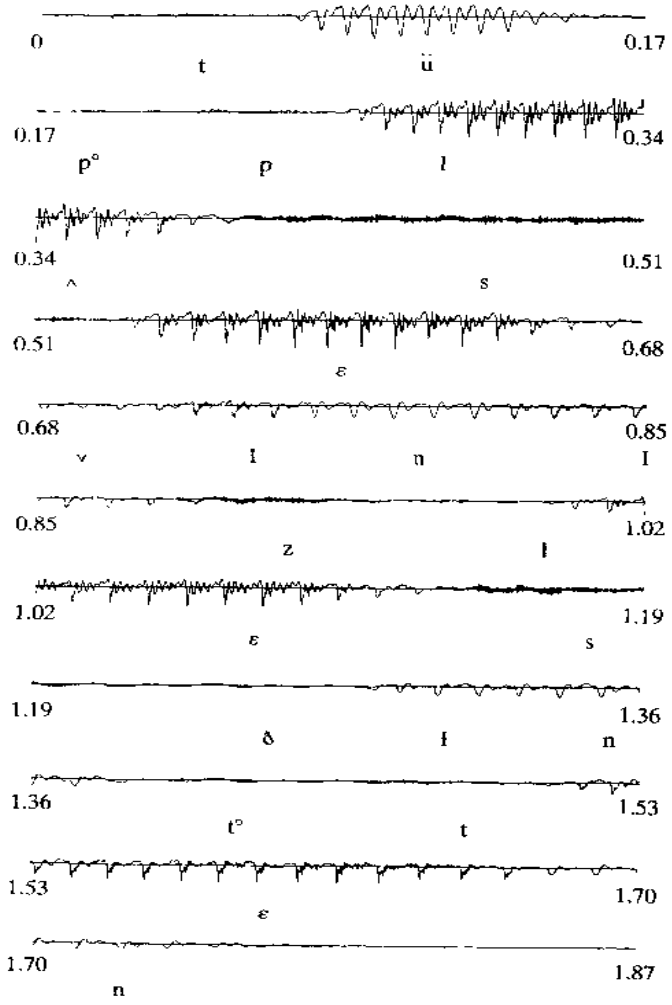


图 10.17 "Two plus seven is less than ten"发音的波形，每条线持续 0.17s，波形下方标注出时间标准了的音素符号

应当在那个区间内位于信号基频的整数倍处出现一系列谱峰。通常这就要求窗覆盖波形的几个周期。若窗太短，则谐波将无法分辨，但是总的谱的形状仍然是明显的。这是在频率分辨和时间分辨之间进行折衷的典型情况，在非平稳信号的分析中这是必要的。如果窗太长，则信号的特性从窗的这头到那头可能会有很大变化；如果窗太短，则会牺牲窄带分量的分辨率。以下的例子将说明这一折衷情况。

例 10.10　语音信号依时傅里叶变换的谱图表示

图 10.18(a)给出了在图 10.17 中所示句子的依时傅里叶变化的谱图。在谱图的下方也给出了在相同时间坐标比例下的时间波形。更具体讲，图 10.18(a)是一个**宽带谱图**。宽带谱图表示是利用在时间上比较短的窗得出的，它的特点是频域分辨率低，而时域分辨率高。频率轴用连续时间频率标示。由于信号的采样率为 16 000 样本 /s，则可得出频率 $\lambda=\pi$ 对应于 8kHz。图 10.17(a)中使用的具体窗是宽 6.7ms(对应于 $L=108$)的 Hamming 窗。R 的值为 $R=16$，代表 1ms 的时间增量。在水平方向上移动横向通过谱图的宽暗条对应于声道的谐振频率，正如我们看到的，它随着时间

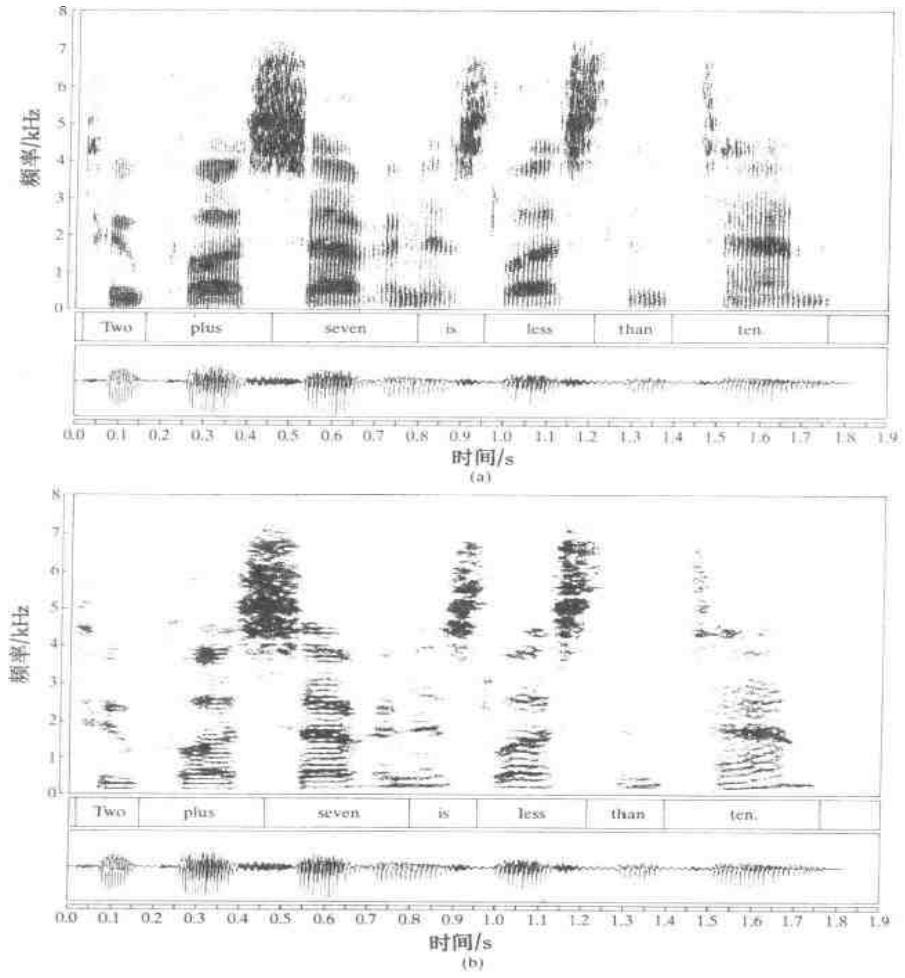


图 10.18　(a) 图 10.17 中波形的宽带谱图；(b) 窄带谱图

而变化。谱图在垂直方向的条纹形状是由于波形中浊音部分的准周期性质所致，比较一下波形图和谱图中的变化就会很清楚。因为分析窗的长度大约是波形的一个周期长，当窗沿时间轴滑动时，它交替地覆盖波形的高能量段和低能量段，所以在图中浊音期间就会产生垂直的条纹。

在**窄带**依时傅里叶分析中使用较长的窗可得到较高的频率分辨率，同时相应地降低时间分辨率。图 10.18(b)就体现了这样一种语音的窄带分析。在这种情况下窗为宽 45ms 的 Hamming 窗。这对应于 $L=720$。R 的值为 $R=16$。

这个例子只是略为提到依时傅里叶变换在语音的分析和处理中之所以非常重要的众多原因。的确，这一概念既直接和间接地作为语声分析和许多基本语音处理应用的基础，如数字编码、噪声和混响的消除、语音识别、说话人的证实和识别等等。出于本书目的，我们的讨论仅仅是一个简介性的说明。

10.5.2 雷达信号的依时傅里叶分析

依时傅里叶变换发挥着重要作用的另一个应用领域是雷达信号分析。一个典型的雷达系统由以下几部分组成：

- 天线，用于发射和接收(往往是相同的)。
- 发射机，它产生需要的微波频段信号。在我们的讨论中，假设这个信号是正弦脉冲。虽然这是一般的情况，但也可以应用其它信号，这取决于具体的雷达目标和设计方法。
- 接收机，它放大和检测从天线对准的目标反射回来的发射脉冲的回波。

在这样一个雷达系统中，发射的正弦信号以光速传播，经目标反射，并以光速回到天线，因此经过了一个从天线至目标往返传播的时间延迟。如果我们假设发射信号是一个形式为 $\cos(\Omega_0 t)$ 的正弦脉冲，且从天线到目标的距离为 $\rho(t)$，则接收到的信号是如下脉冲

$$s(t) = \cos[\Omega_0(t - 2\rho(t)/c)] \tag{10.43}$$

式中 c 为光速。若目标相对于天线没有运动，则 $\rho(t)=\rho_0$，其中 ρ_0 为**距离**。因为在发射脉冲和接收脉冲之间的时延为 $2\rho_0/c$，所以时延的测量可用于估计距离。但是，如果 $\rho(t)$ 不是常量，则接收信号是一个调角的正弦信号，并且相位差同时包含着目标对于天线的距离和相对运动的信息。具体讲，让我们用泰勒级数展开来表示该时变距离，为

$$\rho(t) = \rho_0 + \dot{\rho}_0 t + \frac{1}{2!}\ddot{\rho}_0 t^2 + \cdots, \tag{10.44}$$

其中 ρ_0 为标称距离，$\dot{\rho}_0$ 为速度，$\ddot{\rho}_0$ 为加速度等等。假定目标以恒定速度(即 $\ddot{\rho}_0=0$)运动，并且将(10.44)式代入(10.43)式得

$$s(t) = \cos[(\Omega_0 - 2\Omega_0\dot{\rho}_0/c)t - 2\Omega_0\rho_0/c] \tag{10.45}$$

在这种情况下，接收信号的频率不同于发射信号的频率，相差为 **Doppler 频率**，它定义为

$$\Omega_d = -2\Omega_0\dot{\rho}_0/c \tag{10.46}$$

这样，时延仍可用于估计距离，并且若我们能够确定 Doppler 频率，就可确定目标相对于天线的速度。

在实际场合，接收信号通常很微弱，这样在(10.45)式中应当加入一个噪声项。为了简化这一节的分析，我们忽略噪声的影响。而且，在大多数雷达系统中，(10.45)式的信号在检测过程中应当将频率移到一个较低的标称频率上去。然而，即使 $s(t)$ 解调到一个较低的中心频率上，Doppler 频移仍满足(10.46)式。

为了将依时傅里叶分析用于这种信号，我们首先把信号限带于一个包括所期望的 Doppler

频移的频带上，然后以一个适当的采样周期 T 对所得信号采样，由此得到一个离散时间信号，形式为

$$x[n] = \cos[(\omega_0 - 2\omega_0\dot{\rho}_0/c)n - 2\omega_0\rho_0/c] \tag{10.47}$$

式中 $\omega_0 = \Omega_0 T$。在许多情况下，目标运动要比我们所假设的复杂得多，需要在(10.44)式中加入高阶项，因此在接收信号中会产生更为复杂的角度调制。表示回波频率的这种较复杂变化的另一种方式是使用加窗的依时傅里叶变换，这种窗应该足够短以保证恒定 Doppler 频移的假设在整个窗的时间间隔内均有效，但是当两个或者更多的运动目标产生的 Doppler 频移的回波信号在接收机叠加在一起时，窗又不能太短而失去了所需要的分辨率。

例 10.11

Doppler 雷达信号的依时傅里叶分析的一个例子如图 10.19 所示。(见 Schafer 等，1979)雷达数据已经经过预处理去掉了低速的 Doppler 频移，留下了在图中表现出的变化。依时傅里叶变换的窗为 $N = L = 64$ 和 $\beta = 4$ 的 Kaiser 窗。在这幅图中，以垂直轴表示时间(向上为增加)，水平轴表示频率①，绘出了 $|X_r[k]|$ 的曲线。在这种情况下，把逐次的 DFT 十分靠近地画在一起。使用消隐算法得出依时傅里叶变换的二维图。在中心线的左方有一个高峰，它沿着一条平滑的路径运动着通过时间－频率平面这对应于一个速度以某种规则方式变化着的运动目标。在依时傅里叶变换中其它的宽峰是由噪声和在雷达术语中称为**杂波**的假回波信号所致。可能产生这样一种 Doppler 频率变化的运动实例是以恒速运动但围绕自身纵向旋转的火箭的运动。运动着通过依时傅里叶变换的峰可能对应着来自火箭上尾翼的反射，该尾翼的运动由于火箭的旋转而交替地朝向和离开天线。图 10.19(b)表示作为时间函数的 Doppler 频率的估计。这个估计是通过简单地确定每个 DFT 中最大峰的位置而得出的。

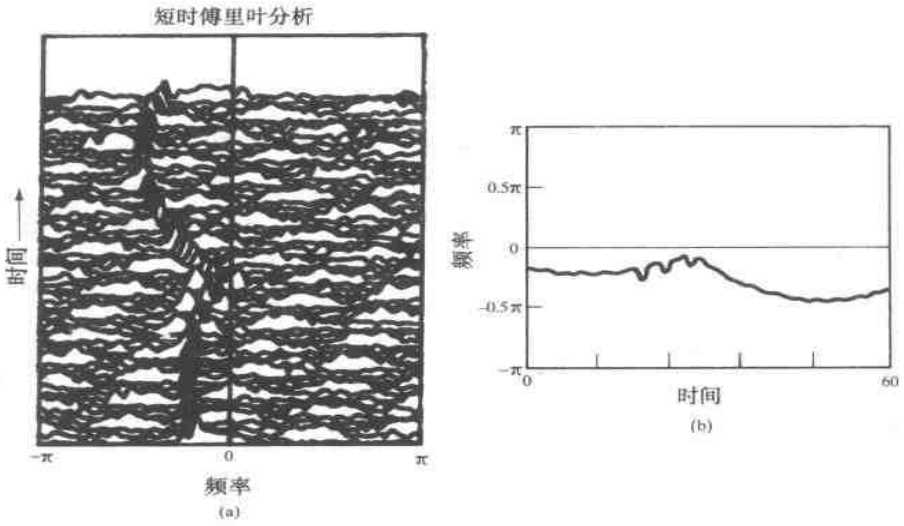


图 10.19 Doppler 雷达信号的依时傅里叶变换分析举例
(a) Doppler 雷达信号的依时傅里叶变换序列；
(b) 通过选择依时傅里叶变换中最大峰所估计出的 Doppler 频率

① 该图从图中心到左端线为负频率，从图中心到右端线为正频率，这可以通过计算 $(-1)^n x_r[n]$ 的 DFT 而得到，并且应注意需恰当地将 DFT 标号的原点平移到 $k = N/2$ 处。另一方面，也可以先计算 $x_r[n]$ 的 DFT，然后重新加标号。

10.6 平稳随机信号的傅里叶分析：周期图

在前面几节中我们已经讨论和举例说明了对于平稳(无时变)参数的正弦信号以及如像语音和雷达的非平稳信号的傅里叶分析。在信号可以用正弦信号之和或由周期脉冲串激励的线性系统作为其模型的场合，利用傅里叶变换、加窗和线性系统理论可以方便、自然地对有限长信号段的傅里叶变换作解释。但是，对于如像在 10.5.1 节浊音例示中酷似噪声那样的信号，最好用随机信号作为其模型。

正如我们在 2.10 节所讨论的以及在附录 A 中所示，当产生信号的过程对于一个合理的确定性模型过分复杂时，随机过程常常用作信号的模型。典型的是，当输入到一个线性时不变系统的信号可以用平稳随机过程作为模型时，输入和输出的许多基本特性可以适当地用如像均值(直流电平)、方差(平均功率)、自相关函数、或功率密度谱这类平均性质的参量来表示。因此我们特别感兴趣的是，对于一个已知信号如何估计这些参量。正如在附录 A 中所讨论的，由一个有限长数据段而得出的平稳随机过程均值的典型估计是**样本均值**，定义为

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1} x[n] \tag{10.48}$$

同样，方差的典型估计是**样本方差**，定义为

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}(x[n] - \hat{m}_x)^2 \tag{10.49}$$

样本均值和样本方差都是随机变量，它们分别是**无偏**的和**渐进无偏**的估计器，即 $\hat{m}_x$ 的期望值是真实均值 m_x，并且当 L 趋近于∞时 $\hat{\sigma}_x^2$ 的期望值趋近于真实方差 σ_x^2。另外，它们都是**一致**估计器，也就是说，它们随着 L 的增加而得到改善，因为当 L 趋近∞时，它们的估计方差趋近于零。

在本章的其余部分我们将研究用 DFT 估计一个随机信号的功率谱[①]。我们将看到，有两种估计功率谱的基本方法，在这一节中我们推导的一种方法是所谓的**周期图分析**，它是以有限长信号段的直接傅里叶变换为基础。将在 10.7 节推导的第二种方法是首先估计出自相关序列，然后计算这个估计的傅里叶变换。在这两种情况下，我们均对获得无偏一致估计器特别感兴趣。遗憾的是，对这种估计器的分析是非常困难的，通常只能进行近似的分析。即使近似的分析也已超出了这本教材的范围，我们只能以定性的方式给出这种分析结果。在 Blackman 和 Tukey(1958)，Hannan(1960)，Jenkins 和 Watts(1968)，Koopmanns(1995)，Kay 和 Marple (1981)，Marple(1987)以及 Kay(1988)的论著中给出了详细的讨论。

10.6.1 周期图

让我们来研究估计一个连续时间信号 $s_c[t]$之功率谱密度 $P_{ss}(\Omega)$的问题。功率谱估计的直观方法已在图 10.1 中提出，并且与 10.1 节中的讨论有关，基于那种方法我们现在假设输入信号 $s_c[t]$是一个平稳随机信号。反混叠低通滤波器产生一个新的平稳随机信号，它的功率谱是带宽有限的，以便使得对该信号采样没有混叠。这样 $x[n]$是一个平稳离散时间随机信号，

① 功率谱一词常常可与较准确的术语功率谱密度一词交换使用。

它的功率谱密度 $P_{xx}(\Omega)$在反混叠滤波器带宽范围内正比于 $P_{ss}(\Omega)$，即

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T}P_{ss}\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi \tag{10.50}$$

式中我们已经假定反混叠滤波器的截止频率为 π/T，且 T 是采样周期。(对于随机信号采样的更多考虑见习题10.33)因此，由 $P_{xx}(\omega)$的合理估计将给出 $P_{ss}(\Omega)$的合理估计。图 10.1 中的窗 $w[n]$选取 $x[n]$的一段有限长信号(L 个样本)，记作 $v[n]$。它的傅里叶变换为

$$V(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]x[n]e^{-j\omega n} \tag{10.51}$$

考虑作为一种功率谱估计的量

$$I(\omega) = \frac{1}{LU}|V(e^{j\omega})|^2 \tag{10.52}$$

其中常数 U 是预先考虑到在谱估计中为了消除偏差而进行归一化所需要的。当窗 $w[n]$为矩形窗序列时，这种功率谱的估计器称为**周期图**。如果窗不是矩形的，$I(\omega)$则称为**修正周期图**。显然，周期图具有一些功率谱的基本性质。它是非负的，并且对于实信号它是频率的实偶函数。另外，可以证明(习题 10.26)

$$I(\omega) = \frac{1}{LU}\sum_{m=-(L-1)}^{L-1} c_{vv}[m]e^{-j\omega m} \tag{10.53}$$

其中

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} x[n]w[n]x[n+m]w[n+m] \tag{10.54}$$

我们注意到，对于有限长序列 $v[n] = w[n]x[n]$，序列 $c_{vv}[m]$是一个非周期相关序列。因此，事实上周期图是加窗数据序列的非周期相关函数的傅里叶变换。

周期图的显式计算只有在离散频率上才能进行。从(10.51)式和(10.52)式可以看出，如果 $w[n]x[n]$的傅里叶变换用其 DFT 来代替，则可以得到 DFT 频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 在 $k = 0, 1, \cdots, N-1$ 处的样本。具体地讲，周期图的样本由下式给出：

$$I(\omega_k) = \frac{1}{LU}|V[k]|^2 \tag{10.55}$$

式中 $V[k]$是 $w[n]x[n]$的 N 点 DFT。如果我们希望选取 N 大于窗的长度 L，则应当对序列 $w[n]x[n]$适当地补零。

若一个随机信号有非零均值，则它的功率谱在零频率处有一个脉冲。如果该均值相当大，那么这个量将在谱估计中起主导作用，使得小振幅、低频成份会被泄漏所掩盖。因此，在实际中常常使用(10.48)式来估计均值，并且在计算功率谱估计前，从随机信号中减去得出的值估计。虽然样本均值只是零频分量的一个近似的估计，但是将它从信号中减去往往会使得在其相邻频率处得到更好的估计。

10.6.2 周期图的性质

认识到对于 w 的每一个值 $I(\omega)$都是一个随机变量，就可确定功率谱周期图估计的固有性质。通过计算 $I(\omega)$的均值和方差，我们可以确定估计是否是有偏的，是否是一致的。

由(10.53)式可得 $I(\omega)$的期望值为

$$\mathcal{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{LU}\sum_{m=-(L-1)}^{L-1} \mathcal{E}\{c_{vv}[m]\}e^{-j\omega m} \tag{10.56}$$

$c_{ww}[m]$的期望值可以表示为

$$\mathscr{E}\{c_{vv}[m]\} = \sum_{n=0}^{L-1}\mathscr{E}\{x[n]w[n]x[n+m]w[n+m]\}$$
$$= \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m]\mathscr{E}\{x[n]x[n+m]\} \tag{10.57}$$

由于我们假定 $x[n]$是平稳的,所以

$$\mathscr{E}\{x[n]x[n+m]\} = \phi_{xx}[m] \tag{10.58}$$

并且(10.57)式可以改写为

$$\mathscr{E}\{c_{vv}[m]\} = c_{ww}[m]\phi_{xx}[m] \tag{10.59}$$

式中 $c_{ww}[m]$是窗的非周期自相关函数,即

$$c_{ww}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]w[n+m] \tag{10.60}$$

由(10.56),(10.59)式和傅里叶变换的调制/加窗性质(2.9.7 节),可得

$$\mathscr{E}\{I(\omega)\} = \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}[\theta]C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{10.61}$$

其中 $C_{ww}(e^{j\omega})$是窗的非周期自相关函数的傅里叶变换,即

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = |W(e^{j\omega})|^2 \tag{10.62}$$

按照(10.61)式,(修正)周期图是功率谱的有偏估计,因为 $\mathscr{E}\{I/(\omega)\}$不等于 $P_{xx}(\omega)$。的确我们可以看到,真实功率谱与数据窗的非周期自相关函数的傅里叶变换的卷积结果会产生偏差。如果增加窗的长度,可以预计 $W(e^{j\omega})$应当更加集中在 $\omega=0$ 附近,这样 $C_{ww}(e^{j\omega})$看上去就愈像一个周期脉冲串。如果正确选取比例因子 $1/(LU)$,则当 $W(e^{j\omega})$趋近于一个周期脉冲串时,$\mathscr{E}\{I(\omega)\}$应当趋近于 $P_{xx}(\omega)$。通过选择归一化常数 U 就可以调整幅度大小,可使

$$\frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}|W(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{LU}\sum_{n=0}^{L-1}(w[n])^2 = 1 \tag{10.63}$$

或

$$U = \frac{1}{L}\sum_{n=0}^{L-1}(w[n])^2 \tag{10.64}$$

若将 $w[n]$的最大值归一化到 1,则对于矩形窗我们应当选取 $U=1$,而对其它数据窗,要求 U 的值为 $0<U<1$。另一方面,归一化也可以并入 $w[n]$的幅度中。总之,若恰当地归一化,则(修正)周期图是渐近无偏的,也就是说,当窗的长度增加时,偏差趋近于零。

为了检验周期图是否为一致估计,或当窗的长度增加时成为一个一致估计,必须研究周期图方差的特性。即使在最简单的情况下,要得出周期图方差的表达式也是非常困难的。但是已经证明(见 Jenkins 和 Watts,1968),在一个很宽的条件范围内,当窗的长度增加时,有

$$\mathrm{var}[I(\omega)] \simeq P_{xx}^2(\omega) \tag{10.65}$$

这就是说,周期图估计的方差与我们估计的功率谱的大小近似相等。因此,由于方差并不随着窗长度的增加而渐渐趋近于零,所以周期图就不是一个一致估计。

刚才讨论的功率谱周期图估计的性质如图 10.20 所示,图中给出了使用窗长度 $L=16,64,256$ 和 1 024 的矩形窗时白噪声的周期图估计。序列 $x[n]$是由伪随机数发生器得到的,该发生器的输出幅度已调整到使 $|x[n]|\leqslant\sqrt{3}$。一个好的随机数发生器能产生一个幅度

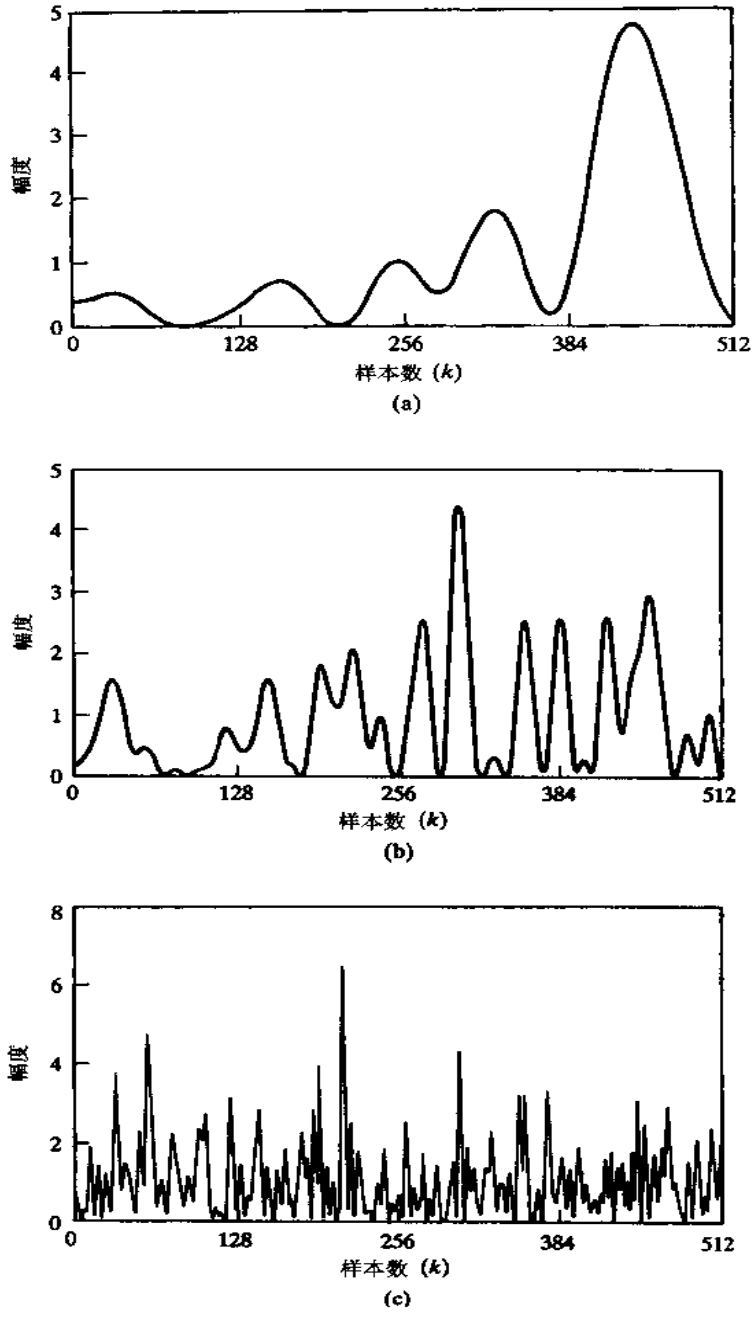


图 10.20　伪随机白噪声序列的周期图

(a) 窗长 $L=16$ 且 DFT 长度 $N=1\,024$；(b) $L=64$ 和 $N=1\,024$；(c) $L=256$ 和 $N=1\,024$；

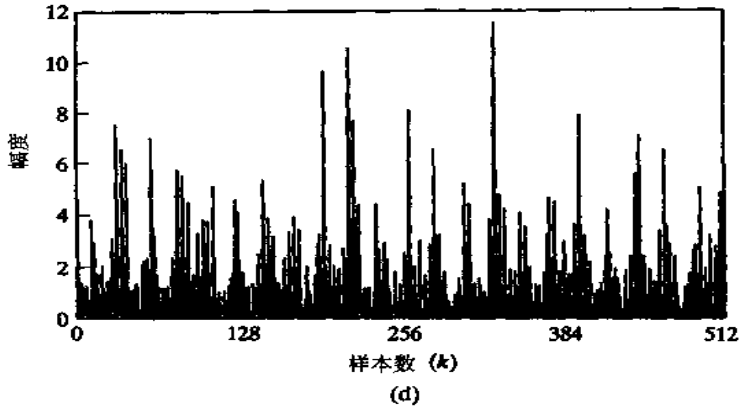


图 10.20(续) (d) $L=1\,024$ 和 $N=1\,024$

均匀分布,并且样本与样本之间的相关性很小的输出序列。在这种情况下,随机数发生器的输出功率谱可以 $P_{xx}(\omega)=\sigma_x^2=1$(对于所有 ω)作为其模型。对于 4 种矩形窗中的每一种,均取归一化常数 $U=1$,而且对于 $N=1\,024$ 在频率 $\omega_k=2\pi k/N$ 处利用 DFT 来计算周期图。也就是

$$I[k]=I(\omega_k)=\frac{1}{L}|V[k]|^2=\frac{1}{L}\left|\sum_{n=0}^{L-1}w[n]x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\right|^2 \qquad (10.66)$$

在图 10.20 中,为了表现其特点,用直线将 DFT 的值连接起来。我们已经知道 $I(\omega)$是 ω 的实偶函数,因此我们只需画出与 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 相对应的 $0\leqslant k\leqslant N/2$ 时的 $I[k]$。我们注意到,随着窗长度 L 的增加,谱估计的起伏加剧。要明白这一点,只要回想一下,虽然我们把周期图方法看作是一种谱估计的直接计算方法,但是我们已经看到,实际上是对(10.54)式的相关函

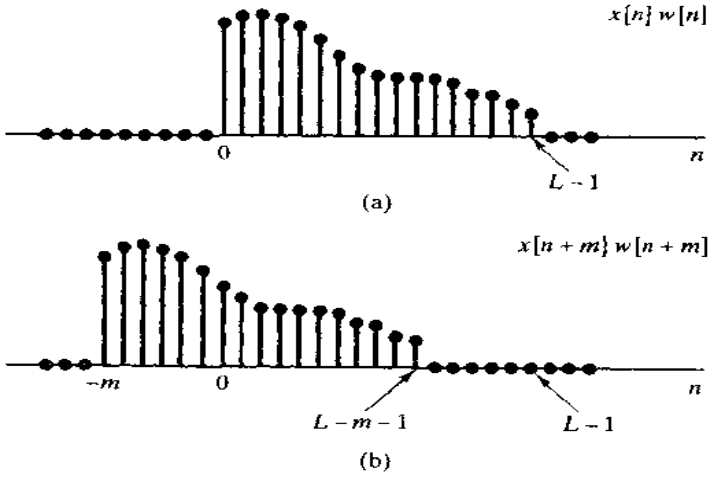


图 10.21 在(10.54)式中所涉及到序列的表示
(a) 有限长序列;(b) 对于 $m>0$ 地平移序列

数的估计作傅里叶变换得到周期图的。图 10.21 画出一个加窗序列 $x[n]w[n]$及其平移形式 $x[n+m]w[n+m]$,正如在(10.54)式中所要求的。从这幅图中我们看到,计算一个具体的相关滞后值 $c_{ww}[m]$,要涉及到 $L-m-1$ 个信号值。这样,当 m 接近于 L 时,在计算中只涉及到少数几个 $x[n]$值,并且可以预料,相关序列的估计对于 m 的这些值将是非常不准确的,并因此还将表现为在 m 的相邻值之间该估计值会显著变化。另一方面,当 m 较小时将涉及到很多样本,并且 $c_{ww}[m]$随 m 的变化程度应当不是很大。取大 m 值时的变化程度在傅里叶变换中将表现为在所有频率处的起伏,因此,取大的 L 值时周期图的估计就趋向于随频率迅速变化。确实可以证明(见 Jenkins and Watts,1986),若 $N=L$,则在 DFT 的频率 $2\pi k/N$ 处周期图的估计是不相关的。因为随着 N 的增大 DFT 的频率变得更加靠近。这一特性与我们要得到好的功率谱估计的目标是不一致的。我们总希望得到一个没有由估计过程引起随机变化的平滑谱估计。这可以通过把多个独立的周期图估计进行平均以减小起伏来完成。

10.6.3 周期图的平均

Bartlett(1953)首先广泛地研究了谱估计中周期图的平均。后来,当计算 DFT 的快速算法提出之后,Welch(1970)把这类计算算法与数据窗 $w[n]$的使用结合在一起导出了对修正周期图进行平均的方法。在周期图平均中先把一个数据序列 $x[n]$$(0\leqslant n\leqslant Q-1)$分成长度为 L 个样本的序列段,并对每段加上长度为 L 的窗;即我们构成序列段

$$x_r[n]=x[rR+n]w[n],\qquad 0\leqslant n\leqslant L-1 \tag{10.67}$$

若 $R<L$,则序列段有重叠,而当 $R=L$ 时序列段为邻接。注意,Q 表示可用数据的长度。全部序列段的数量取决于 R,L 和 Q 的值及其相互关系。特别是,当 K 为满足 $(K-1)R+(L-1)\leqslant Q-1$ 式最大的整数时,会有 K 个全长序列段。第 r 个序列段的周期图为

$$I_r(\omega)=\frac{1}{LU}|X_r(e^{j\omega})|^2 \tag{10.68}$$

式中 $X_r(e^{j\omega})$是 $x_r[n]$的离散时间傅里叶变换。每个 $I_r(\omega)$都具有上面所论述的周期图的性质。周期图平均包括对 K 个周期图的估计 $I_r(\omega)$一起求平均;也就是构成时间平均周期图,定义为

$$\bar{I}(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1}I_r(\omega) \tag{10.69}$$

为了分析 $\bar{I}(\omega)$的偏差和方差,让我们取 $L=R$ 以便使序列段不重叠,并且假设对于 $m>L$,$\phi_{xx}[m]$很小,这就是说在 L 以外的信号样本近似为不相关的。其次,有理由假定周期图 $I_r(\omega)$是同分布的独立随机变量。在这一假设下,$\bar{I}(\omega)$的期望值为

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\}=\frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1}\mathscr{E}\{I_r(\omega)\} \tag{10.70}$$

或者,由于我们假设这些周期图是独立的和同分布的,因此

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\}=\mathscr{E}\{I_r(\omega)\}\qquad \text{对任意的 } r \tag{10.71}$$

由(10.61)式可得

$$\mathscr{E}\{\bar{I}(\omega)\}=\mathscr{E}\{I_r(\omega)\}=\frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\theta)C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{10.72}$$

式中 L 为窗的长度。当窗 $w[n]$是矩形窗时,平均周期图法称为 **Bartlett 法**,并且在这种情况

下可以证明

$$c_{ww}[m] = \begin{cases} L - |m|, & |m| \leqslant (L-1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{10.73}$$

以及

$$C_{ww}(e^{j\omega}) = \left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2 \tag{10.74}$$

这就是说，平均周期图谱估计的期望值是真实功率谱与三角形序列 $C_{ww}[n]$ 傅里叶变换的卷积，$C_{ww}[n]$ 可看做是矩形窗的自相关函数。因此，平均周期图也是功率谱的有偏估计。

为了分析方差我们利用如下事实：K 个独立同分布随机变量之和的方差是每个独立随机变量之方差的 $1/K$ 倍(见 Papoulis,1991)。所以，平均周期图的方差为

$$\mathrm{var}[\bar{I}(\omega)] = \frac{1}{K}\mathrm{var}[I_r(\omega)] \tag{10.75}$$

或者由(10.65)式可得

$$\mathrm{var}[\bar{I}(\omega)] \simeq \frac{1}{K}P_{xx}^2(\omega) \tag{10.76}$$

因此，$\bar{I}(\omega)$ 的方差反比于被平均的周期图的个数，并且随着 K 的增加，方差趋近于零。

从(10.74)式可以看出，当序列段 $x_r[n]$ 的长度 L 增大时 $C_{ww}(e^{j\omega})$ 的主瓣宽度减小，因此由(10.72)式可知，$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega)\}$ 也就更接近于 $P_{xx}(\omega)$。但是，对于固定的全部数据长度 Q，序列段总的个数(设 $L=R$)为 Q/L，因此随着 L 的增加 K 减小。相应地由(10.76)式可知，$\bar{I}(\omega)$ 的方差将会增加。这样，如同统计估计问题中的典型情况一样，对于固定的数据长度需要在偏差和方差之间进行折衷。然而，当数据长度 Q 增大时，就能允许 L 和 K 同时增大，因此随着 Q 接近于 ∞，$\bar{I}(\omega)$ 的偏差和方差均可接近于零。所以，周期图平均可给 $P_{xx}(\omega)$ 出的渐近无偏一致估计。

以上的讨论假定在计算依时周期图时使用非重叠的矩形窗。如果使用不同形状的窗，Welch(1970)曾证明平均周期图的方差仍然具有如(10.76)式给出的特性。Welch 还研究了重叠窗的情况，并证明如果重叠为 1/2 窗的长度，由于序列段的数目加倍，则方差能进一步减小几乎可到 1/2。但是过多的重叠不会继续使方差减小，因为当重叠增加时序列段的独立性将越来越差。

10.6.4 用 DFT 计算平均周期图

如同周期图一样，只有在离散频率处才能用显式计算出平均周期图。因为计算 DFT 可以利用快速傅里叶变换算法，所以对于某个适当选取的 N，取频率 $\omega_k = 2\pi k/N$，是一种十分方便和广泛使用的选择。从(10.69)式可以看出，如果用 $x_r[n]$ 的 DFT 来替换(10.68)式中 $x_r[n]$ 的傅里叶变换，则可以得出在 DFT 频率 $\omega_k = 2\pi k/N$，$k = 0, 1, \cdots, N-1$，处 $\bar{I}(\omega)$ 的样本。具体地讲，若用 $X_r[k]$ 表示 $x_r[n]$ 的 DFT，有

$$I_r[k] = I_r(\omega_k) = \frac{1}{LU}|X_r[k]|^2 \tag{10.77a}$$

$$\bar{I}[k] = \bar{I}(\omega_k) = \frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1} I_r[k] \tag{10.77b}$$

我们将把 $I_r(2\pi k/N)$ 记作序列 $I_r[k]$，把 $\bar{I}(2\pi k/N)$ 记作序列 $\bar{I}[k]$。按照(10.77a)和

(10.77b)式取归一化因子 LU，并对加窗数据段的 DFT 进行平均，在 N 个等间隔的频率处来计算功率谱的平均周期图估计。这种功率谱估计的方法提供了一种在谱估计的分辨率和方差之间进行折衷处理的非常方便的手段。用第 9 章中讨论过的快速傅里叶变换算法来计算是非常简便和有效的。这种方法与将在 10.7 节中讨论的其它方法比较而言，其最重要的优点是它的谱估计值总是非负的。

10.6.5 周期图分析举例

功率谱分析是信号建模的有用工具，它也可用于信号检测，特别是发现采样信号中的隐蔽周期性。作为平均周期图方法应用的一个例子，我们来研究序列

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + e[n] \tag{10.78}$$

其中 θ 是 0 到 2π 之间均匀分布的随机变量，$e[n]$ 是零均值白噪声序列，其功率谱近似为常量，即对于所有的 ω，$P_{ee}(\omega)=\sigma_e^2$。在这种形式的信号模型中余弦常常是希望的分量，而 $e[n]$ 是一个不希望的噪声分量。在实际的信号检测问题中我们往往十分关心余弦信号的功率比噪声功率小的情况可以证明(见习题 10.34)，在频率的一个周期上，这个信号的功率谱为

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)] + \sigma_e^2 \qquad |\omega| \leqslant \pi \tag{10.79}$$

由(10.72)式和(10.79)式可得，平均周期图的期望值是

$$\mathcal{E}\{|\bar{I}(\omega)|\} = \frac{A^2}{4LU}[C_{ww}(e^{j(\omega-\omega_0)}) + C_{ww}(e^{j(\omega+\omega_0)})] + \sigma_e^2 \tag{10.80}$$

图 10.22 和 10.23 表明平均周期图法对于如(10.78)式中所示信号的用法，其中取 $A=0.5$，$\omega_0=2\pi/21$ 及随机相位 $0\leqslant\theta<2\pi$。噪声在幅度上是均匀分布的，也就是 $-\sqrt{3}<e[n]\leqslant\sqrt{3}$。因此，可以很容易地证明 $\sigma_e^2=1$。噪声分量的均值为零。图 10.22 绘出了序列 $x[n]$ 的 101 个样本。因为噪声分量的最大振幅为$\sqrt{3}$，所以不能明显看到在序列 $x[n]$ 中的余弦分量。

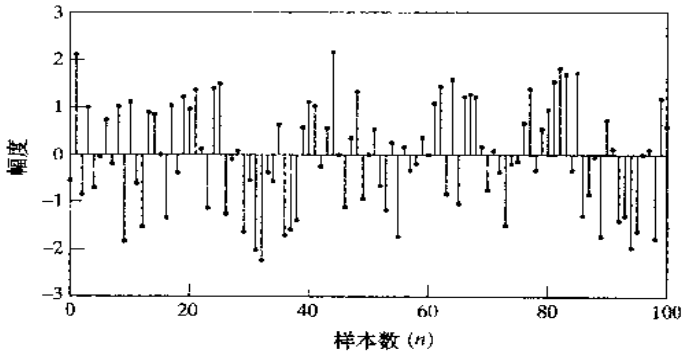


图 10.22 如(10.78)式给出的带有白噪声的余弦序列

图 10.23 表示对于幅度为 1(因此 $U=1$)并且长度 $L=1\,024,256,64$ 和 16 的矩形窗功率谱的平均周期图估计值，在所有情况下记录数据的总长度 $Q=1\,024$。除了图 10.23(a)之外，窗之间有二分之一窗长的重叠。图 10.23(a)是全部记录数据的周期图，图 10.23(b)，(c)和(d)分别绘出对于 $K=7,31$ 和 127 个数据段的平均周期图。在所有的情况下均用 1 024 点

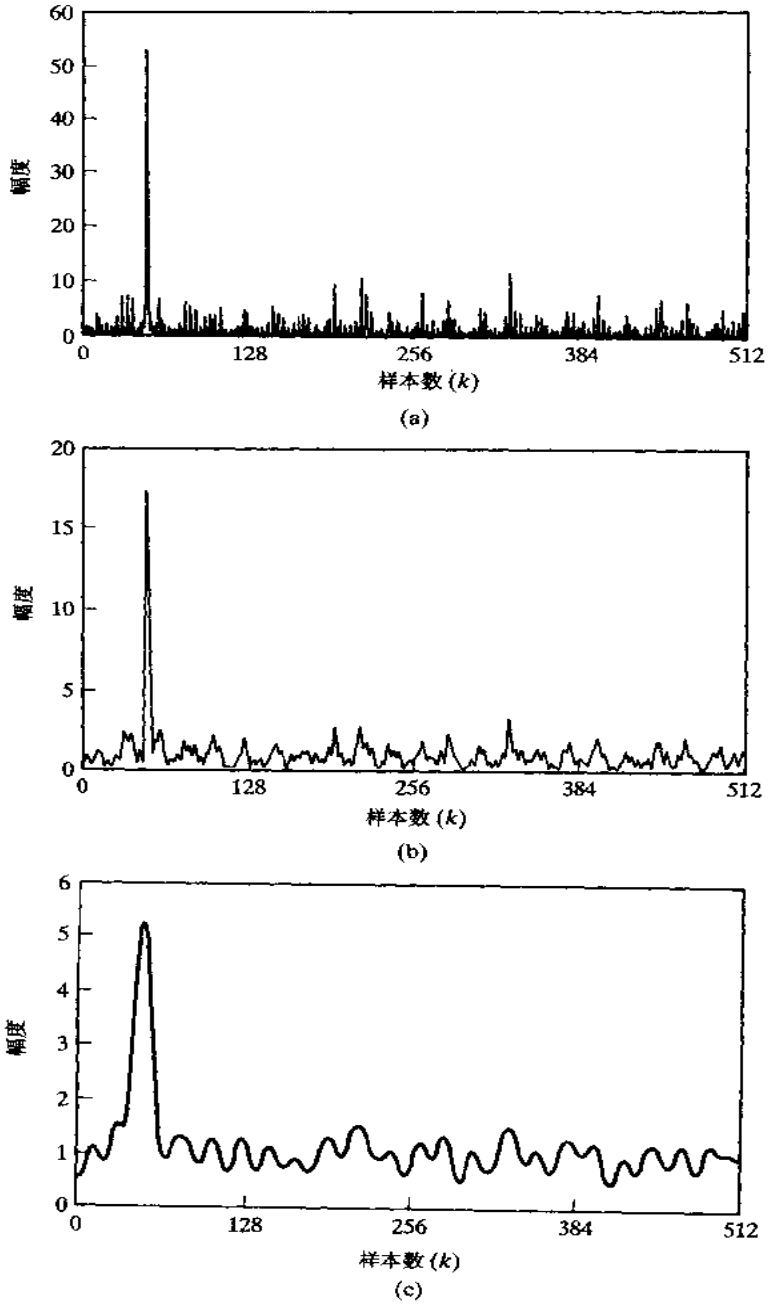


图 10.23　长度 $Q=1\,024$ 的信号之平均周期图举例

(a) 窗长 $L=Q=1\,024$(只有一段)的周期图;(b) $K=7$ 和 $L=256$(重叠 $L/2$);(c) $K=32$ 和 $L=64$;

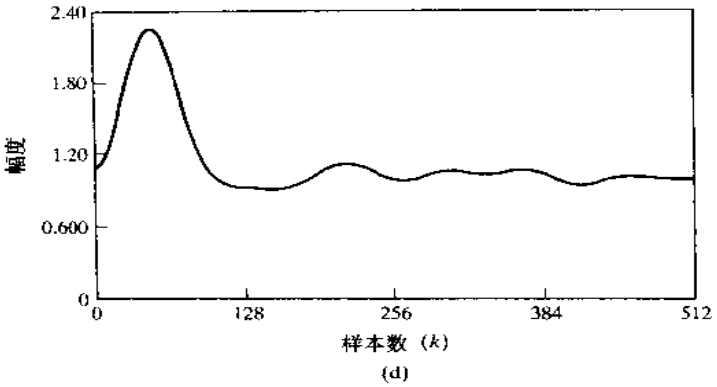


图 10.23(续) (d) $K=127$ 和 $L=16$

DFT 计算在频率 $\omega_k=2\pi k/1\ 024$ 处的平均周期图。(对于窗长 $L<1\ 024$ 的情况,我们在计算 DFT 之前必须对加窗的序列补零)因此,频率 $\omega_0=2\pi/21$ 位于 DFT 频率 $\omega_{48}=2\pi\times 48/1\ 024$ 和 $\omega_{49}=2\pi\times 49/1\ 024$ 之间。

当利用这些功率谱的估计值来检测余弦分量的存在和/或频率时,我们可以搜索谱估计中的最大峰,并且将它们的大小与其余的谱估计值进行比较。利用(10.74)式和(10.80)式,得到在频率 ω_0 处平均周期图的期望值为

$$\mathcal{E}\{\bar{I}(\omega_0)\}=\frac{A^2L}{4}+\sigma_\varepsilon^2 \tag{10.81}$$

这样,如果要让由于余弦分量造成的峰超出平均周期图的变化量,则在这种特殊的情况下,我们必须选取 L 使 $A^2L/4\gg\sigma_\varepsilon^2$。这点如图 10.23(a)所示,其中对于记录数据长度 Q,应使 L 尽可能的大。我们看到,由于 $L=1\ 024$ 使得矩形窗自相关函数的傅里叶变换的主瓣很窄,因此能够分辨开频率十分靠近的正弦信号。应当注意,对于这个例子的参数($A=0.5$,$\sigma_\varepsilon^2=1$)及取 $L=1\ 024$ 的情况,周期图在频率 $2\pi/21$ 处的谱峰幅度值接近但不等于所期望的值 65。我们还看到周期图中幅度大于 10 的其它谱峰。显然,如果余弦信号的振幅 A 只减小一半,很可能它的峰就与周期图中的固有起伏混淆了。

我们已经看到,减小谱估计方差的可行方法只能是增大信号的长度。这并不总是可行的,即使可行,数据越长,则处理的工作量越大。如果我们使用较短的窗函数并且对更多的数据段进行平均,则可以在保持记录数据长度不变的同时,减小估计的起伏。图 10.23 中的(b),(c)和(d)部分说明了这样做的代价。应注意,所用的数据段越多,则谱估计的方差就越小,但是根据(10.81)式对于余弦信号,谱峰的幅值也减小。这样,我们再次面对折衷处理。如果我们专门比较图 10.23 的(a),(b)和(c)部分中离开谱峰的高频部分,可以清楚地看出,窗越短谱估计的方差越小。回想一下,伪随机噪声发生器模型的理想化功率谱是对各频率均为常数($\sigma_\varepsilon^2=1$)。在图 10.23(a)中,当真实谱为 1 时有的噪声谱峰的幅度可达到 10。图 10.23(b)中噪声谱在 1 上下的起伏变化不超过 3,而在图 10.23(c)中噪声谱在 1 上下的变化不超过 0.5。然而,较短的窗函数也会减小任何窄带分量的峰值,并且也降低了分辨十分靠近的正弦信号的能力。这种峰值的减小由图 10.23 中也可清楚地看出。另外,如果我们把图 10.23(b)中的振幅 A 减

小一半，则谱峰高度约为4，它与高频区中许多其它的谱峰没有多少区别。图10.23(c)中若将A减小一半则会使得谱峰高度约为1.25，此时无法将它与估计中的其它谱峰加以区别。在图10.23(d)中窗的长度已非常短，这样显著减小了谱估计的起伏，但是，对于余弦信号的谱峰则变得很宽且即使当$A=0.5$时也只能勉强超过噪声。窗长度的任何减少都将导致由于来自负频率分量的谱泄漏而造成在低频区没有显著的谱峰。

这个例子证实，平均周期图提供了一种在谱估计分辨率和降低方差之间进行折衷的直接了当的方法。虽然这个例子的主题是噪声中正弦信号的检测，但是平均周期图也可以用于信号建模。图10.23的谱估计结果清楚地表明，形式如(10.78)式的信号模型以及该模型的大多数参数都能够从平均周期图功率谱的估计中估计出来。

10.7 利用自相关序列估计的随机信号谱分析

上一节我们研究了将周期图作为随机信号功率谱的一种直接估计方法。周期图或平均周期图作为一种直接估计方法，是在可以直接求出随机信号样本的傅里叶变换的意义上来说的。另一种方法是根据功率谱是自相关函数的傅里叶变换这一事实，首先估计自相关函数$\phi_{xx}[m]$，然后计算这个估计值的傅里叶变换。在这一节我们将揭示这种方法的一些重要特性，并说明如何用DFT去实现它。

让我们像以前一样，假设已知一随机信号的一段有限记录。这段序列记作

$$v[n]=\begin{cases}x[n] & 0\leqslant n\leqslant Q-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{10.82}$$

考虑自相关序列的估计为

$$\hat{\phi}_{xx}[m]=\frac{1}{Q}c_{vv}[m] \tag{10.83}$$

其中，由于$c_{vv}[-m]=c_{vv}[m]$，

$$c_{vv}[m]=\sum_{n=0}^{Q-1}v[n]v[n+m]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1}x[n]x[n+|m|], & |m|\leqslant Q-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{10.84}$$

对应于$x[n]$加矩形窗序列段的非周期相关函数。

为了确定自相关序列这种估计的性质，我们来研究随机变量$\hat{\phi}_{xx}[m]$的均值和方差。从(10.83)式和(10.84)式可得

$$\mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\}=\frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1}\mathscr{E}\{x[n]x[n+|m|]\}=\frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1}\phi_{xx}[m] \tag{10.85}$$

并且因为平稳随机过程$\phi_{xx}[m]$与n无关，

$$\mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\}=\begin{cases}\left(\frac{Q-|m|}{Q}\right)\phi_{xx}[m], & |m|\leqslant Q-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{10.86}$$

由(10.86)式可以看出，因为$\mathscr{E}\{\phi_{xx}[m]\}$不等于$\hat{\phi}_{xx}[m]$，所以$\hat{\phi}_{xx}[m]$是$\phi_{xx}[m]$的有偏

估计，但是若 $|m| \ll Q$，则偏差很小。还可以看出，对于 $|m| \leqslant Q-1$，自相关序列的一种无偏估计器是

$$\overset{\vee}{\phi}_{xx}[m] = \left(\frac{1}{Q-|m|}\right)c_{vv}[m] \tag{10.87}$$

也就是说，如果我们用滞后乘积的求和中非零项的个数，而不是用数据记录中全部样本的个数来除，则该估计器就是无偏的。

即使作了使问题简化的假设，自相关函数估计的方差仍然是很难计算的。但是对于 $\overset{\vee}{\phi}_{xx}[m]$ 和 $\overset{\vee}{\phi}_{xx}[m]$ 的方差近似计算式可以在 Jenkins and Watts(1968)的著作中找到。为了达到我们在这里的目的，对(10.84)式作一观察就足够了，可以看出当 $|m|$ 接近于 Q 时，在自相关估计的计算中涉及到 $x[n]$ 的样本越来越少，因此可以预计自相关估计的方差将随着 $|m|$ 的增大而增加。在周期图的情况下，这种增加的方差影响到所有频率处的谱估计值，因为在周期图的计算中隐含地涉及到全部的自相关滞后值。但是在用显式计算自相关估计时，我们可以自由选择包括在功率谱估计中的那些相关滞后值。因此，我们定义功率谱估计

$$S(\omega) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \hat{\phi}_{xx}[m]w_c[m]e^{-j\omega m} \tag{10.88}$$

式中 $w_c[m]$ 是一个长为 $(2M-1)$ 的对称窗，它加在估计出的自相关函数上。当 $x[n]$ 为实数时，我们要求自相关序列和窗的乘积是一个偶序列，以使功率谱估计为 ω 的实偶函数，所以相关窗必须是一个偶序列。通过限制相关窗的长度使 $M \ll Q$，这样就只包括那些方差小的自相关估计值。

在频域最容易理解对自相关序列加窗来减少功率谱估计的方差的机理。从(10.53)，(10.54)和(10.84)式可得，对于 $0 \leqslant n \leqslant (Q-1)$ 若取 $w[n]=1$，即一个矩形窗，周期图就是自相关估计 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 的傅里叶变换，也就是

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}c_{vv}[m] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{Q}|V(e^{j\omega})|^2 = I(\omega) \tag{10.89}$$

因此，根据(10.88)式，由 $\hat{\phi}_{xx}[m]$ 加窗所得出的谱估计值是如下形式的卷积：

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} I(\theta)W_c(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{10.90}$$

从(10.90)式我们看到，把窗 $w_c[m]$ 加在自相关估计上的影响是，将周期图与自相关窗的傅里叶变换进行卷积。这将有平滑周期图谱估计剧烈起伏的作用。相关窗越短，谱估计越平滑，反之亦然。

功率谱 $P_{xx}(\omega)$ 是一个频率的非负函数，根据定义，周期图和平均周期图自动具有这种性质。可是，由(10.90)式显而易见，对于 $S(\omega)$，非负性是不能保证的，除非我们进一步增加条件

$$W_c(e^{j\omega}) \geqslant 0, \qquad -\pi < \omega \leqslant \pi \tag{10.91}$$

三角形(Bartlett)窗的傅里叶变换可以满足这个条件，但是矩形窗、Hanning 窗、Hamming 窗和 Kaiser 窗则不满足该条件。所以，虽然后面的这些窗具有比三角形窗更低的旁瓣，但是谱的泄漏可能造成在谱的小幅值范围内出现负的谱估计值。

平滑周期图的期望值为

$$\mathscr{E}\{S(\omega)\} = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \mathscr{E}\{\hat{\phi}_{xx}[m]\} w_c[m] e^{-j\omega m}$$
$$= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] \left(\frac{Q-|m|}{Q}\right) w_c[m] e^{-j\omega m} \quad (10.92)$$

若 $Q \gg M$，则在(10.92)式中可以忽略$(Q-|m|)/Q$项①，从而得到

$$\mathscr{E}\{S(\omega)\} \cong \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}[m] w_c[m] e^{-j\omega m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\theta) W_c[e^{j(\omega-\theta)}] d\theta \quad (10.93)$$

因此，加窗的自相关估计会导致功率谱的有偏估计。正如平均周期图那样，在谱的分辨率与减小谱估计的方差之间进行折衷是可能的。假设数据记录的长度固定，若我们愿意接受对于靠近的窄带谱分量有较低的分辨率，则可以得到较小的方差，或者，若我们能够接受较大的方差，则可以得到较高的分辨率。如果我们可以较长时间地随意观察信号(即增加数据记录的长度Q)，则可以同时改善分辨率和方差。若相关窗是归一化的，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W_c(e^{j\omega}) d\omega = 1 = w_c[0] \quad (10.94)$$

则谱估计 $S(\omega)$是渐近无偏的。在这种归一化下，随着 Q 与相关窗长度的同时增加，相关窗的傅里叶变换接近于一个周期脉冲串，并且(10.93)式的卷积将会与 $P_{xx}(\omega)$相同。

已经证明(见 Jenkins and Watts,1968)，$S(\omega)$的方差为如下形式：

$$\mathrm{var}[S(\omega)] \simeq \left(\frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m]\right) P_{xx}^2(\omega) \quad (10.95)$$

比较(10.95)式与周期图在(10.65)式中的相应结果可以得出结论：要减小谱估计的方差，应当选择 M 和尽量满足(10.91)式条件的窗的形状，使得因子

$$\left(\frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2[m]\right) \quad (10.96)$$

尽可能地小。习题 10.29 涉及到计算几种常用窗的这一方差缩减因子。

根据自相关函数估计的傅里叶变换来估计功率谱相对于平均周期图法来说是另一种很好的方法。这并不是说它在任何一般的意义上都好，这种方法只是具有不同的特点，并且有不同的实现方式。在一些场合，可能希望同时计算自相关序列和功率谱的估计，在这种情况下应当很自然地使用本节的方法。习题 10.37 讨论了由平均周期图确定自相关估计的问题。

10.7.1 利用 DFT 计算相关函数和功率谱估计

我们正在研究的功率谱估计方法需要求自相关估计

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-|m|-1} x[n]x[n+|m|] \quad (10.97)$$

其中$|m| \leqslant M-1$。因为 $\hat{\phi}_{xx}[-m] = \hat{\phi}_{xx}[m]$，所以只需要对 m 的非负值，即$0 \leqslant m \leqslant M-1$来计算(10.97)式。如果我们观察到 $\hat{\phi}_{xx}[m]$是有限长序列 $x[n]$和 $x[-n]$的非周期离散卷积，则可以方便地使用 DFT 及其相关的快速算法来计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$。若我们计算出 $x[n]$的 N 点 DFT $X[k]$，并且乘以 $X^*[k]$，可得$|X[k]|^2$，它相当于有限长序列 $x[n]$和 $x[((-n))_N]$

① 更准确的说，我们可以定义一个有效的相关窗 $w_c[m] = w_c[m](Q-|m|)/Q$。

的循环卷积，即**循环自相关**。正如我们在 8.7 节中的讨论所指出并在习题 10.27 中所得出的，用值为零的样本加长序列 $x[n]$，并使循环自相关在区间 $0 \leqslant m \leqslant M-1$ 上等于所要求的非周期自相关应当是可能的。

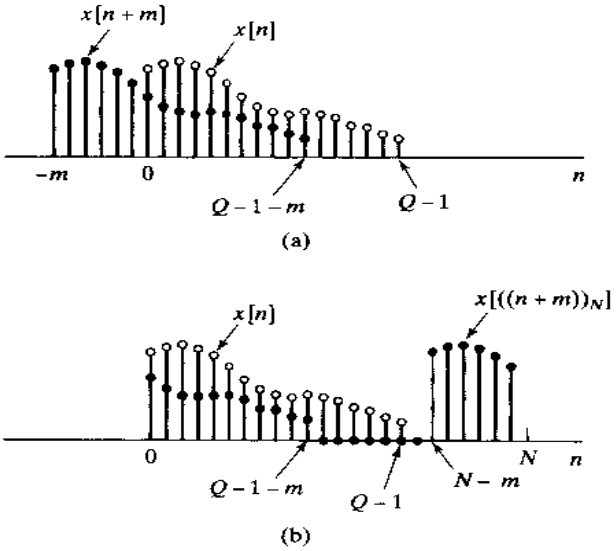


图 10.24　循环自相关的计算
(a) 长为 Q 的有限长序列 $x[n]$ 和 $x[n+m]$；
(b) 加在循环相关中的 $x[n]$ 和 $x[((n+m))_N]$

要想知道对于 DFT 如何来选取 N，我们来研究一下图 10.24。图 10.24(a)绘出了 m 取某一个正值时的两个序列 $x[n]$ 和 $x[n+m]$。图 10.24(b)绘出了在与 $X[k]|^2$ 相对应的循环自相关中所涉及到的序列 $x[n]$ 和 $x[((n+m))_N]$。显然，如果当 $0 \leqslant m \leqslant M-1$ 时 $x[((n+m))_N]$ 不卷绕并且与 $x[n]$ 重叠，则循环自相关对于 $0 \leqslant m \leqslant M-1$ 将等于 $\hat{\phi}_{xx}[m]$。由图 10.24(b)可知，无论 $N-(M-1) \geqslant Q$ 还是 $N \geqslant Q+M-1$，都属于这种情况。

总之，我们可以用如下步骤来计算对于 $0 \leqslant m \leqslant M-1$ 的 $\hat{\phi}_{xx}[m]$：

1. 用 $(M-1)$ 个零样本加长 $x[n]$ 形成一个 N 点序列。
2. 计算 N 点 DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

3. 计算

$$|X[k]|^2 = X[k]X^*[k] \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

4. 计算 $|X[k]|^2$ 的 IDFT 得

$$\tilde{c}_{vv}[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km} \qquad m = 0,1,\cdots,N-1$$

5. 用 Q 除所得序列，得到自相关估计

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\tilde{c}_{vv}[m] \qquad m = 0,1,\cdots,M-1$$

这是所要求的自相关值的集合，对于负的 m 值它可以对称地进行延拓。

若 M 很小，则简单地直接计算(10.97)式还是比较有效的。在这种情况下，全部计算量与 $Q \times M$ 成正比。可是，如果用第 9 章中讨论过的 FFT 算法并取 $N \geqslant Q + M - 1$ 来计算这一步骤中的 DFT，则全部计算量近似地与 $N\log_2 N$(N 为 2 的幂)成正比。因此，对于充分大的 M 值，利用 FFT 比直接计算(10.97)式更有效。得失相当的准确 M 值将取决于 DFT 计算的具体实现方式，但是，如像由 Stockham，(1966)所证明的那样，这个值很可能小于 $M = 100$。

我们应当记得，为了减小自相关序列或者由其估计出的功率谱的估计方差，必须用大的记录长度 Q 值。在这种情况下，要有效地计算由上面介绍的步骤所要求的($N = Q + M - 1$)点 DFT，可能是不方便或者是不现实的。但是，由于 M 通常比 Q 小得多，此时可以用类似于在 8.7.3 节所讨论过的，对一个有限长脉冲响应和一个长度不定的输入序列进行卷积所用的方法，对序列 $x[n]$分段。Rader(1970)曾提出一种特别有效且灵活的方法，该方法利用了许多实序列之 DFT 的性质以减少所需要的计算量。这一方法的推导是习题 10.38 的基本内容。

一旦计算出自相关估计，通过构造有限长序列

$$s[m] = \begin{cases} \hat{\phi}_{xx}[m]w_c[m] & 0 \leqslant m \leqslant M-1 \\ 0, & M \leqslant m \leqslant N-M \\ \hat{\phi}_{xx}[N-m]w_c[N-m] & N-M+1 \leqslant m \leqslant N-1 \end{cases} \tag{10.98}$$

式中 $w_c[m]$是对称相关窗，就能够计算在频率 $\omega_k = 2\pi k/N$ 处的功率谱估计 $S(\omega)$的样本。因此 $s[m]$的 DFT 为

$$S[k] = S(\omega)\Big|_{\omega = 2\pi k/N}, \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{10.99}$$

其中 $S(\omega)$是如(10.88)式所定义的加窗自相关序列的傅里叶变换。注意，只要方便和可能，应选取 N 尽可能大，这样可以得到 $S(\omega)$在相互十分靠近的频率处的样本。但是，频率分辨率总是由窗 $w_c[m]$的长度和形状所决定的。

10.7.2 以自相关序列的估计为基础的功率谱估计举例

在第 4 章中我们曾假设由量化引入的误差是一个白噪声随机过程。我们可以利用本节的方法通过估计量化噪声的自相关序列和功率谱来检验这个假设的正确性。

考虑图 10.25 中所描述的实验。以 10 kHz 的采样率对经过低通滤波后的语音信号 $x_c(t)$进行采样，得到一个样本序列 $x[n]$。(虽然 A/D 转换器已将样本量化到 12 比特，从本实验的目的出发，我们假定没有对样本量化)样本重新定标，使得$|x[n]| \leqslant 16\,000$。首先用一个 8

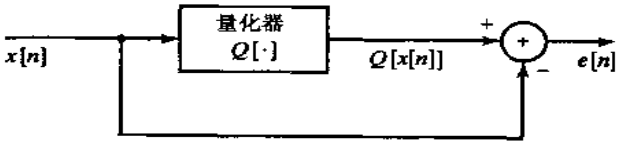
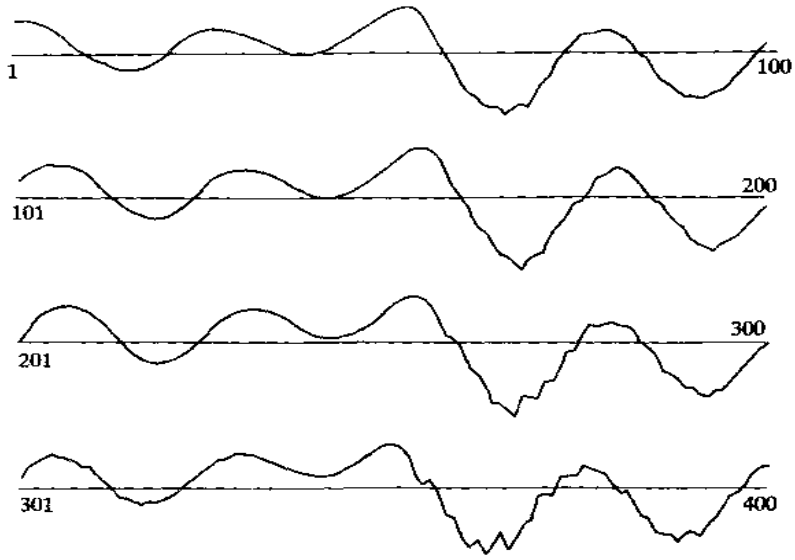
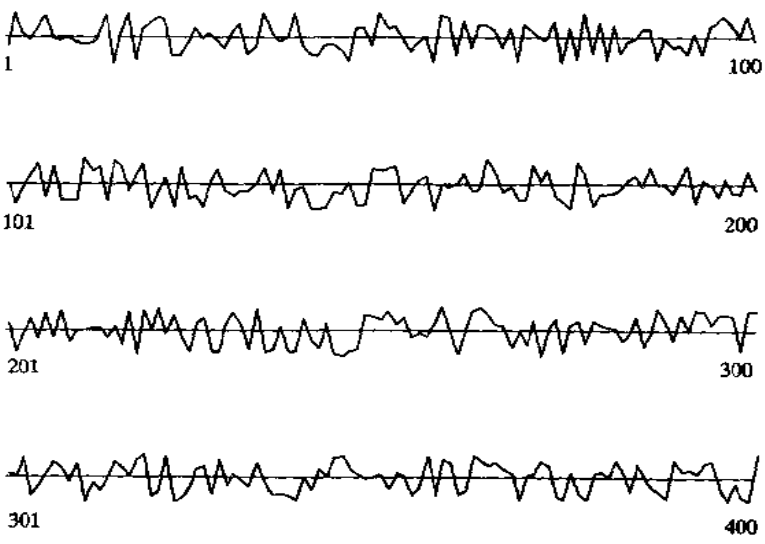


图 10.25 获得量化噪声序列的过程



(a)



(b)

图 10.26 (a) 语音波形；(b) 对应的 8 比特量化噪声(相对于图(a) 放大 66 倍)，每条线相应于 100 个连续的样本，为了作图方便起见将它们用直线连接起来

比特的线性量化器对这些样本量化，并且计算相应的误差序列 $e[n] = Q[x[n]] - x[n]$，如图 10.25 所示。图 10.26(a)绘出了 400 个接续的语音信号样本，而图 10.26(b)绘出了相应的误差序列(为了作图方便起见，用直线将样本连接起来)。对这两幅图的观察和比较可以加强

我们对前面所采用的模型的信念，但是量化噪声谱的平坦性只有通过估计量化噪声 $e[n]$ 的功率谱才能得以证实。

图10.27表示对于长度为 $Q=2\,000$ 个样本的记录的归一化自相关和功率谱的估计。

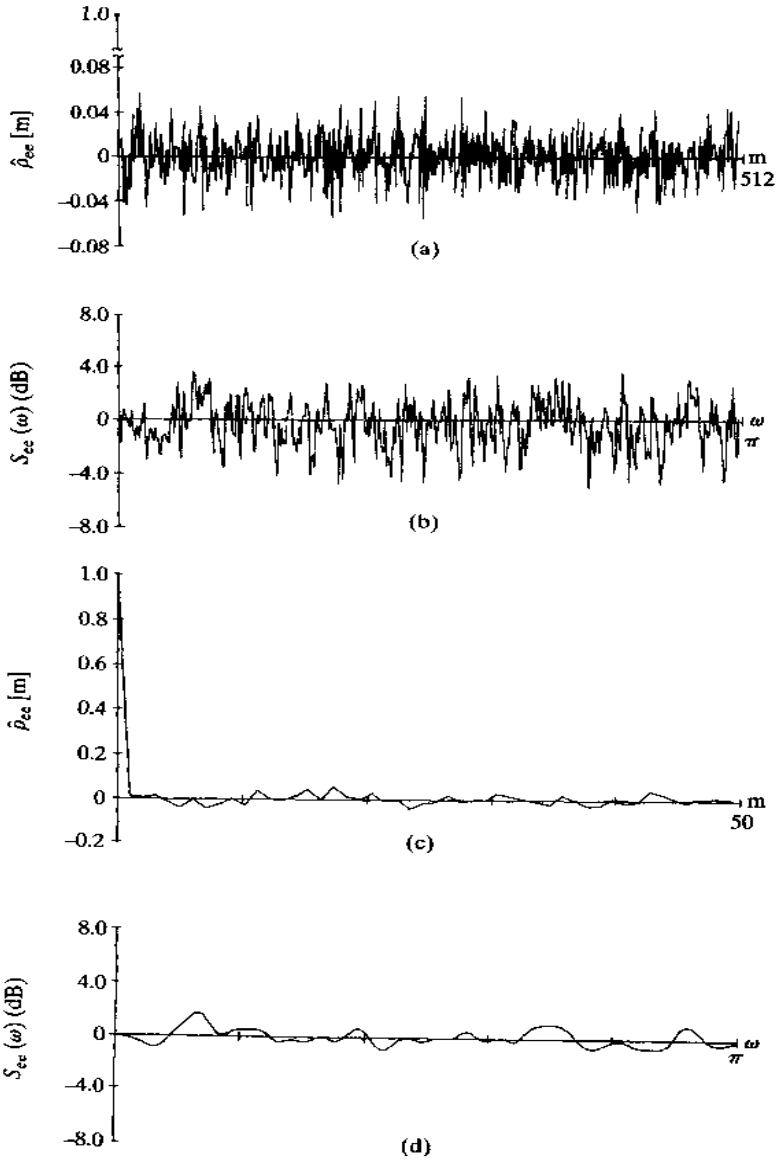


图 10.27 (a) 对于 8 比特量化噪声的归一化自相关估计，记录长度 $Q=2\,000$；
(b) 用 $M=512$ 的 Bartlett 窗时的功率谱估计；
(c) 归一化自相关估计，$0\leqslant m\leqslant 50$；
(d) 用 $M-50$ 的 Bartlett 窗时的功率谱估计

当 $M=512$ 时，在计算自相关序列估计之前，要先估计噪声序列的均值并将其减去。用 $\hat{\phi}_{ee}[0]$ 除所得到的自相关估计就能得出归一化估计 $\hat{\rho}_{ee}[m]=\hat{\phi}_{ee}[m]/\hat{\phi}_{ee}[0]$，如图 10.27(a)和(c)所示。注意，归一化自相关在 $m=0$ 处为 1.0，而在别处则很小。的确对于 $1\leqslant m\leqslant 512$，$-0.054\ 8\leqslant \hat{\rho}_{xx}[m]\leqslant 0.057\ 9$。这一结果看上去与我们有关误差序列在样本间不相关的假设相一致。

正如在 10.7.1 节所讨论的，通过对归一化的自相关加一个 Bartlett 窗，并取 $M=512$ 来估计功率谱。结果以 dB 计，如图 10.27(b)所示，它表现出在 0dB(白噪声的归一化功率谱值)上下十分无规则的起伏。一种较平滑的估计如图 10.27(d)所示。在这种情况下使用了 M=50 的 Bartlett 窗。将图 10.27(b)与图 10.27(d)作一比较，可以清楚地看出，所得结果的平滑是以牺牲分辨率为代价的。由图 10.27(d)可知，对于所有频率，谱估计值均在 −1.097dB 和 +1.631dB之间。因此，这再次促使我们相信，白噪声模型对于这种量化情况是合适的。

虽然我们已经定量地计算出自相关和功率谱的估计，但是我们对于这些量的解释还只是定性的。现在有理由提出问题，若 $e[n]$确定一个白噪声过程，那么自相关应当多么小？为了给出这类问题的定量答案，应当计算我们估计值的置信区间，并且利用统计判决理论。(对于一些白噪声的检测问题请参阅 Jenkins and Watts,1968 年的著作。)然而在许多情况下，这种附加的统计处理是不必要的。一种通常可行的处理方法是，只要观察到在除 $m=0$ 以外的其它各处，归一化自相关均很小，就可以使人十分放心和满意了。

本章最重要的结论之一是，如果增加记录长度，则平稳随机过程的自相关和功率谱估计应当得到改善。图 10.28 就说明了这一点，它与图 10.27 相对应，只是将 Q 增加到 14 000 个样本。回想一下，自相关估计的方差正比于 $1/Q$。因此，Q 从 2 000 增加到 14 000 应当使估计方差减小大约 7 倍。比较图 10.27(a)和图 10.28(a)就可证明这一结果。$Q=2\ 000$ 时，估计

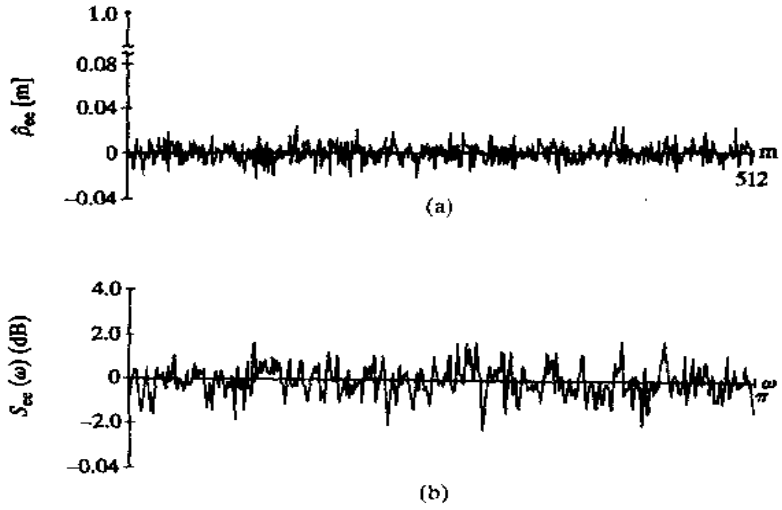


图 10.28 (a) 对于 8 比特量化噪声的归一化自相关估计，记录长度 $Q=14\ 000$；
(b) 用 $M=512$ 的 Bartllett 窗时的功率谱估计；

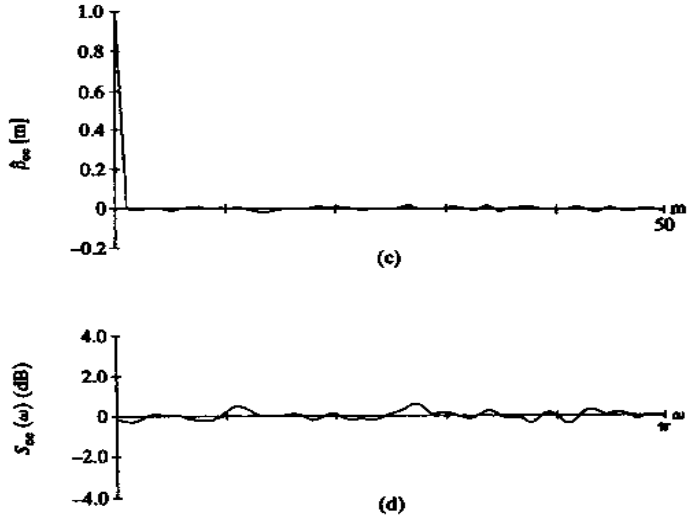


图 10.28(续) (c) 归一化自相关估计，$0 \leqslant m \leqslant 50$；
(d) 用 $M=50$ 的 Bartlett 窗时的功率谱估计

值落在 −0.054 8 到 +0.057 9 的范围内，而当 $Q=14\ 000$ 时，估计值落在 −0.025 4 到 +0.023 1的范围内。比较当 $Q=2\ 000$ 和 $Q=14\ 000$ 时估计值的变化范围表明，正如我们预料的，估计值的方差减小了 7 倍[①]。根据(10.96)式也可预见，谱估计的方差会有类似的减小。分别比较图 10.27(b)和(d)与图 10.28(b)和(d)，这一点也显然可见。(必须注意，两组图中所用比例不同)

在第 4 章中我们曾表明，只要量化台阶很小，白噪声模型就是合理的。当比特数很小时，这个条件就不满足了。为了观察对量化噪声谱的影响，现只用 8 个量化阶或 3 比特来重复前面的实验。图 10.29 表示对图 10.26(a)中所示语音波形段进行 3 比特量化时的量化误差。注意，部分误差波形看上去非常像原来的语音波形。可以预料到，这一点将反映在功率谱的估计中。

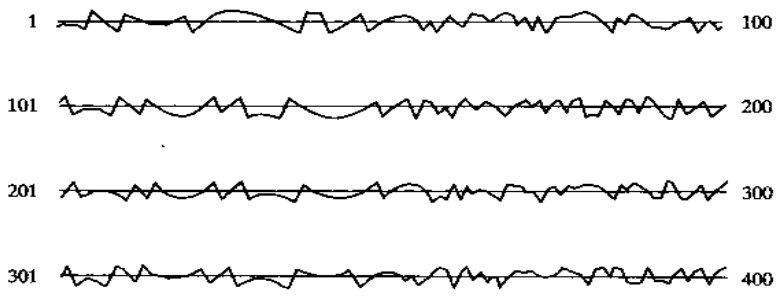


图 10.29 对于 3 比特量化的量化误差波形
(与图 10.26(a)中所示原始信号的比例相同)

① 应当记得，方差减小 7 倍相当于幅度减小 $\sqrt{7} \approx 2.65$ 倍。

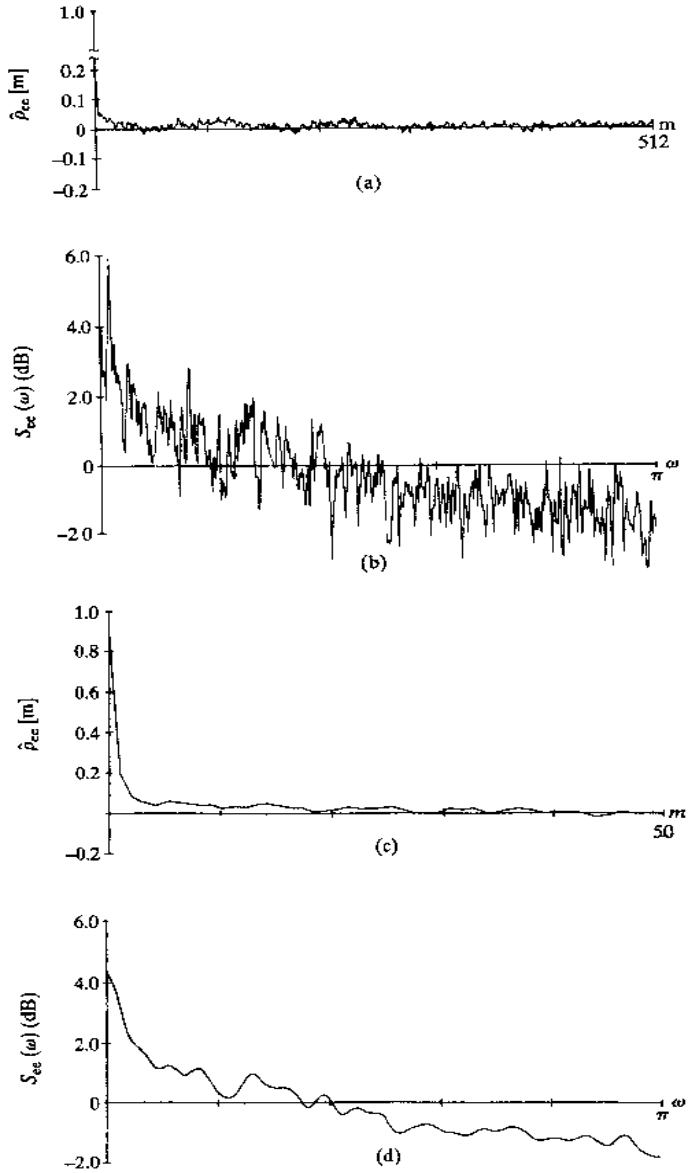


图 10.30 (a) 对于 3 比特量化噪声的归一化自相关估计，记录长度 $Q=14\ 000$；
(b) 用 $M=50$ 的 Bartlett 窗时的功率谱估计；
(c) 归一化自相关估计，$0\leqslant m\leqslant 50$；
(d) 用 $M=50$ 的 Bartlett 窗时的功率谱估计

图 10.30 表示，对于 14 000 个样本的记录长度，当 3 比特量化时误差序列的自相关和功率谱估计。在这种情况下，由图 10.30(a)和图 10.30(c)所示的自相关与理想的白噪声自相关

序列相距甚远。

图 10.30(b)和(d)表示对于 Bartlett 窗，分别取 $M=512$ 及 $M=50$ 时的功率谱估计。很明显，谱不是平坦的(事实上，它趋向于具有通常语音谱的形状)。因此，在这种情况下，对于量化噪声的白噪声模型只能看作是相当粗糙的近似。

这个例子说明，我们应当有信心将自相关和功率谱的估计经常用于理论化模型中，特别是，我们已经表明第 4 章中的一些基本假设的有效性，并且已指出对于很粗糙的量化这些假设为何失效。这只是一个比较简单但很有用的例子，它说明本章的方法为何经常在实际中被采用。

10.8 小结

在信号处理中，重要的应用领域之一是信号的谱分析。由于 FFT 在计算上的高效率，连续时间或离散时间信号谱分析的许多技术都直接或间接地利用了 DFT。在这一章中，我们揭示和说明了这些技术中的一部分。

通过分析正弦信号的诸多方面，我们能够最透彻地理解与谱分析有关的许多问题。由于利用 DFT 需要有限长信号，所以在分析之前必须加窗。对于正弦信号，在 DFT 中观察到的谱峰宽度与窗长有关，随着窗长度增加，谱峰将会变尖。因此，随着窗变短，在谱估计中分辨相互靠近的正弦信号的能力将变差。另外，由于使用 DFT 而造成在谱分析中所固有的独特影响与谱的采样有关。具体地讲，因为只有在那些采样频率处才能计算谱，所以若在结果分析中不仔细，则所观察到的谱可能使我们得出错误的结论。例如，频谱中的一些重要特性可能在采样的频谱中没有直接显露出来。为了避免这一点，可以用以下两种方法中的任何一种来增加 DFT 的长度，从而减小谱样本间的间距：一种方法是增加 DFT 长度且保持窗长度不变(需要对加窗序列补零)。这种方法并不能提高分辨率。第二种方法是同时增加窗长度和 DFT 长度。在这种情况下谱样本的间隔减小且分辨十分靠近的正弦分量的能力提高。

在平稳数据的谱分析中增加窗的长度和提高分辨率一般是有益的；而对于时变数据，通常总希望保持窗的长度足够短，以使在窗的持续时间内信号的特性近似平稳。这就导致提出了依时傅里叶变换的概念，实际上它就是当信号序列滑动通过一有限长的窗时所得到的一列傅里叶变换。对依时傅里叶变换的一种普遍而有用的解释是，将它作为一组滤波器，每个滤波器的频率响应均对应于窗的傅里叶变换，其中心频率平移到一个 DFT 的频率处。依时傅里叶变换无论是在信号滤波中作为一个中间步骤，还是用来分析和解释如像语音和雷达信号之类的时变信号，都有重要的作用。非平稳信号的谱分析一般涉及到在时间分辨率和频率分辨率之间的折衷。具体讲，我们在时间上跟踪谱特征的能力随着分析窗长度的减小而增强。但是，分析窗越短将使得频率分辨率越差。

在平稳随机信号的分析中，DFT 也起着重要的作用。估计随机信号功率谱的一种直观方法是，计算一段信号之 DFT 的平方幅度。所得到的估计，称为周期图，是渐近无偏的。但周期图估计的方差并不随着信号段长度的增加而减小至零，因此它不是一个好的估计。但是通过把可以利用的信号序列分成较短的信号段并且平均与之相关的周期图，就可以得到一个性能良好的估计。另外一种方法是首先估计自相关函数。它既可以直接计算，也可以利用 DFT 来计算。如果在用 DFT 之后再对自相关估计加窗，则最后结果就是一个好的谱估计，称为平滑周期图。

习　题

基本题(附答案)

10.1　一个时间连续的实信号 $x_c(t)$,带宽限制在 5 kHz 以下,即对于 $|\Omega|\geqslant 2\pi(5\,000)$,$X_c(j\Omega)=0$。以每秒 10 000 个样本的采样率(10 kHz)对信号 $x_c(t)$进行采样,得到一个序列 $x[n]=x_c(nT)$,其中 $T=10^{-4}$。计算当 $N=10\,000$ 个 $x[n]$的样本时,N 点 DFT$X[k]$。

(a) 在 $X[k]$中,$k=150$ 与什么连续频率相对应?

(b) 在 $X[k]$中,$k=800$ 与什么连续频率相对应?

10.2　一个连续时间实信号 $x_c(t)$带宽限制在 5 kHz,即对于 $|\Omega|\geqslant 2\pi(5\,000)$,$X_c(j\Omega)=0$。以周期 T 对 $x_c(t)$采样,得到序列 $x[n]=x_c(nT)$。为了检验信号的谱特性,我们利用要求 $N=2^v$(v 为整数)的计算机程序来计算 $x[n]$的一段 N 个样本的 N 点 DFT。试确定 N 的最小值以及采样率的范围

$$F_{\min}<\frac{1}{T}<F_{\max}$$

以便避免混叠并使 DFT 值之间的有效间隔小于 5 Hz,即以小于 5 Hz 的间隔分隔等效的连续时间频率,且在这些频率处来计算傅里叶变换。

10.3　以 16 000 样本/s (16 kHz)的采样率对一个语音信号采样。在如 10.3 节所描述的信号依时傅里叶分析中使用一个 20 ms 长的窗,在各次 DFT 的计算之间使窗超前 40 个样本。假定每个 DFT 的长度是 $N=2^v$。

(a) 在由窗选出的每段语音信号中有多少样本?

(b) 什么是依时傅里叶分析的"帧率"(frame rate),即每秒完成多少次 DFT 运算?

(c) 能够从依时傅里叶变换重构原始输入信号的 DFT 的最小长度 N 是什么?

(d) DFT 样本间的间隔(以 Hz 为单位)是多少?

10.4　对一个实值的连续时间信号段 $x_c(t)$以采样频率 20 000 样本/s 进行采样。得到一个 1 000 点的有限长离散时间序列 $x[n]$,它在区间 $0\leqslant n\leqslant 999$ 上有非零值。已知 $x_c(t)$也是带限的,也就是当 $|\Omega|\geqslant 2\pi(10\,000)$时,$X_c(j\Omega)=0$;换句话说,并不产生由于混叠而造成的任何畸变。

$X[k]$表示 $x[n]$的 1 000 点 DFT。已知 $x[800]$值为 $x[800]=1+j$。

(a) 由已知信息能否确定在其它任意 k 值处的 $X[k]$?如果可以,说明 k 为何值,及其所对应的 $X[k]$值。如果不行,请说明原因。

(b) 由已知信息,确定可求出当 $X_c(j\Omega)$为已知值的 Ω 值以及所对应的 $X_c(j\Omega)$的值。

10.5　以周期 T 对一个连续时间信号 $x_c(t)=\cos(\Omega_0 t)$采样,得序列 $x[n]=x_c(nT)$。给 $x[n]$($n=0,1,\cdots,N-1$)加一个 N 点矩形窗且 $X[k]$($k=0,1,\cdots,N-1$)为所得序列的 DFT。

(a) 设 Ω_0,N,k_0 均为定值,怎样选择 T 可使 $X[k_0]$和 $X[N-k_0]$为非零,而对其它所有 k 值 $X[k]=0$?

(b) 答案是否唯一?如果不是,请给出一个满足(a)中条件的其它 T 值。

10.6　设 $x_c(t)$是一个实值带限信号,其傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$当 $|\Omega|\geqslant 2\pi(5\,000)$时为零。序列 $x[n]$是用 10 kHz 采样率对 $x_c(t)$采样所得。假设当 $n<0$ 且 $n>999$时序列 $x[n]$为零。

令 $X[k]$表示 $x[n]$的 1 000 点 DFT。已知 $X[900]=1$ 和 $X[420]=5$,在区间 $|\Omega|<2\pi(5\,000)$内对于尽可能多的 Ω 值求 $X_c(j\Omega)$。

10.7　考虑利用加有 Hamming 窗的 $w[n]$的 DFT 来估计离散时间信号 $x[n]$的频谱。在加窗 DFT 分析中的频率分辨率的一个保守经验法则是频率分辨率等于 $W(e^{j\omega})$的主瓣宽度。现在想要分辨出 ω 间隔为 $\pi/100$ 这么小距离的正弦信号。此外,窗长 L 应限制为 2 的幂次。则要满足分辨率要求的最小长度 $L=2^v$ 是多少?

10.8 假设 $x[n]$是一个离散时间信号，要利用加窗 DFT 估计该信号的谱。要求所得频率分辨率至少为 $\pi/25$ 并且所用窗长 $N=256$。将所用窗函数的主瓣宽度作为谱估计的频率分辨率是留有余地的。表 7.1 中的哪一种窗函数可满足频率分辨率的要求？

10.9 下面是三个不同的信号 $x_i[n]$，每个信号均为两个正弦信号的和：

$$x_1[n] = \cos(\pi n/4) + \cos(17\pi n/64)$$
$$x_2[n] = \cos(\pi n/4) + 0.8\cos(21\pi n/64)$$
$$x_3[n] = \cos(\pi n/4) + 0.001\cos(21\pi n/64)$$

我们希望利用一个加有 64 点矩形窗 $w[n]$的 64 点 DFT 来估计每个信号的谱。指出哪一个信号的 64 点 DFT 在加窗后会有两个可区分的谱峰？

10.10 设 $x[n]$是一个离散时间信号，它是以采样周期 T 对连续时间信号 $x_c(t)$采样而得到的，有 $x[n]=x_c(nT)$。设 $x_c(t)$的有限带宽为 100 Hz，即当$|\Omega|\geqslant 2\pi(100)$时，$X_c(j\Omega)=0$。我们希望通过计算 $x[n]$的 1 024 点 DFT $X[k]$来估计连续时间谱$X_c(j\Omega)$。求 T 的最小值使得相邻 DFT 样本 $X[k]$之间的等效频率间隔等于或小于在连续时间频率情况下的 1 Hz。

10.11 设以 $T=50\ \mu s$对连续时间信号 $x_c(t)$采样所得到的 5 000 点序列为 $x[n]$。假设$X[k]$为 $x[n]$的 8 192 点 DFT。问相邻 DFT 样本在连续时间频率情况下等效频率间隔为多少？

10.12 设 $x[n]$是一个 1 000 点的序列，它是以 8 kHz 对连续时间信号 $x_c(t)$采样而得到的。且为了避免混叠 $X_c(j\Omega)$是充分带限的。求最小 DFT 长度 N 使得 $X[k]$相邻样本间隔等于或小于原连续时间信号频率间隔 5 kHz。

10.13 设 $X_r[k]$为(10.36)式所定义的依时傅里叶变换(TDFT)。在本题中，我们研究当 DFT 长度 $N=36$ 且采样区间 $R=36$ 时的 TDFT。设窗函数 $w[n]$为矩形窗。当 $-\infty<r<-\infty$且 $0\leqslant k\leqslant N-1$ 时计算如下信号的 TDFT$X_r[k]$：

$$x[n]=\begin{cases}\cos(\pi n/6), & 0\leqslant k\leqslant 35\\ \cos(\pi n/2), & 36\leqslant k\leqslant 71\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

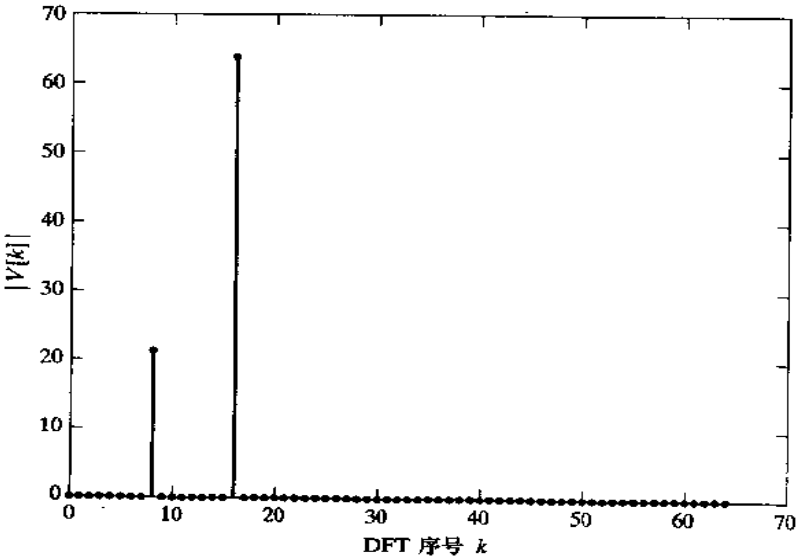


图 P10.14

10.14 图 P10.14 表示了信号 $v[n]$ 的 128 点 DFT $V[k]$ 的幅度 $|V[k]|$。该信号 $v[n]$ 是将 $x[n]$ 与一个 128 点矩形窗 $w[n]$ 相乘后得到的，即 $v[n]=x[n]w[n]$。注意，图 P10.14 只画出了在区间 $0\leqslant k\leqslant 64$ 上的的 $|V[k]|$ 值。下列信号中哪个是 $x[n]$？也就是说，哪一个信号与图中所给出的信息相一致？

$$x_1[n]=\cos(\pi n/4)+\cos(0.26\pi n)$$
$$x_2[n]=\cos(\pi n/4)+(1/3)\sin(\pi n/8)$$
$$x_3[n]=\cos(\pi n/4)+(1/3)\cos(\pi n/8)$$
$$x_4[n]=\cos(\pi n/8)+(1/3)\cos(\pi n/16)$$
$$x_5[n]=(1/3)\cos(\pi n/4)+\cos(\pi n/8)$$
$$x_6[n]=\cos(\pi n/4)+(1/3)\cos(\pi n/8+\pi/3)$$

10.15 图 P10.15 表示一个线性调频信号的频谱图，该信号的形式为

$$x[n]=\sin(\omega_0 n+\frac{1}{2}\lambda n^2)$$

注意，该频谱图表示(10.30)式所定义的 $X[n,k]$ 幅度，其中黑色区域表示 $|X[n,k]|$ 的峰值。根据这幅图，估计 ω_0 和 λ。

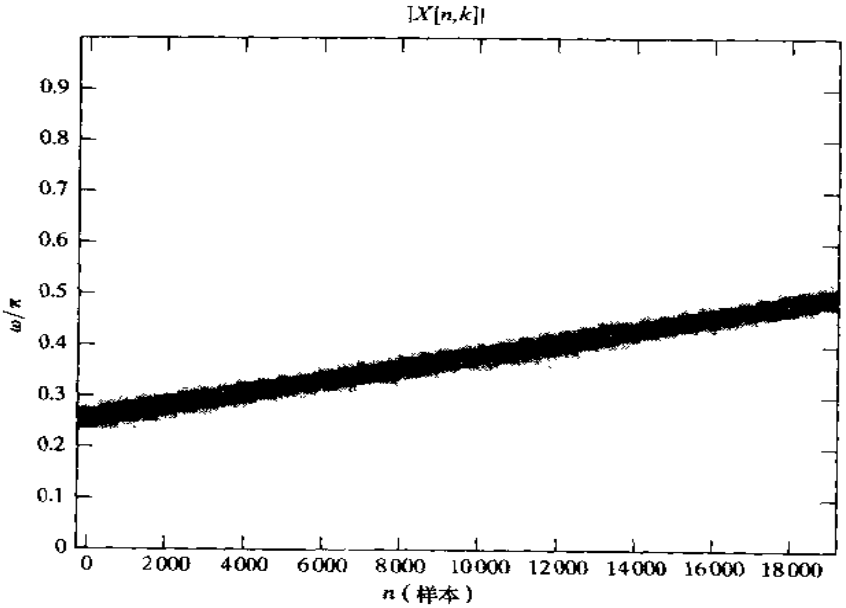


图 P10.15

10.16 对一个连续时间信号以 10 kHz 的采样频率进行采样，并计算 1 024 个样本的 DFT。求谱样本之间的频率间隔。说明理由。

10.17 利用由(10.36)式所定义的依时傅里叶变换 $X_r[k]$ 对信号 $x[n]$ 进行分析。首先，计算加有 $L=128$ 点 Hamming 窗 $w[n]$ 的 $N=128$ 点 DFT。相邻块的时域采样为 $R=128$，即，加窗段在时间上偏移 128 个样本。用这种分析所得到的频率分辨率并不能满足要求，因此我们希望提高分辨率。为此，下面提出了几种改进的分析方法。下列方法中，哪一个可以提高依时傅里叶变换 $X_r[k]$ 的频率分辨率？

方法 1：保持 L 和 R 不变，增大 N 至 256。

方法 2：保持 R 不变，同时增大 N 和 L 至 256。

方法 3：保持 N，L 不变，减小 R 至 64。

方法 4:保持 N,R 不变,减少 L 为 64。

方法 5:保持 N,R 和 L 不变,但将 $w[n]$改为矩形窗。

10.18 设 $x[n]$是一个有单一正弦分量的信号。计算 $V_1(e^{j\omega})$之前,我们对信号 $x[n]$加上一个 L 点的 Hamming 窗 $w[n]$得出 $v_1[n]$。然后对信号 $x[n]$加上一个 L 点矩形窗得出 $v_2[n]$,由它来计算 $V_2(e^{j\omega})$。$V_1(e^{j\omega})$和 $V_2(e^{j\omega})$的谱峰高度一样吗?如果一样,说明理由;如果不一样,哪一个较大?

10.19 假设计算 DTFT 之前要估计加有 Kaiser 窗的信号 $x[n]$的谱。要求窗函数的旁瓣小于主瓣 30 dB 并且频率分辨率为 $\pi/40$。将窗函数的主瓣宽度作为频率分辨率的估计是留有余地的。估计满足这些要求的最小窗长 L。

10.20 在计算 $X(e^{j\omega})$之前要估计加有一个 512 点 Kaiser 窗的信号 $x[n]$的谱。

(a) 系统频率分辨率的要求规定 Kaiser 窗的最大允许主瓣宽度为 $\pi/100$。在这些条件下,期望的最佳旁瓣衰减是多少?

(b) 假设已知 $x[n]$含有两个相差至少 $\pi/50$ 的正弦分量,并且最大分量的幅度为 1。根据你在(a)中给出的答案,给出能超过较强正弦分量旁瓣的较弱正弦分量最小值的阈值。

基本题:

10.21 设 $x[n]=\cos(2\pi n/5)$,在计算 $V(e^{j\omega})$之前,给 $x[n]$加上一个 32 点矩形窗得序列 $v[n]$。画出当 $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$ 时的 $|V(e^{j\omega})|$,标出所有谱峰的频率及谱峰两边的第一个零点。此外,标出谱峰幅度及每个谱峰的最大旁瓣。

10.22 对信号 $x[n]$(如下式)加一个 256 点矩形窗并作无重叠($R=256$)的 256 点 DFT 得到它的谱,画出谱图(在区间 $0\leqslant n\leqslant 16\,000$ 上)

$$x[n]=\cos\left[\frac{\pi n}{4}+1\,000\sin\left(\frac{\pi n}{8\,000}\right)\right]$$

深入题:

10.23 考虑一个持续时间为 100 ms 的有限连续时间实信号 $x_c(t)$。假设这个信号有一个带限的傅里叶变换,使得当 $|\Omega|\geqslant 2\pi(10\,000)$时 $X_c(j\Omega)=0$,即假设混叠可以忽略不计。我们想要在区间 $0\leqslant\Omega\leqslant 2\pi(10\,000)$上以 5 Hz 为间隔计算 $X_c(j\Omega)$的样本。这可以用 4 000 点的 DFT 来实现。具体地讲,我们希望得到一个 4 000 点的序列 $x[n]$,它的 4 000 点 DFT 与 $X_c(j\Omega)$之间有如下关系:

$$X[k]=aX_c(j2\pi\cdot 5\cdot k),\qquad k=0,1,\cdots,1\,999$$

式中 a 是一个已知的标量因子。为了得到一个 4 000 点序列,并且该序列的 DFT 能给出所要求的 $X_c(j\Omega)$样本,特提出三种方法。

方法 1:以采样周期 $T=25\,\mu s$ 对 $x_c(t)$采样,即我们计算序列

$$x_1[n]=\begin{cases}x_c(nT), & n=0,1,\cdots,3\,999\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

的 DFT $X_1[k]$。因为 $x_c(t)$的时间限制在 100 ms,所以 $x_1[n]$是一个长度为 4 000 (100 ms /25 μs)的有限长序列。

方法 2:以 $T=50\,\mu s$ 的采样周期对 $x_c(t)$采样。由于 $x_c(t)$的时间限制在 100 ms,因此所得序列只有 2 000 (100 ms/50 μs)个非零样本,即

$$x_2[n]=\begin{cases}x_c(nT), & n=0,1,\cdots,1\,999\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

换句话说,要对序列"补充"零样本以产生一个要计算其 4 000 点 DFT $X_2[k]$的 4 000 点序列。

方法 3:以 $T=50\,\mu s$ 的采样周期对 $x_c(t)$采样,与方法 2 类似。用所得到的 2000 点序列构成如下序

列 $x_3[n]$：

$$x_3[n]=\begin{cases}x_c(nT), & 0\leqslant n\leqslant 1\,999\\ x_c((n-2\,000)T), & 2\,000\leqslant n\leqslant 3\,999\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

计算这个序列的 4 000 点 DFT。

对于每一种方法，确定每个 4 000 点 DFT 与 $X_c(j\Omega)$有何关系。针对一个"典型的"傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$，大致上指出这种关系。用显式说明哪一种或几种方法可以给出所希望的 $X_c(j\Omega)$的样本。

10.24 用 20 000 样本/s 的采样率对一个连续时间有限长信号 $x_c(t)$采样，形成一个在区间 $0\leqslant n\leqslant 999$ 上为非零的 1 000 点有限长序列 $x[n]$。对于这个问题，假定连续时间信号也是带宽有限的，使得当 $|\Omega|\geqslant 2\pi(10\,000)$时 $X_c(j\Omega)=0$，即假定可以忽略的混叠干扰在采样中发生了。还假定有一种计算 1 000 点 DFT 和 IDFT 的装置或程序可供使用。

(a) 如果 $X[k]$表示序列 $x[n]$的 1 000 点 DFT，$X[k]$与 $X_c(j\Omega)$有何关系？DFT 样本间的有效频率间隔是什么？

为了在区间 $|\Omega|\leqslant 2\pi(5\,000)$上得到傅里叶变换 $X_c(j\Omega)$的展开，从 1 000 点 DFT $X[k]$开始，提出如下步骤：

第一步：构成新的 1 000 点 DFT

$$W[k]=\begin{cases}X[k], & 0\leqslant k\leqslant 250\\ 0, & 251\leqslant k\leqslant 749\\ X[k], & 750\leqslant k\leqslant 999\end{cases}$$

第二步：计算 $W[k]$的 1 000 点 DFT，得到 $w[n]$，$n=0,1,\cdots,999$。

第三步：以 2 为因子抽取序列 $w[n]$并且用 500 个接续的零样本将其加长，得到序列

$$y[n]=\begin{cases}w[2n], & 0\leqslant n\leqslant 499\\ 0, & 500\leqslant n\leqslant 999\end{cases}$$

第四步：计算 $y[n]$的 1 000 点 DFT，得到 $Y[k]$。

(b) 以上步骤的设计者断言

$$Y[k]=\alpha X_c(j2\pi\cdot 10\cdot k),\qquad k=0,1,\cdots,500$$

其中 α 是一个比例常数。这一断言正确吗？如果不正确，请说明原因。

10.25 设 $y[n]$是输入为 $x[n]$的一个线性时不变 FIR 系统的输出，即

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M}h[k]x[n-k]$$

(a) 试得出线性系统输出的依时傅里叶变换 $Y[n,\lambda)$和输入的依时傅里叶变换 $X[n,\lambda)$之间的关系式。

(b) 证明，若与 M 相比窗足够长，则有下式成立：

$$\overset{\vee}{Y}[n,\lambda)\simeq H(e^{j\lambda})\overset{\vee}{X}[n,\lambda)$$

式中 $H(e^{j\omega})$是线性系统的频率响应。

10.26 一个离散时间随机信号 $x[n]$的周期图 $I(\omega)$由(10.52)式定义为

$$I(\omega)=\frac{1}{LU}|V(e^{j\omega})|^2$$

式中 $V(e^{j\omega})$是有限长序列 $v[n]=w[n]x[n]$的离散时间傅里叶变换，同时 $w[n]$是一个长度为 L 的有限长窗序列，而且 U 是一个归一化常数。

证明：周期图也等于 $v[n]$的非周期相关序列之傅里叶变换的 $1/LU$ 倍，即

$$I(\omega)=\frac{1}{LU}\sum_{m=-(L-1)}^{L-1}c_{vv}[m]e^{-j\omega m}$$

其中 $c_{vv}[m]$为

$$c_{vv}[m] = \sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m]$$

10.27 考虑一个有限长序列 $x[n]$,使得当 $n<0$ 和 $n\geqslant L$ 时 $x[n]=0$。令 $X[k]$为序列$x[n]$的 N 点 DFT,其中 $N>L$。定义 $c_{xx}[m]$为 $x[n]$的非周期自相关函数,即

$$c_{xx}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n+m]$$

定义 $\tilde{c}_{xx}[m]$为

$$\tilde{c}_{xx}[m] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} |X[k]|^2 e^{j(2\pi/N)km}, \qquad m = 0,1,\cdots,N-1$$

(a) 如果我们要求

$$c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m], \qquad 0 \leqslant m \leqslant L-1$$

试确定对于 DFT,能够使用的 N 的最小值。

(b) 如果我们要求

$$c_{xx}[m] = \tilde{c}_{xx}[m], \qquad 0 \leqslant m \leqslant M-1$$

其中 $M<L$,试确定对于 DFT,能够使用的 N 的最小值。

10.28 对称 Bartlett 窗出现在功率谱估计的许多方面。它定义为

$$w_B[m] = \begin{cases} 1-|m|/M, & |m| \leqslant M-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad \text{(P10.28-1)}$$

对于如 10.7 节所讨论的,通过对一个估计的自相关函数加窗来得出功率谱的估计,Bartlett 窗是特别有吸引力的。这是因为它的傅里叶变换是非负的,可以保证平滑的谱估计在所有频率处都是非负的。

(a) 证明式(P10.28-1)定义的 Bartlett 窗是序列$(u[n]-u[n-M])$的非周期自相关函数。

(b) 由(a)的结果证明 Bartlett 窗的傅里叶变换为

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 \qquad \text{(P10.28-2)}$$

显然它是非负的。

(c) 叙述一种能产生其它具有非负傅里叶变换的有限窗序列的方法。

10.29 在 10.7 节中我们已经证明,通过对自相关序列加窗可以得到平滑的功率谱估计。还表明(见(10.95)式)平滑谱估计的方差为

$$\text{var}[S(\omega)] \simeq FP_{xx}^2(\omega)$$

式中**方差比因子或方差缩减因子** F 为

$$F = \frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} (w_c[m])^2 = \frac{1}{2\pi Q}\int_{-\pi}^{\pi} |W_c(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

正如在 10.7 节中所讨论的,Q 是序列 $x[n]$的长度,且$(2M-1)$是加在自相关估计上的对称窗 $w_c[m]$的长度。这样,若 Q 固定,通过调整加在相关函数上的窗之形状和长度可以减小平滑谱估计的方差。

在该题中我们将证明,F 随着窗长度的减小而减小,但是从前面第 7 章中有关窗的讨论中我们还知道,$W_c(e^{j\omega})$的主瓣宽度随着窗长度的减小而增加,因此分辨两个邻近频率分量的能力也随着窗宽度的减小而降低。这样,在减小方差和提高分辨率之间有着一个折衷的问题。在该题中我们将研究对于如下常用窗的这种折衷问题。

矩形窗

$$w_R[m] = \begin{cases} 1, & |m| \leqslant M-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

Bartlett(三角形)窗

$$w_B[m]=\begin{cases}1-|m|/M, & |m|\leqslant M-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

Hanning/Hamming 窗

$$w_H[m]=\begin{cases}\alpha+\beta\cos[\pi m/(M-1)], & |m|\leqslant M-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(对于 Hanning 窗,$\alpha=\beta=0.5$,而对于 Hamming 窗,$\alpha=0.54$ 和 $\beta=0.46$)

(a) 求出以上每个窗的傅里叶变换,即计算 $W_R(e^{j\omega})$,$W_B(e^{j\omega})$及 $W_H(e^{j\omega})$。画出每个傅里叶变换作为 ω 的函数的草图。

(b) 对于以上每个窗,证明当 $M\gg1$ 时下表中的各项近似正确。

窗的名称	近似主瓣宽度	近似方差比(F)
矩形窗	$2\pi/M$	$2M/Q$
Bartlett	$4\pi/M$	$2M/(3Q)$
Hanning/Hamming	$3\pi/M$	$2M(\alpha^2+\beta^2/2)/Q$

10.30 考虑一个信号:

$$x[n]=\left[\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]^2u[n]$$

它的依时傅里叶变换用如下分析窗计算:

$$w[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 13\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令 $X[n,k]=X[n,2\pi k/7)(0\leqslant k\leqslant 6)$,其中 $X[n,\lambda)$由 10.3 节所定义。

(a) 求当 $0\leqslant k\leqslant 6$ 时的 $X[0,k]$。

(b) 对 $0\leqslant n<\infty$计算 $\sum_{k=0}^{6}X[n,k]$。

10.31 (a) 考虑如图 P10.31-1 所示的系统,其输入为 $x(t)=e^{j(3\pi/8)10^4t}$,采样周期 $T=10^{-4}$,且

$$w[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求使得 $X_W[k]$恰在一个 k 值处不为零的最小非零N 值。

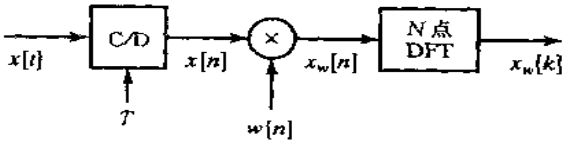


图 P10.31-1

(b) 假设 $N=32$,输入信号为 $x(t)=e^{j\Omega_0t}$,且选取采样周期 T 保证在采样中不产生混叠。图 P10.31-2 和 P10.31-3 表示当 $k=0,\cdots,31$ 时序列 $X_W[k]$的幅值,其中两图选取如下两个不同的窗函数 $w[n]$:

$$w_1[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 31\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$w_2[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 7\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

指出每幅图所对应的窗函数 $w[n]$，清楚的说明你的理由。

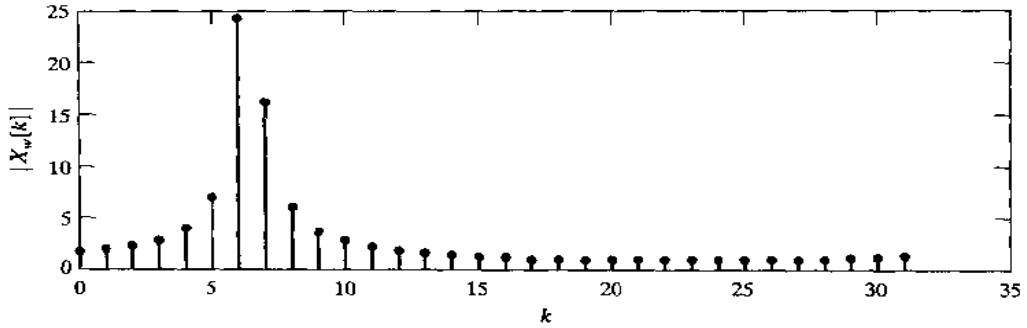


图 P10.31－2

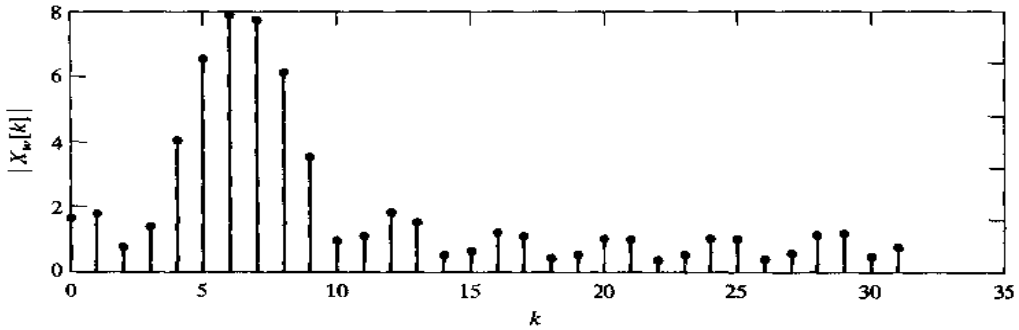


图 P10.31－3

(c) 对于(b)中的输入信号和系统参数相同，当采样周期为 $T=10^{-4}$时我们要由图 P10.31－2 来估计 Ω_0 的值。设序列

$$w[n]=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 31\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

并且采样周期足够短以保证采样中不产生混叠，请估计 Ω_0 的值。你的估计是否精确？如果不精确，那么你得出的频率估计最大可能误差是多少？

(d) 假设对于所选窗函数 $w_1[n]$和 $w_2[n]$，已知 32 点 DFT $X_W[k]$的准确值。简要说明计算 Ω_0 准确值的过程。

扩充题：

10.32 由(10.18)式定义的依时傅里叶变换有如下性质：

(a) **线性**：若 $x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$，则 $X[n,\lambda]=aX_1[n,\lambda)+bX_2[n,\lambda)$

(b) **平移性**：若 $y[n]=x[n-n_0]$，则 $Y[n,\lambda)=X[n-n_0,\lambda)$

(c) **调制性**：若 $y[n]=e^{j\omega_0 n}x[n]$，则 $Y[n,\lambda)=e^{j\omega_0 n}X[n,\lambda-\omega_0)$

(d) **共轭对称性**：若 $x[n]$是实数，则 $X[n,\lambda)=X^*[n,\lambda)$

10.33 设 $x_c(t)$是一个连续时间平稳随机信号，有相关函数

$$\phi_c(\tau)=\mathcal{E}\{x_c(t)x_c(t+\tau)\}$$

和功率密度谱

$$P_c(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

考虑一个离散时间平稳随机信号 $x[n]$，它是以采样周期 T 对 $x_c(t)$ 采样而得到的，即 $x[n] = x_c(nT)$。

(a) 证明 $x[n]$ 的自相关序列 $\phi[m]$ 为

$$\phi[m] = \phi_c(mT)$$

(b) 连续时间随机信号的功率密度谱 $P_c(\Omega)$ 与离散时间随机信号的功率密度谱 $P(\omega)$ 之间的关系是什么？

(c) 必须在什么条件下，下式才能成立？

$$P(\omega) = \frac{1}{T} P_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi$$

10.34 在 10.6.5 节中，我们研究过一个正弦白噪声的功率谱估计。在本题中我们将确定这样一个信号的真实功率谱。假设

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + e[n]$$

式中 θ 是 0 到 2π 均匀分布的随机变量，且 $e[n]$ 是互不相关的零均值随机变量序列，同时与 θ 也不相关。换句话说，余弦分量有一个随机选择的相位，而 $e[n]$ 代表白噪声。

(a) 证明：对于上面的假设，$x[n]$ 的自相关函数为

$$\phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{x[n]x[m+n]\} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m) + \sigma_e^2\delta[m]$$

其中 $\sigma_e^2 = \mathcal{E}\{(e[n])^2\}$。

(b) 由(a)的结果证明，在一个周期的频率范围上 $x[n]$ 的功率谱是

$$P_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \sigma_e^2, \qquad |\omega| \leqslant \pi$$

10.35 考虑一个长度为 N 个样本的离散时间信号 $x[n]$，它是通过对一个平稳、白的、零均值连续时间信号采样而得到的。因此

$$\mathcal{E}\{x[n]x[m]\} = \sigma_x^2\delta[n-m]$$

$$\mathcal{E}\{x[n]\} = 0$$

假设我们计算有限长序列 $x[n]$ 的 DFT，从而得到 $X[k]$，$k = 0, 1, \cdots, N-1$。

(a) 利用(10.65)式和(10.66)式确定 $|X[k]|^2$ 的逼近方差。

(b) 求 DFT 值之间的互相关，即求出 k 和 r 的函数 $\mathcal{E}\{X[k]X^*[r]\}$。

10.36 一个带限连续时间信号具有一个带限功率谱，也就是当 $|\Omega| \geqslant 2\pi(10^4)$ rad/s 时功率谱为零。以 20 000 样本/s 的采样率在 10 s 的时间范围内对信号采样。用 10.6.3 节所论述的平均周期图法来估计该信号的功率谱。

(a) 数据记录的长度 Q(样本的个数)是多少？

(b) 如果用基 2FFT 程序计算周期图，若我们希望在间隔不大于 10 Hz 的等间隔频率处得出功率谱的估计，则最小长度 N 为多少？

(c) 假设信号段长度上等于(b)中的 FFT 长度 N，若信号段不重叠，可以有多少段？

(d) 假定我们希望把谱估计的方差减小到 1/10，且仍维持(b)部分中的频率间隔。试给出这样做的两种方法。这两种方法得出的结果相同吗？如果不同，请说明它们如何不同。

10.37 假设用 10.6.3 节中讨论的平均周期图法得出一个信号之功率谱的估计。即，功率谱估计是

$$\bar{I}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{r=0}^{K-1} I_r(\omega)$$

这里用(10.67)式和(10.68)式，由 L 点信号段计算 K 个周期图 $I_r(\omega)$。我们定义一个自相关函数的

估计为 $I(\omega)$的傅里叶反变换，即

$$\bar{\phi}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{I}(\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

(a) 证明 $$\mathcal{E}\{\bar{\phi}[m]\} = \frac{1}{LU} c_{ww}[m]\phi_{xx}[m]$$

其中 L 是信号段长度；U 是 (10.64) 式给出的归一化因子；$c_{ww}[m]$是加在信号段上的窗之非周期相关函数，由(10.60) 式给出。

(b) 在周期图平均的应用中，通常用 FFT 算法来计算在 N 个等间隔频率处的$\bar{I}(\omega)$，即

$$\bar{I}[k] = \bar{I}(2\pi k/N), \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

式中 $N \geqslant L$。假设我们通过计算 $\bar{I}[k]$的 DFT 来计算自相关函数的估计，即

$$\bar{\phi}_p[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} I[k]e^{j(2\pi/N)km}, \qquad m = 0,1,\cdots,N-1$$

试得出 $\mathcal{E}\{\bar{\phi}[m]\}$的表示式。

(c) 如何选择 N 使得

$$\mathcal{E}\{\bar{\phi}_p[m]\} = \mathcal{E}\{\bar{\phi}[m]\}, \qquad m = 0,1,\cdots,L-1$$

10.38 研究一下自相关估计的计算

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-1-|m|-1} x[n]x[n+|m|] \qquad \text{(P10.38-1)}$$

式中 $x[n]$为一个实序列。当需要用(10.88) 式估计功率密度谱时，因为 $\hat{\phi}_{xx}[-m]=\hat{\phi}_{xx}[m]$，所以只须对 $0\leqslant m\leqslant M-1$ 计算(P10.38-1) 式就可以得到当 $-(M-1)\leqslant m\leqslant M-1$ 时的 $\hat{\phi}_{xx}[m]$。

(a) 当 $Q \gg M$ 时，利用单一的 FFT 算式计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$可能是不合适的。在这种情况下，将 $\hat{\phi}_{xx}[m]$表示为基于较短序列的相关估计的和则很方便。证明：若 $Q=KM$，

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{i=0}^{K-1} c_i[m]$$

式中对于 $0\leqslant m\leqslant M-1$，

$$c_i[m] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n+iM]x[n+iM+m]$$

(b) 证明：通过 N 点循环卷积

$$\tilde{c}_i[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_i[n]y_i[((n+m))_N]$$

其中序列 $x_i[n]$和 $y_i[n]$为

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n+iM], & 0\leqslant n\leqslant M-1 \\ 0, & M\leqslant n\leqslant N-1 \end{cases}$$

和

$$y_i[n] = x[n+iM], \qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \qquad \text{(P10.38-2)}$$

可以得到相关序列 $c_i[m]$。对于$0\leqslant m\leqslant M-1$，使 $c_i[m]=\tilde{c}_i[m]$的 N(用 M 表示)的最小值是什么？

(c) 说明计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$，$0\leqslant m\leqslant M-1$ 的步骤，其中涉及到计算 $2K$ 个实序列的 N 点 DFT 和一个 N 点 IDFT。若用基 2 FFT，当 $0\leqslant m\leqslant M-1$ 时计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$需要多少次复数乘法？

(d) 对(c)中得出的计算步骤必须作哪些修改才能计算互相关估计

$$\hat{\phi}_{xy}[m] = \frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{Q-1-|m|-1} x[n]y[n+m], \qquad -(M-1)\leqslant m\leqslant M-1$$

式中 $x[n]$和 $y[n]0\leqslant n\leqslant Q-1$，是已知实序列？

(e) Rader(1970)已证明，当计算自相关估计 $\hat{\phi}_{xx}[m]$，$0\leqslant m\leqslant M-1$ 时，若 $N=2M$，则可以显著节省计算量。证明：由(P10.38-2)式定义的序列段 $y_r[n]$的 N 点 DFT 可以表示为

$$Y_r[k]=X_r[k]+(-1)^k X_{r-1}[k],\qquad k=0,1,\cdots,N-1.$$

说明计算 $\hat{\phi}_{xx}[m]$，$0\leqslant m\leqslant M-1$ 的步骤，它涉及到计算 K 个 N 点 DFT 和一个 N 点 IDFT。若用基 2FFT，确定在这种情况下复数乘法的总次数。

10.39 在 10.3 节中我们定义了信号 $x[m]$的依时傅里叶变换，对于固定的 n，它等效于序列 $x[n+m]w[m]$的常规离散时间傅里叶变换，其中 $w[m]$是一个窗序列。对于序列 $x[n]$定义一个依时相关函数也是很有用的，使得当 n 固定时，它的常规傅里叶变换是依时傅里叶变换幅度的平方。具体地讲，依时自相关函数定义为

$$c[n,m]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X[n,\lambda)|^2 e^{j\lambda m}d\lambda$$

式中 $X[n,\lambda)$由(10.18)式定义。

(a) 证明

$$c[n,m]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n+r]w[r]x[m+n+r]w[m+r]$$

即对于固定的 n，$c[n,m]$是序列 $x[n+r]w[r]$，$-\infty<r<\infty$的非周期自相关函数。

(b) 证明当 n 固定时，依时自相关函数是 m 的偶函数，并且利用这一事实求出等效表示式

$$c[n,m]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]x[r-m]h_m[n-r]$$

式中

$$h_m[r]=w[-r]w[-(m+r)]\qquad\text{(P10.39-1)}$$

(c) 对于固定的 m 和 $-\infty<n<\infty$，窗 $w[r]$必须满足什么条件才能通过因果运算，利用(P10.39-1)式来计算 $c[n,m]$？

(d) 假设 $w[-r]$为

$$w[-r]=\begin{cases}a^r, & r\geqslant 0\\ 0, & r<0\end{cases}\qquad\text{(P10.39-2)}$$

为了计算第 m 个自相关滞后值，求出冲激响应 $h_m[r]$，并求相应的系统函数 $H_m(z)$。由系统函数，画出对于(P10.39-2)式所示窗计算第 m 个自相关滞后值 $c[n,m]$($-\infty<n<\infty$)的一个因果系统的方框图。

(e) 对于

$$w[-r]=\begin{cases}ra^r, & r\geqslant 0,\\ 0, & r<0.\end{cases}$$

重复(d)。

10.40 有时可用一组滤波器来实现依时傅里叶分析，即使在使用 FFT 方法时，滤波器组解释仍可以提供一种很有用的见解。本题就是研究滤波器组解释。这种解释的基础在于如下事实：当 λ 固定时，由(10.18)式定义的依时傅里叶变换 $X[n,\lambda)$就是一个序列，它可以看做是滤波和调制运算结合在一起的结果。

(a) 证明，若线性时不变系统的冲激响应是 $h_0[n]=w[-n]$，则 $X[n,\lambda)$是图P10.40-1所示系统的输出。另外证明，如果 λ 固定，图 P10.40-1 中的整个系统的特性如同一个线性时不变系统，并确定等效的 LTI 系统的脉冲响应和频率响应。

(b) 若假定 λ 在图 P10.10-1 中固定，证明对于典型的窗序列和固定的 λ，序列 $s[n]=X[n,\lambda)$具有

一个低通的离散时间傅里叶变换。并证明，对于典型的窗序列，图 P10.40－1 中的整个系统是一个中心在 $\omega=\lambda$ 处的带通滤波器。

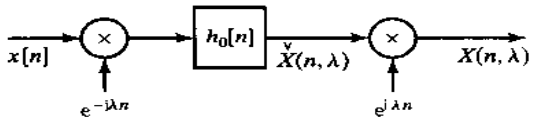


图 P10.40－1

(c) 图 P10.40－2 给出一组为 N 个的带通滤波器通道，每个通道的实现如图 P10.40－1 所示。各通道的中心频率为 $\lambda_k=2\pi k/N$，且 $h_0[n]=w[-n]$ 是低通滤波器的脉冲响应。证明单路输出 $y_k[n]$ 是依时傅里叶变换(在 λ 维上)的样本。并证明总输出是 $y[n]=w[0]x[n]$，即证明由采样的依时傅里叶变换，图 P10.40－2 所示系统可以完全重构输出信号(差一个标量因子)。

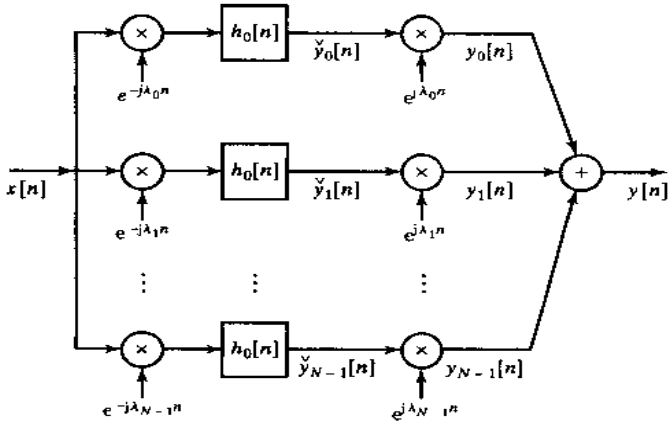


图 P10.40－2

图 P10.40－2 的系统将单个输入序列 $x[n]$ 转换成 N 个序列，因此每秒钟的总样本数增加为 N 倍。正如(b)中所示，对于典型的窗序列，通道信号 $\breve{y}_k[n]$ 有低通傅里叶变换，这样，如图 P10.40－3 所示，降低这些信号的采样率应当是可能的。特别是，如果采样率降低到 $R=N$ 分之一，每秒钟的总样本数与 $x[n]$ 相同。在这种情况下，称滤波器组是临界采样的(见 Crochiere 和 Rabiner，1983)。由抽取的通道信号重构原始信号需要如图所示的内插。显然，我们关心的是如何能很好地由系统重构原始输入信号 $x[n]$。

(d) 对于图 P10.40－3 所示系统，证明输出的常规离散时间傅里叶变换由下式给出：

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{N-1}G_0(e^{j(\omega-\lambda_k)})H_0(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi l/R)})X(e^{j(\omega-2\pi l/R)})$$

式中 $\lambda_k=2\pi k/N$。这个表达式清楚地表明，混叠是由通道信号 $\breve{y}[n]$ 的抽取而造成的。由这个表达式可以确定使 $H_0(e^{j\omega})$ 和 $G_0(e^{j\omega})$ 同时满足的一个关系或一组关系，它可以消除混叠。并且使 $y[n]=x[n]$。

(e) 假设 $R=N$，并且低通滤波器的频率响应是一个理想低通滤波器，其频率响应为

$$H_0(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\pi/N\\ 0, & \pi/N<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

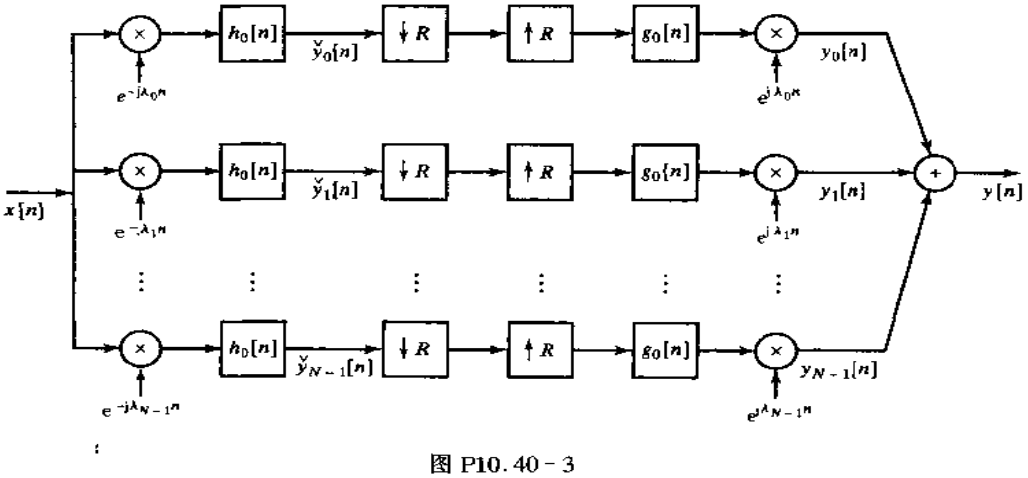


图 P10.40-3

对于这个频率响应 $H_0(e^{j\omega})$，确定是否能够找出内插滤波器 $G_0(e^{j\omega})$的频率响应，使其满足(d)中推导出的条件。若可以，则求 $G_0(e^{j\omega})$。

(f) **选做题**：当低通滤波器的频率响应 $H_0(e^{j\omega})$($w[-n]$的傅里叶变换)是非理想的，并且在区间 $|\omega|<2\pi/N$ 上为非零时，请揭示完全重构的可能性。

(g) 证明图 P10.40-3 之系统的输出是

$$y[n]=N\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n-rN]\sum_{l=-\infty}^{\infty}g_0[n-lR]h_0[lR+rN-n]$$

由这个表达式，确定 $h_0[n]$和 $g_0[n]$可以同时满足的一个关系或一组关系，它可以使 $y[n]=x[n]$。

(h) 假设 $R=N$ 并且低通滤波器的脉冲响应是

$$h_0[n]=\begin{cases}1, & -(N-1)\leqslant n\leqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

对于这个脉冲响应 $h_0[n]$，确定是否可能找出内插滤波器的脉冲响应 $g_0[n]$，使得在(f)中推导出的条件得以满足。若可以，则求出 $g_0[n]$。

(i) **选做题**：当低通滤波器的冲激响应 $h_0[n]=w[-n]$是一个长度大于 N 的递减窗时，揭示完全重构的可能性。

10.41 考虑一个稳定线性时不变系统，其中输入 $x[n]$假定是均值为零、方差为 σ_x^2 的白噪声。假设该系统有系统函数

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N}a_kz^{-k}}$$

本题中假设 a_k 的 b_k 均为实数。则输入和输出满足如下常系数差分方程：

$$y[n]=\sum_{k=1}^{N}a_ky[n-k]+\sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$$

如果所有的 a_k 都为零，则称 $y[n]$是一个**滑动平均**(MA)线性随机过程。如果除 $b_0\neq 0$ 之外所有的 b_k 均为零，则 $y[n]$称为**自回归**(AR)线性随机过程。如果 N 和 M 均为非零值，则 $y[n]$是一个**自回归滑动平均**(ARMA)线性随机过程。

(a) 利用线性系统的脉冲响应 $h[n]$表示 $y[n]$的自相关。

(b) 用(a)的结果并利用系统的频率响应来表示出 $y[n]$的功率密度谱。

(c) 证明一个 MA 过程的自相关序列 $\phi_{yy}[m]$只有在区间$|m|<M$上是非零的。

(d) 对一个 AR 过程，求出其自相关序列的通用表示式。

(e) 证明：若 $b_0=1$，则一个 AR 过程的自相关函数满足如下差分方程：

$$\phi_{yy}[0]=\sum_{k=1}^{N}a_k\phi_{yy}[k]+\sigma_x^2$$

$$\phi_{yy}[m]=\sum_{k=1}^{N}a_k\phi_{yy}[m-k],\qquad m\geqslant 1$$

(f) 利用(e)的结果以及 $\phi_{yy}[m]$的对称性，证明

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\phi_{yy}[|m-k|]=\phi_{yy}[m],\qquad m=1,2,\cdots,N$$

可以证明，若已知 $\phi_{yy}[m]$，$m=0,1,\cdots,N$，我们总可以唯一地解出该随机过程模型的 a_k 和 σ_x^2。这些值可用于(b)的结果中，以得出 $y[n]$的功率密度谱表示式。这个方法是许多参数谱估计技术的基础。(对于这些方法的深入讨论可参阅 Gardner，1988；Kay，1988；Marple，1987 的著作)

10.42 本题说明了基于 FFT 的内插一个周期连续时间信号样本(采样频率满足奈奎斯特定理)过程的基本思想。令

$$x_c(t)=\frac{1}{16}\sum_{k=-4}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}e^{jkt}$$

是一个由图 P10.42 系统所得的周期信号。

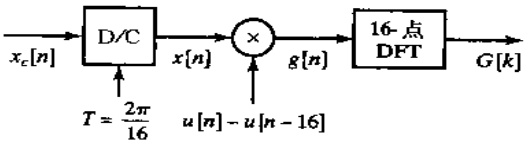


图 P10.42

(a) 画出 16 点序列 $G[k]$；

(b) 具体说明如何将 $G[k]$变为一个 32 点序列 $Q[k]$，使得 $Q[k]$的 32 点反 DFT 为序列(对一些非零常数 α)：

$$q[n]=\alpha x_c\left(\frac{n2\pi}{32}\right),\qquad 0\leqslant n\leqslant 31,$$

不需要指出 α 值。

10.43 在许多实际应用中，实际限制条件不允许处理长时间序列。不过，由一个序列的加窗段就可以得到重要信息。本题中，将看到在仅仅已知 256 个样本($0\leqslant n\leqslant 255$)的条件下，计算一个有限持续信号 $x[n]$的傅里叶变换的过程。要用到一个 256 点的 DFT 估计变换，定义信号

$$\hat{x}[n]=\begin{cases}x[n], & 0\leqslant n\leqslant 255\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

并计算 $\hat{x}[n]$的 256 点 DFT。

(a) 设信号 $x[n]$是以采样频率 $f_s=20$ kHz 对一个连续时间信号 $x_c(t)$采样而得，即

$$x[n]=x_c(nT_s)$$

$$1/T_s=20\ \text{kHz}$$

假设 $x_c(t)$带宽限制为 10 kHz。若 $\hat{x}[n]$的 DFT 记为 $\hat{X}[k]$，$k=0,1,\cdots,255$，求对应于 DFT 标号 $k=32$ 和 231 的连续时间频率。注意答案单位要为赫兹。

(b) 用 $x[n]$的 DTFT 和一个 256 点矩形窗 $w_R[n]$的 DTFT 来表示 $\hat{x}[n]$的 DTFT。分别用标记 $X(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$表示 $x[n]$和 $w_R[n]$的 DTFT。

(c) 假设想要利用平均方法来估计 $k=32$ 的变换：

$$X_{avg}[32]=\alpha\hat{X}[31]+\hat{X}[32]+\alpha\hat{X}[33]$$

这里平均的意义等同于在计算 DFT 之前给信号 $\hat{x}[n]$ 乘上一个新的窗函数 $w_{avg}[n]$。证明 $W_{avg}(e^{j\omega})$ 必须满足：

$$W_{avg}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ a, & \omega = \pm 2\pi/L \\ 0, & \omega = 2\pi k/L, \quad k = 2,3,\cdots,L-2 \end{cases}$$

其中 $L = 256$。

(d) 证明这个新窗函数的 DTFT 可以用 $W_R(e^{j\omega})$和两个 $W_R(e^{j\omega})$的移位项来表示。

(e) 推导一个 $w_{avg}[n]$的简单公式，并画出 $a = -0.5$ 且 $0 \leqslant n \leqslant 255$ 时的窗函数。

10.44 通常我们会放大一个信号 DFT 中感兴趣的一个区域以获得更多细节。本题中，将研究两个能实现这一过程，即获得 $X(e^{j\omega})$中感兴趣的频率域中额外的样本的两种算法。

设 $X_N[k]$是一个有限长信号 $x[n]$的 N 点 DFT。回忆一下 $X_N[k]$在 ω 上每 $2\pi/N$ 就包含一个 $X(e^{j\omega})$ 的样本。给定 $X_N[k]$，要计算 $X(e^{j\omega})$在 $\omega = \omega_c - \Delta\omega$ 与 $\omega = \omega_c + \Delta\omega$ 之间间隔为 $2\Delta\omega/N$ 的 N 个样本，其中

$$\omega_c = \frac{2\pi k_c}{N}$$

及

$$\Delta\omega = \frac{2\pi k_\Delta}{N}$$

这等同于在区间 $\omega_c - \Delta\omega < \omega < \omega_c + \Delta\omega$ 内放大 $X(e^{j\omega})$。如图 P10.44－1 所示的系统用于实现放大。假设在 N 点 DFT 之前 $x_z[n]$已在必要时补零并且 $h[n]$是截止频率为 $\Delta\omega$ 的理想低通滤波器。

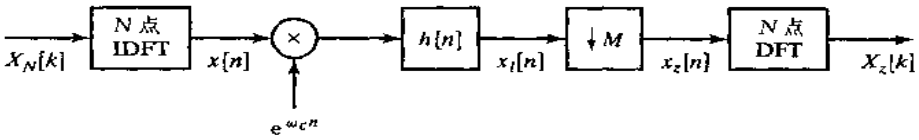


图 P10.44－1

(a) 若在欠采样时混叠可以避免，则可以采用的 M 最大值(有可能非整数)是多少？(用 k_Δ 变换和长度 N 表示)

(b) 考虑有如图 P10.44－2 所示傅里叶变换的 $x[n]$。利用(a)中求出的 M 最大值，画出当 $\omega_c = \pi/2$ 和 $\Delta\omega = \pi/6$ 时中间信号 $x_l[n]$和 $x_z[n]$的傅里叶变换。证明系统给出了所要求的频率样本。

另一个得到所要求样本的方法是将有限长序列 $X_N[k]$(标号 k)看作是要经过图 P10.44－3 所示系统处理的离散时间数据。第一个系统的脉冲响应是

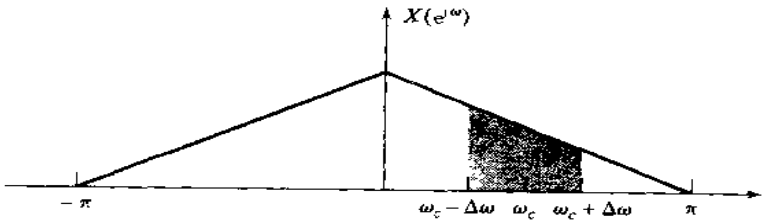


图 P10.44－2

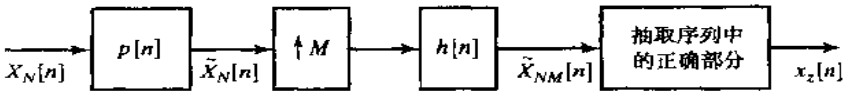


图 P10.44－3

$$p[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n + rN]$$

且滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leqslant \pi/M \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

放大后输出信号定义为

$$X_z[n] = \tilde{X}_{NM}[k_c - k_\Delta + n], \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

对合适的 k_c 和 k_Δ 值。

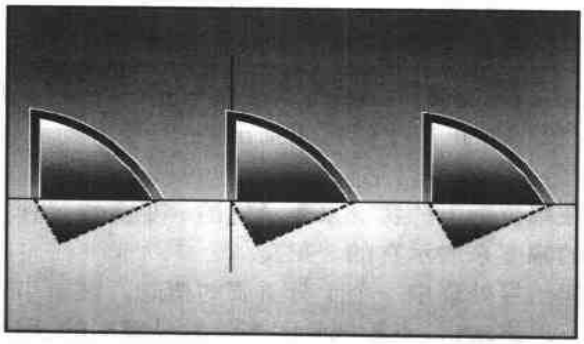
假设所选择的 k_Δ 值使得 M 在下面各部分中为整数。

(c) 设用一个长度为 513($0 \leqslant n \leqslant 512$ 时非零)因果Ⅰ型线性相位滤波器来逼近理想低通滤波器 $h[n]$。指出 $\tilde{X}_{NM}[n]$的哪一个样本可以给出所要求的频率样本。

(d) 利用 $X_N[k]$和 $X(e^{j\omega})$的典型谱图，证明如图 P10.44－3 所示的系统可以产生所求样本。

第11章

离散希尔伯特(Hilbert)变换



11.0 引 言

通常,要了解一个序列傅里叶变换的特性需要有关幅度和相位的实部和虚部 $-\pi<\omega\leqslant\pi$ 所有频率范围内的全部知识。但是我们已经知道,在一定条件下傅里叶变换会有一些特殊性质。例如,在 2.8 节中我们曾看到,如果 $x[n]$是实数,则它的傅里叶变换是共轭对称的,即 $X(e^{j\omega})=X^*(e^{j\omega})$。由此可以得出,对实序列,当 $0\leqslant\omega\leqslant\pi$ 时 $X(e^{j\omega})$的特性也表示为 $-\pi\leqslant\omega\leqslant0$ 时 $X(e^{j\omega})$的特性。同样,从 5.4 节中也看到,在最小相位的限制条件下傅里叶变换的幅度和相位不是相互独立的,也就是说,幅度特性决定着相位特性,而相位特性也决定着幅度特性,相差一个比例因子。在 8.5 节中我们还曾指出,对于有限长为 N 的序列,$X(e^{j\omega})$在 N 个等间隔频率处 $X(e^{j\omega})$的特性决定了在所有频率处的特性。

在这一章中我们将看到,序列**因果性**的限制条件意味着傅里叶变换实部和虚部之间有唯一性关系。复函数的实部和虚部之间的这种关系除了用于信号处理中之外,还出现在许多其它领域中,人们通常将这种关系称为**希尔伯特变换关系**。除了导出因果序列傅里叶变换的这些关系之外,我们还要推导对于 DFT 和具有单边傅里叶变换之序列的有关结果。此外,在 11.3 节中我们还将指出如何利用希尔伯特变换来解释最小相位序列幅度和相位之间的关系。

虽然在这一章中我们用直观的方法来说明问题,但应清楚地认识到希尔伯特关系原本是从解析函数的性质得出来的(见习题 11.21)。在离散时间信号和系统的数学表达式中用到的

复函数一般都具有良好的特性。除了有少数例外，我们所关注的 z 变换均具有良好的定义域，在该定义域上幂级数是绝对收敛的。因为幂级数可表示其收敛域内的解析函数，所以可知，z 变换是在其收敛域内的解析函数。根据解析函数的定义，这意味着在收敛域内的每一点上 z 变换的导数都有定义。另外，解析性意味着 z 变换及其所有的导数在收敛域内都是连续函数。

解析函数的性质表示对 z 变换在其收敛域内的特性有一些较强的限制。因为傅里叶变换是在单位圆上计算的 z 变换，所以这些限制也约束着傅里叶变换的特性。其中的一个限制是，实部和虚部必须满足柯西-黎曼(Cauchy－Riemann)条件，该条件建立了解析函数实部和虚部偏导数之间的联系(例如，见 Churchill and Brown, 1984)。另一个限制是柯西(Cauchy)积分定理，该定理表明可以利用解析域边界上的函数值表示解析域中每一处的复函数值。根据这些解析函数的关系，可以在一定条件下推导出收敛域内的一个闭合围线上 z 变换的实部和虚部之间明显的积分关系。在数学文献中常常将这些关系称为 **Poisson 公式**。在系统理论的文献中人们又称其为**希尔伯特变换(Hilbert Transforms)关系**。

我们并不是采用以上刚刚讨论过的数学方法，而是通过揭示如下事实推导出希尔伯特变换关系式：因果序列之 z 变换的实部和虚部在单位圆上是该序列的偶数部分和奇数部分的变换(见表 2.1 中的性质 5 和 6)。正如我们将要指出的，因果序列可以完全用它的偶数部分来表示，这也说明原始序列的 z 变换可以完全由它在单位圆上的实部来表示。这一论点除了表明因果序列可以利用其在单位圆上的实部来表示它的 z 变换外，还说明在一定条件下，一个序列可利用其在单位圆上的幅度来表示它的 z 变换。

解析信号是连续时间信号处理中一个十分重要的概念。解析信号是只有正频率的傅里叶变换的复时间解析函数。严格地讲，不能把复序列看做是解析的，因为它是一个整数变量的函数。但是，用类似于前面章节中所描述的方法，可以得出频谱在单位圆的 $-\pi<\omega<0$ 上为零的复序列的实部和虚部之间的关系。也可以用类似的方法推出一个周期序列或等效推出一个有限长序列的离散傅里叶变换的实部和虚部间的关系。在这个意义上“因果性”条件就是表示周期序列在每个周期的后半部分均为零。

因此，在这一章中将用因果性的观点来寻找一个函数的偶分量和奇分量之间的关系，或等效地找出其变换的实部和虚部之间的关系。我们将把这种方法用于 4 种情况：第一种情况，对于当 $n<0$ 时值为零的序列 $x[n]$，求得其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$的实部和虚部之间的关系。第二种情况，得出周期序列或等效地得出长度为 N 但最后 $(N/2)-1$ 个点为零的有限长序列的 DFT 之实部和虚部间的关系。第三种情况，在 $n<0$ 时傅里叶变换的**对数之反变换为零**的条件下，得出傅里叶变换的对数之实部和虚部之间的关系。导出傅里叶变换对数的实部和虚部之间的关系相当于找到了 $X(e^{j\omega})$的对数幅度和相位之间的关系。最后一种情况，推导出其傅里叶变换在每个周期的后半部分为零的复序列之实部和虚部之间的关系，该傅里叶变换可看做是 ω 的周期函数。

11.1 因果序列傅里叶变换实部和虚部的充分性

任何序列都可以表示成一个偶序列和一个奇序列之和。具体地讲，若用 $x_e[n]$ 和 $x_o[n]$

分别表示 $x[n]$的偶部和奇部①,则

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{11.1}$$

其中

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \tag{11.2}$$

和

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \tag{11.3}$$

(11.1)式~(11.3)式可用于任意序列,无论该序列是否为因果的,也无论它是否为实数。但是,如果 $x[n]$是因果的,即当 $n<0$ 时 $x[n]=0$,则可从 $x_e[n]$中恢复 $x[n]$或从 $x_o[n]$中恢复 $x[n]$($n\neq 0$)。例如考虑因果序列 $x[n]$以及它的偶分量和奇分量,如图 11.1 所示。因为 $x[n]$是因果的,所以当 $n<0$ 时 $x[n]=0$,且 $n>0$ 时 $x[-n]=0$。因此,除了在 $n=0$ 处外,$x[n]$和 $x[-n]$的非零部分不会重叠。由于这个原因,从(11.2)式和(11.3)式可得

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] \tag{11.4}$$

和

$$x[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n] \tag{11.5}$$

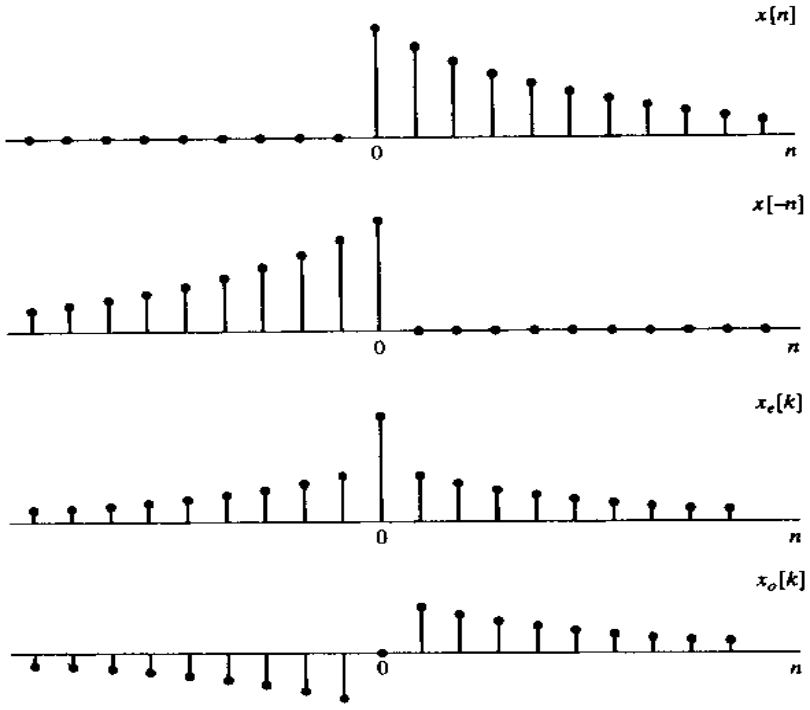


图 11.1　实因果序列的偶部和奇部

① 如果 $x[n]$是实数,则在(11.2)式和(11.3)式中的 $x_e[n]$和 $x_o[n]$就分别是在第 2 章中所研究的 $x[n]$之偶部和奇部。若 $x[n]$是复数,为了讨论方便起见,我们仍然定义 $x_e[n]$和 $x_o[n]$如同在(11.2)式和(11.3)式中一样,它们并不对应于如第 2 章中所研究的复序列之共轭对称部分和共轭反对称部分。

从图 11.1 中很容易看出，以上关系式成立。应当注意，$x[n]$由 $x_e[n]$完全确定。另一方面，由于 $x_o[0]=0$，则我们可以从 $x_o[n]$中恢复 $x[n]$($n=0$ 时除外)。

若 $x[n]$也是稳定的即绝对可和的，则它的傅里叶变换存在。我们把 $x[n]$的傅里叶变换记作

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \tag{11.6}$$

式中 $X_R(e^{j\omega})$和 $X_I(e^{j\omega})$分别是 $X(e^{j\omega})$的实部和虚部。如果 $x[n]$是实序列，则我们记得，$X_e(e^{j\omega})$是 $x_e[n]$的傅里叶变换，而 $jX_I(e^{j\omega})$是 $x_0[n]$的傅里叶变换。因此，对于一个因果的，稳定的实序列，$X_R(e^{j\omega})$就完全确定了 $X(e^{j\omega})$。如果已知 $X_R(e^{j\omega})$，则我们可用以下去骤求出 $X(e^{j\omega})$：

1. 求 $X_R(e^{j\omega})$的傅里叶反变换 $x_e[n]$；
2. 用(11.4)式求 $x[n]$；
3. 求 $x[n]$的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。

当然，这也说明 $X_I(e^{j\omega})$可由 $X_R(e^{j\omega})$确定。在例 11.1 中，我们将说明如何利用上述步骤由 $X_R(e^{j\omega})$求出 $X(e^{j\omega})$和 $X_I(e^{j\omega})$。

例 11.1　有限长序列

考虑一个实因果序列 $x[n]$，其 DFT 的实部为 $X_R(e^{j\omega})$为

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \cos 2\omega \tag{11.7}$$

我们想要求出原序列 $x[n]$，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$及该傅里叶变换的虚部 $X_I(e^{j\omega})$。第一步，重写(11.7)式，将余弦函数表示成复指数之和：

$$X_R(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j2\omega} \tag{11.8}$$

我们知道，$X_R(e^{j\omega})$是 $x_e[n]$的傅里叶变换，$x_e[n]$是由(11.2)式定义的 $x[n]$的偶数部分。比较(11.8)式与傅里叶变换的定义(2.134)式，我们由对应项可得

$$x_e[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n+2]$$

现在我们得到了偶数部分，再利用(11.4)式的关系可求出

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-2] \tag{11.9}$$

由 $x[n]$，得

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= 1 + e^{-j2\omega} \\ &= 1 + \cos 2\omega - j\sin 2\omega \end{aligned} \tag{11.10}$$

根据(11.10)式，我们重申 $X_R(e^{j\omega})$是由(11.7)式所定义的

$$X_I(e^{j\omega}) = -\sin 2\omega \tag{11.11}$$

求 $X_I(e^{j\omega})$的另一种方法是：首先利用(11.3)式由 $x[n]$得出 $x_o[n]$。然后将(11.9)式代入(11.3)式，得

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\delta[n-2] - \frac{1}{2}\delta[n+2]$$

$x_o[n]$的傅里叶变换为 $jX_I(e^{j\omega})$，所以有

$$jX_I(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j2\omega} - \frac{1}{2}e^{j2\omega} = -j\sin 2\omega$$

因此

$$X_I(e^{j\omega}) = -\sin 2\omega$$

这与(11.11)式一致。

例 11.2　指数序列

设

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha\cos\omega}{1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2}, \qquad |\alpha| < 1 \tag{11.12}$$

或等效地

$$X_R(e^{j\omega}) = \frac{1 - (\alpha/2)(e^{j\omega} + e^{-j\omega})}{1 - \alpha(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \alpha^2}, \qquad |\alpha| < 1 \tag{11.13}$$

式中 α 为实数。首先我们先求出 $x_e[n]$，再利用(11.4)式求出 $x[n]$。

为了得出 $x_e[n]$，即 $X_R(e^{j\omega})$的傅里叶反变换，比较方便的方法是先求出 $x_e[n]$的 z 变换 $X_R(z)$。且可由(11.13)式直接得到，因为有

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

所以用在(11.13)式中用 z 代替 $e^{j\omega}$，可得

$$X_R(z) = \frac{1 - (\alpha/2)(z + z^{-1})}{1 - \alpha(z + z^{-1}) + \alpha^2} \tag{11.14}$$

$$= \frac{1 - \frac{\alpha}{2}(z + z^{-1})}{(1 - \alpha z^{-1})(1 - \alpha z)} \tag{11.15}$$

因为我们是由傅里叶变换 $X_R(e^{j\omega})$开始，并且将它变换到 z 平面而得到 $X_R(z)$，所以 $X_R(z)$的收敛域当然要包括单位圆且收敛域的内边界由 $z=\alpha$ 处的极点确定，外边界则由 $z=1/\alpha$ 处的极点确定。根据(11.15)式我们要求出 $X_R(z)$的 z 反变换 $x_e[n]$。将(11.15)式展开成部分分式，得

$$X_R(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} + \frac{1}{1 - \alpha z}\right] \tag{11.16}$$

正如上面所提到的，其收敛域包括单位圆。可对(11.16)式中每一项分别作 z 反变换得到

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\alpha^n u[n] + \frac{1}{2}\alpha^{-n}u[-n] \tag{11.17}$$

因此，根据(11.4)式有

$$x[n] = \alpha^n u[n] + \alpha^{-n}u[-n]u[n] - \delta[n]$$
$$= \alpha^n u[n]$$

然后可求出 $X(e^{j\omega})$为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \tag{11.18}$$

且 $X(z)$为

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \qquad |z| > |\alpha| \tag{11.19}$$

例 11.1 所说明的合成方法可以用解析的方法来解释，以便得出用 $X_R(e^{j\omega})$直接表示 $X_I(e^{j\omega})$的一般关系式。由(11.4)式，复卷积定理以及 $x_e[0] = x[0]$这一事实可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})U(e^{j(\omega-\theta)})d\theta - x[0] \tag{11.20}$$

其中 $U(e^{j\omega})$是单位阶跃序列的傅里叶变换。如 2.7 节中所指出的，虽然单位阶跃序列既不是绝对可和的，也不是平方可和的，但是它可以用如下傅里叶变换来表示：

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \tag{11.21}$$

或者，因为 $1/(1-e^{-j\omega})$ 项可以写作

$$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{11.22}$$

所以(11.21)式可以变为

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k) + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{11.23}$$

利用(11.23)式可将(11.20)式表示成

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) \\ &= X_R(e^{j\omega}) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})d\theta \\ &\quad - \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta - x[0] \end{aligned} \tag{11.24}$$

令(11.24)式中的实部和虚部相等，并注意到

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})d\theta \tag{11.25}$$

我们可以得出如下关系式

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{11.26}$$

按照同样的步骤，用(11.5)式可以由 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $x[0]$ 得出 $x[n]$ 和 $X(e^{j\omega})$。这一过程导出了用 $X_1(e^{j\omega})$ 求出 $X_R(e^{j\omega})$ 的方程

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{11.27}$$

(11.26)式和(11.27)式称为**离散希尔伯特变换关系式**，对于一个因果和稳定的实序列之傅里叶变换的实部和虚部均成立。当 $\omega-\theta=0$ 时，由于被积函数是奇异的，所以以上两式的积分在此时也就不合理。因此，必须小心地计算这些积分以便得到一致的有限结果。若把积分当作 **Cauchy 主值**就可以正式地完成上面的积分。这样，(11.26)式成为

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{11.28}$$

且(11.27)式为

$$X_R(e^{j\omega}) = x[0] + \frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi} X_I(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{11.29}$$

式中符号 $\mathscr{P}$ 表示积分的 Cauchy 主值。例如，在(11.28)式中 Cauchy 主值的含义是

$$X_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\omega+\varepsilon}^{\pi} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta + \int_{-\pi}^{\omega-\varepsilon} X_R(e^{j\theta})\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta\right] \tag{11.30}$$

(11.30)式表示通过 $-\cot(\omega/2)$ 和 $X_R(e^{j\omega})$ 的周期卷积可求得 $X_I(e^{j\omega})$，而在奇异点 $\theta=\omega$ 的邻域要特别小心。同样，(11.29)式涉及到 $\cot(\omega/2)$ 和 $X_I(e^{j\omega})$ 的周期卷积。

在(11.28)式(或等效地，(11.30)式)的卷积积分中所涉及到的两个函数如图 11.2 所示。(11.30)式中的极限存在，这是因为函数 $\cot[(\omega-\theta)/2]$ 在奇异点 $\theta=\omega$ 是反对称的，可在奇异点周围对称地求取极限。

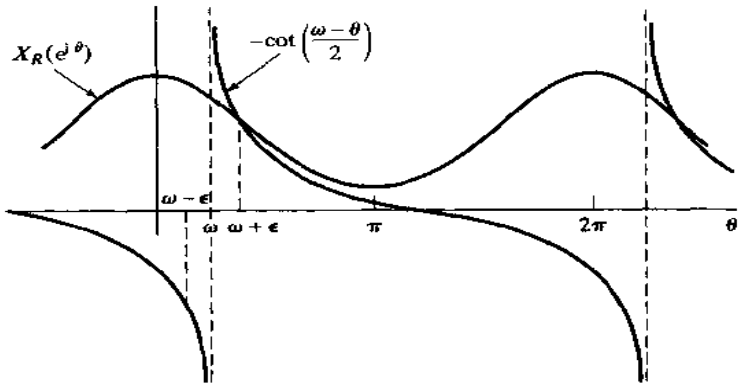


图 11.2　把希尔伯特变换解释作周期卷积

11.2　有限长序列的充分性定理

在 11.1 节中我们曾指出，实序列的因果性或单边性意味着对该序列的傅里叶变换有一些严格的限制，前一节的结果当然可以用于有限长因果序列，但由于有限长的特性局限性更强，所以一个有限长序列的傅里叶变换有可能受到更多的限制。下面将会看到的确如此。

我们曾介绍过，有限长序列可以用离散傅里叶变换来表示，这是一种可以利用的有限长性质。因为 DFT 涉及到求和而不是积分，所以就没有不合理的积分问题。

由于 DFT 实际上是周期序列的一种表示，因此我们所得出的任何结果都以周期序列的相应结果为基础。确实，在推导所要求的有限长序列的希尔伯特变换关系式时，应当牢记 DFT 所固有的周期性。因此，我们将首先研究周期的情况，然后讨论如何将它用于有限长的情况。

考虑一个周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}[n]$，它与长度为 N 的有限长序列的关系为

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N] \tag{11.31}$$

和 11.1 节中一样，$\tilde{x}[n]$在一个周期内可以表示成一个偶序列和一个奇序列之和，即

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}_e[n] + \tilde{x}_o[n], \qquad n = 0,1,\cdots,(N-1) \tag{11.32}$$

式中

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n]}{2}, \qquad n = 0,1,\cdots,(N-1) \tag{11.33a}$$

和

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n]}{2}, \qquad n = 0,1,\cdots,(N-1) \tag{11.33b}$$

当然，在 11.1 节中所使用的意义上，一个周期序列不可能是因果的。但是，我们可以定义一个“周期因果的”周期序列为：当 $N/2<n<N$ 时 $\tilde{x}[n]=0$。这就是说，$\tilde{x}[n]$在后半周期上为零。本书以后均假设 N 为偶数，N 为奇数的情况会在习题 11.23 中考虑。应当注意，由于 $\tilde{x}[n]$具有周期性，所以当 $-N/2<n<0$ 时，有 $\tilde{x}[n]=0$。对于有限长序列，这个限定表示，虽然认为序列长度为 N，但最后 $(N/2)-1$ 个点实际上为零。图 11.3 中给出一个周期性因果

序列及其偶部和奇部($N=8$)的例子。因为 $\tilde{x}[n]$在每个周期的后半部均为零,所以 $\tilde{x}[-n]$则在每个周期的前半部为零。因此,除了 $n=0$ 和 $n=N/2$ 外,$\tilde{x}[n]$和 $\tilde{x}[-n]$的非零部分之间没有重叠。这样,对于"因果"周期序列,

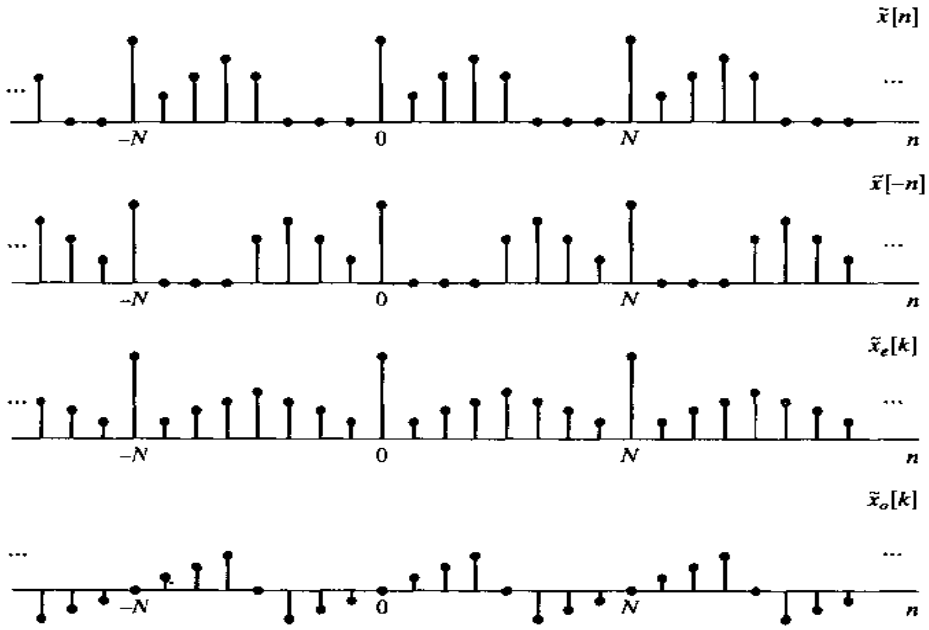


图 11.3 周期 $N=8$ 的"周期因果的"实周期序列的偶部和奇部

$$\tilde{x}[n]=\begin{cases}2\tilde{x}_e[n], & n=1,2,\cdots,(N/2)-1\\ \tilde{x}_e[n], & n=0,N/2\\ 0, & n=(N/2)+1,\cdots,N-1\end{cases} \tag{11.34}$$

和

$$\tilde{x}[n]=\begin{cases}2\tilde{x}_o[n], & n=1,2,\cdots,(N-2)-1\\ 0, & n=(N/2)+1,\cdots,N-1\end{cases} \tag{11.35}$$

如果我们定义周期序列

$$\tilde{u}_N[n]=\begin{cases}1, & n=0,N/2\\ 2, & n=1,2,\cdots,(N/2)-1\\ 0, & n=(N/2)+1,\cdots,N-1\end{cases} \tag{11.36}$$

则当 N 为偶数时,$\tilde{x}[n]$可以表示成

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}_e[n]\tilde{u}_N[n] \tag{11.37}$$

和

$$\tilde{x}[n]=\tilde{x}_o[n]\tilde{u}_N[n]+x[0]\tilde{\delta}[n]+x[N/2]\tilde{\delta}[n-(N/2)] \tag{11.38}$$

其中 $\tilde{\delta}[n]$是周期为 N 的周期性单位脉冲序。这样,序列 $\tilde{x}[n]$可以由 $\tilde{x}_e[n]$完全恢复。另一方面,$\tilde{x}_o[n]$在 $n=0$ 和 $n=N/2$ 处始终为零,因此只有当 $n\neq 0$ 和 $n\neq N/2$ 时才能由 $\tilde{x}_o[n]$

恢复 $\tilde{x}[n]$。

如果 $\tilde{x}[n]$是周期为 N 的实周期序列，其离散傅里叶级数为 $\tilde{X}[k]$，则 $\tilde{X}[k]$的实部 $\tilde{X}_R[k]$是 $\tilde{x}_e[n]$的 DFS，且 $\mathrm{j}\tilde{X}_I[k]$是 $\tilde{x}_o[n]$的 DFS。这样，(11.37)式和(11.38)式意味着，对于一个周期为 N 并且在上面所定义的意义上是因果的周期序列，$\tilde{X}[k]$可以从它的实部或(几乎)从它的虚部得以恢复。同样，$\tilde{X}_I[k]$可由 $\tilde{X}_R[k]$推出，而 $\tilde{X}_R[k]$也(几乎)能由 $\tilde{X}_I[k]$求出。

具体地讲，假设 $\tilde{X}_R[k]$已知，则 $\tilde{X}[k]$和 $\tilde{X}_I[k]$可以按下述步骤求出：

1. 用 DFS 合成式计算 $\tilde{x}_e[n]$。

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_R[k]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn} \tag{11.39}$$

2. 用(11.37)式计算 $\tilde{x}[n]$。

3. 用 DFS 解析式计算 $\tilde{X}[k]$。

$$\tilde{X}[k] = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\pi/N)kn} = \tilde{X}_R[k] + \mathrm{j}\tilde{X}_I[k] \tag{11.40}$$

与 11.1 节所讨论的一般因果情况不同，因为(11.39)式和(11.40)式可以用 FFT 算法精确高效地计算出来，所以上面所概括的步骤可以在计算机上实现。

为了得出 $\tilde{X}_R[k]$和 $\tilde{X}_I[k]$之间明确的关系式，我们可解析地执行以上步骤。由(11.37)式和(8.34)式得

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \tilde{X}_R[k] + \mathrm{j}\tilde{X}_I[k] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}_R[m]\tilde{U}_N[k-m]\end{aligned} \tag{11.41}$$

也就是说，$\tilde{X}[k]$是 $\tilde{x}_e[n]$的 DFS $\tilde{X}_R[k]$和 $\tilde{u}_N[n]$的 DFS $\tilde{U}_N[k]$的周期卷积。可以证明的 DFS 为(见习题 11.22)

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0 \\ -\mathrm{j}2\cot(\pi k/N), & k \text{ 为奇数} \\ 0, & k \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{11.42}$$

如果我们定义

$$\tilde{V}_N[k] = \begin{cases} -\mathrm{j}2\cot(\pi k/N), & k \text{ 为奇数} \\ 0, & k \text{ 为偶数} \end{cases} \tag{11.43}$$

则(11.41)式可以表示成

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}_R[k] + \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}_R[m]\tilde{V}_N[k-m] \tag{11.44}$$

因此

$$\mathrm{j}\tilde{X}_I[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}_R[m]\tilde{V}_N[k-m] \tag{11.45}$$

上式就是周期性因果序列的 DFS 之实部和虚部间的关系式。同样，由(11.38)式开始我们可以得出

$$\tilde{X}_R[k] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\mathrm{j}\tilde{X}_I[m]\tilde{V}_N[k-m] + \tilde{x}[0] + (-1)^k\tilde{x}[N/2] \tag{11.46}$$

(11.45)式和(11.46)式表明了周期序列 $\tilde{x}[n]$的 DFS 表达式之实部和虚部间的关系。

如果将 $\tilde{x}[n]$看作是有限长序列 $x[n]$的周期重复，如(11.31)式所示，则

$$x[n]=\begin{cases}\tilde{x}[n], & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11.47}$$

若 $x[n]$具有"周期因果"的性质，并且周期为 N(即当 $n<0$ 和 $n>N/2$ 时 $x[n]=0$)，则以上讨论的全部结果都可用于 $x[n]$的离散傅里叶变换。换句话说，我们可以从(11.45)式和(11.46)式中去掉"~"号，从而得 DFT 关系式为

$$\mathrm{j}X_I[k]=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{m=0}^{N-1}X_R[m]V_N[k-m], & 0\leqslant k\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11.48}$$

和

$$X_R[k]=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\sum\limits_{m=0}^{N-1}\mathrm{j}X_I[m]V_N[k-m]+x[0]+(-1)^k x[N/2], & 0\leqslant k\leqslant N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11.49}$$

应当注意，由(11.43)式给出的序列 $V_N[k-m]$是以 N 为周期的序列，因此我们不必担心(11.48)式和(11.49)式中$((k-m))_N$ 的计算。这两个式子是我们所要求的实序列之 N 点 DFT 的实部和虚部间的关系式，该序列的实际长度小于或等于$(N/2)+1$(N 为偶数)。这些方程均为循环卷积，例如(11.48)式可以通过以下步骤高效地计算：

1. 计算 $X_R[k]$的反 DFT 得出序列

$$x_{ep}[n]=\frac{x[n]+x[((-n))_N]}{2}\qquad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{11.50}$$

2. 由下式计算 $x[n]$的周期奇部

$$x_{op}[n]=\begin{cases}x_{ep}[n], & 0<n<N/2\\ -x_{ep}[n], & N/2<n<N-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11.51}$$

3. 计算 $x_{op}[n]$的 DFT 得出 $\mathrm{j}X_I[k]$。

请注意，如果我们在步骤 2 中不是计算 $x[n]$的奇部，而是计算

$$x[n]=\begin{cases}x_{ep}[0], & n=0\\ 2x_{ep}[n], & 0<n<N/2\\ x_{ep}[N/2], & n=N/2\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11.52}$$

则所得序列的 DFT 应当是 $x[n]$的完整 DFT $X[k]$。

例 11.3　周期序列

考虑一个周期 $N=4$ 的周期因果序列，且有

$$X_R[k]=\begin{cases}2, & k=0\\ 3, & k=1\\ 4, & k=2\\ 3, & k=3\end{cases}$$

我们可用两种方法中的任一种求出 DFT 的虚部。第一种方法利用(11.48)式。当时，$N=4$ 时，

$$V_4[k]=\begin{cases}2j, & k=-1+4m,\\ -2j, & k=1+4m\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

式中 m 为整数。计算(11.48)式的卷积得

$$jX_I[k]=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{3}X_R[k]V_4[k-m]$$

$$=\begin{cases}j, & k=1\\ -j, & k=3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

另一种方法是按照包含(11.50)式和(11.51)式的三个步骤来求。计算反 DFT $X_R[k]$得

$$x_e[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X_R[k]W_4^{kn}$$

$$=\frac{1}{4}[2+3(j)^n+4(-1)^n+3(-j)^n]$$

$$=\begin{cases}3, & n=0\\ -\frac{1}{2}, & n=1,3\\ 0, & n=2\end{cases}$$

注意,虽然这个序列本身不是偶对称的,但 $x_e[n]$的周期重复是偶对称的。所以 $x_e[n]$的 DFT$X_R[k]$全部为实数。由(11.51)式可求出周期的奇部分 $x_{op}[n]$;具体有

$$x_{op}[n]=\begin{cases}-\frac{1}{2} & n=1\\ \frac{1}{2} & n=3\end{cases}$$

最后,我们可由 $x_{op}[n]$的 DFT 求出 $jX_I[k]$:

$$jX_I[k]=\sum_{n=0}^{3}x_{op}[n]W_4^{nk}$$

$$=-\frac{1}{2}W_4^{k}+\frac{1}{2}W_4^{3k}$$

$$=\begin{cases}j, & k=1\\ -j, & k=3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当然它与根据(11.48)式得出的结果是一样的。

11.3 幅度与相位间的关系

到目前为止,我们已集中讨论了一个序列的傅里叶变换之实部和虚部间的关系。我们常常对傅里叶变换的幅度和相位间的关系很感兴趣,在这一节中我们就来研究这些函数存在唯一性关系的条件,虽然从表面上看似乎实部与虚部间的关系就表示幅度和相位间的关系,但实际上并不如此。5.4 节中的例 5.11 清楚地表明了这一点。那个例子中的两个系统函数 $H_1(z)$和 $H_2(z)$假定对应于因果的稳定系统,因此 $H_1(e^{j\omega})$的实部和虚部间的关系表现为(11.28)式和(11.29)式的希尔伯特变换关系,$H_2(e^{j\omega})$的实部和虚部也同样如此。但是,又$H_1(e^{j\omega})$不能由$|H_1(e^{j\omega})|$得出,因为 $H_1(e^{j\omega})$和 $H_2(e^{j\omega})$虽具有相同的幅度,但其相位却不

同。

序列 $x[n]$之傅里叶变换实部和虚部间的希尔伯特变换关系是以 $x[n]$的因果性为基础的。如果将因果性施加在由 $x[n]$导出的序列 $\hat{x}[n]$上，该序列的傅里叶变换 $\hat{X}(e^{j\omega})$这是 $x[n]$的傅里叶变换之对数，则我们可以得到幅度和相位间的希尔伯特变换关系。具体地讲，我们定义 $\hat{x}[n]$使得

$$x[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\arg[X(e^{j\omega})]} \tag{11.53a}$$

$$\hat{x}[n] \overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega}) \tag{11.53b}$$

式中

$$X(e^{j\omega}) = \log[X(e^{j\omega})] = \log\left|X(e^{j\omega})\right| + j\arg[X(e^{j\omega})] \tag{11.54}$$

并且正如 5.1 节中所定义的，$\arg[X(e^{j\omega})]$表示 $X(e^{j\omega})$的连续相位。序列 $\hat{x}[n]$通常称为$x[n]$的**复倒谱**。(见 Oppenheim 等，1968 和 Oppenheim and Schafer，1975)

如果要求 $\hat{x}[n]$是因果的，则 $\hat{X}(e^{j\omega})$的实部和虚部分别为 $\log\left|X(e^{j\omega})\right|$和 $\arg[X(e^{j\omega})]$，且它们之间的关系符合(11.28)式和(11.29)式，即

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|X(e^{j\theta})\right|\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{11.55}$$

和

$$\log\left|X(e^{j\omega})\right| = \hat{x}[0] + \frac{1}{2\pi}\mathscr{P}\int_{-\pi}^{\pi}\arg[X(e^{j\theta})]\cot\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta \tag{11.56a}$$

其中，(11.56a)式中的 $\hat{x}[0]$等于

$$\hat{x}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|X(e^{j\omega})\right|d\omega \tag{11.56b}$$

虽然对于这一点还不是十分清楚，但在习题 11.32 中我们将会知道，5.6 节中所定义的最小相位条件，即 $X(z)$的全部极点和零点均在单位圆内，可保证复倒谱的因果性。因此 5.6 节中的最小相位条件和复倒谱的因果性条件是从不同角度所得出的相同的约束条件。请注意，若 $\hat{x}[n]$是因果的，则 $\arg[X(e^{j\omega})]$可以通过(11.55)式由 $\log\left|X(e^{j\omega})\right|$完全确定；但是由(11.56)式完全确定 $\log\left|X(e^{j\omega})\right|$不但需要相位 $\arg[X(e^{j\omega})]$，还需要量 $\hat{x}[0]$。若 $\hat{x}[0]$是未知的，则确定的 $\log\left|X(e^{j\omega})\right|$只是相差一个相加的常数，或等效地说，确定 $\left|X(e^{j\omega})\right|$的只是相差一个相乘的(增益)常数。

复倒谱的最小相位和因果性并不是保证傅里叶变换的幅度和相位间唯一性关系的唯一限制条件。作为另外一种限制条件的例子，已经证明(Hayes 等，1980)，如果一个序列是有限长的并且它的 z 变换没有互为共轭倒数对的零点，则序列(当然也包括其傅里叶变换的幅度)可以由其傅里叶变换的相位来唯一确定，只相差一个比例因子。

11.4 复序列的希尔伯特变换关系

至此，我们已经研究了因果序列的傅里叶变换和周期序列的离散傅里叶变换的希尔伯特

变换关系，其中周期序列在每个周期的后半部分为零的意义上是“周期因果的”。在这一节中我们研究可以通过离散卷积将其实部和虚部联系起来的**复序列**，这种离散卷积类似于在前几节中推导出的希尔伯特变换关系。当把带通信号表示成复信号时，在某种意义上此复信号完全类似于连续时间信号理论中的解析信号，这些希尔伯特变换关系是非常有用的。

如同前面所讨论的，可以用因果性或单边性的概念为基础来推导希尔伯特变换关系。因为我们十分关心建立复序列的实部和虚部之间的关系，所以可把单边性的概念用于序列的傅里叶变换。当然不能要求在 $\omega<0$ 区域内的傅里叶变换为零，因为它必须是周期的。可是我们可以假设序列的傅里叶变换在每个周期后半部均为零，也就是说，它的 z 变换在单位圆的下半部分（$-\pi\leqslant\omega<0$）为零。这样，若 $x[n]$表示某序列，且 $X(e^{j\omega})$是它的傅里叶变换，则要求

$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad -\pi \leqslant \omega < 0 \tag{11.57}$$

（我们也可以假设当 $0<\omega\leqslant\pi$ 时 $X(e^{j\omega})$为零）与 $X(e^{j\omega})$相对应的序列 $x[n]$必须是复数，因为若 $x[n]$为实数，则 $X(e^{j\omega})$必须是共轭对称的，即 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$。所以，可将 $x[n]$表示成

$$x[n] = x_r[n] + jx_i[n] \tag{11.58}$$

式中 $x_r[n]$和 $x_i[n]$为实序列。在连续时间信号理论中相对照的信号是解析函数，因此称之为解析信号。虽然对于序列而言解析性没有正规的意义，但尽管如此，我们仍然将该术语用于其傅里叶变换为单边的复序列。

如果 $X_r(e^{j\omega})$和 $X_i(e^{j\omega})$分别表示实序列 $x_r[n]$和 $x_i[n]$的傅里叶变换，则

$$X(e^{j\omega}) = X_r(e^{j\omega}) + jX_i(e^{j\omega}) \tag{11.59a}$$

由此可得

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})] \tag{11.59b}$$

和

$$jX_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})] \tag{11.59c}$$

请注意，(11.59c)式给出 $jX_i(e^{j\omega})$的表达式，它是虚数信号 $jx_i[n]$的傅里叶变换。还应注意，$X_r(e^{j\omega})$和 $X_i(e^{j\omega})$通常均为复值函数，而且复变换 $X_r(e^{j\omega})$和 $jX_i(e^{j\omega})$所起的作用分别类似于前几节中因果序列的偶部和奇部所起的作用。但是，是 $X_r(e^{j\omega})$是共轭对称的，即 $X_r(e^{j\omega}) = X_r^*(e^{-j\omega})$。类似地，$jX_i(e^{j\omega})$是共轭反对称的，即 $jX_i(e^{j\omega}) = -jX_i^*(e^{-j\omega})$。

图 11.4 给出了一个复序列 $x[n] = x_r[n] + jx_i[n]$的复单边傅里叶变换和实序列 $x_r[n]$，$x_i[n]$相应的双边傅里叶变换的例子。图中用画图的方法表明了(11.59)式包含的抵消作用。

如果当 $-\pi\leqslant\omega<0$ 时 $X(e^{j\omega})$为零，则 $X(e^{j\omega})$和 $X^*(-e^{j\omega})$的非零部分之间没有重叠。因此，$X(e^{j\omega})$既可以由 $X_r(e^{j\omega})$也可以由 $X_i(e^{j\omega})$来恢复。因为假设 $X(e^{j\omega})$在 $\omega=\pm\pi$ 处为零，所以 $X(e^{j\omega})$可以由 $jX_i(e^{j\omega})$完全恢复。这与 11.2 节的情况不同，在该节中因果序列也可以由其奇部恢复，但在端点处除外。

特别是，

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}) & 0 \leqslant \omega < \pi \\ 0 & -\pi \leqslant \omega < 0 \end{cases} \tag{11.60}$$

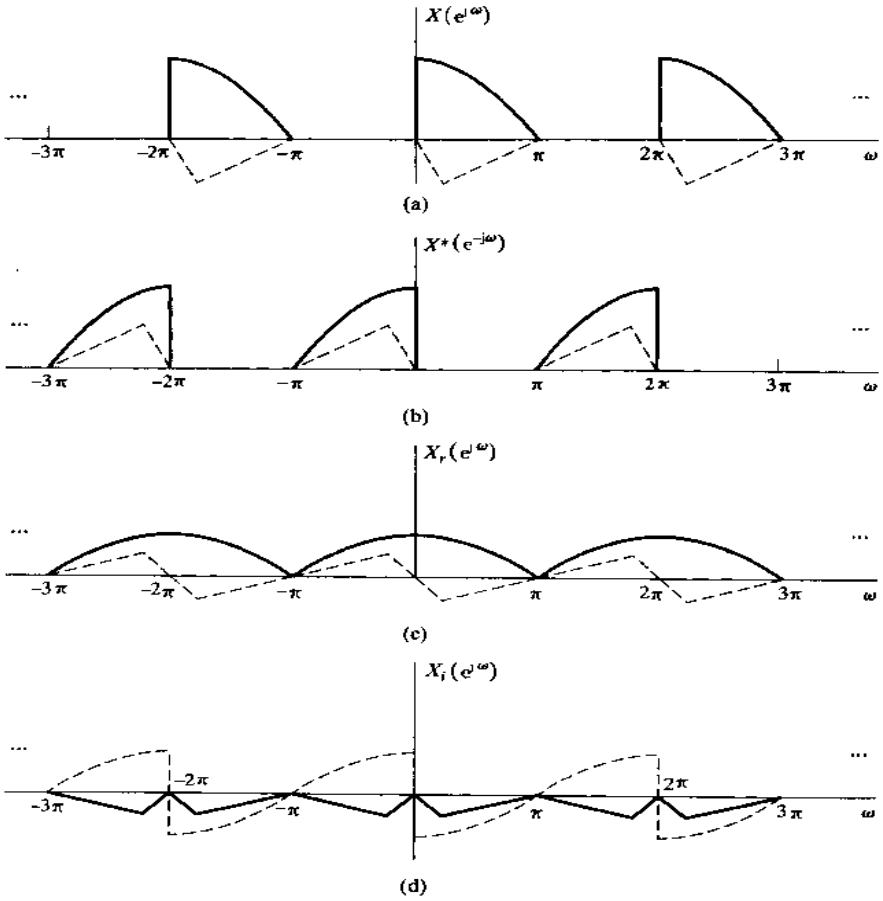


图 11.4 举例说明单边傅里叶变换的分解(实线表示实部,虚线表示虚部)

以及

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}) & 0 \leqslant \omega < \pi \\ 0 & -\pi \leqslant \omega < 0 \end{cases} \tag{11.61}$$

我们可以利用上式之一直接得出 $X_r(e^{j\omega})$和 $X_i(e^{j\omega})$之间的关系:

$$X_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX_r(e^{j\omega}) & 0 < \omega < \pi \\ jX_r(e^{j\omega}) & -\pi \leqslant \omega < 0 \end{cases} \tag{11.62}$$

或

$$X_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X_r(e^{j\omega}) \tag{11.63a}$$

其中

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \tag{11.63b}$$

通过比较图 11.4(c)和 11.4(d)就可说明式(11.63)。现在,$X_i(e^{j\omega})$是 $x[n]$的虚部$x_i[n]$

的傅里叶变换，$X_r(e^{j\omega})$是 $x[n]$的实部 $x_r[n]$的傅里叶变换。因此，按照(11.63)式，可以让 $x_r[n]$通过一个频率响应为 $H(e^{j\omega})$(由(11.63b)式给出)的线性时不变离散时间系统而得到 $x_i[n]$。这个频率响应有单位幅度，对于 $0<\omega<\pi$ 有 $-\pi/2$ 的相位角，而对于 $-\pi<\omega<0$ 有 $+\pi/2$的相位角，这样的系统称为理想 90°移相器。换一种说法，如果我们考虑对一个序列进行某种运算，则 90°移相器也称为**希尔伯特变换器**。由(11.63)式可得

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}X_i(e^{j\omega}) = -H(e^{j\omega})X_i(e^{j\omega}) \tag{11.64}$$

因此，也可以利用一个 90°移相器由 $x_i[n]$得出 $-x_r[n]$。

与(11.63b)式给出的频率响应 $H(e^{j\omega})$相对应的 90°移相器的脉冲响应 $h[n]$是

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} je^{j\omega n}d\omega$$

或

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{11.65}$$

该脉冲响应如图 11.5 所示。利用(11.63)式和(11.64)式，我们得到表达式

$$x_i[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_r[m] \tag{11.66a}$$

和

$$x_r[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]x_i[m] \tag{11.66b}$$

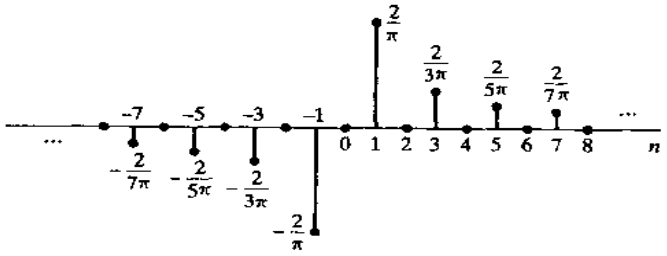


图 11.5 理想希尔伯特变换器或 90°移相器的脉冲响应

(11.66)式就是所要求的离散时间解析信号之实部和虚部间的希尔伯特变换关系。

图 11.6 表示如何利用离散时间希尔伯特变换器系统来产生只由一对实信号组成的复解析信号。

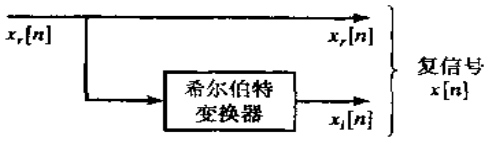


图 11.6 产生具有单边傅里叶变换的复序列的方程框图

11.4.1 希尔伯特变换器的设计

由(11.65)式所给出的希尔伯特变换器的脉冲响应不是绝对可和的。因此，

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \tag{11.67}$$

只是在均方意义下才收敛为(11.63b)式。所以，理想希尔伯特变换器或移相器与理想低通滤波器和理想带限微分器都并列为有价值的理论概念，它们都相当于非因果系统，并且其系统函数只在有限的条件下才存在。

当然，我们可以对理想希尔伯特变换器进行逼近。利用窗函数法或等波纹逼近法就能设

计出对具有恒定群延迟的 FIR 滤波器的逼近。这些逼近能精确实现相移并具有因果 FIR 系统所要求的线性相位分量。这里我们将通过用 Kaiser 窗设计希尔伯特变换器的例子来说明这类逼近的性质。

例 11.4　用 Kaiser 窗设计希尔伯特变换器

一个 M 阶(长度为 $M+1$)FIR 离散希尔伯特变换器的 Kaiser 窗逼近应当为如下形式：

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{I_0\{\beta[1-[(n-n_d)/n_d]^2]^{1/2}\}}{I_0(\beta)}\left\{\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2[\pi(n-n_d)/2]}{n-n_d}\right\} & 0\leqslant n\leqslant M\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{11.68}$$

式中 $n_d=M/2$。正如在 5.7.3 节中所讨论的，若 M 为偶数，则系统是一个Ⅲ型 FIR 广义线性相位系统。

图 11.7(a)表示脉冲响应，图 11.7(b)表示频率响应的幅度，其中 $M=18$ 且 $\beta=2.629$。因为 $h[n]$ 满足对称条件，即 $0\leqslant n\leqslant M$ 时 $h[n]=-h[M-n]$，所以相位正好等于 90°再加上一个线性分量，该分量对应于 $n_d=18/2=9$ 个样本的延迟，即

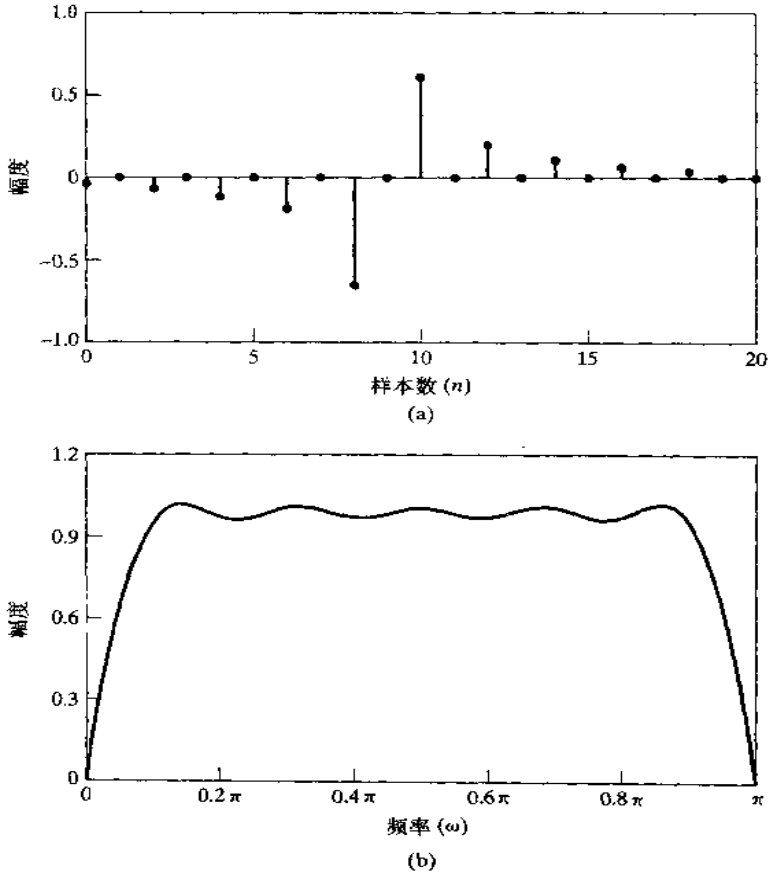


图 11.7　利用 Kaiser 窗设计的 FIR 希尔伯特变换器的
(a)脉冲响应，和(b)幅度响应
($M=18$ 和 $\beta=2.629$)

$$\angle H(e^{j\omega}) = \frac{-\pi}{2} - 9\omega, \qquad 0 < \omega < \pi \tag{11.69}$$

从图 11.7(b)可以看出，正如Ⅲ型 FIR 系统所要求的，频率响应在 $z=1$ 和 $z=-1(\omega=0$ 和 $\omega=\pi)$ 处为零。因此，除了在某个中间段 $\omega_L < |\omega| < \omega_H$ 之外幅度响应不能十分接近于 1。

若 M 是一个奇整数，则我们得到如图 11.8 所示的Ⅳ型系统，其中 $M=17$ 且 $\beta=4.24$。对于Ⅳ型系统，频率响应只需要在 $z=1(\omega=0)$处为零。因此在 $\omega=\pi$ 附近的频率上可以得到恒定幅度响应的良好近似。相位响应在所有的频率上正好为 90°加上一个对应于 $n_d=17/2=8.5$ 个样本延迟的线性相位分量，即

$$\angle H(e^{j\omega}) = \frac{-\pi}{2} - 8.5\omega \tag{11.70}$$

比较图 11.7(a)和图 11.8(a)可以看出，当 $\omega=\pi$ 处不需要逼近恒定幅度时，Ⅲ型 FIR 希尔伯特变换器在计算上明显优于Ⅳ型系统。这是因为对于Ⅲ型系统来说，脉冲响应的偶序号样本正好为零。因此若在两种情况下都利用反对称性，则要计算出每个输出样本，$M=17$ 的系统需要 8 次乘法，而 $M=18$ 的系统只需要 5 次乘法。

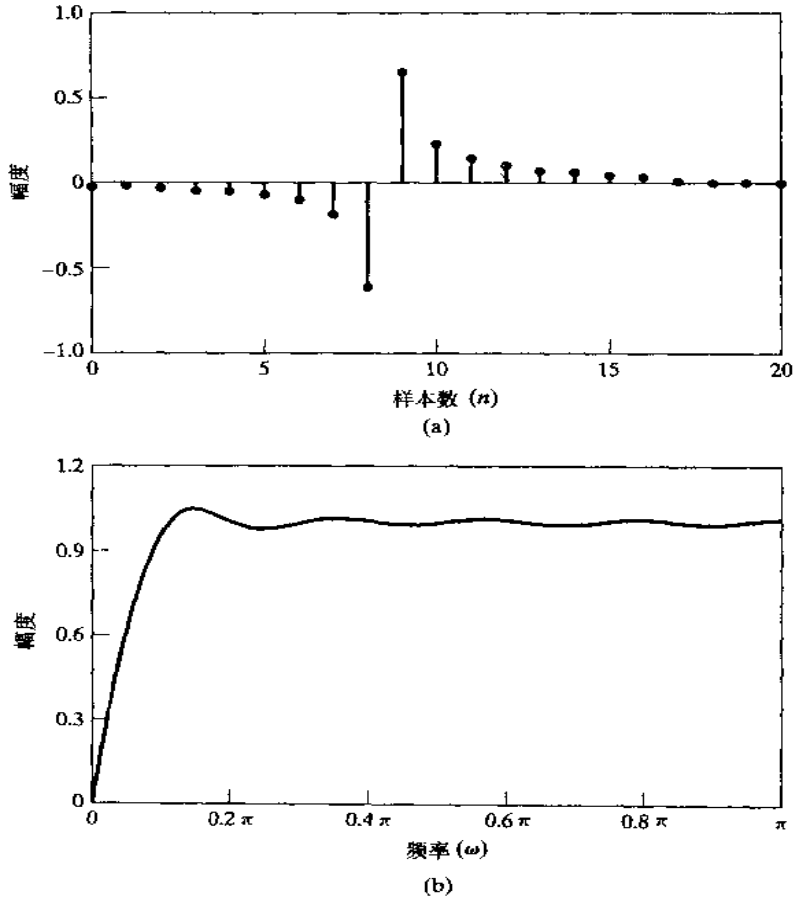


图 11.8　利用 Kaiser 窗设计的 FIR 希尔伯特变换器的
(a)脉冲响应，和(b)幅度响应
($M=17$ 和 $\beta=2.44$)

对于具有等波纹幅度逼近和精确 90°相位的Ⅲ型和Ⅳ型 FIR 线性相位希尔伯特变换器的逼近，可以用 7.4 和 7.5 节所描述的 Parks－McClellan 算法设计，当设计同样长度的滤波器时，该方法与窗函数法相比可使幅度逼近误差进一步减小(Rabiner and Schafer, 1974)。

Ⅲ型和Ⅳ型 FIR 系统的相位精确性好坏是人们将它们用于逼近希尔伯特变换器时所考虑的衡量指标。IIR 系统在逼近一个希尔伯特变换器时，一定有一些相位响应误差及幅度响应误差。设计 IIR 希尔伯特变换器最成功的方法是设计一个“相位分裂器”，它由两个全通系统组成，这两个系统的相位响应在 $0<|\omega|<\pi$ 频段的某一部分上相差近 90°。这样的系统可以用双线性变换法来设计，该方法将一个连续时间相位分裂系统变换成一个离散时间系统(有关该系统的例子，请参见 Gold 等 1970 年的论文)。

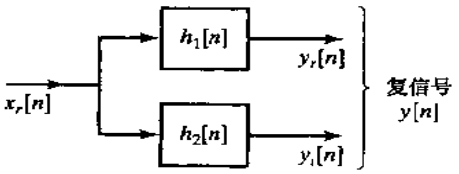


图 11.9 全通相位分裂法的方框图，此方法可产生具有单边傅里叶变换的复序列

图 11.9 给出了一个 90°相位分裂系统。如果 $x_r[n]$表示实输入信号，且 $x_i[n]$是它的希尔伯特变换，则复序列 $x[n]=x_r[n]+jx_i[n]$的傅里叶变换在 $-\pi\leqslant\omega<0$ 上恒等于零，即在 z 平面单位圆的下半部上 $X(z)$为零。在图 11.6 的系统中，我们是利用希尔伯特变换器由 $x_r[n]$产生信号 $x_i[n]$。而在图 11.9 中，则通过两个系统 $H_1(e^{j\omega})$和 $H_2(e^{j\omega})$来处理 $x_r[n]$。如果图11.9中的 $H_1(e^{j\omega})$和 $H_2(e^{j\omega})$是两个相位响应相差 90°的全通系统，则复信号 $y[n]=y_r[n]+jy_i[n]$的傅里叶变换在 $-\pi\leqslant\omega<0$ 上也为零。另外，因为相位分裂系统是全通的，所以 $\left|Y(e^{j\omega})\right|=\left|X(e^{j\omega})\right|$。$Y(e^{j\omega})$和 $X(e^{j\omega})$的相位将差一个 $H_1(e^{j\omega})$ 和$H_2(e^{j\omega})$的共同相位分量。

11.4.2 带通信号的表示

解析信号的许多应用与窄带通信信号有关。在这些应用中，为了方便起见，有时常用低通信号来表示带通信号。我们先考虑复低通信号

$$x[n]=x_r[n]+jx_i[n]$$

式中 $x_i[n]$是 $x_r[n]$的希尔伯特变换，且

$$X(e^{j\omega})=0 \qquad -\pi\leqslant\omega<0$$

傅里叶变换 $X_r(e^{j\omega})$和 $jX_i(e^{j\omega})$分别如图 11.10(a)和 11.10(b)所示，最终的变换 $X(e^{j\omega})=X_r(e^{j\omega})+jX_i(e^{j\omega})$如图 11.10(c)。(实线为实部，虚线为虚部)现在考虑序列

$$s[n]=x[n]e^{j\omega_c n}=s_r[n]+js_i[n] \tag{11.71}$$

其中 $s_r[n]$和 $s_i[n]$是实序列。它所对应的傅里叶变换是

$$S(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega-\omega_c)}) \tag{11.72}$$

如图 11.10(d)所示。将(11.59)式用于 $S(e^{j\omega})$得到方程

$$S_r(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[S(e^{j\omega})+S^*(e^{-j\omega})] \tag{11.73a}$$

$$jS_i(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[S(e^{j\omega})-S^*(e^{-j\omega})] \tag{11.73b}$$

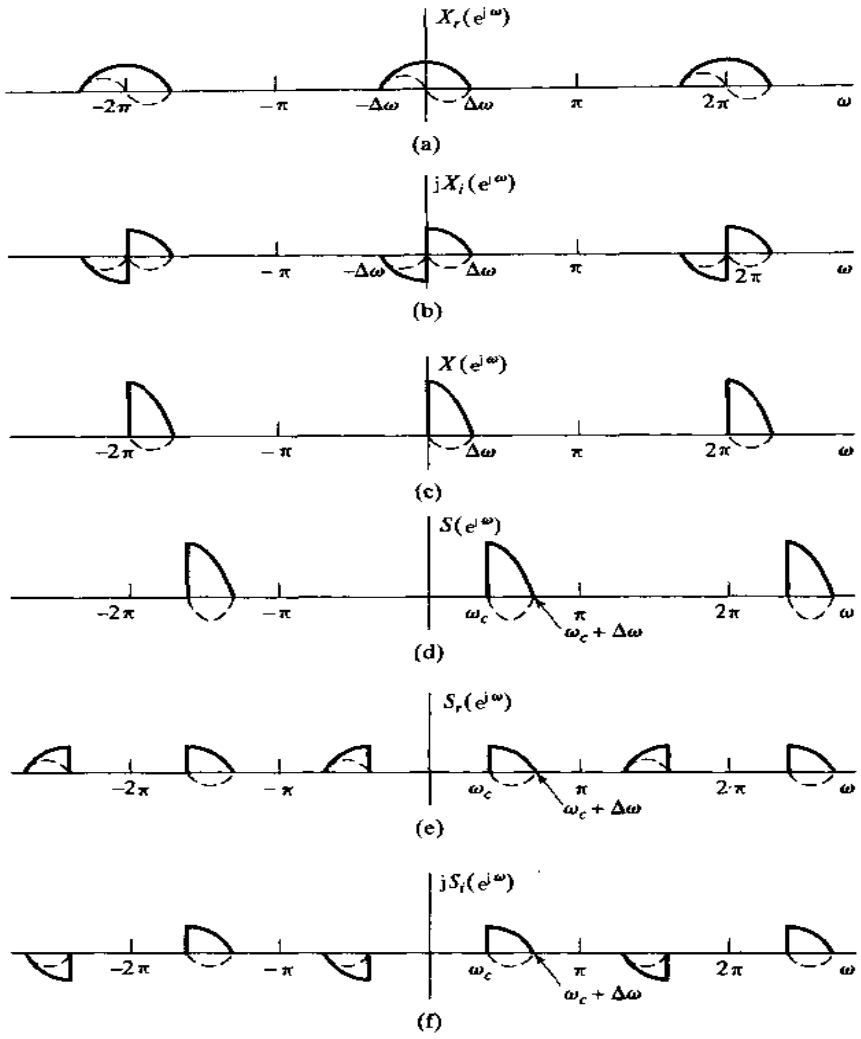


图 11.10　带通信号的傅里叶变换
（实线为实部，虚线为虚部）
（请注意，在(b)和(f)部分表示函数 $jX_i(e^{j\omega})$和 $jS_i(e^{j\omega})$，这里 $X_i(e^{j\omega})$和 $S_i(e^{j\omega})$分别是 $x_i[n]$和 $s_i[n]$的希尔伯特变换之傅里叶变换）

在图 11.10 的例子中，图 11.10(e)和(f)分别表示 $S_r(e^{j\omega})$和 $jS_i(e^{j\omega})$。由图中可以直接看出，若 $\Delta\omega < |\omega| \leqslant \pi$ 且 $\omega_c + \Delta\omega < \pi$ 时 $X_r(e^{j\omega}) = 0$，则 $S(e^{j\omega})$是一个单边带通信号，使得除在区间 $\omega_c < \omega < \omega_c + \Delta\omega$ 之外 $S(e^{j\omega}) = 0$。正如图 11.10 的例子所表明的，用(11.58)式和(11.59)式可以证明，$S_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})S_r(e^{j\omega})$，或者换句话说，$s_i[n]$是 $s_r[n]$的希尔伯特变换。

复信号也可以通过其幅度和相位来表示，即 $x[n]$可以表示成

$$x[n] = A[n]e^{j\phi[n]} \tag{11.74a}$$

其中

$$A[n] = (x_r^2[n] + x_i^2[n])^{1/2} \tag{11.74b}$$

且

$$\phi[n] = \arctan\left(\frac{x_i[n]}{x_r[n]}\right) \tag{11.74c}$$

因此，由(11.71)式和(11.74)式可以将 $s[n]$表示为

$$s[n] = (x_r[n] + jx_i[n])e^{j\omega_c n} \tag{11.75a}$$

$$= A[n]e^{j(\omega_c n + \phi[n])} \tag{11.75b}$$

由此我们可以得出表达式

$$s_r[n] = x_r[n]\cos\omega_c n - x_i[n]\sin\omega_c n \tag{11.76a}$$

或

$$s_r[n] = A[n]\cos(\omega_c n + \phi[n]) \tag{11.76b}$$

以及

$$s_i[n] = x_r[n]\sin\omega_c n + x_i[n]\cos\omega_c n \tag{11.77a}$$

或

$$s_i[n] = A[n]\sin(\omega_c n + \phi[n]) \tag{11.77b}$$

(11.76a)式和(11.77a)式分别如图 11.11(a)和 11.11(b)所示。这些图说明了如何由一个实低通信号形成复带通(单边带)信号。

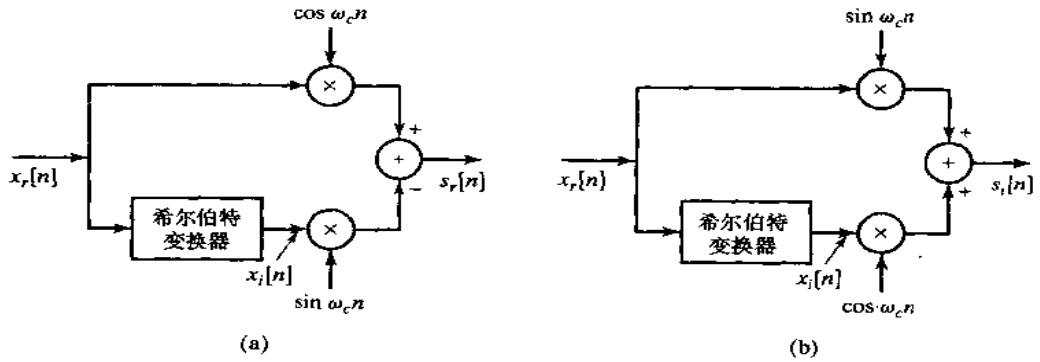


图 11.11　利用(11.76a)式和(11.77a)式得到单边带信号的方框图

合在一起，(11.76)式和(11.77)式就是复低通信号 $x[n]$的实部和虚部对一般复带通信号 $s[n]$的时域表示。通常，用这种复数表示方法来描述一个实带通信号是很方便的。例如，(11.76a)式提供了一种利用一个"同相"分量 $x_r[n]$和一个"正交"(90°相移)分量 $x_i[n]$在时间域表示实带通信号的方法。的确如图 11.10(c)所示，(11.76a)式可以表示其傅里叶变换对于通带中心不是共轭对称的实带通信号(或滤波器的脉冲响应)(如像形式为 $x_r[n]\cos\omega_c n$ 之类的信号)。

从(11.76)式和(11.77)式的形式以及图 11.11 清楚可见，一般的带通信号都具有正弦的形式，它的幅度和相位均受到调制。序列 $A[n]$称为包络，$\phi[n]$称为相位。这种窄带信号表

示法可用于表示各种幅度、相位调制系统。图 11.10 就是说明单边带调制的一个例子。如果我们把实信号 $s_r[n]$看作是低通实信号 $x[n]$作为输入时由单边带调制所得到的结果，则图 11.11(a)表示该单边带调制系统的实现方案。在频率分割多路传输中单边带调制系统是很有用的，因为它可以表示一个具有最小带宽的实带通信号。

11.4.3 带通采样

解析信号的另一个重要用途表现在对带通信号的采样中。第 4 章中我们曾看到，通常如果一个连续时间信号具有带限傅里叶变换，并且当 $|\Omega| \geqslant \Omega_N$ 时 $S_c(j\Omega)=0$，则在采样率满足不等式 $2\pi/T \geqslant 2\Omega_N$ 的条件下该信号可以完全由它的样本来表示。证明这个结果的关键是避免 $S_c(j\Omega)$的副本之间产生重叠，这些副本构成了样本序列的离散时间傅里叶变换。带通连续时间信号的傅里叶变换有这样一个特点，即当 $0 \leqslant |\Omega| \leqslant \Omega_c$ 和 $|\Omega| \geqslant \Omega_c + \Delta\Omega$ 时 $S_c(j\Omega)=0$。因此，它的带宽或支撑域的确只是 $2\Delta\Omega$，而不是 $2(\Omega_c+\Delta\Omega)$，并且若用适当的采样方法，则区域 $-\Omega_c \leqslant \Omega \leqslant \Omega_c$ 可以用 $S_c(j\Omega)$之非零部分的许多映像互不重叠地填充起来。利用带通信号的复数表示可以使问题大大简化。

作为一个示例，考虑图 11.12 的系统和图 11.13(a)所示信号。输入信号的最高频率 $\Omega_c+\Delta\Omega$ 是，如图 11.13(a)所示。如果严格按照奈奎斯特采样率 $2\pi/T=2(\Omega_c+\Delta\Omega)$对该系统进行采样，则所得到的样本序列 $s_r[n]=s_c(nT)$具有如图 11.13b 所示的傅里叶变换 $S_r(e^{j\omega})$。若用一个离散时间希尔伯特变换器，则我们可以形成复序列 $s[n]=s_r[n]+js_i[n]$，它的傅里叶变换是图 11.13(c)中的 $S(e^{j\omega})$。$S(e^{j\omega})$非零区域的宽度 $\Delta\omega=(\Delta\Omega)T$。如果定义 M 为小于或等于 $2\pi/\Delta\omega$ 的最大整数，则 $S(e^{j\omega})$的 M 个拷贝应当填入区间 $-\pi<\omega<\pi$ 中。(在图 11.13(c) 的例子中 $2\pi/\Delta\omega=5$)。这样 $s[n]$的采样率可用图 11.12 所示的抽取方法来减少，因此得到减速率复序列 $s_d[n]=s_{rd}[n]+js_{id}[n]=s[Mn]$，它的傅里叶变换是

$$S_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} S(e^{j[(\omega-2\pi k)/M]}) \tag{11.78}$$

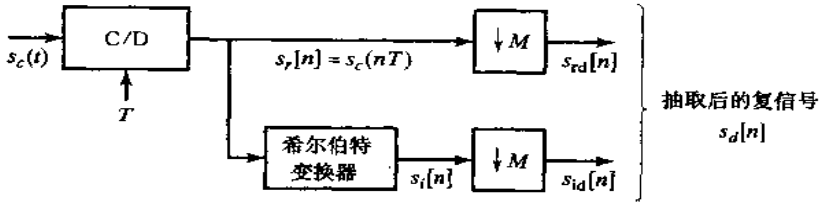


图 11.12 通过等效复带通信号的抽取而用低采样率对实带通信号进行采样的系统

图 11.13(d)表示在式(11.78)中当 $M=5$ 时的 $S_d(e^{j\omega})$。在图 11.13(d)中清楚地表示出 $S(e^{j\omega})$以及改变了频率坐标比例和经过变换的两个 $S(e^{j\omega})$拷贝。显然已经避免了混叠，并且重构原采样实带通信号所必须的全部信息都保留在离散时间的频率区间 $-\pi<\omega\leqslant\pi$ 中。用于 $s_d[n]$的复滤波器可以用进一步带限、幅度补偿或相位补偿等有效方法来对这种信息进行变换，或者为了传输或数字存储可以对复信号进行编码。这类处理用低采样率进行，自然这也是降低采样率的原因。

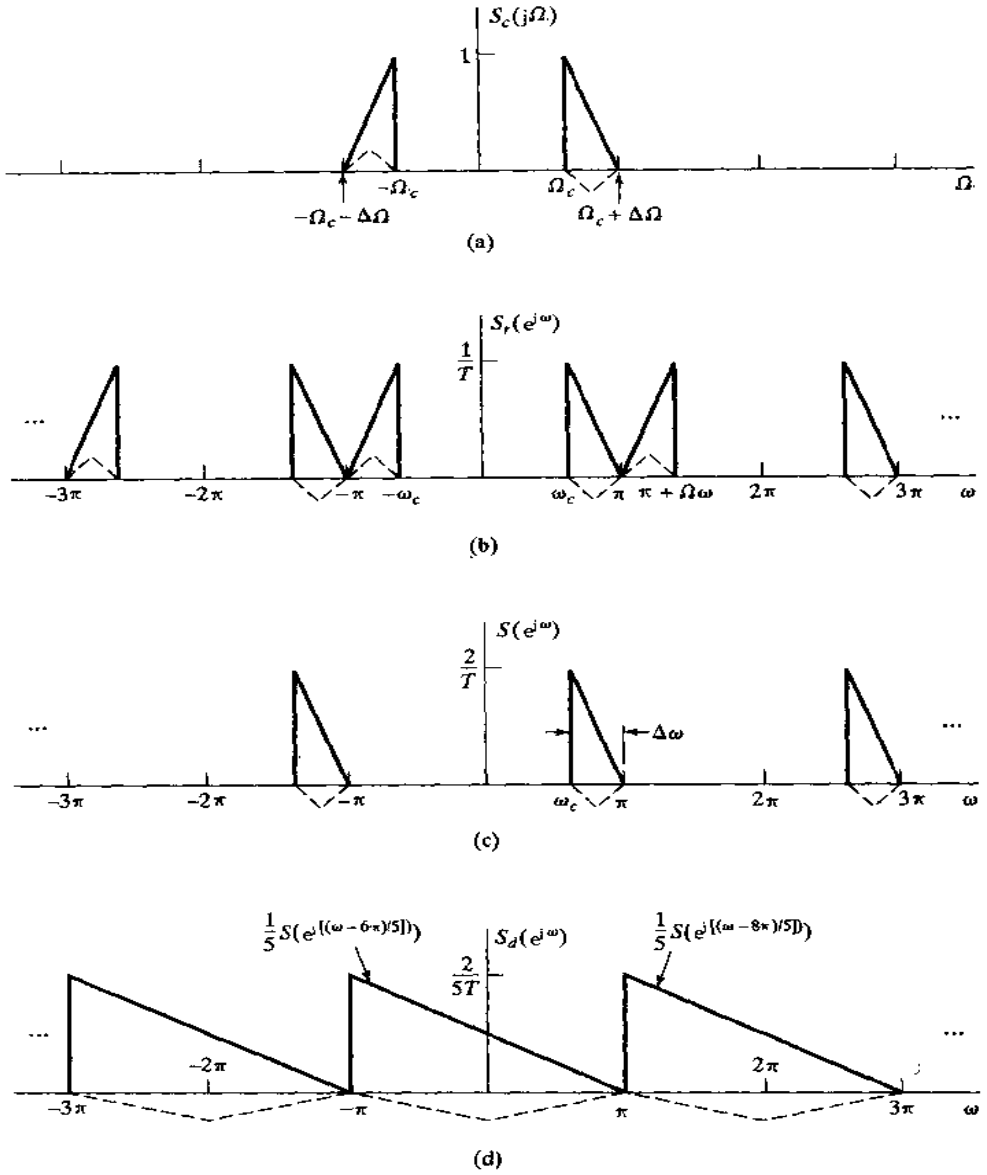


图 11.13　利用图 11.12 的系统对一个带通信号减速率采样的例子

(a) 连续时间带通信号的傅里叶变换；

(b) 采样后信号的傅里叶变换；

(c) 由(a)中信号导出的复带通离散时间信号的傅里叶变换；

(d) 抽取后的(c)中复带通信号的傅里叶变换

(实线表示实部，虚线表示虚部)

通过以下步骤可理想地重构原始实带通信号 $s_r[n]$：

1. 用因子 M 扩展复序列，得

$$s_e[n]=\begin{cases}s_{rd}[n/M]+js_{id}[n/M], & n=0,\pm M,\pm 2M,\cdots\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11.79}$$

2. 用脉冲响应为 $h_i[n]$和频率响应为 $H_i(e^{j\omega})$的理想带通滤波器对信号 $s_e[n]$滤波，其中

$$H_i(e^{j\omega})=\begin{cases}0, & -\pi<\omega<\omega_c\\ M, & \omega_c<\omega<\omega_c+\Delta\omega\\ 0, & \omega_c+\Delta\omega<\omega<\pi\end{cases} \tag{11.80}$$

（在我们的例子中，$\omega_c+\Delta\omega=\pi$）

3. 得出 $s_r[n]=\mathrm{Re}\{s_e[n]*h_i[n]\}$。

作为一个有益的练习，对于图 11.13 的例子绘出傅里叶变换 $S_e(e^{j\omega})$的图形，并证明(11.80)式的滤波器的确可以恢复 $s[n]$。

另一个有益的练习是研究其单边傅里叶变换等于 $S_c(j\Omega)$的一个复连续时间信号。可以证明，对这样一个信号可以用 $2\pi/T=\Delta\Omega$ 的采样率采样，从而直接得到复序列 $s_d[n]$。

11.5 小 结

在这一章中我们讨论了复序列的实部和虚部之间以及傅里叶变换的实部和虚部之间的各种关系，这些关系总称为**希尔伯特变换关系**。我们用以推导所有这些希尔伯特变换关系式的方法是利用基本的因果性原理，该原理允许一个序列或函数可以由它的实部来恢复。本章指出，对于一个因果序列，其傅里叶变换的实部和虚部可以通过卷积型积分联系起来。另外，对于序列的复倒谱是因果的，或(等效地)其 z 变换的极点和零点都在单位圆内(最小相位条件)的这种特殊情况，傅里叶变换的幅度和相位之对数互为希尔伯特变换对。

本章推导了满足修正的因果性约束条件的周期序列希尔伯特变换关系和其傅里叶变换在单位圆的下半部为零的复序列之希尔伯特变换关系，还讨论了如何将复解析信号应用于带通信号的表示以及如何对带通信号进行有效采样的问题。

习 题

基本题(附答案)

11.1 考虑一个序列 $x[n]$，其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$。$x[n]$为实值因果序列.且

$$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=2-2a\cos\omega$$

求 $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$。

11.2 考虑一个序列 $x[n]$和它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。已知：

$x[n]$为实值和因果的，

$$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}=\frac{5}{4}-\cos\omega$$

求与已知条件相符的序列 $x[n]$。

11.3 考虑一个序列 $x[n]$和它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$。已知：

$x[n]$ 是实序列

$$x[0] = 0$$
$$x[1] > 0$$
$$|X(e^{j\omega})|^2 = \frac{5}{4} - \cos\omega$$

求与已知条件相符的两个不同序列 $x_1[n]$和 $x_2[n]$。

11.4 考虑一个复序列 $x[n]=x_r[n]+jx_i[n]$,其中 $x_r[n]$和 $x_i[n]$分别为实部和虚部。序列 $x[n]$的 z 变换 $X(z)$在单位圆的下半部为零,即对于 $\pi \leqslant \omega \leqslant 2\pi$, $X(e^{j\omega})=0$。$x[n]$的实部为

$$x_r[n] = \begin{cases} 1/2, & n = 0 \\ -1/4, & n = \pm 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega})$的实部和虚部。

11.5 求下列序列的希尔伯特变换 $x_i[n]=\mathcal{H}\{x_r[n]\}$:

(a) $x_r[n]=\cos\omega_0 n$

(b) $x_r[n]=\sin\omega_0 n$

(c) $x_r[n]=\dfrac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$

11.6 一个因果实序列 $x[n]$的 DFT $X(e^{j\omega})$的虚部为

$$X_I(e^{j\omega}) = 2\sin\omega - 3\sin 4\omega$$

此外,已知 $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}=6$。求 $x[n]$。

11.7 (a) $x[n]$是一个实因果序列,其离散傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$的虚部为:

$$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = \sin\omega + 2\sin 2\omega$$

求 $x[n]$的一种解。

(b) (a)的答案是否唯一?如果是,请说明原因。如果不是,请给出满足(a)中关系式的另一个 $x[n]$。

11.8 考虑一个实因果序列 $x[n]$,其离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$。该离散时间傅里叶变换的虚部为

$$X_I(e^{j\omega}) = 3\sin(2\omega)$$

下面所列出的实部 $X_{Rm}(e^{j\omega})$中,哪些符合上述条件:

$$X_{R1}(e^{j\omega}) = \frac{3}{2}\cos(2\omega)$$
$$X_{R2}(e^{j\omega}) = -3\cos(2\omega) - 1$$
$$X_{R3}(e^{j\omega}) = -3\cos(2\omega)$$
$$X_{R4}(e^{j\omega}) = 2\cos(3\omega)$$
$$X_{R5}(e^{j\omega}) = \frac{3}{2}\cos(3\omega) + 1$$

11.9 已知实因果序列 $x[n]$及其离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$为:

$$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 3\sin(\omega) + \sin(3\omega)$$
$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 3$$

求符合上述条件的序列 $x[n]$。所求序列是否唯一?

11.10 考虑一个频率响应为 $H(e^{j\omega})$的稳定因果 LTI 系统之实脉冲响应 $h[n]$。已知:

(i) 系统有一个稳定且因果的逆系统。

(ii) $|H(e^{j\omega})|^2=\dfrac{\frac{5}{4}-\cos\omega}{5+4\cos\omega}$

求 $h[n]$,并给出尽可能精确的值。

11.11 设 $x[n]=x_r[n]+jx_i[n]$是一个复值序列使得当$-\pi\leqslant\omega<0$时，$X(e^{j\omega})=0$。其虚部为

$$x_i[n]=\begin{cases}4 & n=3\\ -4 & n=-3\end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega})$的实部和虚部。

11.12 $h[n]$是一个因果实值序列，且 $h[0]$为非零正数。$h[n]$的频率响应的幅度平方为

$$|H(e^{j\omega})|^2=\frac{10}{9}-\frac{2}{3}\cos(\omega)$$

(a) 求 $h[n]$的一种解。

(b) (a)的答案是否唯一？如果是，请说明原因。如果不是，求出满足已知条件的$h[n]$的第二种不同解。

11.13 设 $x[n]$为一个因果复值序列，其傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega})=X_R(e^{j\omega})+jX_I(e^{j\omega})$$

如果 $X_R(e^{j\omega})=1+\cos(\omega)+\sin(\omega)-\sin(2\omega)$，求 $X_I(e^{j\omega})$。

11.14 考虑一个实值非因果序列 $x[n]$，其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$。$X(e^{j\omega})$的实部为

$$X_R(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k\cos(k\omega)$$

求 $X(e^{j\omega})$的虚部 $X_I(e^{j\omega})$。(请记住，如果当 $n>0$时 $x[n]=0$，则称该序列是非因果的)

11.15 $x[n]$是一个实因果序列，其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$。$X(e^{j\omega})$的虚部是

$$\mathrm{Im}|X(e^{j\omega})|=\sin\omega$$

并且已知

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]=3$$

求 $x[n]$。

11.16 考虑一个实因果序列 $x[n]$，其离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，其中已知 $X(e^{j\omega})$满足下列两式：

$$X_R(e^{j\omega})=2-4\cos(3\omega)$$

$$X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}=7$$

这两式是否一致？也就是说，序列 $x[n]$能否同时满足以上两式？如果满足，请给出 $x[n]$的一种解。如果不满足，请说明原因。

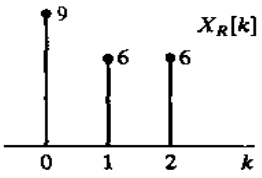


图 P11.18

11.17 考虑一个实因果有限长序列 $x[n]$，长度 $N=2$，其2点离散傅里叶变换 $X[k]=X_R[k]+jX_I[k]$ $(k=0,1)$。如果 $X_R[k]=2\delta[k]-4\delta[k-1]$，能否唯一确定 $x[n]$？如果可以，求 $x[n]$，如果不可以，给出几个满足 $X_R[k]$条件的 $x[n]$。

11.18 设 $x[n]$是一个长度 $N=3$ 的实值因果有限长序列。求$x[n]$的两种解，使得其离散傅里叶变换的实部 $X_R[k]$符合图 P11.18 所示。注意，按照 11.2 节的定义的情况答案中只有一种序列是“周期因果的”，其中当 $N/2\leqslant n\leqslant N-1$ 时，$x[n]=0$。

11.19 设 $x[n]$是一个长度 $N=4$ 的实因果有限长序列，同时也是周期因果的。该序列的 4 点离散傅里叶变换的实部 $X_R[k]$如图 P11.19 所示。求 DFT 的虚部 $jX_I[k]$。

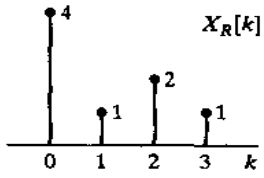


图 P11.19

11.20 考虑一个有限长度 $N=6$ 的实因果序列 $x[n]$，该序列的 6 点离散傅里叶变换的虚部是

$$jX_I[k]=\begin{cases}-j2/\sqrt{3}, & k=2\\ j2/\sqrt{3}, & k=4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

此外，已知

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X[k] - 1$$

图 P11.20 中所示的哪些序列符合上述条件?

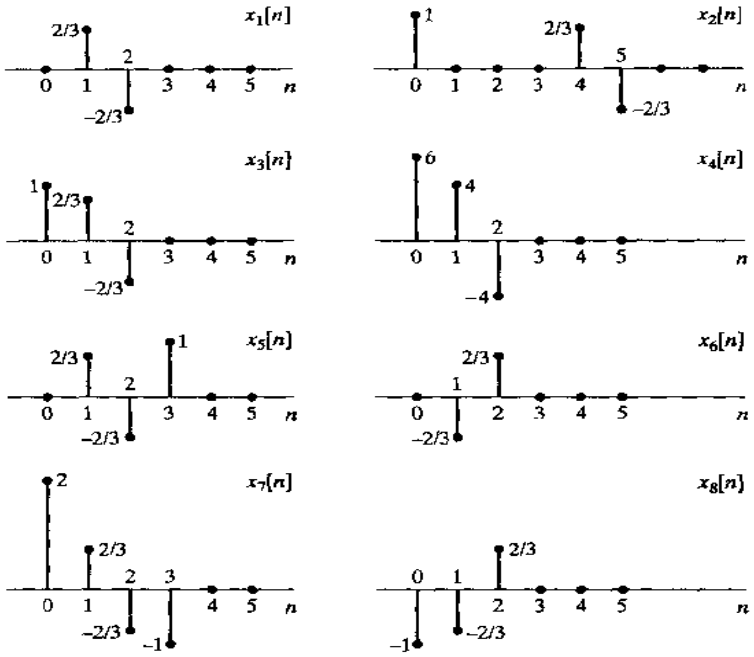


图 P11.20

基本题

11.21 令 $x[n]$是一个实因果序列,且$|x[n]|<\infty$。$x[n]$的 z 变换是

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

它是变量 z^{-1}的泰勒级数,并且在以 $z=0$ 为中心的某一圆域之外处处收敛于一个解析函数。(收敛域包括 $z=\infty$点,事实上 $X(\infty)=x[0]$)$X(z)$是解析函数(在其收敛域上)的论述意味着对函数$X(z)$有很强的限制(见 Churchill and Brown,1984)。具体地讲,它的每个实部和虚部均满足拉普拉斯方程,并且实部和虚部之间由柯西-黎曼方程联系起来。当 $x[n]$为有限值因果实序列时,我们将利用这些性质由其实部来求 $X(z)$。令这一序列的 z 变换为

$$X(z) = X_R(z) + jX_I(z)$$

其中 $X_R(z)$和 $X_I(z)$是 z 的实值函数。假设当时 $z=\rho e^{j\omega}$时,$X_R(z)$为

$$X_R(\rho e^{j\omega}) = \frac{\rho + \alpha\cos\omega}{\rho}, \quad \alpha \text{ 为实数},$$

还假定除 $z=0$ 处外,$X(z)$处处解析,求出 $X(z)$(作为 z 的显函数)。我们同时利用下列两种方法来实现上述目标。

(a) **方法 1,频域**:利用 $X(z)$的实部和虚部必须在 $X(z)$的每个解析处满足柯西-黎曼方程这一事实。柯西-黎曼方程如下:

1. 在直角坐标中,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}$$

其中，$z=x+jy$ 和 $X(x+jy)=U(x,y)+jV(x,y)$。

2. 在极坐标中，

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \omega},\quad \frac{\partial V}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \omega}$$

其中 $z=\rho e^{j\omega}$ 和 $X(\rho e^{j\omega})=U(\rho,\omega)+jV(\rho,\omega)$。

因为我们知道 $U=X_R$，所以可对这些方程积分求出 $V=X_I$ 并由此得出 X。（注意，必须正确地处理积分常数）

(b) **方法 2，时域**：序列 $x[n]$ 可以表示为 $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$，其中 $x_e[n]$ 是实偶序列，其傅里叶变换为 $X_R(e^{j\omega})$，而序列 $x_o[n]$ 是实奇序列，其傅里叶变换为 $jX_I(e^{j\omega})$。求 $x_e[n]$，并利用因果性求 $x_o[n]$，从而求出 $x[n]$ 和 $X(z)$。

11.22 对于序列

$$\tilde{u}_N[n]=\begin{cases}1, & n=0,\quad N/2\\ 2, & n=1,2,\cdots,N/2-1\\ 0, & n=N/2+1,\cdots,N-1\end{cases}$$

证明其离散傅里叶级数的系数序列是

$$\tilde{U}_N[k]=\begin{cases}N, & k=0\\ -j2\cot(\pi k/N), & k\text{ 为奇数}\\ 0, & k\text{ 为偶数},k\neq 0\end{cases}$$

[提示：求序列

$$u_N[n]=2u[n]-2u[n-N/2]-\delta[n]+\delta[n-N/2]$$

的 z 变换，并对其采样得到 $\tilde{U}[k]$。

深入题

11.23 考虑一个长度为 M 的实值有限长序列 $x[n]$。具体地讲，当 $n<0$ 和 $n>M-1$ 时 $x[n]=0$。令 $X[k]$ 表示 $x[n]$ 的 N 点 DFT($N\geqslant M$)，其中 N 为奇数。$X[k]$ 的实部记作 $X_R[k]$。

(a) 求可以使 $X[k]$ 由 $X_R[k]$ 唯一确定的用 M 表示的最小 N 值。

(b) 若取 N 满足(a)中所定条件，则 $X[k]$ 可以表示成 $X_R[k]$ 与一个序列 $U_N[k]$ 的循环卷积。求 $U_N[k]$。

11.24 考虑一个复序列 $h[n]=h_r[n]+jh_i[n]$，其中 $h_r[n]$ 和 $h_i[n]$ 都是实序列，并且令 $H(e^{j\omega})=H_R(e^{j\omega})+jH_I(e^{j\omega})$ 表示 $h[n]$ 的傅里叶变换，其中 $H_R(e^{j\omega})$ 和 $H_I(e^{j\omega})$ 分别是 $H(e^{j\omega})$ 的实部和虚部。

令 $H_{ER}(e^{j\omega})$ 和 $H_{OR}(e^{j\omega})$ 分别表示 $H_R(e^{j\omega})$ 的偶部和奇部，并且令 $H_{EI}(e^{j\omega})$ 和 $H_{OI}(e^{j\omega})$ 分别表示 $H_I(e^{j\omega})$ 的偶部和奇部。此外，令 $H_A(e^{j\omega})$ 和 $H_B(e^{j\omega})$ 表示 $h_r[n]$ 之傅里叶变换的实部和虚部，并且令 $H_C(e^{j\omega})$ 和 $H_D(e^{j\omega})$ 表示 $h_i[n]$ 之傅里叶变换的实部和虚部。用 $H_{ER}(e^{j\omega})$，$H_{OR}(e^{j\omega})$，$H_{EI}(e^{j\omega})$ 和 $H_{OI}(e^{j\omega})$ 表示 $H_A(e^{j\omega})$，$H_B(e^{j\omega})$，$H_C(e^{j\omega})$ 和 $H_D(e^{j\omega})$。

11.25 理想希尔伯特变换器(90°移相器)有频率响应(在一个周期上)

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases}-j, & \omega>0\\ j, & \omega<0\end{cases}$$

图 P11.25-1 表示 $H(e^{j\omega})$，图 P11.25-2 表示截止频率 $\omega_c=\pi/2$ 的理想低通滤波器 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的频率响应。显然这些频率响应很相似，均有间隔为 π 的间断点。

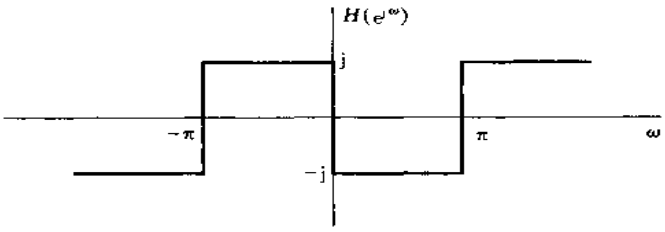


图 P11.25－1

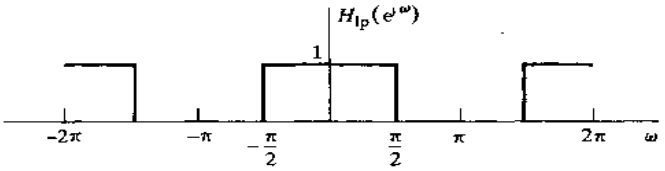


图 P11.25－2

(a) 求用 $H_{lp}(e^{j\omega})$表示 $H(e^{j\omega})$的关系式。解这个方程，用 $H(e^{j\omega})$来表示 $H_{lp}(e^{j\omega})$。

(b) 利用(a)中的关系式得出用 $h_{lp}[n]$表示 $h[n]$的表达式和用 $h[n]$表示 $h_{lp}[n]$的表达式。

在(a)和(b)中得出的关系式是以零相位理想系统的定义为基础的。但是对于广义线性相位的非理想系统来说，类似的关系式也成立。

(c) 利用(b)的结果求逼近希尔伯特变换器的因果 FIR 系统之脉冲响应与逼近低通滤波器的因果 FIR 系统之脉冲响应之间的关系式，它们都是用如下方法设计出的：(1)结合适当的线性相位；(2)确定对应的理想脉冲响应；(3)乘以长度为$(M+1)$个样本的相同窗函数，即用第 7 章中讨论的窗函数法。(如果必要的话，可以分别考虑 M 为偶数和 M 为奇数的情况)

(d) 对于例 11.4 中希尔伯特变换器的逼近，画出相应的低通滤波器频率响应的幅度曲线。

11.26 在 11.4.3 节中我们曾讨论过一种对带通连续时间信号采样的有效方法，该信号的傅里叶变换使

$$S_c(j\Omega) = 0 \quad \text{对于} \quad |\Omega| \leqslant \Omega_c \quad \text{且} \quad |\Omega| \geqslant \Omega_c + \Delta\Omega$$

在那段讨论中曾假设起始用采样频率 $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$，即避免混叠的最低可能频率对信号进行采样。带通信号采样方法如图 11.12 所示。形成具有单边傅里叶变换 $S(e^{j\omega})$的复带通离散时间信号 $s[n]$之后，以抽取因子 M 对复信号进行抽取，假定 M 是小于或等于 $2\pi/(\Delta\Omega T)$的最大整数。

(a) 通过图 11.13 给出的例子证明，如果量 $2\pi/(\Delta\Omega T)$对于所选择的起始采样率不是一个整数，则所得抽取后的信号 $s_d[n]$将有一些非零长度的区域，在该区域上其傅里叶变换 $S_d(e^{j\omega})$恒等于零。

(b) 应当如何选择起始采样频率 $2\pi/T$，求出的抽取因子 M 才能使得图 11.12 所示系统所抽取序列 $s_d[n]$的傅里叶变换 $S_d(e^{j\omega})$没有混叠，并且不存在一个其值为零的非零长度区间？

11.27 考虑一个 LTI 系统，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega \leqslant \pi \\ 0, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

系统的输入 $x[n]$限定为实值序列，其傅里叶变换存在(即，$x[n]$绝对可和)。是否总能唯一地由系统的输出恢复系统的输入。如果可能，说明如何恢复。如果不可能，请说明原因。

扩充题

11.28 若 $h[n]$是一个实稳定序列，且 $n>0$ 时有 $h[n]=0$，推导在单位圆内用 $\mathrm{Re}\{H(e^{j\omega})\}$表示的 $H(z)$之积分表示式。

11.29 令 $\mathscr{H}\{\cdot\}$表示(理想的)希尔伯特变换运算：

$$\mathscr{H}\{x[n]\}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

其中 $h[n]$为

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases}$$

证明理想希尔伯特变换算子具有如下性质：

(a) $\mathscr{H}\{\mathscr{H}\{x[n]\}\}=-x[n]$

(b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\mathscr{H}\{x[n]\}=0$ (提示：利用 Parseval 定理)

(c) $\mathscr{H}\{x[n]*y[n]\}=\mathscr{H}\{x[n]\}*y[n]=x[n]*\mathscr{H}\{y[n]\}$，其中 $x[n]$和 $y[n]$为任意序列。

11.30 脉冲响应为

$$h[n]=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases}$$

的理想希尔伯特变换器有输入 $x_r[n]$和输出 $x_i[n]=x_r[n]*h[n]$，其中 $x_r[n]$是离散时间随机信号。

(a) 求用 $h[n]$和 $\phi_{x_rx_r}[m]$表示的自相关序列 $\phi_{x_ix_i}[m]$的表达式。

(b) 求互相关序列 $\phi_{x_rx_i}[m]$的表达式。证明在这种情况下 $\phi_{x_rx_i}[m]$是 m 的奇函数。

(c) 求复解析信号 $x[n]=x_r[n]+jx_i[n]$之自相关函数的表达式。

(d) 求(c)中复信号的功率谱 $P_{xx}(\omega)$。

11.31 在 11.4.3 节中我们曾讨论过对带通连续时间信号进行采样的一种有效方法，该信号的傅里叶变换使

$$S_c(j\Omega)=0 \quad \text{对于} \quad |\Omega|\leqslant\Omega_c \quad \text{和} \quad |\Omega|\geqslant\Omega_c+\Delta\Omega$$

带通信号采样方法如图 11.12 所示。在 11.4.3 节的末尾给出了重构原始采样信号 $s_r[n]$的方法。在图 11.12 中的原始连续时间信号 $s_c(t)$当然可以通过对 $s_r[n]$进行理想带限内插(理想 D/C 转换)来重构。图 P11.31－1 表示由抽取的复信号重构一个实连续时间带通信号的系统方框图。图 P11.31－1 中的复带通滤波器 $H_i(e^{j\omega})$具有式(11.80)给出的频率响应。

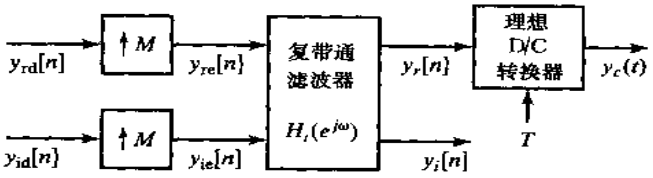


图 P11.31－1

(a) 利用图 P11.13 所示例子证明，如果重构系统的输入是 $y_{rd}[n]=s_{rd}[n]$和 $y_{id}[n]=s_{id}[n]$，则图 P11.31－1 的系统将重构原始实带通信号(即 $y_i(t)=s_c(t)$)。

(b) 求图 P11.31－1 中复带通滤波器的脉冲响应 $h_i[n]=h_{ir}[n]+jh_{ii}[n]$。

(c) 画出图 P11.31－1 所示系统更详细的方框图，图中只有实数运算。省去图中计算最终输出所不需要的任何部分。

(d) 现在考虑在图 11.12 的系统和图 P11.31－1 的系统之间放置一个复线性实不变系统，如图 P11.31－2 所示。图中系统的频率响应用 $H(e^{j\omega})$表示。如果要求

$$Y_c(j\Omega) = H_{\text{eff}}(j\omega)S_c(j\Omega)$$

其中

$$H_{\text{eff}}(j\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega_c < |\Omega| < \Omega_c + \Delta\Omega/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

应如何选择 $H(e^{j\omega})$?

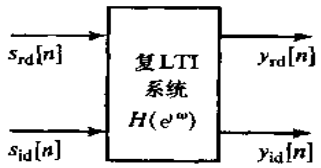


图 P11.31－2

11.32 在 11.3 节中，我们曾提到因果复倒谱 $\hat{x}[n]$等效于 5.4 节中的最小相位条件。请记住，$\hat{x}[n]$就是(11.54)式所定义的 $\hat{X}(e^{j\omega})$的傅里叶反变换。注意，因为 $X(e^{j\omega})$和 $\hat{X}(e^{j\omega})$已定义，所以 $X(z)$和 $\hat{X}(z)$的收敛区域均必须包括单位圆。

(a) 讨论在 $X(z)$的每一个零点或极点处，$\hat{X}(z)$都会产生奇异点。利用这一事实，证明若 $\hat{x}[n]$是因果的，则 $x[n]$就是最小相位的。

(b) 讨论若 $x[n]$是最小相位的，则收敛域的限制条件要求 $\hat{x}[n]$是因果的。

我们可针对 $x[n]$能够表示为复指数的和式的情况检验这一性质。具体地讲，考虑一个序列 $x[n]$，其 z 变换为

$$X(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_i}(1 - a_k z^{-1})\prod_{k=1}^{M_o}(1 - b_k z)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1 - c_k z^{-1})\prod_{k=1}^{N_o}(1 - d_k z)}$$

式中 $A>0$ 且 a_k, b_k, c_k 和 d_k 的幅度均小于 1。

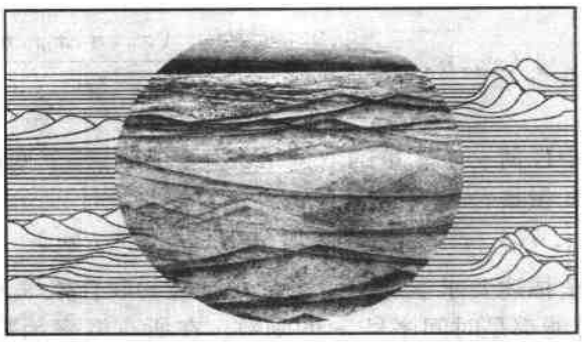
(c) 对 $\hat{X}(z)=\log X(z)$写出一种表达式。

(d) 利用(c)中答案的 z 反变换，求 $\hat{x}[n]$。

(e) 根据(d)和 $X(z)$的表达式，讨论对于具有这种形式的序列 $x[n]$，一个因果复倒谱等效为具有最小相位。

附录A

随机信号



在本附录中我们汇集和总结了一些与随机信号表示有关的结论，并给出了有关的符号表示。在这里我们并不想对随机过程理论的困难之处和复杂的数学问题进行详细地讨论。虽然我们的方法不是很严谨，但是我们总结了若干重要结论以及隐含在推导中所作的数学假设。

A.1 离散时间随机过程

随机信号数学表示中的基本概念就是随机过程。当我们把随机过程作为离散时间信号的模型来讨论时，假定读者已经熟悉如像随机变量、概率分布和平均等概率论中的这些基本概念。

在实际信号处理的应用中利用随机过程模型时，我们总是把一个具体的序列当作全部样本序列中的一个。若给定一个离散时间信号，相对应的随机过程的构成，即基本概率规律通常是不知道的，必须设法从中推导出来。可以对该过程的构成作出合理的假设，或者从一个典型样本序列的有限序列段中估计出某一随机过程表示的性质。

通常，一个随机过程是一族带有序号的随机变量$\{x_n\}$，随机变量族的特性由一组概率分布函数来描述，该分布函数往往可能是序号n的函数。对于离散时间信号，当用到把一个随机过程作为一个模型的概念时，序号n总是与时间有关。换句话说，我们认为随机信号的每一个样本值$x[n]$都是由服从某种概率论定律的作用过程所产生的。一个随机变量x_n可以用如下的概率分布函数来描述：

$$P_{x_n}(x_n, n) = \text{Probability}[\boldsymbol{x}_n \leqslant x_n] \tag{A.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}_n$ 表示随机变量，而 $x[n]$ 是 x_n 的一个具体值[①]。如果 $\boldsymbol{x}_n$ 取连续值，则等效地用**概率密度函数**描述为：

$$p_{x_n}(x_n, n) = \frac{\partial P_{x_n}(x_n, n)}{\partial x_n} \tag{A.2}$$

或

$$P_{x_n}(x_n, n) = \int_{-\infty}^{x_n} p_{x_n}(x, n)\mathrm{d}x \tag{A.3}$$

一个随机过程的两个随机变量 $\boldsymbol{x}_n$ 和 $\boldsymbol{x}_m$ 之间的相互关联性用联合概率分布函数

$$P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) = \text{Probability}[\boldsymbol{x}_n \leqslant x_n \text{ and } \boldsymbol{x}_m \leqslant x_m] \tag{A.4}$$

和联合概率密度

$$p_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) = \frac{\partial^2 P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m)}{\partial x_n \partial x_m} \tag{A.5}$$

来表示。

如果两个随机变量中任何一个变量的取值情况不影响另一个变量的概率密度，则称它们是**统计独立**的。若随机变量集合 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中所有随机变量都是统计独立的，则有

$$P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) = P_{x_n}(x_n, n) \cdot P_{x_m}(x_m, m) \qquad m \neq n \tag{A.6}$$

一个随机过程的完全描述要求能逐一表明全部可能的联合概率分布。正如我们已经指出的，这些概率分布函数可能都是时间序号 n 的函数。在所有概率函数对于时间起始点的平移均为独立的情况下，该随机过程称为**平稳**的。例如，平稳过程的二阶分布函数满足

$$P_{x_n+k, x_m+k}(x_{n+k}, n+k, x_{m+k}, m+k) = P_{x_n, x_m}(x_n, n, x_m, m) \quad \text{对所有的 } k \tag{A.7}$$

在离散时间信号处理的许多应用中，如果一个具体的信号可以看作是一个随机过程的样本序列，则该随机过程就可以作为这类信号的模型。虽然这类信号的细节是不可预测的——这使得确定性方法不适用于该类信号的表示——但是该集合的某些平均特性则可以由随机过程的已知概率规律来确定，这些平均特性虽然还是不完全的，但常常可以作为这类信号的一种有用的特征表示。

A.2 平　　均

利用如像均值和方差之类的平均量来描述随机变量的特征往往是很有用的。因为一个随机过程是一组带有序号的随机变量，所以我们也可以用组成随机过程的随机变量的统计平均来描述随机过程的特征。这类平均称为**集合平均**。我们首先来讨论几种平均以及它们的定义。

A.2.1 定义

一个随机过程的平均或均值定义为

$$m_{x_n} = \mathscr{E}\{\boldsymbol{x}_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{x_n}(x, n)\mathrm{d}x \tag{A.8}$$

① 在本附录中，用黑体表示随机变量，正常体表示概率函数的哑元变量。

其中 $\mathscr{E}$ 表示**数学期望**。通常，均值(期望值)可以与 n 有关。此外，如果 $g(\cdot)$是一个单值函数，则 $g(x_n)$就是一个随机变量，并且随机变量的集合$\{g(x_n)\}$定义了一个新的随机过程。为了计算这个新随机过程的平均，我们可以导出新随机变量的概率分布，或者可以证明

$$\mathscr{E}\{g(x_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, p_{x_n}(x,n)\mathrm{d}x \tag{A.9}$$

如果随机变量是离散的，即他们为离散值则积分就变成对随机变量所有可能的值求和，则$\mathscr{E}\{g(x)\}$有如下形式：

$$\mathscr{E}\{g(x_n)\} = \sum_{\tau} g(x)\, \hat{p}_{x_n}(x,n) \tag{A.10}$$

在我们对两个(或更多个)随机过程之间的关系感兴趣的场合，必须考虑两个随机变量的集合$\{x_n\}$和$\{y_m\}$。例如，两个随机变量函数的期望值定义为

$$\mathscr{E}\{g(x_n,y_m)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, p_{x_n,y_m}(x,n,y,m)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{A.11}$$

式中 $p_{x_n,y_n}(x_n,n,y_m,m)$是随机变量 x_n 和 y_m 的联合概率密度。

数学期望算子是线性算子，可以证明：

1. $\mathscr{E}\{x_n + y_m\} = \mathscr{E}\{x_n\} + \mathscr{E}\{y_m\}$；即，和的平均等于平均的和；

2. $\mathscr{E}\{ax_n\} = a\mathscr{E}\{x_n\}$；即，一个常数与 x_n 相乘的平均等于该常数乘以 x_n 的平均。

一般说来，两个随机变量乘积的平均并不等于各自平均的乘积。然而，如果它们相等，则称这两个随机变量是**线性独立的**或**不相关的**。这就是说，若

$$\mathscr{E}\{x_n y_m\} = \mathscr{E}\{x_m\} \cdot \mathscr{E}\{y_m\} \tag{A.12}$$

则 x_n 和 y_m 是线性独立的。从(A.11)式和(A.12)式很容易看出，线性独立的充分条件是

$$p_{x_n,y_m}(x_n,n,y_m,m) = p_{x_n}(x_n,n) \cdot p_{y_m}(y_m,m) \tag{A.13}$$

但是，可以证明，(A.13)式是一种比(A.12)式更为严格的有关独立性的表述。如上所述，满足(A.13)式的随机变量称为**统计独立**的。如果对于所有的 n 和 m 值(A.13)式均成立，则称随机过程$\{x_n\}$和$\{y_m\}$是统计独立的。统计独立的随机过程也是线性独立的，但是线性独立的随机过程并不意味着也是统计独立的。

由(A.9)式至(A.11)式可以看出，平均一般是时间序号的函数。但在平稳过程的情况下，却不是这样。对于平稳过程来说，组成该过程的所有随机变量的均值均相同，也就是说，一个平稳过程的均值是一个常数，简记作 m_x。

除了如(A.8)式定义的随机过程的均值外，还有几个平均量在信号处理的范畴内是特别重要的。下面将给出它们的定义。为了符号上方便起见，我们假设概率分布是连续的。对于离散随机过程，利用(A.10)式就可以得出相应的定义。

x_n 的**均方值**是$|x_n|^2$的平均，即

$$\mathscr{E}\{|x_n|^2\} = \text{均方} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 p_{x_n}(x,n)\mathrm{d}x \tag{A.14}$$

有时也把均方值称作**平均功率**。

x_n 的**方差**是$[x_n - m_{x_n}]$的均方值，即

$$\mathrm{var}[x_n] = \mathscr{E}\{|(x_n - m_{x_n}|^2\} = \sigma_{x_n}^2 \tag{A.15}$$

因为和的平均等于平均的和，所以很容易证明，(A.15)式可以写作

$$\mathrm{var}[\boldsymbol{x}_n] = \mathcal{E}\{|\boldsymbol{x}_n|^2\} - |m_{x_n}|^2 \tag{A.16}$$

通常，均方值和方差都是时间的函数，但是对于平稳过程它们均为常量。

均值、均方值和方差等都是一种简单的平均，它们只能提供有关随机过程的一小部分信息。更加有用的平均是**自相关序列**，它定义为

$$\begin{aligned}\phi_{xx}[n,m] &= \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_m^*\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m^* p_{\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_m}(x_n,n,x_m,m)\mathrm{d}x_n\mathrm{d}x_m\end{aligned} \tag{A.17}$$

式中 * 表示复共轭。一个随机过程的自协方差序列定义为

$$\gamma_{xx}[n,m] = \mathcal{E}\{(\boldsymbol{x}_n - m_{x_n})(\boldsymbol{x}_m - m_{x_m})^*\} \tag{A.18}$$

它可以写成

$$\gamma_{xx}[n,m] = \phi_{xx}[n,m] - m_{x_n}m_{x_m}^* \tag{A.19}$$

应当注意，通常自相关和自协方差都是二维序列，即为两个变量的函数。

自相关序列是随机过程在不同时间的值之间相关性的度量。在这个意义上，它部分地描述了一个随机信号随时间变化的程度。两个不同随机信号之间相关性的度量可以由互相关序列得出。如果$\{\boldsymbol{x}_n\}$和$\{\boldsymbol{y}_m\}$是两个随机过程，它们的互相关为

$$\phi_{xx}[n,m] = \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_m^*\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy^* p_{\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m}(x,n,y,m)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{A.20}$$

其中$p_{\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_m}(x,n,y,m)$是$\boldsymbol{x}_n$和$\boldsymbol{y}_m$的联合概率密度。互协方差函数定义为

$$\gamma_{xy}[n,m] = \mathcal{E}\{(\boldsymbol{x}_n - m_{x_n})(\boldsymbol{y}_m - m_{y_m})^*\} = \phi_{xy}[n,m] - m_{x_n}m_{y_m}^* \tag{A.21}$$

正如我们已经指出的，一个随机过程的统计特性通常是随时间变化的。但是一个平稳随机过程是用稳定条件(equilibrium condition)来描述其特征，在该条件下其统计特性不随时间原点的平移而变化。这意味着一阶概率分布是与时间无关的。类似地，全部的联合概率函数也不随时间原点的平移而变化，即二阶联合概率分布只取决于时间差$(m-n)$。一阶平均，如均值和方差，与时间无关；二阶平均，如自相关函数$\phi_{xx}[n,m]$，仅与时间差$(m-n)$有关。因此，对于平稳过程来说，我们可以得出，

$$m_x = \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}_n\} \tag{A.22}$$

$$\sigma_x^2 = \mathcal{E}\{|(\boldsymbol{x}_n - m_x)|^2\} \tag{A.23}$$

与n无关，若我们用m表示时间差，则

$$\phi_{xx}[n+m,n] = \phi_{xx}[m] = \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}_{n+m}\boldsymbol{x}_n^*\} \tag{A.24}$$

这就是说，一个平稳随机过程的自相关序列是一个一维序列，是时间差m的函数。

在许多场合我们会遇到在严格的意义上并不平稳的随机过程，即它们的概率分布不是时不变的，但是(A.22)式至(A.24)式仍然成立。这类随机过程称为是广义平稳的。

A.2.2 时间平均

在信号处理领域中，信号的一个集合这种提法是一个方便的数学概念，它允许我们在它们的表示中可以利用概率论。但是从实用的意义上来说，我们往往最多只能得到有限个有限长序列而不是一个序列的无限集合。例如，我们可能希望从该集合内某一单个信号的测量中推导出随机过程表示的概率规律或某些平均量。当概率分布与时间无关时，直观上似乎样本的

单个序列很长一段的幅值分布(直方图)应当近似等于单一概率密度,该概率密度描述随机过程模型的每个随机变量。类似地,单个序列大量样本的算术平均应当十分接近该随机过程的均值。为了把这些直觉的看法公式化,我们定义一个随机过程的时间平均为

$$\langle x_n \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} x_n \tag{A.25}$$

同样,定义时间自相关序列为

$$\langle x_{n+m} x_n^* \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} x_{n+m} x_n^* \tag{A.26}$$

可以证明,若$\{x_n\}$是一个有限均值的平稳过程,则上面的极限存在。正如(A.25)式和(A.26)式所定义的,这些时间平均量是无限多个随机变量的函数,并且它们自身就完全可以看作是一个随机变量。但是,在已知具有**遍历性**的条件下,(A.25)式和(A.26)式中的时间平均等于常量,这就意味着几乎全部可能的样本序列的时间平均也等于同样的常量,而且它们等于相应的集合平均①。因此,当$-\infty < n < \infty$时对于任何单个样本序列$\{x[n]\}$,有

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} x[n] = \mathscr{E}\{x_n\} = m_x \tag{A.27}$$

和

$$\langle x[n+m]x^*[n] \rangle = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2L+1} \sum_{n=-L}^{L} x[n+m]x^*[n] = \mathscr{E}\{x_{n+m}x_n^*\} = \phi_{xx}[m] \tag{A.28}$$

时间平均算子$\langle\cdot\rangle$具有与集合平均算子$\mathscr{E}\{\cdot\}$相同的性质。这样,在随机变量x_n和它在某一样本序列中的值$x[n]$之间,我们一般就不加区别。例如,表示式$\mathscr{E}\{x[n]\}$应当写成$\mathscr{E}\{x_n\} = \langle x[n] \rangle$。通常,把时间平均等于集合平均的随机过程称为**遍历过程**。

在实际中常常假设已知的序列是遍历随机过程的一个样本序列,所以可以由某一单个序列来计算平均量。当然,一般我们无法计算(A.27)式和(A.28)式中的极限,但是量

$$\hat{m}_x = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n] \tag{A.29}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} |x[n] - \hat{m}_x|^2 \tag{A.30}$$

和

$$\langle x[n+m]x^*[n] \rangle_L = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[n+m]x^*[n] \tag{A.31}$$

或类似的量常常用于计算均值、方差和自相关的**估计值**。$\hat{m}$和$\hat{\sigma}_x^2$分别称为样本均值和样本方差。从有限的一段数据来估计一个随机过程的平均量是统计学中的一个问题,我们在第10章中已简要地涉及到一些。

A.3 相关序列和协方差序列的性质

相关函数和协方差函数的一些有用性质可以用一种简洁的方式根据定义来得出。这些性

① 更准确的表述是,随机变量$\langle x_n \rangle$和$\langle x_{n+m}x_n^* \rangle$的均值分别等于$m_x$和$\phi_{xx}[m]$,并且它们的方差为零。

质就在这一节中给出。

考虑两个实平稳随机过程$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，它们的自相关、自协方差、互相关和互协方差分别为

$$\phi_{xx}[m]=\mathscr{E}\{x_{n+m}x_n^*\} \tag{A.32}$$

$$\gamma_{xx}[m]=\mathscr{E}\{(x_{n+m}-m_x)(x_n-m_x)^*\} \tag{A.33}$$

$$\phi_{xy}[m]=\mathscr{E}\{x_{n+m}y_n^*\} \tag{A.34}$$

$$\gamma_{xy}[m]=\mathscr{E}\{(x_{n+m}-m_x)(y_n-m_y)^*\} \tag{A.35}$$

式中m_x和m_y分别是两个随机过程的均值。下列性质很容易由定义经简单推演而得出。

性质1：

$$\gamma_{xx}[m]=\phi_{xx}[m]-|m_x|^2 \tag{A.36a}$$

$$\gamma_{xy}[m]=\phi_{xy}[m]-m_xm_y^* \tag{A.36b}$$

从(A.19)式和(A.21)式就可以直接推导出这些结果。它们表明，对于零均值过程，相关序列和协方差序列是相同的。

性质2：

$$\phi_{xx}[0]=E[|x_n|^2]=\text{均方值} \tag{A.37a}$$

$$\gamma_{xx}[0]=\sigma_x^2=\text{方差} \tag{A.37b}$$

性质3：

$$\phi_{xx}[-m]=\phi_{xx}^*[m] \tag{A.38a}$$

$$\gamma_{xx}[-m]=\gamma_{xx}^*[m] \tag{A.38b}$$

$$\phi_{xy}[-m]=\phi_{yx}^*[m] \tag{A.38c}$$

$$\gamma_{xy}[-m]=\gamma_{yx}^*[m] \tag{A.38d}$$

性质4：

$$|\phi_{xy}[m]|^2\leqslant\phi_{xx}[0]\phi_{yy}[0] \tag{A.39a}$$

$$|\gamma_{xy}[m]|^2\leqslant\gamma_{xx}[0]\gamma_{yy}[0] \tag{A.39b}$$

特别是，

$$|\phi_{xx}[m]|\leqslant\phi_{xx}[0] \tag{A.40a}$$

$$|\gamma_{xx}[m]|\leqslant\gamma_{xx}[0] \tag{A.40b}$$

性质5：若$y_n=x_{n-n_0}$，则

$$\phi_{yy}[m]=\phi_{xx}[m] \tag{A.41a}$$

$$\gamma_{yy}[m]=\gamma_{xx}[m] \tag{A.41b}$$

性质6：对于许多随机过程来说，如果它们在时间上相隔较远，则其随机变量可以成为不相关的。若这一点成立，则有

$$\lim_{m\to\infty}\gamma_{xx}[m]=0 \tag{A.42a}$$

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{xx}[m]=|m_x|^2 \tag{A.42b}$$

$$\lim_{m\to\infty}\gamma_{xy}[m]=0 \tag{A.42c}$$

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{xy}[m]=m_xm_y^* \tag{A.42d}$$

上述结论的本质是，相关和协方差都是有限能量序列，当 m 值很大时它们趋于零。所以我们常常能够利用它们的傅里叶变换或 z 变换来表示这些序列。

A.4 随机信号的傅里叶变换表示

虽然一个随机信号的傅里叶变换不存在，但是这样一个信号的自协方差和自相关序列却是非周期序列，而它们的这些变换往往存在。对于一个线性时不变系统，当输入是一个随机信号时，这些平均量的谱表示在描述系统的输入/输出关系时起着重要的作用。因此，研究相关序列和协方差序列的性质，以及它们对应的傅里叶变换和 z 变换是十分有益的。

让我们定义 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$，$\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$，$\Phi_{xy}(e^{j\omega})$ 和 $\Gamma_{xy}(e^{j\omega})$ 分别为 $\phi_{xx}[m]$，$\gamma_{xx}[m]$，$\phi_{xy}[m]$ 和 $\gamma_{xy}[m]$ 的傅里叶变换。因为这些函数都是序列的离散时间傅里叶变换，所以它们肯定是周期为 2π 的周期函数。根据(A.36a)式和(A.36b)式在 $|\omega|\leqslant\pi$ 的一个周期上可得，

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xx}(e^{j\omega}) + 2\pi|m_x|^2\delta(\omega), \quad |\omega| < \pi \tag{A.43a}$$

和

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = \Gamma_{xy}(e^{j\omega}) + 2\pi m_x m_y^*\delta(\omega), \quad |\omega| < \pi \tag{A.43b}$$

在零均值过程的情况下（$m_x=0$ 和 $m_y=0$），相关函数和协方差函数相等，因此 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})=\Gamma_{xx}(e^{j\omega})$ 和 $\Phi_{xy}(e^{j\omega})=\Gamma_{xy}(e^{j\omega})$。

由傅里叶反变换公式可得

$$\gamma_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega \tag{A.44a}$$

$$\phi_{xx}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{xx}(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega \tag{A,44b}$$

因而，自然有

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \phi_{xx}[0] = \sigma_x^2 + |m_x|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{xx}(e^{j\omega})d\omega \tag{A.45a}$$

$$\sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Gamma_{xx}(e^{j\omega})d\omega \tag{A.45b}$$

有时，表示上可以很方便地定义量 $P_{xx}(\omega)$ 为

$$P_{xx}(\omega) = \Phi_{xx}(e^{j\omega}) \tag{A.46}$$

在这种情况下，(A.45a)式和(A.45b)式可以表示为

$$\mathcal{E}\{|x[n]|^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\omega)d\omega \tag{A.47a}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{xx}(\omega)d\omega - |m_x|^2 \tag{A.47b}$$

因此，对于 $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$，$P_{xx}(\omega)$ 的面积正比于信号的平均功率。事实上，正如我们在2.10节中所讨论的，$P_{xx}(\omega)$ 在一个频段上的积分正比于在那个频段内信号的功率。正是由于这个原因，函数 $P_{xx}(\omega)$ 称为**功率密度谱**，或简称为**功率谱**。当 $P_{xx}(\omega)$ 是一个与 ω 无关的常量时，称这个随机信号为白过程或简称白噪声。当 $P_{xx}(\omega)$ 在某一频段上为常量并且在其它频段上为零时，我们把它称为带限白噪声。

由(A.38b)式可知，$P_{xx}(\omega)$总为实数，并且对于实随机过程有 $\phi_{xx}[m]=\phi_{xx}[-m]$，所以此时 $P_{xx}(\omega)$既为实数，又为偶数，即

$$P_{xx}(\omega) = P_{xx}(-\omega) \tag{A.48}$$

另外一个重要的性质是，功率密度谱是非负的。这一点曾在 2.10 节讨论过。

互功率密度谱定义为

$$P_{xy}(\omega) = \Phi_{xy}(e^{j\omega}) \tag{A.49}$$

这个函数通常是复数，并且由(A.38c)式可得

$$P_{xy}(\omega) = P_{yx}^{*}(\omega) \tag{A.50}$$

最后，正如 2.10 所证明的，若一个频率响应为 $H(e^{j\omega})$的线性时不变系统的输入为随机信号 $x[n]$，且如果 $y[n]$为相应的输出，则有

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2\Phi_{xx}(e^{j\omega}) \tag{A.51}$$

和

$$\Phi_{xy}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\Phi_{xy}(e^{j\omega}) \tag{A.52}$$

例 A.1　理想低通滤波器的噪声功率输出

假设 $x[n]$是一个零均值白噪声序列且 $\phi_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$，$|\omega|\leqslant\pi$ 时，功率谱 $\Phi_{xx}(e^{j\omega})=\sigma_x^2$，另外假设 $x[n]$是一个截止频率为 ω_c 的理想低通滤波器的输入。再由(A.51) 式，输出 $y[n]$将是一个带限白噪声过程，其功率谱为

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \sigma_x^2, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{A.53}$$

利用傅里叶反变换，得到自相关序列如下

$$\phi_{yy}[m] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \tag{A.54}$$

再由(A.45a)式，得出输出的平均功率

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \phi_{yy}[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\sigma_x^2 d\omega = \sigma_x^2\frac{\omega_c}{\pi} \tag{A.55}$$

A.5　利用 z 变换计算平均功率

为了利用(A.45a)式计算出平均功率，我们必须像例 A.1 中那样先算出功率谱的积分。虽然例子中的积分容易计算，但通常这样积分是难以作为实数积分计算的。但在系统函数是有理函数的情况下，基于 z 变换的结果会使得平均输出功率的计算更直接。

通常，z 变换用于表示协方差函数而不是相关函数。这是因为当信号是非零均值时，它的相关函数将包含一个附加的不是由 z 变换表示的常量。但当均值是零时，当然其协方差函数就与相关函数相等。如果 $\gamma_{xx}[m]$的 z 变换存在，则由于 $\gamma_{xx}[-m]=\gamma_{xx}^{*}[m]$，通常有

$$\Gamma_{xx}(z) = \Gamma_{xx}^{*}(1/z^{*}) \tag{A.56}$$

另外，由于 $\gamma_{xx}[m]$是双边且共轭对称的，$\Gamma_{xx}(z)$的收敛域必为如下形式：

$$r_a < |z| < \frac{1}{r_a}$$

其中必有 $0<r_a<1$。在 $\Gamma_{xx}(z)$为 z 的有理函数这种重要情况下，(A.56)式表明 $\Gamma_{xx}(z)$的零极点必是复共轭的倒数对。

z 变换的主要好处是当 $\Gamma_{xx}(z)$为有理函数时，随机信号的平均功率可以利用下式容易地计算出来：

$$\mathscr{E}\{x^2[n]\} = \sigma_x^2 = \gamma_{xx}[0] = \{\text{当 } m = 0 \text{ 时 } \Gamma_{xx}(z) \text{ 的 } z \text{ 反变换}\} \tag{A.57}$$

当 $\Gamma_{xx}(z)$是 z 的有理函数时，利用部分分式展开可以计算出对所有 m 的 $\gamma_{xx}[m]$。利用基于这一发现的一种方法就可以直接计算出上面方程的右半部分。然后，只需简单计算 $m=0$ 时的 $\gamma_{xx}[m]$就能得到平均功率。

当 LTI 系统输入是随机信号时，z 变换在确定其输出自协方差和平均功率时也是很有用的。推广(A.51)式得

$$\Gamma_{yy}(z) = H(z)H^*(1/z^*)\Gamma_{xx}(z) \tag{A.58}$$

再由 z 变换的性质和(A.58)式，输出的自协方差为卷积

$$\gamma_{yy}[m] = h[m] * h^*[-m] * \gamma_{xx}[m] \tag{A.59}$$

当线性差分方程的输入是一个平均功率 σ_x^2 为的零均值白噪声信号时，在需要计算平均输出功率的量化噪声分析中这个结果特别有用。由于这样一个输入的自协方差为 $\gamma_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$，所以输出的自协方差为 $\gamma_{yy}[m]=\sigma_x^2(h[m]*h^*[-m])$，即输出的自协方差正比于 LTI 系统冲激响应的自协方差。由这一结果有

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[n]|^2. \tag{A.60}$$

作为另一种计算冲激响应序列平方和的方法(对于 IIR 系统比较困难)，我们使用(A.57)式所提示的方法，由 $\Gamma_{yy}(z)$的部分分式展开求得 $\mathscr{E}\{y^2[n]\}$。回忆一下，对于一个 $\gamma_{xx}[m]=\sigma_x^2\delta[m]$ 的白噪声输入，z 变换为 $\Gamma_{xx}(z)=\sigma_x^2$，所以 $\Gamma_{yy}(z)=\sigma_x^2H(z)H^*(1/z^*)$。因此，将(A.57)式用于系统的输出，有

$$\mathscr{E}\{y^2[n]\} = \gamma_{yy}[0] = \{\text{当 } m = 0 \text{ 时 } \Gamma_{yy}(z) = H(z)H^*(1/z^*)\sigma_x^2 \text{ 的 } z \text{ 反变换}\} \tag{A.61}$$

考虑一个稳定的因果系统的特殊例子，其系统函数为有理函数，形式如下：

$$H(z) = A\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_mz^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})} \qquad |z| > \max_k\{|d_k|\} \tag{A.62}$$

其中，$\max_k\{|d_k|\}<1$ 且 $M<N$。这样一个系统函数可说明一个内部舍入噪声源与一个定点运算系统的输出之间的关系。用(A.62)式代替(A.58)式中的 $H(z)$，有

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2H(z)H^*(1/z^*) = \sigma_x^2|A|^2\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_mz^{-1})(1-c_m^*z)}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})(1-d_k^*z)} \tag{A.63}$$

由于我们已假设对所有的 k，有 $|d_k|<1$，则所有原始极点均在单位圆内，而且其它在 $(d_k^*)^{-1}$ 处的极点均在单位圆外的共轭倒数位置上。因此 $\Gamma_{yy}(z)$的收敛域为 $\max_k|d_k|<|z|<\min_k|(d_k^*)^{-1}|$。对于这样的有理函数，可以证明由于 $M<N$，部分分式展开式为

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{A_k}{1-d_k z^{-1}} - \frac{A_k^*}{1-(d_k^*)^{-1}z^{-1}}\right)\right) \tag{A.64}$$

其中系数是由下式所得

$$A_k = H(z)H^*(1/z^*)(1-d_k z^{-1})\big|_{z=d_k} \tag{A.65}$$

由于 $z=d_k$ 处的极点在除边界之外的收敛域内，所以每一个极点都对应于一个右边序列，而在 $z=(d_k^*)^{-1}$ 处的极点则对应于左边序列，则对应于(A.64)式的自协方差函数为

$$\gamma_{yy}[n] = \sigma_x^2\sum_{k=1}^{N}(A_k(d_k)^n u[n] + A_k^*(d_k^*)^{-n}u[-n-1])$$

由此，我们可求得平均功率

$$\sigma_y^2 = \gamma_{yy}[0] = \sigma_x^2\left(\sum_{k=1}^{N}A_k\right) \tag{A.66}$$

其中，A_k 由(A.65)式可得。

所以，一个系统函数为有理函数应输入为白噪声的系统其输出的整体平均功率的计算可以简化为一个求输出自相关函数 z 变换部分分式展开式系数的直接问题。下面的例子说明了如何使用这一方法。

例 A.2　二阶 IIR 滤波器的噪声功率输出

研究一个系统，其脉冲响应为

$$h[n] = \frac{r^n\sin\theta(n+1)}{\sin\theta}u[n] \tag{A.67}$$

且系统函数为

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})} \tag{A.68}$$

当输入是整体平均功率为 σ_x^2 的白噪声时，输出自协方差的 z 变换为

$$\Gamma_{yy}(z) = \sigma_x^2\left(\frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})}\right)\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z)(1-re^{j\theta}z)}\right) \tag{A.69}$$

因此，再利用(A.65)式可得

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2\left[\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z^{-1})}\right)\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z)(1-re^{j\theta}z)}\right)\Big|_{z=re^{j\theta}} + \left(\frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})}\right)\left(\frac{1}{(1-re^{-j\theta}z)(1-re^{j\theta}z)}\right)\Big|_{z=re^{-j\theta}}\right] \tag{A.70}$$

进行前面所述的代换，将两项合并简化得

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)\left(\frac{1}{1-2r^2\cos(2\theta)+r^4}\right) \tag{A.71}$$

最后，利用 $\Gamma_{yy}(z)$ 的部分分式展开式，我们可以有效计算出表达式

$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \sigma_x^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|^2 = \sigma_x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r^n\sin\theta(n+1)}{\sin\theta}\right|^2$$

上式用闭式难于计算，而表达式

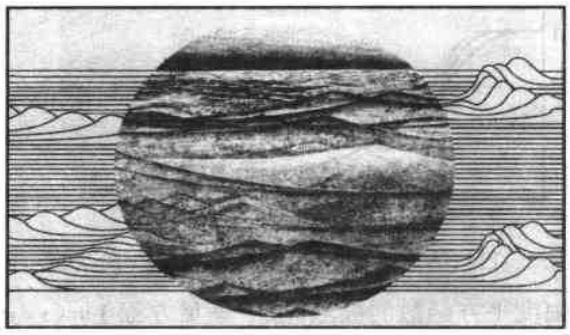
$$\mathcal{E}\{y^2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_x^2|H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{\sigma_x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\omega}{|(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega})|^2}$$

计算实数积分较困难。

例 A.2 显著的简单结果是计算平均功率公式的部分分式方法的有力说明。我们曾在第 6 章分析量化对数字滤波的影响中使用过这一技巧。

附录 B

连续时间滤波器



在 7.1 节和 7.2 节中讨论过，设计 IIR 数字滤波器的方法是以可以利用的现有连续时间滤波器的设计方法为基础的。在这个附录中我们主要总结在第 7 章中提出的几类低通滤波器逼近的特性。已有关于这几类滤波器更详细的讨论（见 Guillemin(1957)；Weinberg(1975)；以及 Parks 和 Burrus(1987)）。在 Zverev(1967)的著作中有各种设计图表和公式，并且已有根据模拟滤波器逼近方法对 IIR 数字滤波器进行计算机辅助设计的许多计算机程序可供利用（例如，可参阅 Gray 和 Markel，1976；DSP Committee，1979；Mersereau 等，1984；以及 Mathworks，1998）。

B.1 巴特沃兹低通滤波器

巴特沃兹低通滤波器是利用其幅度响应在通带内最平坦这种性质来定义的。对于一个 N 阶低通滤波器，它意味着幅度平方函数的前 $(2N-1)$ 阶导数在 $\Omega=0$ 处皆为零。另一个性质是，在通带和阻带内，其幅度响应都是单调的，连续时间巴特沃兹低通滤波器的幅度平方函数有如下形式

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(j\Omega/j\Omega_c)^{2N}} \tag{B.1}$$

这一函数的曲线概况绘于图 B.1 中。

当(B.1)式中的参量 N 增加时，滤波器的特性曲线变得更加尖锐；这就是说，曲线在通带的更多部分接近于 1，并且在阻带中更快地接近于零，尽管(B.1)式的特性幅度平方函数在截止 Ω_c 频率处总是等于 1/2。图 B.2 表明巴特沃兹滤波器的特性曲线与参数 N 有关。

我们从(B.1)式中的幅度平方函数可以看出，将 $j\Omega = s$ 代入后 $H_c(s)H_c(-s)$一定为如下形式：

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}} \qquad (B.2)$$

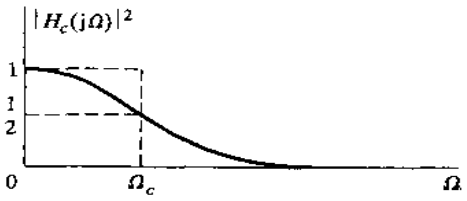


图 B.1　连续时间巴特沃兹滤波器的幅度平方曲线

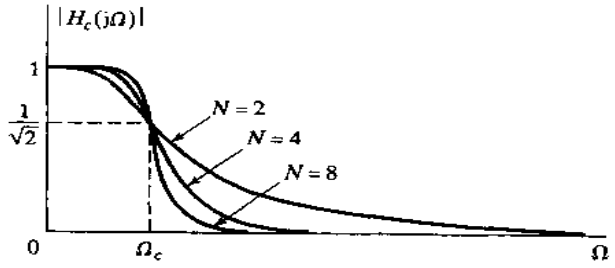


图 B.2　巴特活兹滤波器的幅度特性曲线与阶次 N 的关系

因此，分母多项式的根(幅度平方函数的极点)位于满足方程 $1 + (s/j\Omega_c)^{2N} = 0$ 的 s 值处，即

$$s_k = (-1)^{1/2N}(j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \qquad k = 0,1,\cdots,2N-1 \qquad (B.3)$$

这样，在 s 平面中半径为 Ω_c 的圆周上有 $2N$ 个等分排列的极点。这些极点对于虚轴对称分布，但没有一个极点落在虚轴上，并且当 N 为奇数时有一个极点位于实轴上，而当 N 为偶数时则没有。在圆周上相邻极点间的角度为 π/N 弧度。例如，对于 $N=3$，极点相间 $\pi/3$ 弧度，或 60°，如图 B.3 所示。为了确定用巴特沃兹幅度平方函数所描述的模拟滤波器的系统函数，我们必须对 $H_c(s)H_c(-s)$进行因式分解。幅度平方函数的极点总是成对出现的，也就是说，如果在 $s = s_k$ 处有一个极点，则在 $s = -s_k$ 处也必然有一个极点。因此，要由幅度平方函数构造 $H_c(s)$，我们应当从每对极点中选取一个极点。为了得到一个稳定和因果的滤波器，应当选取位于 s 平面的左半平面上的极点。

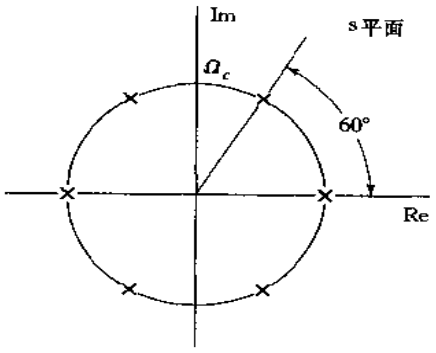


图 B.3　一个三阶巴特活兹滤波器在 s 平面上极点的位置

B.2　切比雪夫滤波器

在巴特沃兹滤波器中，幅度响应在通带和阻带内都是单调的。因此，若滤波器的技术要求是用最大通带和阻带的逼近误差来给出的话，那么，在靠近通带低频端和阻带截止频率以上的

部分都会超出技术指标。一种比较有效的途径是使逼近误差均匀地分布于通带或阻带内，或同时在通带和阻带内都均匀分布，这样往往可以降低所要求的滤波器阶次。通过选择一种具有等波纹特性而不是单调特性的逼近方法可以实现这一点。切比雪夫型滤波器就具有这种性质：其频率响应的幅度既可以在通带中是等波纹的，而在阻带中是单调的(称为Ⅰ型切比雪夫滤波器)，也可以在通带中是单调的，而在阻带中是等波纹的(称为Ⅱ型切比雪夫滤波器)。Ⅰ型切比雪夫滤波器如图 B.4 所示。该型滤波器的幅度平方函数是

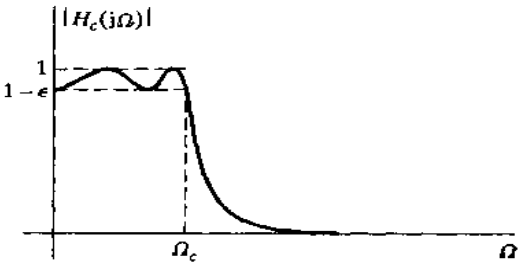


图 B.4　Ⅰ型切比雪夫低通滤波器的逼近

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}, \tag{B.4}$$

式中 $V_N(x)$为 N 阶切比雪夫多项式，定义为

$$V_N(x) = \cos(N\cos^{-1}x). \tag{B.5}$$

例如，当 $N=0$ 时，$V_0(x)=1$；当 $N=1$ 时，$V_1(x)=\cos(\cos^{-1}x)=x$；当 $N=2$ 时，$V_2(x)=\cos(2\cos^{-1}x)=2x^2-1$；以此类推。

从定义切比雪夫多项式的(B.5)式可以直接得出由 $V_N(x)$和 $V_{N-1}(x)$求 $V_{N+1}(x)$的递推公式。将三角恒等式代入(B.5)式，得

$$V_{N+1}(x) = 2xV_N(x) - V_{N-1}(x) \tag{B.6}$$

从(B.5)式我们注意到，当 $0<x<1$ 时 $V_N^2(x)$在 0 和 1 之间变化；当 $x>1$ 时，$\cos^{-1}x$ 是虚数，所以 $V_N(x)$像双曲余弦一样单调地增加。参考(B.4)式，$|H_c(j\Omega)|^2$ 对于 $0\leqslant\Omega/\Omega_c\leqslant1$，呈现出在 1 和 $1/(1+\epsilon^2)$之间的波动；而对于 $\Omega/\Omega_c>1$ 单调地减小。需要用三个参量来确定该滤波器：ϵ，Ω_c 和 N。在典型的设计中，用容许的通带波纹来确定 ϵ，而用希望的通带截止频率来确定 Ω_c。然后选择合适的阶次 N，以便阻带的技术要求得到满足。

切比雪夫滤波器的极点在 s 平面上呈椭圆分布。参考图 B.5，该椭圆用两个圆来定义，它们的直径分别等于椭圆短轴和长轴。短轴的长度等于 $2a\Omega_c$，其中

$$a = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} - \alpha^{-1/N}) \tag{B.7}$$

式中

$$\alpha = \epsilon^{-1} + \sqrt{1+\epsilon\epsilon^{-2}}. \tag{B.8}$$

长轴的长度等于 $2b\Omega_c$，其中

$$b = \frac{1}{2}(\alpha^{1/N} + \alpha^{-1/N}) \tag{B.9}$$

为了求出切比雪夫滤波器在椭圆上极点的位置，我们首先要这样确定，在大圆和小圆上以等角度 π/N 等间隔排列的那些点：这些点对于虚轴呈对称分布，并且没

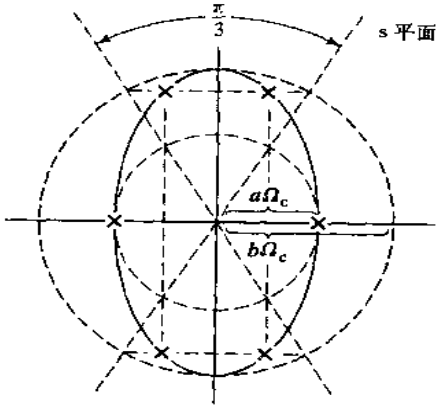


图 B.5　三阶Ⅰ型切比雪夫低通滤波器的极点位置

有一个点落在虚轴上；但当 N 为奇数时要有一个点落在实轴上，而当 N 为偶数时，就都不会落在实轴上。大圆和小圆上的这种划分方式完全与确定(B.3)式中巴特沃兹滤波器极点位置的圆周划分方式一样。切比雪夫滤波器的极点落在椭圆上，其纵坐标由相应的大圆上点的纵坐标来表示，其横坐标由相应的小圆上点的横坐标来表示。图 B.5 中绘出了当 $N=3$ 时的极点分布。

Ⅱ型切比雪夫低通滤波器可以通过一种变换与Ⅰ型切比雪夫滤波器联系起来。具体讲，如果在(B.4)式中我们将 $\varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)$ 项用其倒数来替换，并且把 V_N^2 的自变量也用其倒数来代替，则可以得到

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+[\varepsilon^2 V_N^2(\Omega_c/\Omega)]^{-1}} \tag{B.10}$$

这就是Ⅱ型切比雪夫低通滤波器的解析形式。设计Ⅱ型切比雪夫滤波器的一种方法是：首先设计Ⅰ型切比雪夫滤波器，然后再利用上述的变换即可。

B.3 椭圆滤波器

如果我们像在切比雪夫滤波器的情况中那样，使得误差均匀分布于整个通带或整个阻带，而不是像巴特沃兹滤波器那样，只允许误差在通带内单调地增加，那么，就可能用一个较低阶的滤波器来满足设计要求。我们注意到，在Ⅰ型切比雪夫逼近和巴特沃兹逼近中，阻带误差随频率单调减小，如果我们使阻带误差均匀地分布于阻带内，则会导致进一步改进的可能性。这样就可以提出一种低通滤波器的逼近方法，如图 B.6 所示。确实可以证明(Papoulis，1957)，在给定 Ω_p，δ_1 和 δ_2 的值，而使过渡带 $(\Omega_s-\Omega_p)$ 尽可能小的意义上来说，这种逼近方式(即在通带和阻带内等波纹)是在给定滤波器阶次 N 时所能得到的最好结果。

这种逼近称为椭圆滤波器，它有如下形式：

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 U_N^2(\Omega)} \tag{B.11}$$

式中 $U_N(\Omega)$ 是 Jacobian 椭圆函数。为了在通带和阻带内均得到等波纹误差，椭圆滤波器必须既有极点又有零点。正如从图 B.6 所能看到的，这一滤波器在 s 平面的 $j\Omega$ 轴上有零点。有关椭圆滤波器设计的讨论即使只是肤浅的，也超出了本附录的范围。对于更详细的讨论，读者可参阅由 Guillemin(1957)，Storer(1957)，Gold 和 Rader(1969)，以及 Parks 和 Burrus(1987)编写的教科书。

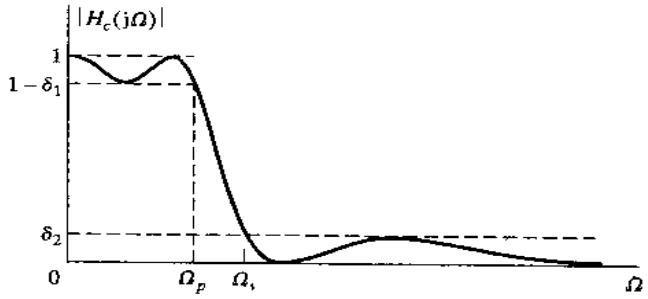
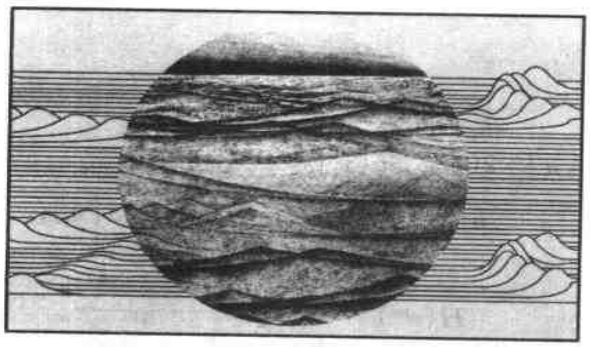


图 B.6 同时在通带和阻带内的等波纹逼近

附录 C

精选基本题答案



本附录包括每章头 20 道基本题答案。

第 2 章基本题答案

2.1. (a) 总是有(2),(3),(5)。若 $g[n]$有界,则有(1)。
(b) (3)。
(c) 总是有(1),(3),(4)。若 $n_0=0$,(2)和(5)都有。
(d) 总是有(1),(3),(4)若 $n_0\leqslant 0$,(2)。若 $n_0=0$,(5)。
(e) (1),(2),(4),(5)。
(f) 总是有(1),(2),(4),(5)。若 $b=0$,(3)。
(g) (1),(3)。
(h) (1),(5)。

2.2. (a) $N_4=N_0+N_2, N_5=N_1+N_3$。
(b) 最多 $N+M-1$ 个非零值点。

2.3.

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{a-n}{1-a}, & n<0,\\ \dfrac{1}{1-a}, & n\geqslant 0。\end{cases}$$

2.4. $y[n]=8[(1/2)^n-(1/4)^n]u[n]$。

2.5 (a) $y_h[n]=A_1(2)^n+A_2(3)^n$。

(b) $h[n]=2(3^n-2^n)u[n]$。

(c) $s[n]=[-8(2)^{(n-1)}+9(3)^{(n-1)}+1]u[n]$。

2.6. (a)

$$H(e^{j\omega})=\frac{1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}。$$

(b) $y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]+\frac{3}{4}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]+x[n-3]$。

2.7. (a) 周期的，$N=6$。

(b) 周期的，$N=8$。

(c) 非周期。

(d) 非周期。

2.8. $y[n]=3(-1/2)^nu[n]+2(1/3)^nu[n]$。

2.9. (a)

$$h[n]=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n],$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}},$$

$$s[n]=\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right]u[n]。$$

(b) $y_h[n]=A_1(1/2)^n+A_2(1/3)^n$。

(c) $y[n]=4(1/2)^n-3(1/3)^n-2(1/2)^nu[-n-1]+2(1/3))^nu[-n-1]$。

2.10. (a)

$$y[n]=\begin{cases}a^{-1}/(1-a^{-1}), & n\geqslant -1,\\ a^n/(1-a^{-1}), & n\leqslant -2。\end{cases}$$

(b)

$$y[n]=\begin{cases}1, & n\geqslant 3,\\ 2^{(n-3)}, & n\leqslant 2。\end{cases}$$

(c)

$$y[n]=\begin{cases}1, & n\geqslant 0,\\ 2^n, & n\leqslant -1。\end{cases}$$

(d)

$$y[n]=\begin{cases}0, & n\geqslant 9,\\ 1-2^{n-9}, & 8\geqslant n\geqslant -1,\\ 2^{(n+1)}-2^{(n-9)}, & -2\geqslant n。\end{cases}$$

2.11. $y[n]=2\sqrt{2}\sin(\pi(n-1)/4)$。

2.12. (a) $y[n]=n!\ u[n]$。

(b) 系统是线性的。

(c) 系统不是时不变的。

2.13. (a),(b)和(e)都是稳定 LTI 系统的特征函数。

2.14. (a) (iv)。

(b) (i)。

(c) (iii),$h[n]=(1/2)^n u[n]$。

2.15. (a) 不是 LTI 的。输入 $\delta[n]$和 $\delta[n-1]$都违反 TI 性。

(b) 非因果。可考虑 $x[n]=\delta[n-1]$。

(c) 稳定。

2.16. (a) $y_h[n]=A_1(1/2)^n+A_2(-1/4)^n$。

(b) 因果:$h_c[n]=2(1/2)^n u[n]+(-1/4)^n u[n]$。

反因果:$h_{ac}[n]=-2(1/2)^n u[-n-1]-(-1/4)^n u[-n-1]$。

(c) $h_c[n]$是绝对可加的。$h_{ac}[n]$不是。

(d) $y_p[n]=(1/3)(-1/4)^n u[n]+(2/3)(1/2)^n u[n]+4(n+1)(1/2)^{(n+1)}u[n+1]$。

2.17. (a)

$$R(e^{j\omega})=e^{-j\omega M/2}\frac{\sin\left(\omega\left(\frac{M+1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}。$$

(b) $W(e^{j\omega})=(1/2)R((e^{j\omega})+(1/4)R(e^{j(\omega-2\pi/M)})+(1/4)R(e^{j(\omega+2\pi/M)})$。

2.18. 系统(a)和(b)都是因果的。

2.19. 系统(b),(c),(e)和(f)都是稳定的。

2.20. (a) $h[n]=(1/a)^{(n-1)}u[n-1]$。

(b) 系统将是稳定的,若$|a|>1$。

第 3 章基本题答案

3.1. (a) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|>\dfrac{1}{2}$。

(b) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|<\dfrac{1}{2}$。

(c) $\dfrac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, $|z|<\dfrac{1}{2}$。

(d) 1,全部 z。

(e) z^{-1}, $z\neq 0$。

(f) z, $|z|<\infty$。

(g) $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，　$|z|\neq 0$。

3.2. $X(z)=\dfrac{z^{-1}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2}$。

3.3. (a) $X_a(z)=\dfrac{z^{-1}(a-a^{-1})}{(1-az^{-1})(1-a^{-1}z^{-1})}$，　ROC: $|a|<|z|<|a^{-1}|$。

(b) $X_b(z)=\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$，　ROC: $z\neq 0$。

(c) $X_c(z)=z^{-1}\dfrac{(1-z^{-N})^2}{(1-z^{-1})^2}$，　ROC: $z\neq 0$。

3.4. (a) $(1/3)<|z|<2$，双边。

(b) 两个序列　$(1/3)<|z|<2$ 和 $2<|z|<3$。

(c) 不是。因果序列有　$|z|>3$，它不包括单位圆。

3.5. $x[n]=2\delta[n+1]+5\delta[n]-4\delta[n-1]-3\delta[n-2]$。

3.6. (a) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$，傅里叶变换存在。

(b) $x[n]=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$，傅里叶变换不存在。

(c) $x[n]=4\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$，傅里叶变换存在。

(d) $x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$，傅里叶变换存在。

(e) $x[n]=-(a^{-(n+1)})u[n]+a^{-(n-1)}u[n-1]$，傅里叶变换存在，若 $|a|>1$。

3.7. (a) $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$，　$|z|>1$。

(b) ROC $|Y(z)|=|z|>1$。

(c) $y[n]=\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}(-1)^n\right]u[n]$。

3.8. (a) $h[n]=\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$。

(b) $y[n]=\frac{8}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]-\frac{8}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$。

(c) 系统稳定。

3.9. (a) $|z|>(1/2)$。

(b) 对。ROC 包括单位圆。

(c) $X(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}$。

(d) $h[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$。

3.10. (a) $|z|>\frac{3}{4}$。

(b) $0<|z|<\infty$。

(c) $|z|<2$。

(d) $|z|>1$。

(e) $|z|<\infty$。

(f) $\frac{1}{2}<|z|<\sqrt{13}$。

3.11. (a) 因果。

(b) 非因果。

(c) 因果。

(d) 非因果。

3.12.

(a)

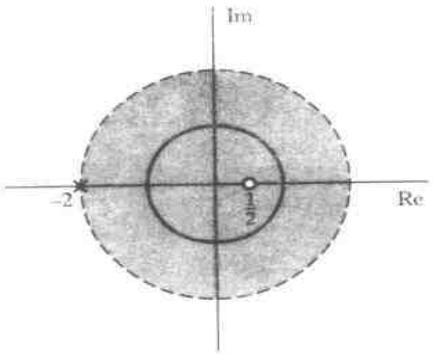


图 P3.12-1

(b)

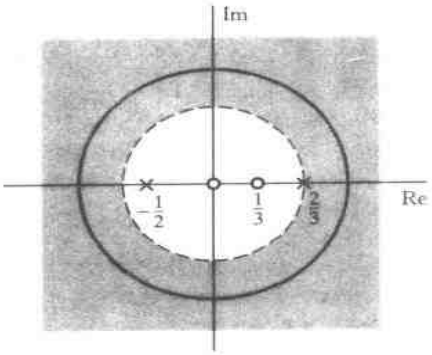


图 P3.12-2

(c)

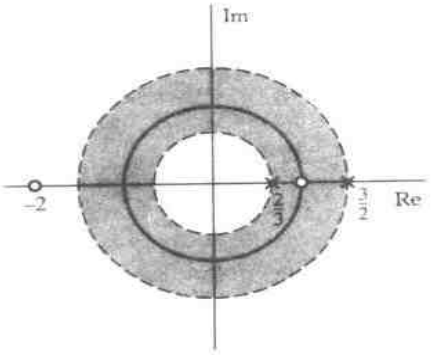


图 P3.12-3

3.13. $g[11]=-\frac{1}{11!}+\frac{3}{9!}-\frac{2}{7!}$。

3.14. $A_1=A_2=1/2, \alpha_1=-1/2, \alpha_2=1/2$。

3.15. $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n(u[n]-u[n-10])$。系统是因果的。

3.16. (a) $H(z)=\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$，$|z|>\frac{2}{3}$。

(b) $h[n]=\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]-2\left(\frac{2}{3}\right)^{(n-1)}u[n-1]$。

(c) $y[n]-\frac{2}{3}y[n-1]=x[n]-2x[n-1]$。

(d) 系统稳定且因果。

3.17. $h[0]$可以是0，1/3，或1。从表面上看，$h[0]$也可以为2/3，因为单位脉冲响应 $h[n]=(2/3)(2)^n u[n]-(1/3)(1/2)^n u[-n-1]$，也满足这个差分方程，但是没有ROC。这个没有ROC的非因果系统可以用它的因果和非因果分量的并联联结来实现。

3.18. (a) $h[n]=-2\delta[n]+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{8}{3}u[n]$。

(b) $y[n]=\left\{\frac{2}{\frac{3}{2}+\frac{\mathrm{j}}{2}}\right\}e^{\mathrm{j}(\pi/2)n}$。

3.19. (a) $|z|>1/2$。

(b) $1/3<|z|<2$。

(c) $|z|>1/3$。

3.20. (a) $|z|>2/3$。

(b) $|z|>1/6$。

第4章基本题答案

4.1. $x[n]=\sin(\pi n/2)$。

4.2. $\Omega_0=250\pi, 1\,750\pi$。

4.3. (a) $T=1/12\,000$。 (b) 不唯一，$T=5/12\,000$。

4.4. (a) $T=1/100$。 (b) 唯一，$T=11/100$。

4.5. (a) $T\leqslant 1/10\,000$。 (b) 625Hz。 (c) 1 250Hz。

4.6. (a) $H_c(\mathrm{j}\Omega)=1/(a+\mathrm{j}\Omega)$。

(b) $H_d(e^{\mathrm{j}\omega}=T/(1-e^{-aT}e^{-\mathrm{j}\omega})$。

4.7. (a)

$$X_c(\mathrm{j}\Omega)=S_c(\mathrm{j}\Omega)(1+\alpha e^{-\mathrm{j}\Omega\tau_d}),$$

$$X(e^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_c\left(\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)+\frac{\alpha e^{-\mathrm{j}\omega\tau_d/T}}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S_c\left(\mathrm{j}\left(\frac{\omega}{T}-\frac{2\pi k}{T}\right)\right)。$$

(b) $H(e^{\mathrm{j}\omega})=1+\alpha e^{-\mathrm{j}\omega\tau_d/T}$。

(c) (i) $h[n]=\delta[n]+a\delta[n-1]$。

(ii) $h[n]=\delta[n]+\alpha\frac{\sin(\pi(n-1/2))}{\pi(n-1/2)}$。

4.8. (a) $T \leqslant 1/20\,000$。

(b) $h[n] = Tu[n]$。

(c) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$。

(d) $T \leqslant 1/10\,000$。

4.9. (a) $X(e^{j(\omega+\pi)}) = X(e^{j(\omega+\pi-\pi)}) = X(e^{j\omega})$。

(b) $x[3] = 0$。

(c) $x[n] = \begin{cases} y[n/2], & n \text{ 为偶,} \\ 0, & n \text{ 为奇。} \end{cases}$

4.10. (a) $x[n] = \cos(2\pi n/3)$。

(b) $x[n] = -\sin(2\pi n/3)$。

(c) $x[n]\sin(2\pi n/5)(\pi n/5\,000)$。

4.11. (a) $T = 1/40, T = 9/40$。

(b) $t = 1/20$。唯一。

4.12. (a) (i) $y_c(t) = -6\pi\sin(6\pi t)$。

(ii) $y_c(t) = -6\pi\sin(6\pi t)$。

(b) (i) 是。

(ii) 否。

4.13. (a) $y[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$。

(b) 同一 $y[n]$。

(c) $h_c(t)$对 T 没有影响。

4.14. (a) 否。

(b) 是。

(c) 否。

(d) 是。

(e) 是。(没有任何信息丢失;然而信号不能用图 3.21 的系统恢复)

4.15. (a) 是。

(b) 否。

(c) 是。

4.16. (a) $M/L = 5/2$,唯一。

(b) $M/L = 2/3$;也有 $M/L = 7/3$。

4.17. (a) $\tilde{x}_d[n] = (4/3)\sin(\pi n/2/(\pi n)$。

(b) $\tilde{x}_d[n] = -\sin(3\pi n/4)$。

4.18. (a) $\omega_0 = 2\pi/3$。

(b) $\omega_0 = 3\pi/5$。

(c) $\omega_0 = \pi$。

4.19. $T \leqslant \pi/\Omega_0$。

4.20. (a) $F_s \geqslant 2\,000\text{Hz}$。

(b) $F_s \geqslant 4\,000\text{Hz}$。

第 5 章基本题答案

5.1. $x[n]=y[n]$, $\omega_c=\pi$。

5.2. (a) 极点: $z=3,1/3$, 零点: $z=0,\infty$。

(b) $h[n]=-(3/8)(1/3)^n u[n]-(3/8)3^n u[-n-1]$。

5.3. (a),(d)是单位脉冲响应。

5.4. (a) $H(z)=\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$, $|z|>3/4$。

(b) $h[n]=(3/4)^n u[n]-2(3/4)^n u[n-1]$。

(c) $y[n]-(3/4)y[n-1]=x[n]-2x[n-1]$。

(d) 稳定且因果。

5.5. (a) $y[n]-(7/12)y[n-1]+(1/12)y[n-2]=$
$3x[n]-(19/6)x[n-1]+(2/3)x[n-2]$。

(b) $h[n]=3\delta[n]-(2/3)(1/3)^{n-1}u[n-1]-(3/4)(1/4)^{n-1}u[n-1]$。

(c) 稳定。

5.6. (a) $X(z)=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$, $\frac{1}{2}<|z|<2$。

(b) $\frac{1}{2}<|z|<2$。

(c) $h[n]=\delta[n]-\delta[n-2]$。

5.7. (a) $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$, $|z|>\frac{3}{4}$。

(b) $h[n]=-(2/5)(1/2)^n u[n]+(7/5)(-3/4)^n u[n]$。

(c) $y[n]+(1/4)y[n-1]-(3/8)y[n-2]=x[n]-x[n-1]$。

5.8. (a) $H(z)=\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}}$, $|z|>2$。

(b) $h[n]=-(2/5)(-1/2)^n u[n]+(2/5)(2)^n u[n]$。

(c) $h[n]=-(2/5)(-1/2)^n u[n]-(2/5)(2)^n u[-n-1]$。

5.9.

$$h[n]=\left[-\frac{4}{3}(2)^{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u[-n],\quad |z|<\frac{1}{2},$$

$$h[n]=-\frac{4}{3}(2)^{n-1}u[-n]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1],\quad \frac{1}{2}<|z|<2,$$

$$h[n]=\frac{4}{3}(2)^{n-1}u[n-1]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1],\quad |z|>2。$$

5.10. $H_i(z)$不可能是因果和稳定的。 $H(z)$在 $z=\infty$的零点是 $H_i(z)$的极点。 在 $z=\infty$存在极点意味着系统不是因果的。

5.11. (a) 不能确定。

(b) 不能确定。

(c) 对。

(d) 错。

5.12. (a) 稳定。

(b) $$H_1(z)=-9\frac{(1+0.2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{(1-j0.9z^{-1})(1+j0.9z^{-1})},$$

$$H_{ap}(z)=\frac{(z^{-1}-\frac{1}{3})(z^{-1}+\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}。$$

5.13. $H_1(z)$, $H_3(z)$和 $H_4(z)$都是全通系统。

5.14. (a) 5。

(b) $\frac{1}{2}$。

5.15. (a) $\alpha=1,\beta=0,A(e^{j\omega})=1+4\cos(\omega m)$。该系统是一个广义线性相位系统,但不是一个线性相位系统,因为 $A(e^{j\omega})$对全部 ω 不是非负。

(b) 不是一个广义线性相位系统或一个线性相位系统。

(c) $\alpha=1,\beta=0,A(e^{j\omega})=3+\cos(\omega m)$。线性相位,因为 $|H(e^{j\omega})|=A(e^{j\omega})\geqslant 0$,全部 ω。

(d) $\alpha=1/2,\beta=0,A(e^{j\omega})=2\cos(\omega m/2)$。广义线性相位,因为 $A(e^{j\omega})$对全部 ω 不是非负。

(e) $\alpha=1,\beta=\pi/2,A(e^{j\omega})=2\sin(\omega m)$。广义线性相位,因为 $\beta\neq 0$。

5.16. $h[n]$不必要是因果的。 $h[n]=\delta[n-\alpha]$和 $h[n]=\delta[n+1]+\delta[n-(2\alpha+1)]$都有这个相位。

5.17. $H(z)$和 $H_3(z)$都是线性相位系统。

5.18. (a) $H_{\min}(z)=\frac{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$。

(b) $H_{\min}(z)=3\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)$。

(c) $H_{\min}(z)=\frac{9}{4}\frac{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1-\frac{3}{4}z^{-1})^2}$。

5.19. $h_1[n]:2,h_2[n]:3/2,h_3[n]:2,h_4[n]:3,h_5[n]:3,h_6[n]:7/2$。

5.20. 系统 $H_1(z)$和 $H_3(z)$都有一个线性相位,且能用一个实系数差分方程实现。

第 6 章基本题答案

6.1. 网络 1:

$$H(z)=\frac{1}{1-2r\cos\theta z^{-1}+r^2z^{-2}}。$$

网络 2：

$$H(z) = \frac{r\sin\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}。$$

两个系统函数都有相同的分母，因此有相同的极点。

6.2. $y[n] - 3y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$。

6.3. 在(d)部分的系统与(a)中的系统是相同的。

6.4. (a)

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}。$$

(b)

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = 2x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]。$$

6.5. (a)

$$y[n] - 4y[n-1] + 7y[n-3] + 2y[n-4] = x[n]。$$

(b)

$$H(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}}。$$

(c) 2 次乘法和 4 次加法。

(d) 不是。它至少需要 4 个延迟单元来实现一个四阶系统。

6.6.

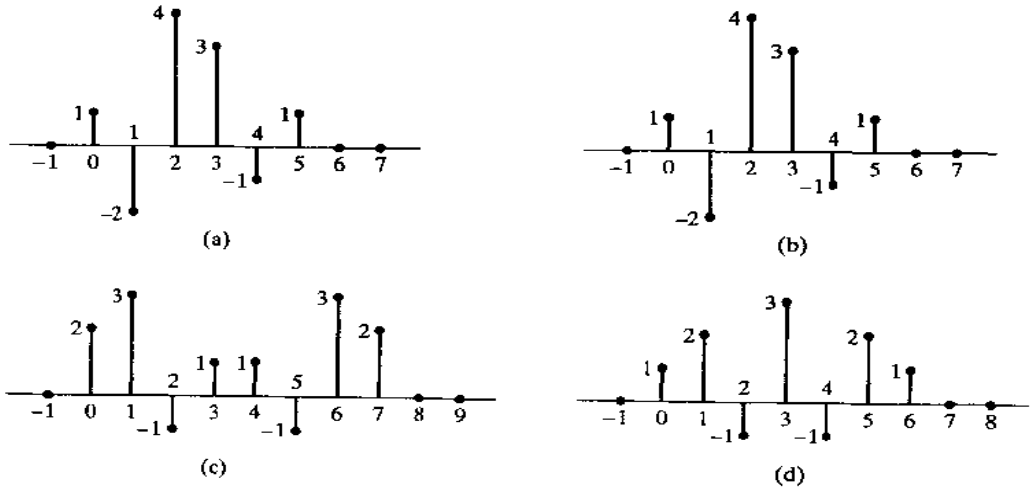


图 P6.6

6.7.

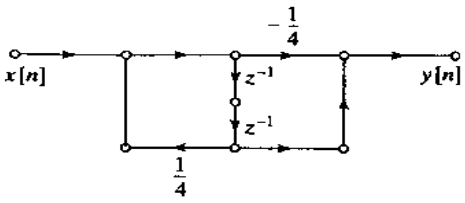


图 P6.7

6.8. $y[n]-2y[n-2]=3x[n-1]+x[n-2]$。

6.9. (a) $h[1]=2$。

(b) $y[n]+y[n-1]-8y[n-2]=x[n]+3x[n-1]+x[n-2]-8x[n-3]$。

6.10. (a)

$$y[n] = x[n] + v[n-1]。$$

$$v[n] = 2x[n] + \frac{1}{2}y[n] + w[n-1]。$$

$$w[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n]。$$

(b)

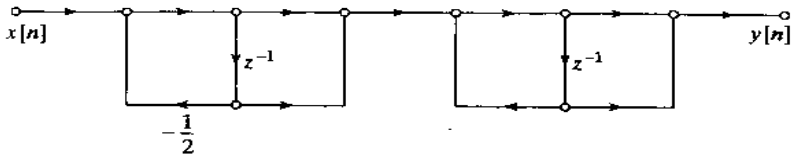


图 P6.10

(c) 极点在 $z=-1/2$ 和 $z=1$。因为第 2 个极点是在单位圆上,所以系统不稳定。

6.11.

(a)

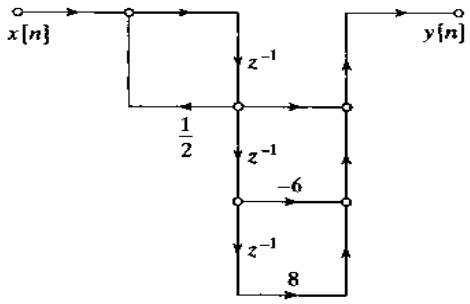


图 P6.11-1

(b)

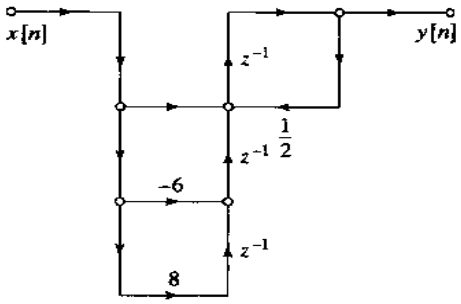


图 P6.11-2

6.12. $y[n]-8y[n-1]=-2x[n]+6x[n-1]+2x[n-2]$。

6.13.

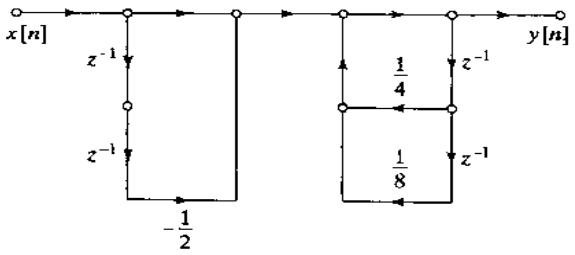


图 P6.13

6.14.

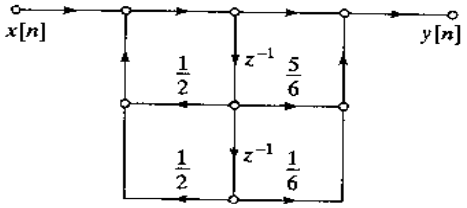


图 P6.14

6.15.

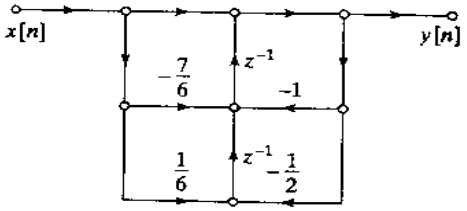


图 P6.15

6.16. (a)

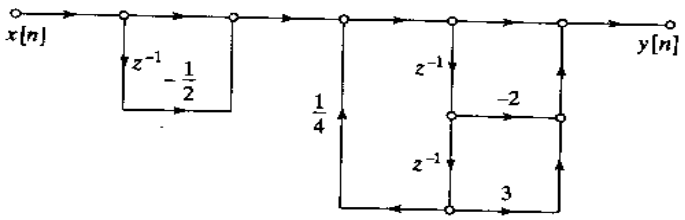


图 P6.16

(b) 两个系统都有系统函数为

$$H(z)=\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1}+3z^{-2})}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}。$$

6.17. (a)

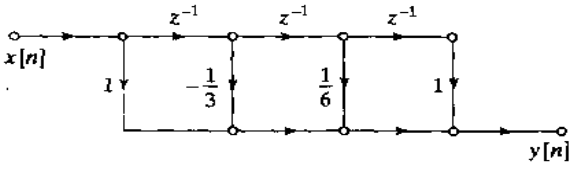


图 P6.17-1

(b)

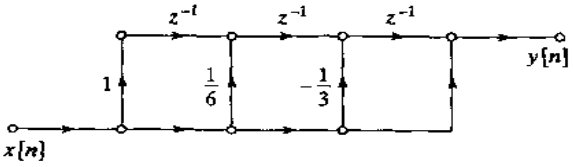


图 P6.17-2

6.18. 若 $a=2/3$,总系统函数是

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}。$$

若 $a=-2$,总系统函数是

$$H(z)=\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}。$$

6.19.

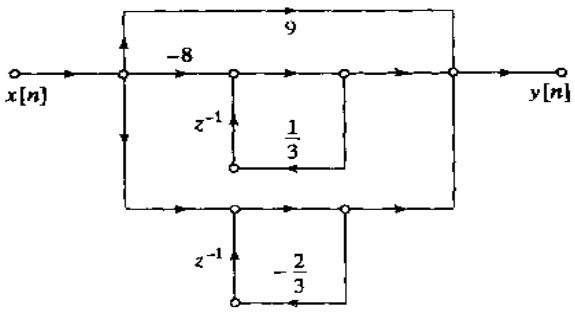


图 P6.19

6.20.

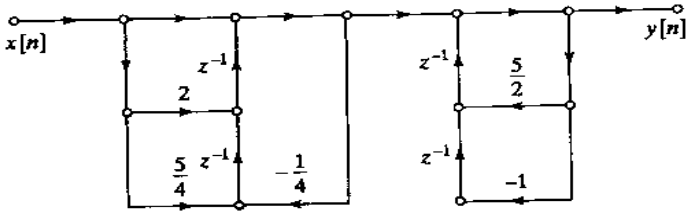


图 P6.20

第 7 章基本题答案

7.1.(a)

$$H_1(z)=\frac{1-e^{aT}\cos(bT)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(bT)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}。$$

(b)

$H_2(z)=(1-z^{-1})S_2(z)$,式中

$$S_2(z)=\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{2(a+jb)}\frac{1}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}}-\frac{1}{2(a-jb)}\frac{1}{1-e^{-(a-jb)T}z^{-1}}。$$

(c) 它们不相等。

7.2.(a)

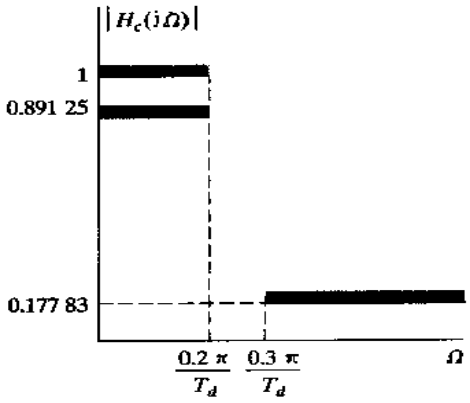


图 P7.2

(b) $N=6,\Omega_cT_d=0.703\,2$。

(c) 在 s 平面上的极点位于半径 $R=0.703\,2/T_d$ 的圆上,它们映射到 z 平面极点在 $z=e^{s_kT_d}$。因子 T_d 消去,$H(z)$在 z 平面上的极点与 T_d 无关。

7.3. (a) $\hat{\delta}_2 = \delta_2/(1+\delta_1)$。

(b)

$$\delta_2 = 0.188\,06$$

$$H(z) = \frac{0.303\,6 - 0.472\,3z^{-1}}{1 - 1.297\,1z^{-1} + 0.694\,9z^{-2}} + \frac{-2.266\,0 + 1.211\,4z^{-1}}{1 - 1.069\,1z^{-1} + 0.369\,9z^{-2}} + \frac{1.962\,4 - 0.666\,5z^{-1}}{1 - 0.997\,7z^{-1} + 0.257\,0z^{-2}}$$

(c) 用相同的 δ_2。

$$\frac{0.000\,780\,2(1+z^{-1})^6}{(1 - 1.268\,6z^{-1} + 0.705\,1z^{-2})(1 - 1.010\,6z^{-1} + 0.358\,3z^{-2})(1 - 1.904\,4z^{-1} + 0.215\,5z^{-2})}。$$

7.4. (a)

$$H_c(s) = \frac{1}{s+0.1} - \frac{0.5}{s+0.2}。$$

答案不是唯一的,另一种可能是

$$H_c(s) = \frac{1}{s+0.1+\mathrm{j}2\pi} - \frac{0.5}{s+0.2+\mathrm{j}2\pi}。$$

(b)

$$H_c(s) = \frac{2(1+s)}{0.181\,3 + 1.818\,7s} - \frac{1+s}{0.329\,7 + 1.670\,3s}。$$

答案是唯一的。

7.5. (a) $M+1=91$。

(b) $M/2=45$。

(c) $h_d[n] = \dfrac{\sin[0.625\pi(n-45)]}{\pi(n-45)} - \dfrac{\sin[0.3\pi(n-45)]}{\pi(n-45)}$。

7.6. (a) $\delta=0.03, \beta=2.181$。

(b) $\Delta\omega=0.05\pi, M=50$。

7.7.

$$0.99 \leqslant |H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| \leqslant 1.01, \quad |\omega| \leqslant 0.2\pi,$$
$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| \leqslant 0.01, \quad 0.22\pi \leqslant |\omega| \leqslant \pi。$$

7.8. (a) 6 个交错点,$L=5$,所以不满足交错点定理,因此不是最优的。

(b) 7 个交错点,对 $L=5$ 满足交错点定理。

7.9. $\omega_c = 0.4\pi$。

7.10. $\omega_c = 2.384\,2$ rad。

7.11. $\Omega_c = 2\pi(1\,250)$rad/s。

7.12. $\Omega_c = 2\,000$ rad/s。

7.13. $T = 50\ \mu$s。这个 T 是唯一的。

7.14. $T = 1.46$ ms。这个 T 是唯一的。

7.15. Hamming,Hanning 和 Blackman 窗都可以用。

7.16. $\beta = 2.652\,4$, $M = 181$。

7.17.

$$|H_c(j\Omega)| < 0.02, \quad |\Omega| \leqslant 2\pi(20)\text{rad/s},$$
$$0.95 < |H_c(j\Omega)| < 1.05, \quad 2\pi(30) \leqslant |\Omega| \leqslant 2\pi(70)\text{rad/s},$$
$$|H_c(j\Omega)| < 0.001, \quad 2\pi(75)\text{rad/s} \leqslant |\Omega|。$$

7.18.

$$|H_c(j\Omega)| < 0.04, \quad |\Omega| \leqslant 726.5 \text{ rad/s},$$
$$0.995 < |H_c(j\Omega)| < 1.005, \quad |\Omega| \geqslant 1\,376.4 \text{ rad/s}。$$

7.19. $T = 0.416\,67$ ms。这个 T 是唯一的。

7.20. 对。

第 8 章基本题答案

8.1. (a) $x[n]$ 是周期的，周期 $N = 6$。

(b) T 不会避免混叠。

(c)

$$\tilde{X}[k] = 2\pi \begin{cases} a_0 + a_6 + a_{-6}, & k = 0, \\ a_1 + a_7 + a_{-5}, & k = 1, \\ a_2 + a_8 + a_{-4}, & k = 2, \\ a_3 + a_9 + a_{-3} + a_{-9}, & k = 3, \\ a_4 + a_{-2} + a_{-8}, & k = 4, \\ a_5 + a_{-1} + a_{-7}, & k = 5。 \end{cases}$$

8.2. (a)

$$\tilde{X}_3 = \begin{cases} 3X[k/3], & k = 3l, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

(b)

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 3, & k = 0, \\ -1, & k = 1。 \end{cases}$$

$$\tilde{X}_3[k] = \begin{cases} 9, & k = 0, \\ 0, & k = 1,2,4,5, \\ -3, & k = 3。 \end{cases}$$

8.3. (a) $\tilde{x}_2[n]$。

(b) 没有任何序列。

(c) $\tilde{x}_1[n]$ 和 $\tilde{x}_3[n]$。

8.4. (a)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}。$$

(b)

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{1 - ae^{-j(2\pi/N)k}}。$$

(c)

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=(2\pi k/N)}。$$

8.5. (a) $X[k]=1$。

(b) $X[k]=W_N^{kn_0}$。

(c)

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0, N/2, \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

(d)

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0, \\ e^{-j(\pi k/N)(N/2-1)}(-1)^{(k-1)/2}\dfrac{1}{\sin(k\pi/N)}, & k 为奇。 \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

(e)

$$X[k] = \frac{1-a}{1-aW_N^k}。$$

8.6. (a)

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{j(\omega_0-\omega)N}}{1-e^{j(\omega_0-\omega)}}。$$

(b)

$$X[k] = \frac{1-e^{j\omega_0 N}}{1-e^{j\omega_0}W_N^k}。$$

(c)

$$X[k] = \begin{cases} N, & k = k_0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

8.7.

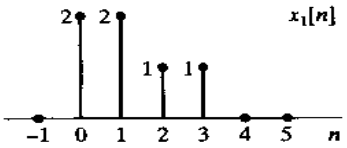


图 P8.7

8.8.

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{1024}{1023}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n, & 0 \leqslant n \leqslant 9, \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

8.9. (a) 1. 令 $x_1[n]=\sum_m x[n+5m]$。

2，令 $x_1[k]$是 $x_1[n]$5 点的 FFT。 $M=5$。

3. $x_1[2]$是 $X(e^{j\omega})$在 $\omega=4\pi/5$ 的值。

(b) 1. 令 $x_2[n]$是 $x[n]$再跟 7 个零值。

2. 令 $X_2[k]$是 $X_2[n]$27 点的 FFT。 $L=27$。

3. $X_2[5]$是 $X(e^{j\omega})$在 $\omega=10\pi/27$ 的值。

8.10. $x_2[k]=(-1)^k X_1[k]$。

8.11.

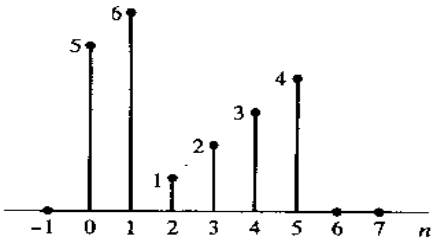


图 P8.11

8.12.(a)

$$X[k]=\begin{cases}2, & k=1,3,\\ 0, & k=2,4。\end{cases}$$

(b)

$$H[k]=\begin{cases}15, & k=0,\\ -3+j6, & k=1,\\ -5, & k=2,\\ -3-j6, & k=3。\end{cases}$$

(c) $y[n]=-3\delta[n]-6\delta[n-1]+3\delta[n-2]+6\delta[n-3]$。

(d) $y[n]=-3\delta[n]-6\delta[n-1]+3\delta[n-2]+6\delta[n-3]$。

8.13.

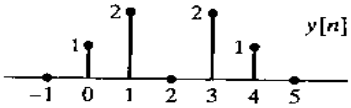


图 P8.13

8.14. $x_3[2]=9$。

8.15. $a=-1$。 唯一。

8.16. $b=3$。 唯一。

8.17. $N=9$。

8.18. $c=2$。

8.19. $m=2$。 不唯一。 任何 $m=2+6l$， l 为整数都可以。

8.20. $N=5$。 唯一。

第 9 章基本题答案

9.1. 如果输入是$(1/N)X[((-n))_N]$，那么 DFT 程序的输出就是$x[n]$，即$X[k]$的 IDFT。

9.2. (a) 增益是$-W_N^2$。

(b) 有一条路径。一般来说，从任何输入样本到任何输出样本仅有一条路径。

(c) 沿着这些路径，可见有

$$X[2] = x[0] \cdot 1 + x[1]W_8^2 - x[2] - x[3]W_8^2 + \cdots + x[4] + x[5]W_8^2 - x[6] - x[7]W_8^2。$$

9.3. (a) 将$x[n]$用倒位序存入$A[\cdot]$中，$D[\cdot]$将包括正位序的$X[k]$。

(b)

$$D[r] = \begin{cases} N, & r = 3, \\ 0 & 其它。 \end{cases}$$

(c)

$$C[r] = \begin{cases} 1, & r = 0,1,2,3, \\ 0, & 其它。 \end{cases}$$

9.4. (a) $N/2$ 个蝶形，用$2^{(m-1)}$个不同的系数。

(b) $y[n] = W_N^{2^{v-m}}y[n-1] + x[n]$。

(c) 周期：2^m，频率：$2\pi 2^{-m}$。

9.5.

$$X = AD - BD + CA \quad DA = AC - BD$$
$$Y = AD - BD + BC + BD = BC + AD$$

9.6. 说法 1。

9.7. $\omega_k = 7\pi/16$。

9.8.

$$y[n] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi/7)+(2\pi/21)(n-19)}。$$

9.9. (a) 2^{m-1}。

(b) 2^m。

9.10. $r[n] = e^{-j(2\pi/19)}W^{n^2/2}$，式中$W = e^{-j(2\pi/10)}$。

9.11. $x[0], x[8], x[4], x[12], x[2], x[10], x[6], x[14], x[1], x[9], x[5], x[13], x[3], x[11], x[7], x[15]$。

9.12. 错。

9.13. $m = 1$。

9.14.

$$r = \begin{cases} 0, & m = 0 \\ 0,4, & m = 1 \\ 0,2,4,6, & m = 2 \\ 0,1,2,3,4,5,6,7, & m = 3 \end{cases}$$

9.15. $N=64$。

9.16. $m=3$ 或 4。

9.17. 按时间抽取。

9.18. 1 021 是质数，所以程序必须要实现全部 DFT 的式子，并且不能利用 FFT 算法，计算时间随 N^2 增点。与此相比，1 024 是 2 的幂，可以利用 FFT 的 $N\log N$ 的计算时间。

9.19.

$$a = -\sqrt{2}$$
$$b = -e^{-j(6\pi/8)}。$$

9.20.

$$y[n] = e^{j(2\pi/32)7}X^*(e^{j(7\pi/16)})。$$

第 10 章基本题答案

10.1. (a) $f=1\,500$ Hz。

(b) $f=-2\,000$ Hz。

10.2. $N=2\,048$ 和 10 000 Hz $<f<10\,240$ Hz。

10.3. (a) 320 个样本。

(b) 400 DFT/s。

(c) $N=64$。

(d) 250 Hz。

10.4. (a) $X[200]=1-j$。

(b)
$$X(j2\pi(4\,000)) = 5\times10^{-5}(1-j)$$
$$X(-j2\pi(4\,000)) = 5\times10^{-5}(1+j)。$$

10.5. (a) $T=2\pi k_0/(N\Omega_0)$。

(b) 不唯一。$T=(2\pi/\Omega_0)(1-k_0/N)$。

10.6.
$$X_c(j2\pi(4\,200)) = 5\times10^{-4}$$
$$X_c(-j2\pi(4\,200)) = 5\times10^{-4}$$
$$X_c(j2\pi(1\,000)) = 10^{-4}$$
$$X_c(-j2\pi(1\,000)) = 10^{-4}$$

10.7. $L=1\,024$。

10.8. 矩形窗，Hanning，Hamming 和 Bartlett 窗都行。

10.9. $x_2[n]$ 有两个显著峰值。

10.10. $T>1/1\,024$ s。

10.11. $\Delta\Omega=2\pi(2.44)$ rad/s。

10.12. $N\geqslant1\,600$。

10.13.

$$X_0[k] = \begin{cases} 18, & k = 3,33, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$X_1[k] = \begin{cases} 18, & k = 9,27, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

10.14. $x_2[n], x_3[n], x_6[n]$。

10.15. $\omega_0 = 0.25\pi$ rad/样本，$\lambda = \pi/80\,000$ rad/(样本)^2。

10.16. $\Delta f = 9.77$ Hz。

10.17. 方法 2 和 5 都会改善分辨率。

10.18. 峰值没有相同的高度。由矩形窗引起的峰值比较大。

10.19. $L = M + 1 = 124$。

10.20. (a) $A = 44.68$ dB。

(b) 如果它们的幅度超过 0.005 8，将会见到微弱分量。

第 11 章基本题答案

11.1. $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 2a\sin\omega$。

11.2. $x[n] = (5/4)\delta[n] - \delta[n-1]$。

11.3.

$$x_1[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1],$$

$$x_2[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n+1]。$$

11.4. $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = 1 - \cos(2\omega)$, $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0$。

11.5. (a) $x_i[n] = \sin\omega_0 n$。

(b) $x_i[n] = -\cos\omega_0 n$。

(c) $x_i[n] = (1 - \cos\omega_0 n)/(\pi n)$。

11.6. $x[n] = 5\delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-4]$。

11.7. (a) $x[n] = -\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$。

(b) 不唯一。$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - 2\delta[n-2]$也满足所给出的信息。

11.8. $X_{R2}(e^{j\omega})$和 $X_{R3}(e^{j\omega})$都是答案。

11.9. $x[n] = -\delta[n] - 3\delta[n-1] - \delta[n-3]$是满足所给信息的唯一序列。

11.10. $h[n] = \pm(1/2)\{(-1/2)^n u[n] - (1/2)(-1/2)^{n-1}u[n-1]\}$。

11.11.

$$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \begin{cases} 16\sin 3\omega, & 0 \leqslant \omega \leqslant \pi, \\ 0, & \text{其它。} \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\} = 0。$$

11.12. (a) $h[n] = \delta[n] - (1/3)\delta[n-1]$。

(b) $h[n] = (1/3)\delta[n] - \delta[n-1]$。

11.13. $X_1(e^{j\omega}) = \cos\omega - \sin\omega - \cos 2\omega$。

11.14. $X_1(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k \sin k\omega$。

11.15. $x[n] = 4\delta[n] - \delta[n-1]$。

11.16. 这些条件不一致。

11.17. $x[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1]$是满足所给信息的唯一序列。

11.18. 两种选取是 $x[n] = 7\delta[n] + 2\delta[n-1]$或 $x[n] = 7\delta[n] + 2\delta[n-2]$。

11.19. $jX_1[k] = -j\delta[k-1] + j\delta[k-3]$。

11.20. $x_2[n]$和 $x_3[n]$与所给信息相符。

参考文献

AHMED, N., NATARAJAN, T., and RAO, K. R., "Discrete Cosine Transform," *IEEE Transactions on Computers*, Vol. C-23, pp. 90 – 93, Jan. 1974.

ALLEN, J. B., and RABINER, L. R., "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis," *Proc. IEEE*, Vol. 65, pp. 1558 – 1564, Nov. 1977.

ANDREWS, H. C., and HUNT, B. R., *Digital Image Restoration*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

BARNES, C. W., and FAM. A. T., "Minimum Norm Recursive Digital Filters that are Free of Overflow Limit Cycles," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-24, pp. 569 – 574, Oct. 1977.

BARTLETT, M. S., *An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1953,

BENNETT, W. R., "Spectra of Quantized Signals," *Bell System Technical J.*, Vol. 27, pp. 446 – 472, 1948.

BLACKMAN, R. B., *Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1965.

BLACKMAN, R. B., and TUKEY, J. W., *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, New York, NY, 1958.

BLAHUT, R. E., *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1985.

BLUESTEN, L. I., "A Linear Filtering Approach to the Computation of Discrete Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 451 – 455, Dec. 1970.

BRACEWELL, R. N., "The Discrete Hartley Transform," *J. Optical Society of America*, Vol. 73, pp. 1832 – 1835, Dec. 1983.

BRACEWELL, R. N., "The Fast Hartley Transform," *Proc. IEEE*, Vol. 72, No. 8, pp. 1010 – 1018, Aug. 1984.

BRACEWELL, R. N., *The Fourier Transform and Its Applications*, 2nd ed. revised, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1986.

BURRUS, C. S., "Effcient Fourier Transform and Convolution Algorithms," in *Advanced Topics in*

Signal Processing, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

BURRUS, C. S., and Praks, T. W., *DFT/FFT and Convolution Algorithms Theory and Implementation*, Wiley, New York, NY, 1985.

CANDY, J. C., and TEMES, G. C., *Oversampling Delta-Sigma Data Converters*, IEEE Press, New York, NY, 1992.

CASTLEMAN, K. R., *Digital Image Processing*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

CHAN, D. S. K., and RABINER, L. R., "An Algorithm For Minimzing Roundoff Noise in Cascade Realizations of Finite Impulse Response Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 3, pp. 347 – 385, Mar. 1973b.

CHAN, D. S. K., and RABINER, L. R., "Analysis of Quantization Errors in the Direct Form for Finite Impulse Response Digital Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-21, pp. 354 – 366, Aug. 1973c.

CHELLAPPA, R., GIROD, B., MUNSON, D. C., TEKALP, A. M., and VETTERLI, M., "The Past, Present, and Future of Image and Multidimensional Signal Processing," *IEE Signal Processing Magazing*, Vol. 15, No. 2, pp. 21 – 58, March 1998.

CHEN, W. H., SMITH C. H., and FRALICK, S. C., "A Fast Computational Algorithm for the Discrete Cosine Transform," *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 25, pp. 1004 – 1009, Sept. 1977.

CHEN, X., and PARKS, T. W., "Design of FIR Filters in the Complex Domain," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, pp. 144 – 153, 1987.

CHENEY, E. W., *Introduction to Approximation Treory*, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1982.

CHOW, Y., and CASSIGNOL, E., *Linear Signal Flow Graphs and Applications*, Wiley, New York, NY, 1962.

CHURCHILL, R. V., and BROWN, J. W., *Introduction to Complex Variables and Applications*, 5th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1990.

CLAASEN, T. A. C. M., MECKLENBRAUKER, W. F. G., and PEEK, J. B. H., "Second-Order Digital Filter with Only One Magnitude-Truncation Quantizer and Having Practically No Limit Cysles," *Electronics letters*, Vol. 9, No. 2, pp. 531 – 532, Nov. 1973.

CLEMENTS, M. A., and PEASE, J., "On Causal Linear Phase IIR Digital Filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-3, pp. 479 – 484, April 1989.

CONSTANTINIDES, A. G., "Spectral Transformations for Digital Filters," *Proc. IEE*, Vol. 117, No. 8, pp. 1585 – 1590, Aug. 1970.

COOLEY, J. W., LEWIS, P. A. W., and WELCH, P. D., "Historical Notes on the Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 76 – 79, June 1967.

COOLEY, J. W., and TUKEY, J. W., "An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, pp. 297 – 301, Apr. 1965.

CROCHIERE, R. E., and OPPENHEIM, A. V., "Analysis of Linear Digital Networks," *Proc. IEEE*, Vol. 63, pp. 581 – 595, April 1975.

CROCHIERE, R. E., and RABINER, L. R., *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

DANIELS, R. W., *Approximation Methods for Elctronic Fliter Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1974.

DANIELSON, G. C., and LANCZOS, C., "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and Their Application to X-Ray Scattering from Liquids," *J. Franklin Inst.*, Vol. 233, pp. 365 – 380 and 435 – 452, April and May 1942.

DAVENPORT, W. B., *Probability and Random Processes: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1970.

DELLER, J. R., PROAKIS, J. G., and HANSEN, J. H. L., *Discrete-Time Processing of Speech Signals*, Macmillan Publishing Company, New York, NY, 1993.

DSP Committe, IEEE ASSP, Eds., *Programs for Digital Signal Processing*, IEEE Press, New York, NY, 1979.

DUDGEON, D. E., and MERSEREAU, R. M., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

DUHAMEL, P., "Implementation of 'Split-Radix' FFT Algorithms for Complex, Real, and Real-Symmetric Data," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-34, pp. 285 – 295, April 1986.

DUHAMEL, P., and HOLLMANN, H., "Split Radix FFT Algorithm," *Electronic Letters*, Vol. 20, pp. 14 – 16, Jan. 5, 1984.

EBERT, P. M., MAZO, J. E., and TAYLOR, M. C., "Overflow Oscillations in Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 48, pp. 2999 – 3020, 1969.

ELLIOTT, D. F., and RAO, K. R., *Fast Transforms: Algorithms, Analysis, Applications*, Academic Press, New York, NY, 1982.

FETTWEIS, A., "Wave Digital Filters: Theory and Practice," *Proc. IEEE*, Vol. 74, No. 2, pp. 270 – 327, Feb. 1986.

FLANAGAN, J. L., *Speech Analysis, Synthesis and Perception*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, NY, 1972.

GARDNER, W. A., *Statisical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

GENTLEMAN, W. M., and SANDE, G., "Fast Fourier Transforms for Fun and Profit," in *Proc. 1966 Fall Joint Computer Conf.*, AFIPS Conf. Proc., Vol. 29, pp. 563 – 578, Spartan Books, Washington, D. C., 1966.

GOERTZEL, G., "An Algorithm for the Evaluation of Finite Trigonometric Series," *American Math. Monthly*, Vol. 65, pp. 34 – 35, Jan. 1958.

GOLD, B., OPPENHEIM, A. V., and RADER, C. M., "Theory and Implementation of the Discrete Hibert Transform," *Proc. Symp. Computer Processing in Communications*, Vol. 19, Polytechnic Press, New York, NY, 1970.

GOLD, B., and RADER, C. M., *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill Book Company, New

York, NY, 1969.

GRAY, A. H., and MARKEL, J. D., "A Computer Program for Designing Digital Elliptic Filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-24, pp. 529 – 538, Dec. 1976.

GROSSMAN, S. I., *Calculus Part* 2, 5th ed., Saunders College Publications, Fort Worth, TX, 1992.

GUILLEMIN, E. A., *Synthesis of Passive Networks*, Wiley, New York, NY, 1957.

HANNAN, E. J., *Time Series Analysis*, Methuen and Company, London, England, 1960.

HARRIS, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform." *Proc. IEEE*, Vol. 66, pp. 51 – 83, Jan. 1978.

HAYES, M. H., *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley, New York, NY, 1996.

HAYES, M. H., LIM, J. S., and OPPENHEIM, A. V., "Signal Reconstruction from Phase and Magnitude," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 6, pp. 672 – 680, Dec. 1980.

HAYKIN, S. S., *Adaptive filter Theory*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

HEIDEMAN, M. T., JOHNSON, D. H., and BURRUS, C. S., "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform," *IEEE ASSP Magazine*, Vol. 1, No. 4, pp. 14 – 21, Oct., 1984.

HELMS, H. D., "Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. 15, No. 2, pp. 85 – 90, 1967.

HERRMANN, O., "On the Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 328 – 329, 1970.

HERRMANN, O., RABINER, L. R., and CHAN, D. S. K., "Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 52, No. 6, pp. 769 – 799, July – Aug. 1973.

HERRMANN, O., and SCHÜSSLER, W., "Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase," *Elec. Lett.*, Vol. 6, No. 11, pp. 329 – 330, 1970a.

HERRMANN, O., and SCHÜSSLER, W., "On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecusive Digital Filters," *Arch. Electronic Ubertragungstechnik*, Vol. 24, pp. 525 – 526, 1970b.

HEWES, C. R., BRODERSON, R. W., and BUSS, D. D., "Applications of CCD and Switched Capacitor Filter Technolgy" *Proc. IEEE*, Vol. 67, No. 10, pp. 1403 – 1415, Oct. 1979.

HNATEK, E. R., *A User's Handbook of D/A and A/D Converters*, Reprinted 1st ed., R. E. Krieger Publishing Co., Malabar, 1988.

HOFSTETTER, E., OPPENHEIM, A. V., and SIEGEL, J., "On Optimum Nonrecursive Digital Filters," *Proc. 9th Allerton Conf. Circuit System Theory*, Oct. 1971.

HWANG, S. Y., "On Optimization of Cascade Fixed Point Digital Filters," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-21, No. 1, pp. 163 – 166, Jan. 1974.

JACKSON, L. B., "On the Interaction of Roundoff Noise and Dynamic Range in Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 49, pp. 159 – 184, Feb. 1970a.

JACKSON, L. B., "Roundoff-Noise Analysis for Fixed-Point Digital Filters Realized in Cascade or Parallel Form," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 107 – 122, June 1970b.

JACKSON, L. B., *Digital Filters and Signal Processing: with MATLAB Exercises*, 3rd ed. Kluwer Academic Publishers, Hingham, MA, 1996.

JAIN, A. K., *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

JAYANT, N. S., and NOLL, P., *Digital Coding of Waveforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

JENKINS G. M., and WATTS, D. G., *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1968.

KAISER, J. F., "Digital Filters," Chap. 7 in *System Analysis by Digital Computer*, F. F. Kuo and J. F. Kaiser, Eds, Wiley, New York, NY, 1966.

KAISER, J. F., "Nonrecursive Digital Filter Design Using the I_0-Sinh Window Function," *Proc*, 1974 *IEEE International Symp. on Circuits and Systems*, San Francisco, CA, pp. 20 – 23, April 1974.

KAISER J. F., and HAMMING, R. W., "Sharpening the Response of a Symmetric Nonrecursive Filter by Multiple Use of the Same Filter," *IEEE Trans. Acustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, No. 5, pp. 415 – 422, Oct. 1977.

KAISER, J. F., and SCHAFER, R. W., "On the Use of the I_0-Sinh Window for Spectrum Analysis," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 105 – 107, Feb. 1980.

KAN, E. P. F., and AGGARWAL, J. K., "Error Analysis of Digital Filters Employing Floating Point Arithmetic," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-18, pp. 678 – 686, Nov. 1971.

KANEKO, T., and LIU, B., "Accumulation of Roundoff Error in Fast Fourier Transforms," *J. Assoc. Comput. Mach.*, Vol. 17, pp. 637 – 654, Oct, 1970.

KARAM, L. J., and MCCLELLAN, J. H., "Complex Chebyçhev Approximation for FIR Filter Design," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. 42, pp. 207 – 216, March 1995.

KAY, S. M., *Modern Spectral Estimation Theory and Application*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

KAY, S. M., and MARPLE, S. L., "Spectrum Analysis: A Modern Perspective," *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 1380 – 1419, November 1981.

KNUTH, D. E., *The Art of Computer Programming; Seminumerical Algorithms*, 3rd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1997.

KOOPMANNS, L. H., *Spectral Analysis of Time Series*, 2nd ed., Academic Press, New York, NY, 1995.

LAM, H. Y. F., *Analog and Digital Filters: Design and Realization*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.

LIGHTHILL, M. J., *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1958.

LIM, J. S., *Two-Dimensional Digital Signal Processing*, Prentic Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

LIU, B., and KANEKO, T., "Error Analysis of Digital Filters Realized in Floating-Point Arithmetic," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1735 – 1747, Oct. 1969.

LIU, B., and PELED, A., "Heuristic Optimization of the Cascade Realization of Fixed Point Digital Filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 464 – 473, 1975.

MACOVSKI, A., *Medical Image Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

MAKHOUL, J., "Linear Prediction: A Tutorial Review," *Proc. IEEE*, Vol. 62, pp. 561 – 580, April 1975.

MAKBOUL, J., "A Fast Cosine Transform in One and Two Dimensions," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 28, No. 1, Feb. 1980.

MARKEL, J. D., "FFT Pruning." *IEEE Trans. Audio and Elertroacoustics*, Vol. AU-19, pp. 305 – 311, Dec. 1971.

MARKEL, J. D., and GRAY, A. H., Jr., Linear Prediction of Speech, Springer-Verlag, New York, NY, 1976.

MARPLE, S. L., Digital Spectral ,Analysis with Applications, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

MARTUCCI. S. A., "Symmetrical Convolution and the Discrete Sine and Cosine Transforms." *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 42, No. 5, pp. 1038 – 1051. May 1994.

MASOU, S., and ZIMMERMANN. H. J., *Electronic Cirealts, Signals and Systems*, Wiley, New York, NY, 1960.

Mathworks, *Signal Processing Toolbox Users Guide*, The Mathworks, Inc., Natick, MA, 1998.

MCCLELLAN, J. H., and PARKS, T. W. "A Unified Approach to the Design of Optimum FIR Linear Phase Digital Filter." *IEEE Trans. Circuit Theory*. Vol. CT-20, pp. 697 – 701, Nov. 1973.

MCCLELLAN, J. H., and RADER, C. M. *Number Theory in DigitaI Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1979.

MERSEREAU, R. M., SCHAFER, R. W., BARNWELL. T. P., and SMITH, D. L., "A Digital Filter Design Package for PCs and TMS320s," *Proc MIDCON*, Dallas, TX, 1984.

MILLS W. L., MULLIS, C. T., and ROBERTS, R. A., "Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-26, pp. 334 – 338, Aug, 1978.

NAWAB, S. H., and QUATIERI, T. F., "Short-Time Fourier Transform," in *Advanced Topics in Signal Processing*, J. S. Lim and A. V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ, 1988.

NYQUIST, H., "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory," *AIEE Trans.*, pp. 617 – 644, 1928.

OETKEN, G., PARKS, T. W., and SCHUSSLER, H. W., "New Results in the Design of Digital Interpola-tors," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-23, pp. 301 - 309, June 1975.

OPPENHEIM, A. V., SCHAFER, R. W., and STOCKAM, T. G. Jr., "Nonlinear Filtering of Multiplied and Convolved Signals," *Proc. IEEE*, Vol. 56, No. 8, pp. 1264 - 1291, Aug. 1968.

OPPENHEIM, A. V., and JOHNSON, D. H., "Discrete Representation of Signal," *Proc IEEE*, Vol. 60, No. 6, pp. 681 - 691, June 1972.

OPPENHEIM. A. V., and SCHAFER, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

OPPENHEIM, A. V., and WILLSKY, A. S., with S. H. NAWAB. *Signals and Systems*, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

O'SHAUGHNESSY, D., *Speech Communication, Human and Machine*, Addison - Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1987.

PAPOULIS, A., "On the Approximation Problem in Filter Design," *IRE Cony. Record*, Pt. 2, pp. 175 - 185, 1957.

PAPOULIS, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1991.

PARKS, T. W., and BURRUS, C. S., *Digital Filter Design*, Wiley, New York, NY, 1987.

PARKS, T. W., and MCCLELLAN, J. H., "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase," *IEEE Trans. Circuit Theory*, Vol. CT-19, pp. 189 - 194, Mar. 1972a.

PARKS, T. W., and MCCLELLAN, J. H., "A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Filters," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU - 20, No. 3, pp. 195 - 199, Aug. 1972b.

PARSONS, T. *Voice and Speech Processing*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.

PHILLIPS, C. L., and NAGLE, H. T., Jr., *Digital Control System Analysis and Design*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

PRATT, W., *Digital Image Processing*, 2nd ed., Wiley, New York, NY, 1991.

RABINER, L. R., "The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques," *Bell System Technical J.*, pp. 1177 - 1198, July-Aug. 1972a.

RABINER, L. R., "Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-20, No. 4, pp. 280 - 288, Oct. 1972b.

RABINER, L. R., and GOLD, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

RABINER, L. R., KAISER, J. F., HERRMANN, O., and DOLAN, M. T., "Some Comparisons Between FIR and IIR Digital Filters," *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 305 - 331, Feb. 1974.

RABINER, L. R., and SCHAFER, R. W., *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

RABINER, L.R., and SCHAFER, R.W., "On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers," *Bell System Technical J.*, Vol. 53, No. 2, pp. 361 – 388, Feb. 1974.

RABINER, L.R., SCHAFER, R.W., and RADER, C.M., "The Chirp z-Transform Algorithm," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 86 – 92, June 1969.

RADER, C.M., "Discrete Fourier Transforms When the Number of Data Samples Is Prime," *Proc. IEEE*, Vol. 56, pp. 1107 – 1108, June 1968.

RADER, C.M., "An Improved Algorithm for High-Speed Autocorrelation with Applications to Spectral Estimation," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-18, pp. 439 – 441, Dec. 1970.

RADER, C.M., and Brenner, N.M., "A New Principle for Fast Fourier Transformation," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, pp. 264 – 265, June 1976.

RADER, C.M., and GOLD, B., "Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain," *Proc. IEEE*, Vol. 55, pp. 149 – 171, Feb. 1967.

RAGAZZINI, J.R., and FRANKLIN, G.F., *Sampled Data Control Systems*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1958.

RAO, K.R., and YIP, P., *Discrete Cosine Transform: Algorithms, Advantages, Applications*, Academic Press, Boston, MA, 1990.

RAO, K.R., and HWANG, J.J., *Techniques and Standards for Image, Video, and Audio Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

RAO, S.K., and KAILATH, T., "Orthogonal Digital Filters for VLSI Implementation," *IEEE Trans. Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No. 11, pp. 933 – 945, Nov. 1984.

ROBINSON, E.A., and DURRAANI, T.S., *Geophysical Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.

ROBINSON, E.A., and TREITEL, S., *Geophysical Signal Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.

RUNGE, C., "Über die Zerlegnng Empirisch Gegebener Periodischer Functionen in Sinuswellen," *Z. Math. Physik*, Vol. 48, pp. 443 – 456, 1903; Vol. 53, pp. 117 – 123, 1905.

SANDBERG, I.W., "Floating-Point-Roundoff Accumulation in Digital Filter Realization," *Bell System Technical J.*, Vol. 46, pp. 1775 – 1791, Oct. 1967.

SCHAEFER, R.T., SCHAFER, R.W., and MERSEREAU, R.M., "Digital Signal Processing for Doppler Radar Signals," *Proc* 1979 *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pp. 170 – 173, 1979.

SCHAFER, R.W., and RABINER, L.R., "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation," *Proc. IEEE*, Vol. 61, pp. 692 – 702, June 1973.

SCHMID, H., *Electronic Analog/Digital Conversions*, Wiley, New York, NY, 1976.

SCHÜSSLER, H.W., and STEFFEN, P., "Some Advanced Topics in Filter Design," in *Advanced Topics in Signal Processing*, J.S. Lim and A.V. Oppenheim, Eds., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

SHANNON, C. E., "Communication in the Presence of Noise," *Proc. IRE*, pp. 10 – 12, Jan. 1949.

SINGLETON, R. C., "An Algorithm for Computing the Mixed Radix Fast Fourier Transform," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 93 – 103, June 1969.

SKOLNIK, M. I., *Introduction to Radar Systems* 2nd ed., McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1986.

SLEPIAN, D., LANDAU, H. T., and POLLACK, H. O., "Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty Principle (I and II)," Bell System Technical J., Vol. 40, No. 1, pp. 43 – 80, Jan. 1961.

STEIGLITZ, K., "The Equivalence of Analog and Digital Signal Processing," *Information and Control*, Vol. 8, No. 5, pp. 455 – 467, Oct. 1965.

STOCKHAM, T. G., Jr., "High Speed Convolution and Correlation," 1966 *Spring Joint Computer Conference*, AFIPS Proc., Vol. 28, pp. 229 – 233, 1966.

STORER, J. E., *Passive Network Synthesis*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1957.

TRIBOLET, J. M., "A New Phase Unwrapping Algorithm," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-25, No. 2, pp. 170 – 177, April 1977.

TUKEY, J. W., *Exploratory Data Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1977.

VAIDYANATHAN, P. P., *Multirate Systems* and Filter Banks, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

VERNET, J. L., "Real Signals Fast Fourier Transform: Storage Capacity and Step Number Reduction by Means of an Odd Discrete Fourier Transform," *Proc. IEEE*, pp. 1531 – 1532, Oct. 1971.

VOLDER, J. E., "The CORDIC Trigonometric Computing Technique," *IRE Trans. Electronic Computers*, Vol. EC-8, pp. 330 – 334, Sept. 1959.

WEINBERG, L., *Network Analysis and Synthesis*, R. E. KREIGER, Huntington, NY, 1975.

WEINSTEIN, C. J., "Roundoff Noise in Floating Point Fast Fourier Transform Computation" *IEEE Trans, Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 209 – 215, Sept. 1969.

WEINSTEIN, C. J., and OPPESHEIM, A. V., "A Comparison of Roundoff Noise in Floating Point and Fixed Point Digital Filter Realizations," *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1181 – 1183, June 1969.

WELCH, P. D., "A Fixed-Point Fast Fourier Transform Error Analysis," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-17, pp. 153 – 157, June 1969.

WELCH, P. D., "The Use of the Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra," *IEEE Trans. Audio Electroacoustics*, Vol. AU-15, pp. 70 – 73, June 1970.

WIDROW, B., "Statistical Analysis of Amplitude-Quantized Sampled-Data Systems," *AIEE Trans. (Applications and Industry,)* Vol. 81, pp. 555 – 568, Jan. 1961.

WIDROW, B., "A Study of Rough Amplitude Quantization by Means of Nyquist Sampling Theo-

ry," *IRE Trans*, *Circuit Theory*, Vol. CT-3, pp.266－276, Dec. 1956.

WINROW, B., and STEARNS, S. D., *Adaptive Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ,1985.

WINOGRAD, S., "On Computing the Discrete Fourier Transform," *Mathematics of Computation*, Vol.32, No.141, pp.175－199, Jan. 1978.

ZVEREV, A.I., *Handbook of Filter Synthesis*, Wiley, New York, NY, 1967.

Solutions – Chapter 2

Discrete-Time Signals and Systems

2.1. (a) $T(x[n]) = g[n]x[n]$

- Stable: Let $|x[n]| \leq M$ then $|T[x[n]| \leq |g[n]|M$. So, it is stable if $|g[n]|$ is bounded.
- Causal: $y_1[n] = g[n]x_1[n]$ and $y_2[n] = g[n]x_2[n]$, so if $x_1[n] = x_2[n]$ for all $n < n_0$, then $y_1[n] = y_2[n]$ for all $n < n_0$, and the system is causal.
- Linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= g[n](ax_1[n] + bx_2[n] \\ &= ag[n]x_1[n] + bg[n]x_2[n] \\ &= aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

 So this is linear.
- Not time-invariant:

$$\begin{aligned} T(x[n - n_0]) &= g[n]x[n - n_0] \\ &\neq y[n - n_0] = g[n - n_0]x[n - n_0] \end{aligned}$$

 which is not TI.
- Memoryless: $y[n] = T(x[n])$ depends only on the n^{th} value of x, so it is memoryless.

(b) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n} x[k]$

- Not Stable: $|x[n]| \leq M \rightarrow |T(x[n])| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |x[k]| \leq |n - n_0|M$. As $n \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$, so not stable.
- Not Causal: $T(x[n])$ depends on the future values of $x[n]$ when $n < n_0$, so this is not causal.
- Linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= \sum_{k=n_0}^{n} ax_1[k] + bx_2[k] \\ &= a\sum_{k=n_0}^{n} x_1[n] + b\sum_{k=n_0}^{n} x_2[n] \\ &= aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

 The system is linear.
- Not TI:

$$\begin{aligned} T(x[n - n_0]) &= \sum_{k=n_0}^{n} x[k - n_0] \\ &= \sum_{k=0}^{n-n_0} x[k] \\ &\neq y[n - n_0] = \sum_{k=n_0}^{n-n_0} x[k] \end{aligned}$$

 The system is not TI.
- Not Memoryless: Values of $y[n]$ depend on past values for $n > n_0$, so this is not memoryless.

(c) $T(x[n]) \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]$

- Stable: $|T(x[n])| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} |x[k]| \leq \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k]M \leq |2n_0 + 1|M$ for $|x[n]| \leq M$, so it is stable.
- Not Causal: $T(x[n])$ depends on future values of $x[n]$, so it is not causal.

- Linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} ax_1[k] + bx_2[k] \\ &= a\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_1[k] + b\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x_2[k] = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

This is linear.

- TI:

$$\begin{aligned} T(x[n-n_0] &= \sum_{k=n-n_0}^{n+n_0} x[k-n_0] \\ &= \sum_{k=n-n_0}^{n} x[k] \\ &= y[n-n_0] \end{aligned}$$

This is TI.

- Not memoryless: The values of $y[n]$ depend on $2n_0$ other values of x, not memoryless.

(d) $T(x[n]) = x[n-n_0]$

- Stable: $|T(x[n])| = |x[n-n_0]| \leq M$ if $|x[n]| \leq M$, so stable.
- Causality: If $n_0 \geq 0$, this is causal, otherwise it is not causal.
- Linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= ax_1[n-n_0] + bx_2[n-n_0] \\ &= aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

This is linear.

- TI: $T(x[n-n_d] = x[n-n_0-n_d] = y[n-n_d]$. This is TI.
- Not memoryless: Unless $n_0 = 0$, this is not memoryless.

(e) $T(x[n]) = e^{x[n]}$

- Stable: $|x[n]| \leq M$, $|T(x[n])| = |e^{x[n]}| \leq e^{|x[n]|} \leq e^M$, this is stable.
- Causal: It doesn't use future values of $x[n]$, so it causal.
- Not linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= e^{ax_1[n]+bx_2[n]} \\ &= e^{ax_1[n]}e^{bx_2[n]} \\ &\neq aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

This is not linear.

- TI: $T(x[n-n_0]) = e^{x[n-n_0]} = y[n-n_0]$, so this is TI.
- Memoryless: $y[n]$ depends on the n^{th} value of x only, so it is memoryless.

(f) $T(x[n]) = ax[n] + b$

- Stable: $|T(x[n])| = |ax[n] + b| \leq a|M| + |b|$, which is stable for finite a and b.
- Causal: This doesn't use future values of $x[n]$, so it is causal.
- Not linear:

$$\begin{aligned} T(cx_1[n] + dx_2[n]) &= acx_1[n] + adx_2[n] + b \\ &\neq cT(x_1[n]) + dT(x_2[n]) \end{aligned}$$

This is not linear.

- TI: $T(x[n-n_0]) = ax[n-n_0] + b = y[n-n_0]$. It is TI.
- Memoryless: $y[n]$ depends on the n^{th} value of $x[n]$ only, so it is memoryless.

(g) $T(x[n]) = x[-n]$

- Stable: $|T(x[n])| \leq |x[-n]| \leq M$, so it is stable.
- Not causal: For $n < 0$, it depends on the future value of $x[n]$, so it is not causal.
- Linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= ax_1[-n] + bx_2x[-n] \\ &= aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

 This is linear.
- Not TI:

$$\begin{aligned} T(x[n-n_0]) &= x[-n-n_0] \\ &\neq y[n-n_0] = x[-n+n_0] \end{aligned}$$

 This is not TI.
- Not memoryless: For $n \neq 0$, it depends on a value of x other than the n^{th} value, so it is not memoryless.

(h) $T(x[n]) = x[n] + u[n+1]$

- Stable: $|T(x[n])| \leq M + 3$ for $n \geq -1$ and $|T(x[n])| \leq M$ for $n < -1$, so it is stable.
- Causal: Since it doesn't use future values of $x[n]$, it is causal.
- Not linear:

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= ax_1[n] + bx_2[n] + 3u[n+1] \\ &\neq aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

 This is not linear.
- Not TI:

$$\begin{aligned} T(x[n-n_0] &= x[n-n_0] + 3u[n+1] \\ &= y[n-n_0] \\ &= x[n-n_0] + 3u[n-n_0+1] \end{aligned}$$

 This is not TI.
- Memoryless: $y[n]$ depends on the n^{th} value of x only, so this is memoryless.

2.2. For an LTI system, the output is obtained from the convolution of the input with the impulse response of the system:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

(a) Since $h[k] \neq 0$, for $(N_0 \leq n \leq N_1)$,

$$y[n] = \sum_{k=N_0}^{N_1} h[k]x[n-k]$$

The input, $x[n] \neq 0$, for $(N_2 \leq n \leq N_3)$, so

$$x[n-k] \neq 0, \text{ for } N_2 \leq (n-k) \leq N_3$$

Note that the minimum value of $(n-k)$ is N_2. Thus, the lower bound on n, which occurs for $k = N_0$ is

$$N_4 = N_0 + N_2.$$

Using a similar argument,

$$N_5 = N_1 + N_3.$$

Therefore, the output is nonzero for

$$(N_0 + N_2) \leq n \leq (N_1 + N_3).$$

(b) If $x[n] \neq 0$, for some $n_o \leq n \leq (n_o + N - 1)$, and $h[n] \neq 0$, for some $n_1 \leq n \leq (n_1 + M - 1)$, the results of part (a) imply that the output is nonzero for:

$$(n_o + n_1) \leq n \leq (n_o + n_1 + M + N - 2)$$

So the output sequence is $M + N - 1$ samples long. This is an important quality of the convolution for finite length sequences as we shall see in Chapter 8.

2.3. We desire the step response to a system whose impulse response is

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \text{ for } 0 < a < 1.$$

The convolution sum:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

The step response results when the input is the unit step:

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & \text{for } n \geq 0 \\ 0, & \text{for } n < 0 \end{cases}$$

Substitution into the convolution sum yields

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k}u[-k]u[n-k]$$

For $n \leq 0$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-k} \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} a^{k} \\ &= \frac{a^{-n}}{1-a} \end{aligned}$$

For $n > 0$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a^{k} \\ &= \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

2.4. The difference equation:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1]$$

To solve, we take the Fourier transform of both sides.

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{1}{8}Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} = 2 \cdot X(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

The system function is given by:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \frac{2e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \end{aligned}$$

The impulse response (for $x[n] = \delta[n]$) is the inverse Fourier transform of $H(e^{j\omega})$.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-8}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Thus,

$$h[n] = -8(\frac{1}{4})^n u[n] + 8(\frac{1}{2})^n u[n]. \quad = y[n]$$

2.5. (a) The homogeneous difference equation:

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$$

Taking the Z-transform,

$$1 - 5z^{-1} + 6z^{-2} = 0$$

$$(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1}) = 0.$$

The homogeneous solution is of the form

$$y_h[n] = A_1(2)^n + A_2(3)^n.$$

(b) We take the z-transform of both sides:

$$Y(z)[1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}] = 2z^{-1}X(z)$$

Thus, the system function is

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{2z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} \\ &= \frac{-2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}, \end{aligned}$$

where the region of convergence is outside the outermost pole, because the system is causal. Hence the ROC is $|z| > 3$. Taking the inverse z-transform, the impulse response is

$$h[n] = -2(2)^n u[n] + 2(3)^n u[n].$$

(c) Let $x[n] = u[n]$ (unit step), then

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

and

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) \cdot H(z) \\ &= \frac{2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}. \end{aligned}$$

Partial fraction expansion yields

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{4}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 3z^{-1}}.$$

The inverse transform yields:

$$y[n] = u[n] - 4(2)^n u[n] + 3(3)^n u[n].$$

2.6. (a) The difference equation:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

Taking the Fourier transform of both sides,

$$Y(e^{j\omega})[1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}] = X(e^{j\omega})[1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}].$$

Hence, the frequency response is

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}. \end{aligned}$$

(b) A system with frequency response:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

cross multiplying,

$$Y(e^{j\omega})[1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}] = X(e^{j\omega})[1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}],$$

and the inverse transform gives

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3].$$

2.7. $x[n]$ is periodic with period N if $x[n] = x[n+N]$ for some integer N.

(a) $x[n]$ is periodic with period 12:

$$e^{j(\frac{\pi}{6}n)} = e^{j(\frac{\pi}{6})(n+N)} = e^{j(\frac{\pi}{6}n + 2\pi k)}$$

$$\Longrightarrow 2\pi k = \frac{\pi}{6}N, \text{for integers } k, N$$

Making $k = 1$ and $N = 12$ shows that $x[n]$ has period 12.

(b) $x[n]$ is periodic with period 8:

$$e^{j(\frac{3\pi}{4}n)} = e^{j(\frac{3\pi}{4})(n+N)} = e^{j(\frac{3\pi}{4}n+2\pi k)}$$

$$\Longrightarrow 2\pi k = \frac{3\pi}{4}N, \text{for integers } k, N$$

$$\Longrightarrow N = \frac{8}{3}k, \text{for integers } k, N$$

The smallest k for which both k and N are integers are is 3, resulting in the period N being 8.

(c) $x[n] = [\sin(\pi n/5)]/(\pi n)$ is not periodic because the denominator term is linear in n.

(d) We will show that $x[n]$ is not periodic. Suppose that $x[n]$ is periodic for some period N:

$$e^{j(\frac{\pi}{\sqrt{2}}n)} = e^{j(\frac{\pi}{\sqrt{2}})(n+N)} = e^{j(\frac{\pi}{\sqrt{2}}n+2\pi k)}$$

$$\Longrightarrow 2\pi k = \frac{\pi}{\sqrt{2}}N, \text{for integers } k, N$$

$$\Longrightarrow N = 2\sqrt{2}k, \text{for some integers } k, N$$

There is no integer k for which N is an integer. Hence $x[n]$ is not periodic.

2.8. We take the Fourier transform of both $h[n]$ and $x[n]$, and then use the fact that convolution in the time domain is the same as multiplication in the frequency domain.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{5}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \\ Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \frac{5}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \\ &= \frac{3}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \\ y[n] &= 2(\frac{1}{3})^n u[n] + 3(-\frac{1}{2})^n u[n] \end{aligned}$$

2.9. (a) First the frequency response:

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{5}{6}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{6}e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-2j\omega}X(e^{j\omega})$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \frac{\frac{1}{3}e^{-2j\omega}}{1-\frac{5}{6}e^{-j\omega}+\frac{1}{6}e^{-2j\omega}} \end{aligned}$$

Now we take the inverse Fourier transform to find the impulse response:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{-2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \\ h[n] &= -2(\frac{1}{3})^n u[n] + 2(\frac{1}{2})^n u[n] \end{aligned}$$

For the step response $s[n]$:

$$\begin{aligned} s[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \\ &= -2\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}u[n] + 2\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}u[n] \\ &= (1+(\tfrac{1}{3})^n - 2(\tfrac{1}{2})^n)u[n] \end{aligned}$$

(b) The homogeneous solution $y_h[n]$ solves the difference equation when $x[n] = 0$. It is in the form $y_h[n] = \sum A(c)^n$, where the c's solve the quadratic equation

$$c^2 - \frac{5}{6}c + \frac{1}{6} = 0$$

So for $c = 1/2$ and $c = 1/3$, the general form for the homogeneous solution is:

$$y_h[n] = A_1(\tfrac{1}{2})^n + A_2(\tfrac{1}{3})^n$$

(c) The total solution is the sum of the homogeneous and particular solutions, with the particular solution being the impulse response found in part (a):

$$\begin{aligned} y[n] &= y_h[n] + y_p[n] \\ &= A_1(\tfrac{1}{2})^n + A_2(\tfrac{1}{3})^n + -2(\tfrac{1}{3})^n u[n] + 2(\tfrac{1}{2})^n u[n] \end{aligned}$$

Now we use the constraint $y[0] = y[1] = 1$ to solve for A_1 and A_2:

$$\begin{aligned} y[0] &= A_1 + A_2 - 2 + 2 = 1 \\ y[1] &= A_1/2 + A_2/3 - 2/3 + 1 = 1 \\ A_1 + A_2 &= 1 \\ A_1/2 + A_2/3 &= 2/3 \end{aligned}$$

With $A_1 = 2$ and $A_2 = -1$ solving the simultaneous equations, we find that the impulse response is

$$y[n] = 2(\tfrac{1}{2})^n - (\tfrac{1}{3})^n + -2(\tfrac{1}{3})^n u[n] + 2(\tfrac{1}{2})^n u[n]$$

2.10. (a)

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[-k-1]u[n-k] \\ &= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} a^k, & n \le -1 \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k, & n > -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{a^n}{1-1/a}, & n \le -1 \\ \dfrac{1/a}{1-1/a}, & n > -1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) First, let us define $v[n] = 2^n u[-n-1]$. Then, from part (a), we know that

$$w[n] = u[n] * v[n] = \begin{cases} 2^{n+1}, & n \leq -1 \\ 1, & n > -1 \end{cases}$$

Now,

$$\begin{aligned} y[n] &= u[n-4] * v[n] \\ &= w[n-4] \\ &= \begin{cases} 2^{n-3}, & n \leq 3 \\ 1, & n > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Given the same definitions for $v[n]$ and $w[n]$ from part(b), we use the fact that $h[n] = 2^{n-1}u[-(n-1)-1] = v[n-1]$ to reduce our work:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * v[n-1] \\ &= w[n-1] \\ &= \begin{cases} 2^n, & n \leq 0 \\ 1, & n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(d) Again, we use $v[n]$ and $w[n]$ to help us.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= (u[n] - u[n-10]) * v[n] \\ &= w[n] - w[n-10] \\ &= (2^{n+1}u[-(n+1)] + u[n]) - (2^{n-9}u[-(n-9)] + u[n-10]) \\ &= \begin{cases} 2^{(n+1)} - 2^{(n-9)}, & n \leq -2 \\ 1 - 2^{(n-9)}, & -1 \leq n \leq 8 \\ 0, & n \geq 9 \end{cases} \end{aligned}$$

2.11. First we re-write $x[n]$ as a sum of complex exponentials:

$$x[n] = \sin(\frac{\pi n}{4}) = \frac{e^{j\pi n/4} - e^{-j\pi n/4}}{2j}.$$

Since complex exponentials are eigenfunctions of LTI systems,

$$y[n] = \frac{H(e^{j\pi/4})e^{j\pi n/4} - H(e^{-j\pi/4})e^{-j\pi n/4}}{2j}$$

Evaluating the frequency response at $\omega = \pm\pi/4$:

$$\begin{aligned} H(e^{j\frac{\pi}{4}}) &= \frac{1 - e^{-j\pi/2}}{1 + 1/2e^{-j\pi}} = 2(1-j) = 2\sqrt{2}e^{-j\pi/4} \\ H(e^{-j\frac{\pi}{4}}) &= \frac{1 - e^{j\pi/2}}{1 + 1/2e^{j\pi}} = 2(1+j) = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4} \end{aligned}$$

We get:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{j\pi n/4} - 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-j\pi n/4}}{2j} \\ &= 2\sqrt{2}\sin(\pi n/4 - \pi/4). \end{aligned}$$

2.12. The difference equation:

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

Since the system is causal and satisfies initial-rest conditions, we may recursively find the response to any input.

(a) Suppose $x[n] = \delta[n]$:

$$y[n] = 0, \text{ for } n < 0$$
$$y[0] = 1$$
$$y[1] = 1$$
$$y[2] = 2$$
$$y[3] = 6$$
$$y[4] = 24$$

$$y[n] = h[n] = n!u[n]$$

(b) To determine if the system is linear, consider the input:

$$x[n] = a\delta[n] + b\delta[n]$$

performing the recursion,

$$y[n] = 0, \text{ for } n < 0$$
$$y[0] = a + b$$
$$y[1] = a + b$$
$$y[2] = 2(a + b)$$
$$y[3] = 6(a + b)$$
$$y[4] = 24(a + b)$$

Because the output of the superposition of two input signals is equivalent to the superposition of the individual outputs, the system is LINEAR.

(c) To determine if the system is time-invariant, consider the input:

$$x[n] = \delta[n-1]$$

the recursion yields

$$y[n] = 0, \text{ for } n < 0$$
$$y[0] = 0$$
$$y[1] = 1$$
$$y[2] = 2$$
$$y[3] = 6$$
$$y[4] = 24$$

Using $h[n]$ from part (a),

$$h[n-1] = (n-1)!u[n-1] \neq y[n]|_{x[n]=\delta[n-1]}$$

Conclude: NOT TIME INVARIANT.

2.13. Eigenfunctions of LTI systems are of the form α^n, so functions (a), (b), and (e) are eigenfunctions. Notice that part (d), $\cos(\omega_0 n) = .5(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n})$ is a sum of two α^n functions, and is therefore not an eigenfunction itself.

2.14. (a) The information given shows that the system satisfies the eigenfunction property of exponential sequences for LTI systems for one particular eigenfunction input. However, we do not know the system response for any other eigenfunction. Hence, we can say that the system may be LTI, but we cannot uniquely determine it. $\Longrightarrow$ (iv).

(b) If the system were LTI, the output should be in the form of $A(1/2)^n$, since $(1/2)^n$ would have been an eigenfunction of the system. Since this is not true, the system cannot be LTI. $\Longrightarrow$ (i).

(c) Given the information, the system *may* be LTI, but does not have to be. For example, for any input other than the given one, the system may output 0, making this system non-LTI. $\Longrightarrow$ (iii). If it were LTI, its system function can be found by using the DTFT:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \\ h[n] &= (\frac{1}{2})^n u[n] \end{aligned}$$

2.15. (a) No. Consider the following input/outputs:

$$x_1[n] = \delta[n] \implies y_1[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$$

$$x_2[n] = \delta[n-1] \implies y_2[n] = (\frac{1}{4})^{n-1} u[n]$$

Even though $x_2[n] = x_1[n-1]$, $y_2[n] \neq y_1[n-1] = (\frac{1}{4})^{n-1}u[n-1]$

(b) No. Consider the input/output pair $x_2[n]$ and $y_2[n]$ above. $x_2[n] = 0$ for $n < 1$, but $y_2[0] \neq 0$.

(c) Yes. Since $h[n]$ is stable and multiplication with $u[n]$ will not cause any sequences to become unbounded, the entire system is stable.

2.16. (a) The homogeneous solution $y_h[n]$ solves the difference equation when $x[n] = 0$. It is in the form $y_h[n] = \sum A(c)^n$, where the c's solve the quadratic equation

$$c^2 - \frac{1}{4}c + \frac{1}{8} = 0$$

So for $c = 1/2$ and $c = -1/4$, the general form for the homogeneous solution is:

$$y_h[n] = A_1(\frac{1}{2})^n + A_2(-\frac{1}{4})^n$$

(b) Taking the z-transform of both sides, we find that

$$Y(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}) = 3X(z)$$

and therefore

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{3}{1 - 1/4z^{-1} - 1/8z^{-2}} \\ &= \frac{3}{(1 + 1/4z^{-1})(1 - 1/2z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1 + 1/4z^{-1}} + \frac{2}{1 - 1/2z^{-1}} \end{aligned}$$

The causal impulse response corresponds to assuming that the region of convergence extends outside the outermost pole, making

$$h_c[n] = ((-1/4)^n + 2(1/2)^n)u[n]$$

The anti-causal impulse response corresponds to assuming that the region of convergence is inside the innermost pole, making

$$h_{ac}[n] = -((-1/4)^n + 2(1/2)^n)u[-n-1]$$

(c) $h_c[n]$ is absolutely summable, while $h_{ac}[n]$ grows without bounds.

(d)

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \\ &= \frac{1/3}{1+1/4z^{-1}} + \frac{2}{1-1/2z^{-1}} + \frac{2/3}{1-1/2z^{-1}} \\ y[n] &= \frac{1}{3}(\frac{1}{4})^n u[n] + 4(n+1)(\frac{1}{2})^{n+1}u[n+1] + \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n u[n] \end{aligned}$$

2.17. (a) We have

$$r[n] = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Taking the Fourier transform

$$\begin{aligned} R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= e^{-j\frac{M}{2}\omega}\left(\frac{e^{j\frac{M+1}{2}\omega} - e^{-j\frac{M+1}{2}\omega}}{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}\right) \\ &= e^{-j\frac{M}{2}\omega}\left(\frac{\sin(\frac{M+1}{2}\omega)}{\sin(\omega/2)}\right). \end{aligned}$$

(b) We have

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+\cos(\frac{2\pi n}{M}), & \text{for } 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

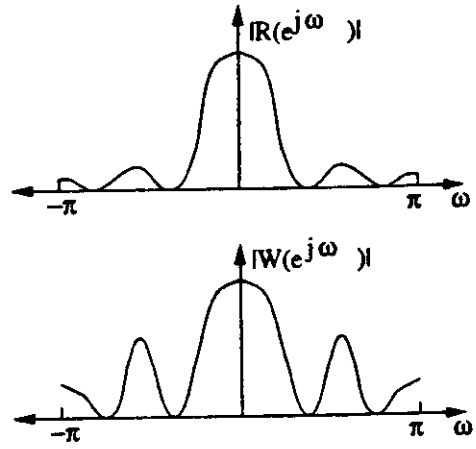
We note that,

$$w[n] = r[n] \cdot \frac{1}{2}[1 + \cos(\frac{2\pi n}{M})].$$

Thus,

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= R(e^{j\omega}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1+\cos(\frac{2\pi n}{M}))e^{-j\omega n} \\ &= R(e^{j\omega}) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n}{M}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{M}})e^{-j\omega} \\ &= R(e^{j\omega}) * (\frac{1}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{4}\delta(\omega + \frac{2\pi}{M}) + \frac{1}{4}\delta(\omega - \frac{2\pi}{M})) \end{aligned}$$

(c)



2.18. $h[n]$ is causal if $h[n] = 0$ for $n < 0$. Hence, (a) and (b) are causal, while (c), (d), and (e) are not.

2.19. $h[n]$ is stable if it is absolutely summable.

(a) Not stable because $h[n]$ goes to ∞ as n goes to ∞.

(b) Stable, because $h[n]$ is non-zero only for $0 \leq n \leq 9$.

(c) Stable.

$$\sum_n |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1/3)^n = 1/2 < \infty$$

(d) Not stable. Notice that

$$\sum_{n=0}^{5} |\sin(\pi n/3)| = 2\sqrt{3}$$

and summing $|h[n]|$ over all positive n therefore grows to ∞.

(e) Stable. Notice that $|h[n]|$ is upperbounded by $(3/4)^{|n|}$, which is absolutely summable.

(f) Stable.

$$h[n] = \begin{cases} 2, & ,-5 \leq n \leq -1 \\ 1, & ,0 \leq n \leq 4 \\ 0, & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

So $\sum |h[n]| = 15$.

2.20. (a) Taking the difference equation $y[n] = (1/a)y[n-1] + x[n-1]$ and assuming $h[0] = 0$ for $n < 0$:

$$\begin{aligned} h[0] &= 0 \\ h[1] &= 1 \\ h[2] &= 1/a \\ h[3] &= (1/a)^2 \\ &\vdots \quad \vdots \\ h[n] &= (1/a)^{n-1} u[n-1] \end{aligned}$$

(b) $h[n]$ is absolutely summable if $|1/a| < 1$ or if $|a| > 1$

2.21. For an arbitrary linear system, we have

$$y[n] = T\{x[n]\},$$

Let $x[n] = 0$ for all n.

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

For some arbitrary $x_1[n]$, we have

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\}$$

Using the linearity of the system:

$$\begin{aligned} T\{x[n] + x_1[n]\} &= T\{x[n]\} + T\{x_1[n]\} \\ &= y[n] + y_1[n] \end{aligned}$$

Since $x[n]$ is zero for all n,

$$T\{x[n] + x_1[n]\} = T\{x_1[n]\} = y_1[n]$$

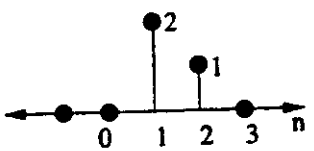
Hence, $y[n]$ must also be zero for all n.

2.22. We use the graphical approach to compute the convolution:

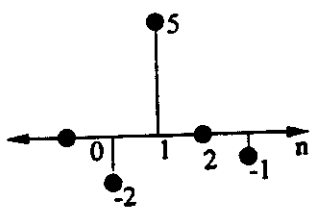
$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \end{aligned}$$

(a) $y[n] = x[n] * h[n]$

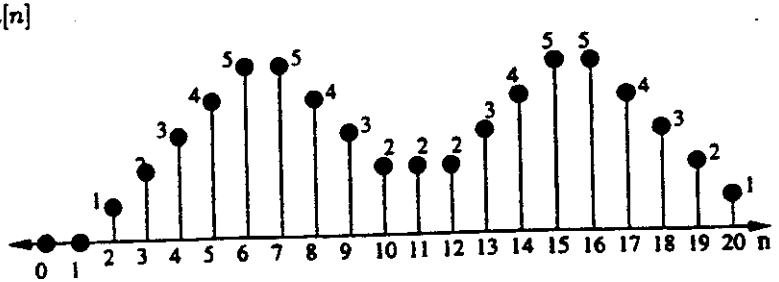
$$y[n] = \delta[n-1] * h[n] = h[n-1]$$



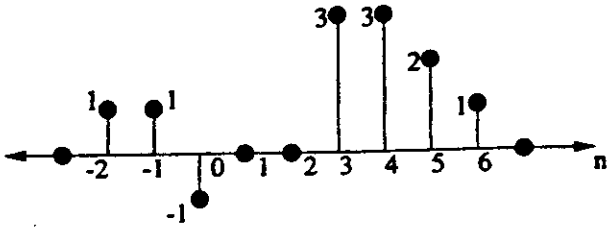
(b) $y[n] = x[n] * h[n]$



(c) $y[n] = x[n] * h[n]$



(d) $y[n] = x[n] * h[n]$



2.23. The ideal delay system:

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[n - n_o]$$

Using the definition of linearity:

$$\begin{aligned} T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= ax_1[n - n_o] + bx_2[n - n_o] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

So, the ideal delay system is LINEAR.

The moving average system:

$$y[n] = Tx[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n - k]$$

by linearity:

$$\begin{aligned} T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} (ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} ax_1[n] + \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} bx_2[n] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

Conclude, the moving average is LINEAR.

2.24. The response of the system to a delayed step:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k - 4]h[n - k] \end{aligned}$$

$$y[n] = \sum_{k=4}^{\infty} h[n - k]$$

Evaluating the above summation:

For $n < 4$: $y[n] = 0$
For $n = 4$: $y[n] = h[0] = 1$
For $n = 5$: $y[n] = h[1] + h[0] = 2$
For $n = 6$: $y[n] = h[2] + h[1] + h[0] = 3$
For $n = 7$: $y[n] = h[3] + h[2] + h[1] + h[0] = 4$
For $n = 8$: $y[n] = h[4] + h[3] + h[2] + h[1] + h[0] = 2$
For $n \geq 9$: $y[n] = h[5] + h[4] + h[3] + h[2] + h[1] + h[0] = 0$

2.25. The output is obtained from the convolution sum:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] \end{aligned}$$

The convolution may be broken into five regions over the range of n:

$$y[n] = 0, \text{for } n < 0$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{n} a^k \\ &= \frac{1-a^{(n+1)}}{1-a}, \text{for } 0 \le n \le N_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N_1} a^k \\ &= \frac{1-a^{(N_1+1)}}{1-a}, \text{ for } N_1 < n < N_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N_1} a^k + \sum_{k=N_2}^{n} a^{(k-N_2)} \\ &= \frac{1-a^{(N_1+1)}}{1-a} + \frac{1-a^{(n+1)}}{1-a} \\ &= \frac{2-a^{(N_1+1)}-a^{(n+1)}}{1-a}, \text{ for } N_2 \le n \le (N_1+N_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N_1} a^k + \sum_{k=N_2}^{N_1+N_2} a^{(k-N_2)} \\ &= \sum_{k=0}^{N_1} a^k + \sum_{m=0} N_1 a^m \\ &= 2\sum_{k=0}^{N_1} a^k \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1-a^{(N_1+1)}}{1-a} \right), \text{ for } n > (N_1+N_2) \end{aligned}$$

2.26. Recall that an eigenfunction of a system is an input signal which appears at the output of the syste
scaled by a complex constant.

(a) $x[n] = 5^n u[n]$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]5^{(n-k)}u[n-k] \\ &= 5^n \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]5^{-k} \end{aligned}$$

Becuase the summation depends on n, $x[n]$ is NOT AN EIGENFUNCTION.

(b) $x[n] = e^{j2\omega n}$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j2\omega(n-k)} \\ &= e^{j2\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j2\omega k} \\ &= e^{j2\omega n} \cdot H(e^{j2\omega}) \end{aligned}$$

YES, EIGENFUNCTION.

(c) $e^{j\omega n} + e^{j2\omega n}$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j2\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} + e^{j2\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j2\omega k} \\ &= e^{j\omega n} \cdot H(e^{j\omega}) + e^{j2\omega n} \cdot H(e^{j2\omega}) \end{aligned}$$

Since the input cannot be extracted from the above expression, the sum of complex exponentials is NOT AN EIGENFUNCTION. (Although, separately the inputs are eigenfunctions. In general, complex exponential signals are always eigenfunctions of LTI systems.)

(d) $x[n] = 5^n$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]5^{(n-k)} \\ &= 5^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]5^{-k} \end{aligned}$$

YES, EIGENFUNCTION.

(e) $x[n] = 5^n e^{j2\omega n}$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]5^{(n-k)}e^{j2\omega(n-k)} \\ &= 5^n e^{j2\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]5^{-k}e^{-j2\omega k} \end{aligned}$$

YES, EIGENFUNCTION.

2.27. • System A:

$$x[n] = (\frac{1}{2})^n$$

This input is an eigenfunction of an LTI system. That is, if the system is linear, the output will be a replica of the input, scaled by a complex constant.
Since $y[n] = (\frac{1}{4})^n$, System A is NOT LTI.

• System B:

$$x[n] = e^{jn/8}u[n]$$

The Fourier transform of $x[n]$ is

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn/8}u[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j(\omega-\frac{1}{8})n} \\ &= \frac{1}{1-e^{-j(\omega-\frac{1}{8})}}. \end{aligned}$$

The output is $y[n] = 2x[n]$, thus

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-e^{-j(\omega-\frac{1}{8})}}.$$

Therefore, the frequency response of the system is

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Hence, the system is a linear amplifier. We conclude that System B is LTI, and unique.

• System C: Since $x[n] = e^{jn/8}$ is an eigenfunction of an LTI system, we would expect the output to be given by

$$y[n] = \gamma e^{jn/8},$$

where γ is some complex constant, if System C were indeed LTI. The given output, $y[n] = 2e^{jn/8}$, indicates that this is so.
Hence, System C is LTI. However, it is not unique, since the only constraint is that

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=1/8} = 2.$$

2.28. $x[n]$ is periodic with period N if $x[n] = x[n+N]$ for some integer N.

(a) $x[n]$ is periodic with period 5:

$$e^{j(\frac{2\pi}{5}n)} = e^{j(\frac{2\pi}{5})(n+N)} = e^{j(\frac{2\pi}{5}n+2\pi k)}$$

$$\Longrightarrow 2\pi k = \frac{2\pi}{5}N, \text{for integers } k, N$$

Making $k = 1$ and $N = 5$ shows that $x[n]$ has period 5.

(b) $x[n]$ is periodic with period 38. Since the sin function has period of 2π:

$$x[n+38] = \sin(\pi(n+38)/19) = \sin(\pi n/19 + 2\pi) = x[n]$$

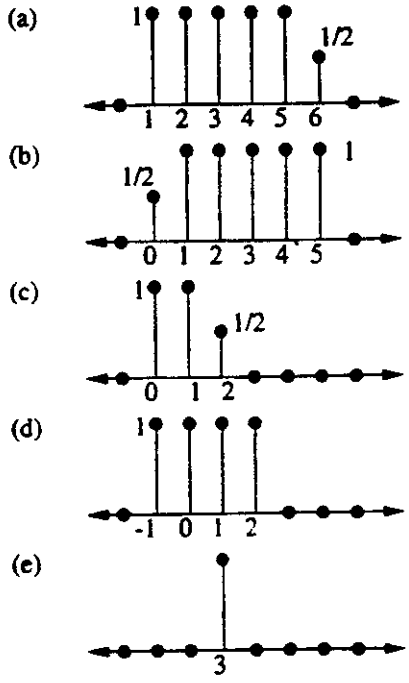
(c) This is not periodic because the linear term n is not periodic.

(d) This is again not periodic. $e^{j\omega}$ is periodic over period 2π, so we have to find k, N such that

$$x[n+N] = e^{j(n+N)} = e^{j(n+2\pi k)}$$

Since we can make k and N integers at the same time, $x[n]$ is not periodic.

2.29.



2.30. (a) Since $\cos(\pi n)$ only takes on values of +1 or -1, this transformation outputs the current value of $x[n]$ multiplied by either ± 1. $T(x[n]) = (-1)^n x[n]$.

- Hence, it is stable, because it doesn't change the magnitude of $x[n]$ and hence satisfies bounded-in/bounded-out stability.
- It is causal, because each output depends only on the current value of $x[n]$.
- It is linear. Let $y_1[n] = T(x_1[n]) = \cos(\pi n)x_1[n]$, and $y_2[n] = T(x_2[n]) = \cos(\pi n)x_2[n]$. Now

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = \cos(\pi n)(ax_1[n] + bx_2[n]) = ay_1[n] + by_2[n]$$

- It is not time-invariant. If $y[n] = T(x[n]) = (-1)^n x[n]$, then $T(x[n-1]) = (-1)^n x[n-1] \neq y[n-1]$.

(b) This transformation simply "samples" $x[n]$ at location which can be expressed as k^2.

- The system is stable, since if $x[n]$ is bounded, $x[n^2]$ is also bounded.
- It is not causal. For example, $Tx[4] = x[16]$.
- It is linear. Let $y_1[n] = T(x_1[n]) = x_1[n^2]$, and $y_2[n] = T(x_2[n]) = x_2[n^2]$. Now

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = ax_1[n^2] + bx_2[n^2]) = ay_1[n] + by_2[n]$$

- It is not time-invariant. If $y[n] = T(x[n]) = x[n^2]$, then $T(x[n-1]) = x[n^2 - 1] \neq y[n-1]$.

(c) First notice that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = u[n]$$

So $T(x[n]) = x[n]u[n]$. This transformation is therefore stable, causal, linear, but not time-invariant.

To see that it is not time invariant, notice that $T(\delta[n]) = \delta[n]$, but $T(\delta[n+1]) = 0$.

(d) $T(x[n]) = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k]$

- This is not stable. For example, $T(u[n]) = \infty$ for all n ¿ 1.
- It is not causal, since it sums *forward* in time.
- It is linear, since

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} ax_1[k] + bx_2[k] = a\sum_{k=n-1}^{\infty} x_1[k] + b\sum_{k=n-1}^{\infty} x_2[k]$$

- It is time-invariant. Let

$$y[n] = T(x[n]) = \sum_{k=n-1}^{\infty} x[k],$$

then

$$T(x[n-n_0]) = \sum_{k=n-n_0-1}^{\infty} x[k] = y[n-n_0]$$

2.31. (a) The homogeneous solution $y_h[n]$ solves the difference equation when $x[n] = 0$. It is in the form $y_h[n] = \sum A(c)^n$, where the c's solve the quadratic equation

$$c^2 + \frac{1}{15}c - \frac{2}{5} = 0$$

So for $c = 1/3$ and $c = -2/5$, the general form for the homogeneous solution is:

$$y_h[n] = A_1(\frac{1}{3})^n + A_2(-\frac{2}{5})^n$$

(b) We use the z-transform, and use different ROCs to generate the causal and anti-causal impulses responses:

$$H(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{2}{5}z^{-1})} = \frac{5/11}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{6/11}{1+\frac{2}{5}z^{-1}}$$

$$h_c[n] = \frac{5}{11}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{6}{11}(-\frac{2}{5})^n u[n]$$

$$h_{ac}[n] = -\frac{5}{11}(\frac{1}{3})^n u[-n-1] - \frac{6}{11}(-\frac{2}{5})^n u[-n-1]$$

(c) Since $h_c[n]$ is causal, and the two exponential bases in $h_c[n]$ are both less than 1, it is absolutely summable. $h_{ac}[n]$ grows without bounds as n approaches $-\infty$.

(d)

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \frac{1}{1-\frac{3}{5}z^{-1}} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{2}{5}z^{-1})} \\ &= \frac{-25/44}{1-1/3z^{-1}} + \frac{55/12}{1+2/5z^{-1}} + \frac{27/20}{1-3/5z^{-1}} \\ y[n] &= \frac{-25}{44}(\frac{1}{3})^n u[n] + \frac{55}{12}(-\frac{2}{5})^n u[n] + \frac{27}{20}(\frac{3}{5})^n u[n] \end{aligned}$$

2.32. We first re-write the system function $H(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{j\pi/4} \cdot e^{-j\omega} \left(\frac{1 + e^{-j2\omega} + 4e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}} \right) \\ &= e^{j\pi/4} G(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Let $y_1[n] = x[n] * g[n]$, then

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\frac{\pi n}{2}) = \frac{e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}}{2} \\ y_1[n] &= \frac{G(e^{j\pi/2})e^{j\pi n/2} + G(e^{-j\pi/2})e^{-j\pi n/2}}{2} \end{aligned}$$

Evaluating the frequency response at $\omega = \pm\pi/2$:

$$\begin{aligned} G(e^{j\frac{\pi}{2}}) &= e^{-j\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + e^{-j\pi} + 4e^{-j2\pi}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} \right) = 8e^{-j\pi/2} \\ G(e^{-j\frac{\pi}{2}}) &= 8e^{j\pi/2} \end{aligned}$$

Therefore,

$$y_1[n] = (8e^{j(\pi n/2 - \pi/2)} + 8e^{j(-\pi n/2 + \pi/2)})/2 = 8\cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2})$$

and

$$y[n] = e^{j\pi/4} y_1[n] = 8e^{j\pi/4} \cos(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2})$$

2.33. Since $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$, we can apply the results of Example 2.13 from the text,

$$y[n] = |H(e^{j\frac{3\pi}{2}})| \cos(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \angle H(e^{j\frac{3\pi}{2}}))$$

To find $H(e^{j\frac{3\pi}{2}})$, we use the fact that $H(e^{j\omega})$ is periodic over 2π, so

$$H(e^{j\frac{3\pi}{2}}) = H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

Therefore,

$$y[n] = \cos(\frac{3\pi}{2}n + \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{3\pi}{2}n + \frac{11\pi}{12})$$

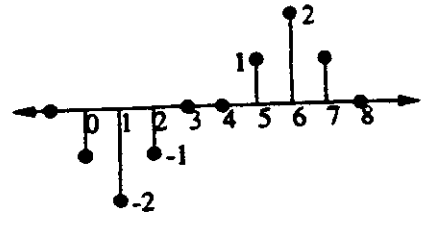
2.34. (a) Notice that

$$x[n] = x_0[n-2] + 2x_0[n-4] + x_0[n-6]$$

Since the system is LTI,

$$y[n] = y_0[n-2] + 2y_0[n-4] + y_0[n-6],$$

and we get sequence shown here:



(b) Since

$$y_0[n] = -1x_0[n+1] + x_0[n-1] = x_0[n] * (-\delta[n+1] + \delta[n-1]),$$
$$h[n] = -\delta[n+1] + \delta[n-1]$$

2.35. (a) Notice that $x_1[n] = x_2[n] + x_3[n+4]$, so if $T\{\cdot\}$ is linear,

$$\begin{aligned} T\{x_1[n]\} &= T\{x_2[n]\} + T\{x_3[n+4]\} \\ &= y_2[n] + y_3[n+4] \end{aligned}$$

From Fig P2.4, the above equality is not true. Hence, the system is NOT LINEAR.

(b) To find the impulse response of the system, we note that

$$\delta[n] = x_3[n+4]$$

Therefore,

$$\begin{aligned} T\{\delta[n]\} &= y_3[n+4] \\ &= 3\delta[n+6] + 2\delta[n+5] \end{aligned}$$

(c) Since the system is known to be time-invariant and not linear, we cannot use choices such as:

$$\delta[n] = x_1[n] - x_2[n]$$

and

$$\delta[n] = \frac{1}{2}x_2[n+1]$$

to determine the impulse response. With the given information, we can only use shifted inputs.

2.36. (a) Suppose we form the impulse:

$$\delta[n] = \frac{1}{2}x_1[n] - \frac{1}{2}x_2[n] + x_3[n]$$

Since the system is linear,

$$L\{\delta[n]\} = \frac{1}{2}y_1[n] - \frac{1}{2}y_2[n] + y_3[n]$$

A shifted impulse results when:

$$\delta[n-1] = -\frac{1}{2}x_1[n] + \frac{1}{2}x_2[n]$$

The response to the shifted impulse

$$L\{\delta[n-1]\} = -\frac{1}{2}y_1[n] + \frac{1}{2}y_2[n]$$

Since,

$$L\{\delta[n]\} \neq L\{\delta[n-1]\}$$

The system is NOT TIME INVARIANT.

(b) An impulse may be formed:

$$\delta[n] = \frac{1}{2}x_1[n] - \frac{1}{2}x_2[n] + x_3[n]$$

since the system is linear,

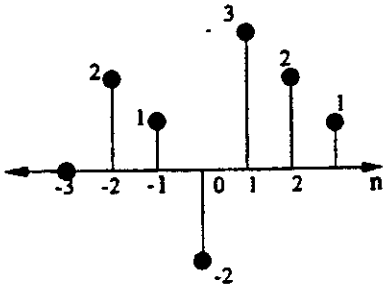
$$\begin{aligned} L\{\delta[n]\} &= \frac{1}{2}y_1[n] - \frac{1}{2}y_2[n] + y_3[n] \\ &= h[n] \end{aligned}$$

from the figure,

$$y_1[n] = -\delta[n+1] + 3\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-3]$$
$$y_2[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] - 3\delta[n-1] - \delta[n-3]$$
$$y_3[n] = 2\delta[n+2] + \delta[n+1] - 3\delta[n] + 2\delta[n-2]$$

Combining:

$$\begin{aligned} h[n] &= 2\delta[n+2] + \delta[n+1] - 2\delta[n] + 3\delta[n-1] \\ &\quad +2\delta[n-2] + \delta[n-3] \end{aligned}$$



2.37. For an LTI system, we use the convolution equation to obtain the output:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Let $n = m + N$:

$$\begin{aligned} y[m+N] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[m+N-k]h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(m-k)+N]h[k] \end{aligned}$$

Since $x[n]$ is periodic, $x[n] = x[n+rN]$ for any integer r. Hence,

$$\begin{aligned} y[m+N] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[m-k]h[k] \\ &= y[m] \end{aligned}$$

So, the output must also be periodic with period N.

2.38. (a) The homogeneous solution to the second order difference equation,

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n-1],$$

is obtained by setting the input (forcing term) to zero.

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$$

Solving,

$$1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0,$$

$$(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})=0,$$

and the homogeneous solution takes the form

$$y_h[n]=A_1(\frac{1}{2})^n+A_2(\frac{1}{4})^n,$$

for the constants A_1 and A_2.

(b) Substituting the intial conditions,

$$y_h[-1]=A_1(\frac{1}{2})^{-1}+A_2(\frac{1}{4})^{-1}=1,$$

and

$$y_h[0]=A_1+A_2=0.$$

We have

$$2A_1+4A_2=1$$
$$A_1+A_2=0$$

Solving,

$$A_1=-1/2$$

and

$$A_2=1/2.$$

(c) Homogeneous equation:

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=0$$

Solving,

$$1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}=0,$$
$$(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})=0,$$

and the homogeneous solution takes the form

$$y_h[n]=A_1(\frac{1}{2})^n.$$

Invoking the intial conditions, we have

$$y_h[-1]=2A_1=1$$
$$y_h[0]=A_1=0$$

Evident from the above contradiction, the initial conditions cannot be met.

(d) The homogeneous difference equation:

$$y[n]-y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=0$$

Suppose the homogeneous solution is of the form

$$y_h[n]=A_1(\frac{1}{2})^n+nB_1(\frac{1}{2})^n,$$

substituting into the difference equation:

$$y_h[n]-y_h[n-1]+\frac{1}{4}y_h[n-2]=0$$

$$\begin{aligned}A_1(\frac{1}{2})^n+nB_1(\frac{1}{2})^n-A_1(\frac{1}{2})^{n-1}-(n-1)B_1(\frac{1}{2})^{n-1}\\ \frac{1}{4}A_1(\frac{1}{2})^{n-2}+\frac{1}{4}(n-2)B_1(\frac{1}{2})^{n-2} &= 0.\end{aligned}$$

(e) Using the solution from part (d):

$$y_h[n] = A_1(\frac{1}{2})^n + nB_1(\frac{1}{2})^n,$$

and the initial conditions

$$y_h[-1] = 1$$

and

$$y_h[0] = 0,$$

we solve for A_1 and B_1:

$$A_1 = 0$$
$$B_1 = -1/2.$$

2.39. (a) For $x_1[n] = \delta[n]$,

$$\begin{aligned} y_1[0] &= 1 \\ y_1[1] &= ay[0] = a \end{aligned}$$

For $x_2[n] = \delta[n-1]$,

$$\begin{aligned} y_2[0] &= 1 \\ y_2[1] &= ay[0] + x_2[1] = a + 1 \neq y_1[0] \end{aligned}$$

Even though $x_2[n] = x_1[n-1]$, $y_2[n] \neq y_2[n-1]$. Hence the system is NOT TIME INVARIANT.

(b) A linear system has the property that

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

Hence, if the input is doubled, the output must also double at each value of n.
Because $y[0] = 1$, always, the system is NOT LINEAR.

(c) Let $x_3 = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$.
For $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= x_3[n] + ay_3[n-1] \\ &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] + a(x_3[n-1] + y_3[n-2]) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} a^k x_1[n-k] + \beta \sum_{k=0}^{n-1} a^k x_2[n-k] \\ &= \alpha(h[n] * x_1[n]) + \beta(h[n] * x_2[n]) \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]. \end{aligned}$$

For $n < 0$:

$$\begin{aligned} y_3[n] &= a^{-1}(y_3[n+1] - x_3[n]) \\ &= -\alpha \sum_{k=-1}^{n} a^k x_1[n-k] - \beta \sum_{k=-1}^{n} a^k x_2[n-k] \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]. \end{aligned}$$

For $n = 0$:

$$y_3[n] = y_1[n] = y_2[n] = 0.$$

Conclude,

$$y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n], \text{ for all } n.$$

Therefore, the system is LINEAR. The system is still NOT TIME INVARIANT.

2.40. For the input

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\pi n)u[n] \\ &= (-1)^n u[n], \end{aligned}$$

the output is

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (j/2)^k u[k](-1)^{(n-k)}u[n-k] \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (j/2)^k (-1)^{-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-j/2)^k \\ &= (-1)^n \left(\frac{1-(-j/2)^{(n+1)}}{1+j/2} \right) \end{aligned}$$

For large n, $(-j/2)^{(n+1)} \to 0$. Thus, the steady-state response becomes

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{(-1)^n}{1+j/2} \\ &= \frac{\cos(\pi n)}{1+j/2}. \end{aligned}$$

2.41. The input sequence,

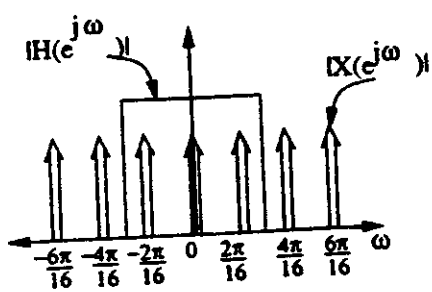
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+16k],$$

has the Fourier representation

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n+16k]e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \frac{2\pi k}{16}). \end{aligned}$$

Therefore, the frequency representation of the input is also a periodic impulse train. There are 16 frequency impulses in the range $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

We sketch the magnitudes of $X(e^{j\omega})$ and $H(e^{j\omega})$:



From the sketch, we observe that the LTI system is a lowpass filter which removes all but three of the frequency impulses. To these, it multiplies a phase factor $e^{-j3\omega}$.

The Fourier transform of the output is

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{16}\delta(\omega) + \frac{1}{16}e^{-j\frac{4\pi}{16}}\delta(\omega - \frac{2\pi}{16}) \\ &\quad + \frac{1}{16}e^{j\frac{4\pi}{16}}\delta(\omega + \frac{2\pi}{16}) \end{aligned}$$

Thus the output sequence is

$$y[n] = \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\cos(\frac{2\pi n}{16} + \frac{3\pi}{8}).$$

2.42. (a) From the figure,

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \\ &= (x[n] * (\delta[n] + h_1[n])) * h_2[n]. \end{aligned}$$

Let $h[n]$ be the impulse response of the overall system,

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Comparing with the above expression,

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n] + h_1[n]) * h_2[n] \\ &= h_2[n] + h_1[n] * h_2[n] \\ &= \alpha^n u[n] + \beta^{(n-1)} u[n-1]. \end{aligned}$$

(b) Taking the Fourier transform of $h[n]$ from part (a),

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n]e^{-j\omega n} + \beta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{(n-1)} u[n-1]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} + \beta \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha^{(\ell-1)} e^{-j\omega \ell}, \end{aligned}$$

where we have used $\ell = (n-1)$ in the second sum.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1+\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}, \text{ for } |\alpha| < 1. \end{aligned}$$

Note that the Fourier transform of $\alpha^n u[n]$ is well known, and the second term of $h[n]$ (see part (a)) is just a scaled and shifted version of $\alpha^n u[n]$. So, we could have used the properties of the Fourier transform to reduce the algebra.

(c) We have

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \frac{1+\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}, \end{aligned}$$

cross multiplying,

$$Y(e^{j\omega})[1-\alpha e^{-j\omega}] = X(e^{j\omega})[1+\beta e^{-j\omega}]$$

taking the inverse Fourier transform, we have

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] + \beta x[n-1].$$

(d) From part (a):

$$h[n] = 0, \text{ for } n < 0.$$

This implies that the system is CAUSAL.
If the system is stable, its Fourier transform exists. Therefore, the condition for stability is the same as the condition imposed on the frequency response of part (b). That is, STABLE, if $|\alpha| < 1$.

2.43. For $(-1 < a < 0)$, we have

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

(a) real part of $X(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}\cdot[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1-a\cos(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \end{aligned}$$

(b) imaginary part:

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2j}\cdot[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] \\ &= \frac{-a\sin(\omega)}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \end{aligned}$$

(c) magnitude:

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= [X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{1-2a\cos(\omega)+a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(d) phase:

$$\angle X(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right)$$

2.44. (a)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega})|_{\omega=0} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}|_{\omega=0} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \\ &= 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n \\ &= 2 \end{aligned}$$

(c) Because $x[n]$ is symmetric about $n = 2$ this signal has linear phase.

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j2\omega}$$

$A(\omega)$ is a zero phase (real) function of ω. Hence,

$$\angle X(e^{j\omega}) = -2\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

(d)

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega = 2\pi x[n]$$

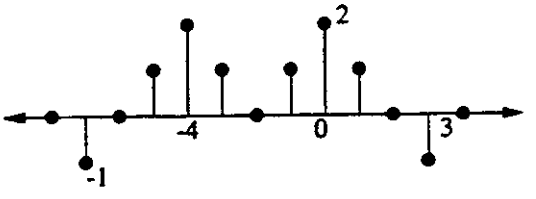
for $n = 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi$$

(e) Let $y[n]$ be the unknown sequence. Then

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{-j\omega}) \\ &= \sum_n x[n]e^{j\omega n} \\ &= \sum_n x[-n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_n y[n]e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

Hence $y[n] = x[-n]$.



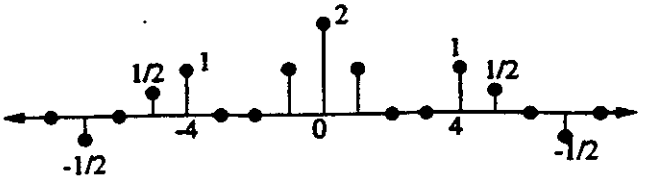
(f) We have determined that:

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j2\omega}$$

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} \\ &= A(\omega)\cos(2\omega) \\ &= \frac{1}{2}A(\omega)\left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) \end{aligned}$$

Taking the inverse transform, we have

$$\frac{1}{2}a[n+2] + \frac{1}{2}a[n-2] = \frac{1}{2}x[n+4] + \frac{1}{2}x[n]$$



2.45. Let $x[n] = \delta[n]$, then

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

The output of the ideal lowpass filter:

$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})$$

The multiplier:

$$(-1)^n w[n] = e^{-j\pi n} w[n]$$

causes a shift in the frequency domain:

$$W(e^{j(\omega-\pi)}) = H(e^{j(\omega-\pi)})$$

The overall output:

$$y[n] = e^{-j\pi n} w[n] + w[n]$$
$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)}) + H(e^{j\omega})$$

Noting that:

$$H(e^{j(\omega-\pi)}) = \begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2} \le |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$Y(e^{j\omega}) = 1$, thus $y[n] = \delta[n]$.

2.46. (a) We first perform a partial-fraction expansion of $X(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} \\ &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} \\ x[n] &= a^n u[n] + a^{-n} u[-n-1] \\ &= a^{|n|} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega)d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}d\omega \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega}d\omega\right) \\ &= \frac{1}{2}(x[n-1] + x[n+1]) \\ &= \frac{1}{2}(a^{|n-1|} + a^{|n+1|}) \end{aligned}$$

2.47. (a)

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \\ &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]) \\ h[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

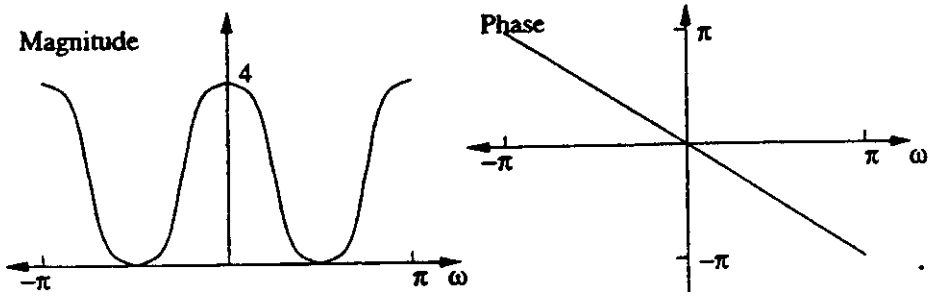
(b) Yes. $h[n]$ is finite-length and absolutely summable.

(c)

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} \\ &= 2e^{-j\omega}(\frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}) \\ &= 2e^{-j\omega}(\cos(\omega) + 1) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= 2(\cos(\omega) + 1) \\ \angle H(e^{j\omega}) &= -\omega \end{aligned}$$



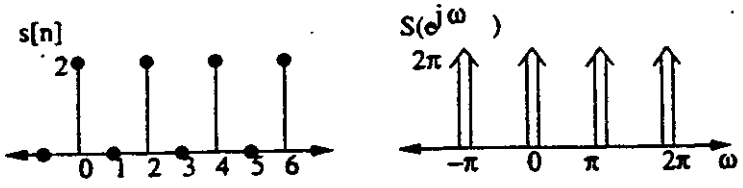
(e)

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} H_1(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} H(e^{j(\omega+\pi)})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} H(e^{j(\omega)})e^{j(\omega-\pi)n}d\omega \\ &= e^{-j\pi n}\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} H(e^{j(\omega)})e^{j\omega n}d\omega \\ &= -1^n h[n] \\ &= \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

2.48. (a) Notice that

$$s[n] = 1 + \cos(\pi n) = 1 + (-1)^n$$

$$S(e^{j\omega}) = 2\pi\sum_k \delta(\omega - k\pi)$$



(b) Since $y[n] = x[n]s[n]$,

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta})X(e^{j(\omega-\theta)})d\omega$$
$$= X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$Y(e^{j\omega})$ contains copies of $X(e^{j\omega})$ replicated at intervals of π.

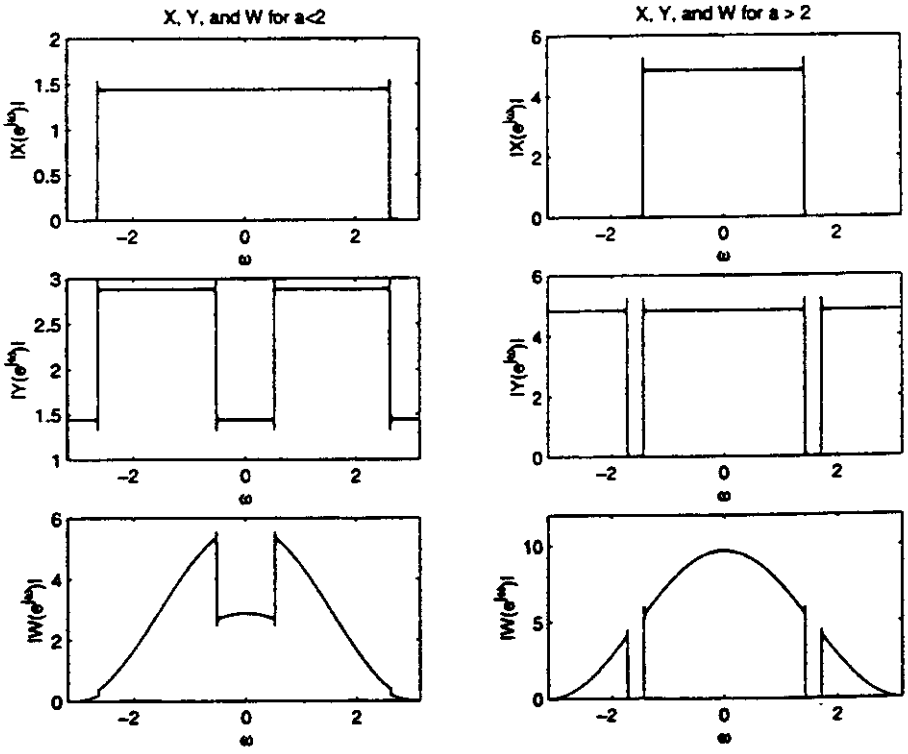
(c) Since $w[n] = y[n] + (1/2)(y[n+1] + y[n-1])$,

$$W(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}\left(e^{j\omega}Y(e^{j\omega}) + e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})\right)$$
$$= Y(e^{j\omega})(1+\cos(\omega))$$

(d) The following figure shows $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, and $W(e^{j\omega})$ for $a < 2$ and $a > 2$. Notice that

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi/a, \\ 0, & \pi/a \le |\omega| \ge \pi \end{cases}$$

So, for $a > 2$, $Y(e^{j\omega})$ contains two non-overlapping replications of $X(e^{j\omega})$, whereas for $a < 2$, "aliasing" occurs. When there is aliasing, $W(e^{j\omega})$ is not at all close to $X(e^{j\omega})$. Hence, a must be greater than 2 for $w[n]$ to be "close" to $x[n]$.



2.49. (a) We start by interpreting each clue.

(i) The system is causal implies

$$h[n] = 0 \text{ for } n \le 0.$$

(ii) The Fourier transform is conjugate symmetric implies $h[n]$ is real.

(iii) The DTFT of the sequence $h[n+1]$ is real implies $h[n+1]$ is even.

From the above observations, we deduce that $h[n]$ has length 3, therefore it has finite duration.

(b) From part (a) we know that $h[n]$ is length 3 with even symmetry around $h[1]$. Let $h[0] = h[2] = a$ and $h[1] = b$, from (iv) and using Parseval's theorem, we have

$$2a^2 + b^2 = 2.$$

From (v), we also have

$$2a - b = 0.$$

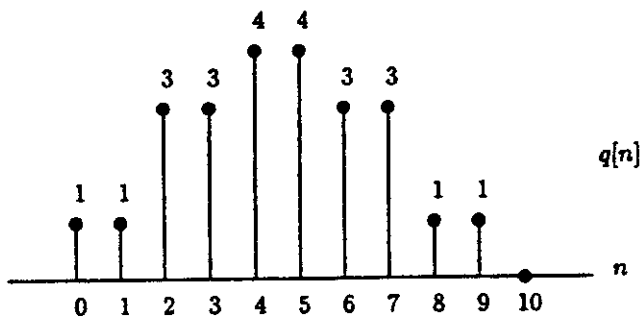
Solving the above equations, we get

$$\begin{aligned} h[0] &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ h[1] &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ h[2] &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

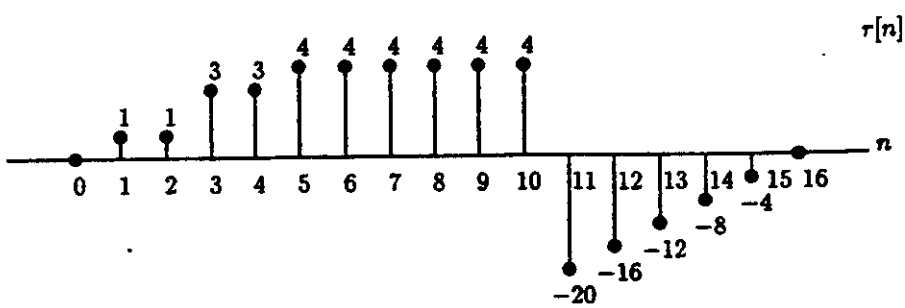
or

$$\begin{aligned} h[0] &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ h[1] &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ h[2] &= -\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2.50. (a) Carrying out the convolution sum, we get the following sequence $q[n]$:



(b) Again carrying out the convolution sum, we get the following sequence $r[n]$:



(c) Let $a[n] = v[-n]$ and $b[n] = w[-n]$, then:

$$\begin{aligned} a[n] * b[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k]b[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v[-k]w[k-n] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} v[r]w[-n-r] \text{ where } r = -k \\ &= q[-n]. \end{aligned}$$

We thus conclude that $q[-n] = v[-n] * w[-n]$.

2.51. For $(-1 < a < 0)$, we have

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

(a) real part of $X(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} \cdot [X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1 - a\cos(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} \end{aligned}$$

(b) imaginary part:

$$\begin{aligned} X_I(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2j} \cdot [X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})] \\ &= \frac{-a\sin(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} \end{aligned}$$

(c) magnitude:

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= [X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{1 - 2acos(\omega) + a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(d) phase:

$$\angle X(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{-a\sin(\omega)}{1 - a\cos(\omega)}\right)$$

2.52. $x[n]$ can be rewritten as:

$$\begin{aligned} x[n] &= cos(\frac{5\pi n}{2}) \\ &= cos(\frac{\pi n}{2}) \\ &= \frac{e^{j\frac{\pi n}{2}}}{2} + \frac{e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2}. \end{aligned}$$

We now use the fact that complex exponentials are eigenfunctions of LTI systems, we get:

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{-j\frac{\pi}{8}}\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}}}{2} + e^{j\frac{\pi}{8}}\frac{e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^{j(\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8})}}{2} + \frac{e^{-j(\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{8})}}{2} \\ &= cos(\frac{\pi}{2}(n-\frac{1}{4})). \end{aligned}$$

2.53. First $x[n]$ goes through a lowpass filter with cutoff frequency 0.5π. Since the cosine has a frequency of 0.6π, it will be filtered out. The delayed impulse will be filtered to a delayed sinc and the constant will remain unchanged. We thus get:

$$w[n] = 3\frac{sin(0.5\pi(n-5))}{\pi(n-5)} + 2.$$

$y[n]$ is then given by:

$$y[n] = 3\frac{sin(0.5\pi(n-5))}{\pi(n-5)} - 3\frac{sin(0.5\pi(n-6))}{\pi(n-6)}.$$

2.54.

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\frac{15\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}) \\ &= \cos(-\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}) \\ &= \cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{\pi}{3}) \\ &= \frac{e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{\pi n}{4}}}{2} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2}. \end{aligned}$$

Using the fact that complex exponentials are eigenfunctions of LTI systems, we get:

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{-j\frac{3\pi}{8}}\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j\frac{\pi n}{4}}}{2} + e^{-j\frac{\pi}{8}}\frac{e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2} \\ &= \frac{e^{-j\frac{\pi}{24}}e^{j\frac{\pi n}{4}}}{2} + \frac{e^{-j\frac{11\pi}{24}}e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2} \\ &= e^{-j\frac{\pi}{4}}(\frac{e^{j\frac{5\pi}{24}}e^{j\frac{\pi n}{4}}}{2} + \frac{e^{-j\frac{5\pi}{24}}e^{-j\frac{\pi n}{4}}}{2}) \\ &= e^{-j\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi n}{4} + \frac{5\pi}{24}). \end{aligned}$$

2.55. Since system 1 is memoryless, it is time invariant. The input, $x[n]$ is periodic in ω, therefore $w[n]$ will also be periodic in ω. As a consequence, $y[n]$ is periodic in ω and so is A.

2.56. (a)

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * (e^{-j\omega_0 n}x[n]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}x[k]h[n-k]. \end{aligned}$$

Let $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$, then:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * (e^{-j\omega_0 n}(ax_1[n] + bx_2[n])) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}(ax_1[k] + bx_2[k])h[n-k] \\ &= a\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}x_1[k]h[n-k] + b\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}x_2[k]h[n-k] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

where $y_1[n]$ and $y_2[n]$ are the responses to $x_1[n]$ and $x_2[n]$ respectively. We thus conclude that system S is linear.

(b) Let $x_2[n] = x[n - n_0]$, then:

$$\begin{aligned} y_2[n] &= h[n] * (e^{-j\omega_0 n}x_2[n]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0(n-k)}x_2[n-k]h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0(n-k)}x[n-n_0-k]h[k] \\ &\neq y[n-n_0]. \end{aligned}$$

We thus conclude that system S is not time invariant.

(c) Since the magnitude of $e^{-j\omega_0 n}$ is always bounded by 1 and $h[n]$ is stable, a bounded input $x[n]$ will always produce a bounded input to the stable LTI system and therefore the output $y[n]$ will be bounded. We thus conclude that system S is stable.

(d) We can rewrite $y[n]$ as:

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * (e^{-j\omega_0 n}x[n]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0(n-k)}x[n-k]h[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n}e^{j\omega_0 k}x[n-k]h[k] \\ &= e^{-j\omega_0 n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 k}x[n-k]h[k]. \end{aligned}$$

System C should therefore be a multiplication by $e^{-j\omega_0 n}$.

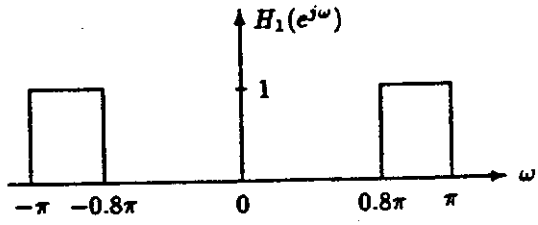
2.57. (a) $H_1(e^{j\omega})$ corresponds to a frequency shifted version of $H(e^{j\omega})$, specifically:

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)}).$$

We thus have:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega| < 0.8\pi \\ 1 & , \quad 0.8\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

This is a highpass filter.



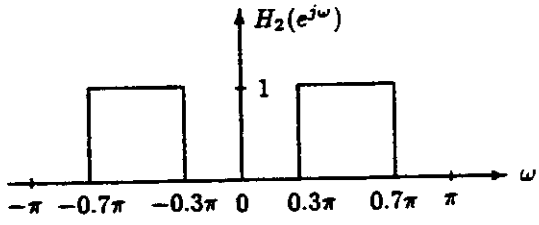
(b) $H_2(e^{j\omega})$ corresponds to a frequency modulated version of $H(e^{j\omega})$, specifically:

$$H_2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) * (\delta(\omega - 0.5\pi) + \delta(\omega + 0.5\pi)) \qquad \text{where } |\omega| \leq \pi.$$

We thus have:

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega| < 0.3\pi \\ 1 & , \quad 0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.7\pi \\ 0 & , \quad 0.7\pi < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

This is a bandpass filter.



(c) $H_3(e^{j\omega})$ corresponds to a periodic convolution of $H_{lp}(e^{j\omega})$ with another lowpass filter, specifically:

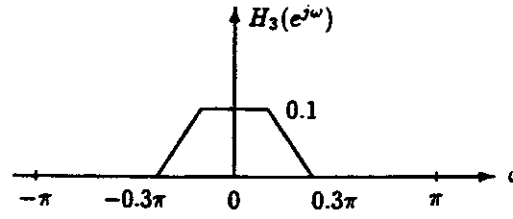
$$H_3(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\theta}) H_{lp}(e^{j\omega - \theta})\, d\theta$$

where $H(e^{j\omega})$ is given by:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < 0.1\pi \\ 0 & , \quad 0.1\pi \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

Carrying out the convolution, we get:

$$H_3(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0.1 & , \quad |\omega| < 0.1\pi \\ -\frac{|\omega|}{2\pi} + 0.15 & , \quad 0.1\pi \leq |\omega| \leq 0.3\pi \\ 0 & , \quad 0.3\pi < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$



2.58. Note that $X(e^{j\omega})$ is real, and $Y(e^{j\omega})$ is given by:

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} -jX(e^{j\omega}) & , \quad 0 < \omega < \pi \\ +jX(e^{j\omega}) & , \quad -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

$w[n] = x[n] + jy[n]$, therefore:

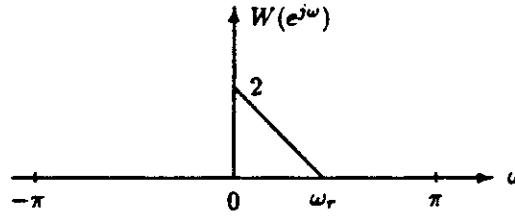
$$W(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + jY(e^{j\omega}).$$

Using the above, we get:

$$jY(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{j\omega}) & , \quad 0 < \omega < \pi \\ -X(e^{j\omega}) & , \quad -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

We thus conclude:

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2X(e^{j\omega}) & , \quad 0 < \omega < \pi \\ 0 & , \quad -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$



2.59. (a) Using the change of variable: $r = -k$, we can rewrite $R_x[n]$ as:

$$R_x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^*[-r]x[n-r] = x^*[-n] * x[n].$$

We therefore have:

$$g[n] = x^*[-n].$$

(b) The Fourier transform of $x^*[-n]$ is $X^*(e^{j\omega})$, therefore:

$$R_x(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2.$$

2.60. (a) Note that $x_2[n] = -\sum_{k=0}^{k=4} x[n-k]$. Since the system is LTI, we have:

$$y_2[n] = -\sum_{k=0}^{k=4} y[n-k].$$

(b) By carrying out the convolution, we get:

$$h[n] = \begin{cases} -1 & , \quad n = 0, n = 2 \\ -2 & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad \text{o.w.} \end{cases}$$

2.61. The system is not stable, any bounded input that excites the zero input response will result in an unbounded output.

The solution to the difference equation is given by:

$$y[n] = y_{zir}[n] + y_{zsr}[n]$$

where $y_{zir}[n]$ is the zero input response and $y_{zsr}[n]$ is the zero state response, the response to zero initial conditions:

$$\begin{aligned} y_{zir}[n] &= a(\frac{1}{2})^n \qquad \text{where } a \text{ is a constant determined by the initial condition.} \\ y_{zsr}[n] &= (\frac{1}{2})^n u[n] * x[n]. \end{aligned}$$

An example of a bounded input that results in an unbounded output is:

$$x[n] = \delta[n+1].$$

The output is unbounded and given by:

$$y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} u[n+1] - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n.$$

2.62. The definition of causality implies that the output of a causal LTI system may only be derived from past and present inputs.

The convolution sum:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \end{aligned}$$

Note that the first summation represents a weighted sum of future values of the input. Thus, if the system is causal,

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] = 0.$$

This can only be guaranteed if $h[k] = 0$ for $n < 0$.

Using reverse logic, we can show that if $h[n] = 0$ for $n < 0$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k].$$

Since the convolution sum specifies that the input is formed from past and present input values, the system is, by definition, causal.

2.63. The system could be LTI. A possible impulse response is:

$$\begin{aligned} h[n] &= (\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-1]) * (\frac{1}{2})^n \\ &= (\frac{1}{2})^n - \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}. \end{aligned}$$

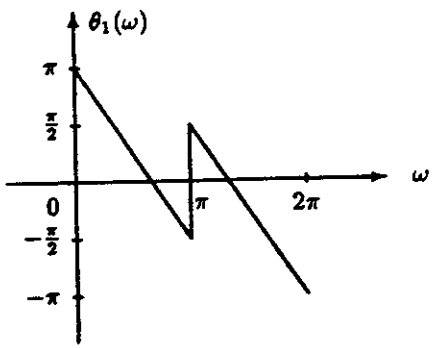
2.64. Let the input be $x[n] = \delta[n-1]$, if the system is causal then the output, $y[n]$, should be zero for $n < 1$. Let's evaluate $y[0]$:

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Y(e^{j\omega})\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-j\omega}e^{-j\omega/2}\,d\omega \\ &= -\frac{2}{3\pi} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

This proves that the system is not causal.

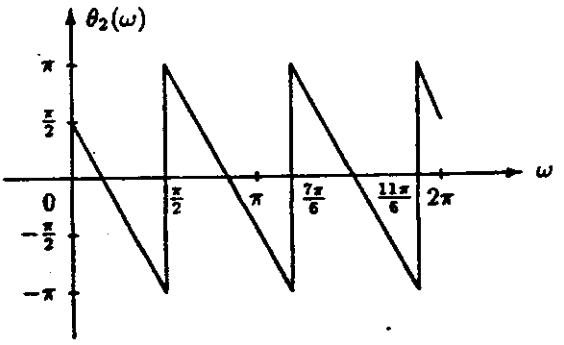
2.65. $x_1[n]$ is even-symmetric around $n = 1.5$, furthermore since $\sum x_1[n] < 0$ and we want $A_1(0) \geq 0$, we need to include a π factor in the phase. An appropriate choice for $\theta_1(\omega)$ is therefore:

$$\theta_1(\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi \quad |\omega| < \pi.$$



$x_2[n]$ is odd-symmetric around $n = 3$, therefore:

$$\theta_2(\omega) = -3\omega + \frac{\pi}{2} \quad |\omega| < \pi.$$



2.66. (a)

$$\begin{aligned} E(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ F(e^{j\omega}) &= E(e^{-j\omega}) \\ &= H_1(e^{-j\omega})X(e^{-j\omega}) \\ G(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})F(e^{j\omega}) \\ &= H_1(e^{j\omega})H_1(e^{-j\omega})X(e^{-j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) &= G(e^{-j\omega}) \\ &= H_1(e^{-j\omega})H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

(b) Since:

$$Y(e^{j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

We get:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})H_1(e^{j\omega}).$$

(c) Taking the inverse transform of $H(e^{j\omega})$, we get:

$$h[n] = h_1[-n] * h_1[n].$$

2.67. (a) Using the properties of the Fourier transform and the fact that $(-1)^n = e^{j\pi n}$, we get:

$$\begin{aligned} V(e^{j\omega}) &= X(e^{j(\omega+\pi)}) \\ W(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})V(e^{j\omega}) \\ &= H_1(e^{j\omega})X(e^{j(\omega+\pi)}) \\ Y(e^{j\omega}) &= W(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &= H_1(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

$H(e^{j\omega})$ is thus given by:

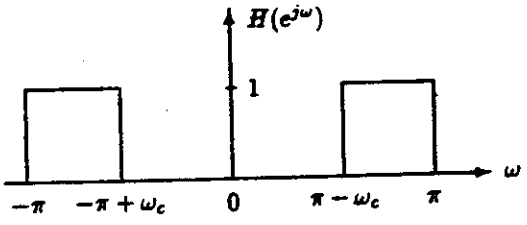
$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j(\omega-\pi)}).$$

(b)

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j(\omega-\pi)}).$$

With the given choice of $H_1(e^{j\omega})$,

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega| < \pi - \omega_c \\ 1 & , \quad \pi - \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$



2.68. If $x_1[n] = x_2[n]$, $w_1[n]$ and $w_2[n]$ will not be necessarily equal.

$$\begin{aligned} w_1[n] &= x_1[-n-2] \\ w_2[n] &= x_2[-n+2] \\ &\neq x_2[-n-2] \end{aligned}$$

A simple counterexample is $x_1[n] = x_2[n] = \delta[n]$. Then:

$$\begin{aligned} w_1[n] &= \delta[n+2] \\ w_2[n] &= \delta[n-2]. \end{aligned}$$

2.69. (a) The overall system is not guaranteed to be an LTI system. A simple counterexample is:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x[n] \\ y_2[n] &= x[n] \\ y[n] &= y_1[n]y_2[n] = x^2[n] \end{aligned}$$

which is not a linear system, therefore the system is not LTI.

(b)

$$\begin{aligned} Y_1(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ Y_2(e^{j\omega}) &= H_2(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) &= Y_1(e^{j\omega}) * Y_2(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Using the above relationships, we get:

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{unspecified} & , \quad 0 < |\omega| < 0.6\pi \\ 0 & , \quad 0.6\pi \leq |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

2.70. The first difference:

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n-1].$$

(a) To determine if the system is linear:

$$\begin{aligned}\nabla(ax_1[n] + bx_2[n]) &= ax_1[n] + bx_2[n] - ax_1[n-1] - bx_2[n-1] \\ &= a(x_1[n] - x_1[n-1]) + b(x_2[n] - x_2[n-1]) \\ &= \nabla(ax_1[n]) + \nabla(ax_2[n]).\end{aligned}$$

Therefore, the system is LINEAR.

To determine if the first difference is time invariant:

$$\begin{aligned}\nabla(x_1[n-1]) &= x[n-1] - x[n-2] \\ &= y[n-1].\end{aligned}$$

The system is TIME INVARIANT.

(b) The impulse response is obtained by setting the input to $x[n] = \delta[n]$,

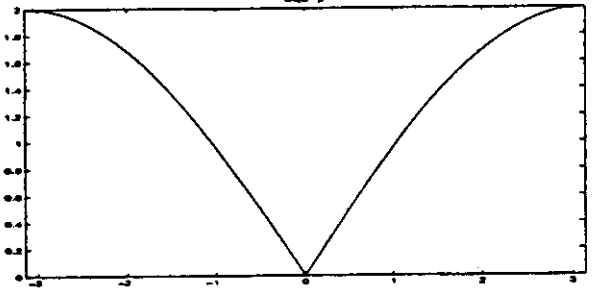
$$y[n] = h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

(c) Taking the Fourier transform of the result of part (b), we find that the system function is

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}.$$

Thus the magnitude of the frequency response is

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})| &= \sqrt{(1 - e^{-j\omega})(1 - e^{-j\omega})} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\omega)}.\end{aligned}$$

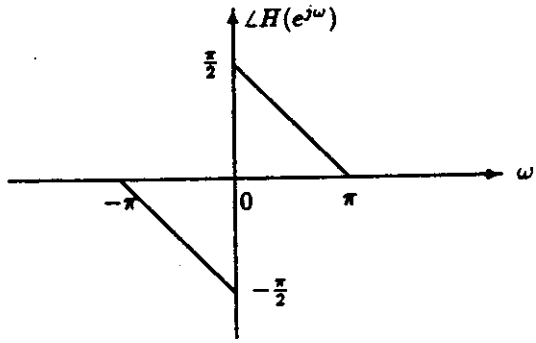


We calculate the phase of the frequency response:

$$H(e^{j\omega}) = (1 - \cos(\omega)) + j\sin(\omega)$$

Thus,

$$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{\sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)}\right)$$



(d) In general,

$$\begin{aligned}\nabla(x[n]) &= x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= x[n] - x[n-1].\end{aligned}$$

So, for $x[n] = f[n] * g[n]$,

$$\begin{aligned}\nabla(x[n]) &= f[n] * g[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) \\ &= f[n] * \nabla(g[n]) \\ &= \nabla(f[n]) * g[n].\end{aligned}$$

Where we have used the commutivity of the convolution operator to obtain the last two equalities.

(e) We desire the inverse system, $h_i[n]$, such that

$$h_i[n] * \nabla(x[n]) = x[n]$$

The inverse system must satisfy:

$$h_i[n] * h[n] = \delta[n],$$

in the frequency domain,

$$H_i(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = 1.$$

Recall from part (c),

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}.$$

So,

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}},$$

and

$$h_i[n] = u[n].$$

Hence, the unit step is the inverse system for the first difference.

2.71. For impulse response $h[n]$, the frequency response of an LTI system is given by

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

(a) Suppose the impulse response is $h^*[n]$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*[n]e^{-j\omega n} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j\omega n}\right)^* \\ &= H^*(e^{-j\omega}).\end{aligned}$$

(b) We have

$$\begin{aligned} H^*(e^{j\omega}) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}\right)^* \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^*[n]e^{j\omega n}. \end{aligned}$$

If $h[n]$ is real,

$$\begin{aligned} H^*(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{j\omega n} \\ &= H(e^{-j\omega}). \end{aligned}$$

Hence, the frequency response is conjugate symmetric.

2.72. The analysis equation for the Fourier transform:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

(a) The Fourier transform of $x^*[n]$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n}\right)^* \\ &= X^*(e^{-j\omega n}). \end{aligned}$$

(b) The Fourier transform of $x^*[-n]$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[-n]e^{-j\omega n} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x^*[l]e^{j\omega l} \\ &= \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]e^{-j\omega l}\right)^* \\ &= X^*(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

2.73. From property 1:

$$X^*(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\omega n}$$

for $x[n]$ real, $x[n] = x^*[n]$, so

$$\begin{aligned} X^*(e^{-j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= X(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Thus, the Fourier transform of a real input is conjugate symmetric.

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

$$X^*(e^{-j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) - jX_I(e^{j\omega})$$

From property 7, $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ for $x[n]$ real. Thus,

$$X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) - jX_I(e^{-j\omega}).$$

We may infer

$$\begin{aligned} &\text{property 8:} \quad X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \\ &\text{property 9:} \quad X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

$$X^*(e^{-j\omega}) = |X(e^{-j\omega})|e^{-j\angle X(e^{-j\omega})}$$

From property 7:

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}).$$

So,

$$\begin{aligned} &\text{property 10:} \quad |X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \\ &\text{property 11:} \quad \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}). \end{aligned}$$

2.74. Theorem 1:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_1[n] + bx_2[n])e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} ax_1[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} bx_2[n]e^{-j\omega n} \\ &= aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Theorem 2:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_d]e^{-j\omega n} &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]e^{-j\omega(\ell-n_d)} \\ &= e^{j\omega n_d} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]e^{-j\omega\ell} \\ &= e^{j\omega n_d} X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Theorem 3:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega-\omega_0)n} \\ &= X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{aligned}$$

Theorem 4:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]e^{j\omega\ell} \\ &= X(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

Theorem 5:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n} &= -\frac{1}{j}\frac{d}{d\omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right) \\ &= j\frac{d}{d\omega}(X(e^{j\omega})) \end{aligned}$$

2.75. The output of an LTI system is obtained by the convolution sum,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k].$$

Taking the Fourier transform,

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-j\omega n}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j\omega k}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-j\omega(n-k)}\right) \end{aligned}$$

Hence,

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

2.76. The Modulation theorem:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})\,d\theta$$

the time-domain representation,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\pi}^{\pi} d\omega\, X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})e^{j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\, X(e^{j\theta})w[n]e^{j\theta n} \\ &= x[n]w[n] \end{aligned}$$

2.77. (a) The Fourier transform of $y^*[-n]$ is $Y^*(e^{j\omega})$, and $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$ forms a transform pair with $x[n] * y[n]$. So

$$G(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})$$

and

$$g[n] = x[n] * y^*[-n]$$

form a transform pair.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(x[n] * y^*[-n]\right)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k-n]e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

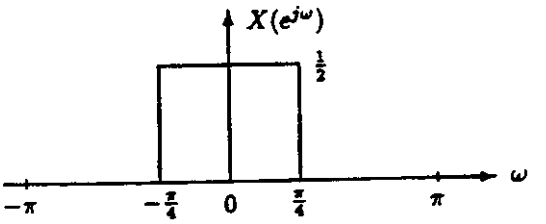
for $n = 0$:

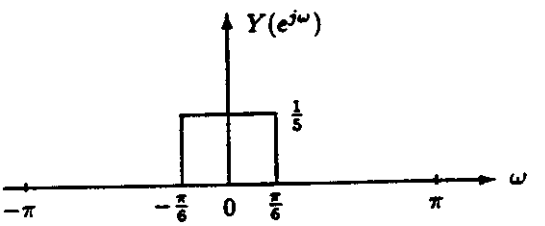
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y^*[k]$$

(c) Using the result from part (b):

$$x[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n}$$
$$y^*[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

We recognize each sequence to be a pulse in the frequency domain:

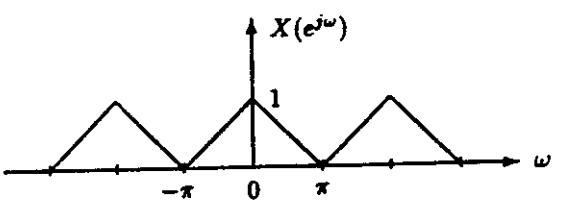




Substituting into Eq. (P2.77-1):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[(\frac{1}{2})(\frac{1}{5})(\frac{2\pi}{6})\right]$$
$$= \frac{1}{60}$$

2.78. $X(e^{j\omega})$ is given by:

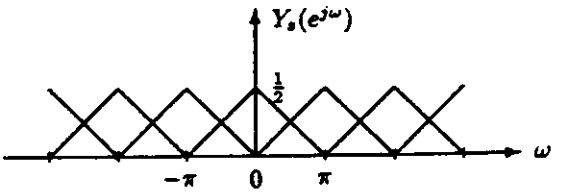


(a)

$$y_s[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + e^{j\pi n}\right)x[n]$$

which transforms to

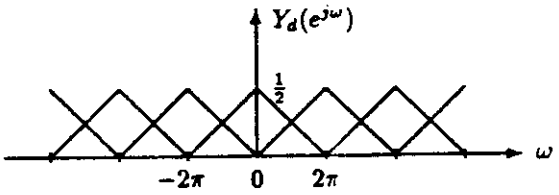
$$Y_s(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})\right]$$



(b)

$$y_d[n] = x[2n]$$

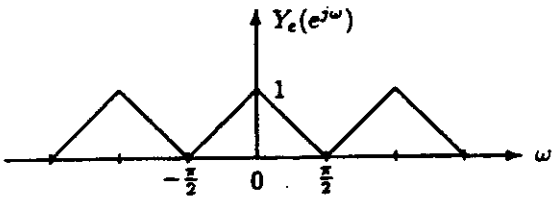
$$\begin{aligned} Y_d(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}\left[X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + X(e^{j(\frac{\omega}{2}+\pi)})\right] \\ &= Y_s(e^{j\frac{\omega}{2}}) \end{aligned}$$



(c)

$$y_e[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$Y_e(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega})$$



2.79. (a)

$$\Phi_x(-N,-\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-N]x^*[n+N]e^{j\omega n}.$$

$$\Phi_x^*(N,\omega) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega n}\right)^*$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega n})^* \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n+N]x[n-N]e^{j\omega n} \\
&= \Phi_x(-N,-\omega).
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\Phi_x(N,\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Aa^{n+N}u[n+N]Aa^{n-N}u[n-N]e^{-j\omega n} \\
&= A^2 \sum_{n=N}^{\infty} a^{2n}e^{-j\omega n} \\
&= A^2 \sum_{n=N}^{\infty} (a^2e^{-j\omega})^n \\
&= A^2 \frac{(a^2e^{-j\omega})^N}{1-a^2e^{-j\omega}} \\
&= A^2 \frac{a^{2N}e^{-j\omega N}}{1-a^2e^{-j\omega}}.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
X(e^{j(v+(\omega/2))}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(v+\omega/2)n}. \\
X^*(e^{j(v-(\omega/2))}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{j(v-\omega/2)n}.
\end{aligned}
$$

Let $S = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j(v+(\omega/2))})X^*(e^{j(v-(\omega/2))})e^{j2vN}\,dv$, then:

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(v+\omega/2)n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]e^{j(v-\omega/2)k}e^{j2vN}\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[k]e^{-j\frac{\omega(n+k)}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-n+2N)}\,dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[k]e^{-j\frac{\omega(n+k)}{2}} \frac{2\sin(\pi(k-n+2N))}{k-n+2N} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n-2N]e^{-j\frac{\omega(2n-2N)}{2}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+N]x^*[n-N]e^{-j\omega n} \\
&= \Phi_x(N,\omega).
\end{aligned}
$$

We thus conclude that:

$$
\Phi_x(N,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j(v+(\omega/2))})X^*(e^{j(v-(\omega/2))})e^{j2vN}\,dv.
$$

2.80.

$$w[n] = x[n] + y[n]$$

The mean of $w[n]$:

$$\begin{aligned} m_w &= E\{w[n]\} \\ &= E\{x[n] + y[n]\} \\ &= E\{x[n]\} + E\{y[n]\} \\ &= m_x + m_y \end{aligned}$$

The variance of $w[n]$:

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= E\{(w[n] - m_w)^2\} \\ &= E\{w^2[n]\} - m_w^2 \\ &= E\{(x[n] + y[n])^2\} - m_w^2 \\ &= E\{x^2[n]\} + 2E\{x[n]y[n]\} + E\{y^2[n]\} - m_x^2 - 2m_x m_y - m_y^2 \end{aligned}$$

If $x[n]$ and $y[n]$ are uncorrelated:

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= E\{x^2[n]\} - m_x^2 + E\{y^2[n]\} - m_y^2 \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

2.81. Let $e[n]$ be a white noise sequence and $E\{s[n]e[m]\} = 0$ for all n and m.

$$\begin{aligned} E\{y[n]y[n+m]\} &= E\{s[n]e[n]s[n+m]e[n+m]\} \\ &= E\{s[n]s[n+m]e[n]e[n+m]\} \end{aligned}$$

Since $s[n]$ is uncorrelated with $e[n]$:

$$\begin{aligned} E\{y[n]y[n+m]\} &= E\{s[n]s[n+m]\}E\{e[n]e[n+m]\} \\ &= \sigma_s^2\sigma_e^2\delta[m] \end{aligned}$$

2.82. (a)

$$\begin{aligned} \phi_{xx}[m] &= E(x[n]x[n+m]) \\ &= E((s[n] + e[n])(s[n+m] + e[n+m])) \\ &= E(s[n]s[n+m]) + E(e[n]e[n+m]) + E(s[n]e[n+m]) + E(e[n]s[n+m]) \\ &= \phi_{ss}[m] + \phi_{ee}[m] + 2E(e[n])E(s[n]) \text{ since } s[n] \text{ and } e[n] \text{ are independent and stationary.} \\ &= \phi_{ss}[m] + \phi_{ee}[m] \quad \text{where we assumed } e[n] \text{ has zero mean.} \end{aligned}$$

Taking the Fourier transform of the above equation, we get:

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \Phi_{ss}(e^{j\omega}) + \Phi_{ee}(e^{j\omega}).$$

(b)

$$\begin{aligned} \phi_{xe}[m] &= E(x[n]e[n+m]) \\ &= E((s[n] + e[n])e[n+m]) \\ &= E(s[n])E(e[n]) + \phi_{ee}[m] \quad \text{since } s[n] \text{ and } e[n] \text{ are independent and stationary.} \\ &= \phi_{ee}[m] \quad \text{where we assumed } e[n] \text{ has zero mean.} \end{aligned}$$

Taking the Fourier transform of the above equation, we get:

$$\Phi_{xe}(e^{j\omega}) = \Phi_{ee}(e^{j\omega}).$$

(c)

$$\begin{aligned}\phi_{xs}[m] &= E(x[n]s[n+m]) \\ &= E((s[n]+e[n])s[n+m]) \\ &= \phi_{ss}[m] + E(e[n])E(s[n]) \quad \text{since } s[n] \text{ and } e[n] \text{ are independent and stationary.} \\ &= \phi_{ss}[m] \quad \text{where we assumed } e[n] \text{ has zero mean.}\end{aligned}$$

Taking the Fourier transform of the above equation, we get:

$$\Phi_{xs}(e^{j\omega}) = \Phi_{ss}(e^{j\omega}).$$

2.83. (Throughout this problem, we will assume $|a| < 1$.)

(a)

$$\phi_{hh}[m] = h[m] * h[-m].$$

Taking the Fourier transform, we get:

$$\begin{aligned}\Phi_{hh}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \\ &= \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})}\frac{1}{(1-ae^{j\omega})} \\ &= \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\omega}}\right).\end{aligned}$$

Taking the Inverse Fourier transform, we get:

$$\phi_{hh}[m] = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}.$$

(b) Using part (a), we get:

$$\begin{aligned}|H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \text{ since } h[n] \text{ is real} \\ &= \Phi_{hh}(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})}\frac{1}{(1-ae^{j\omega})} \\ &= \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\omega}}\right).\end{aligned}$$

(c) Using Parseval's theorem:

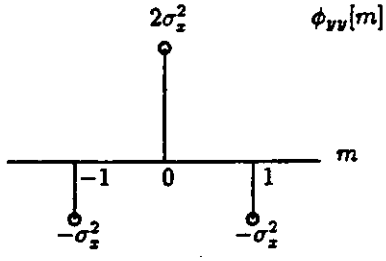
$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\omega})|^2\,d\omega &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a|^{2n}u[n] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(|a|^2)^n \\ &= \frac{1}{1-|a|^2}.\end{aligned}$$

2.84. The first-backward-difference system is given by:

$$y[n] = x[n] - x[n-1].$$

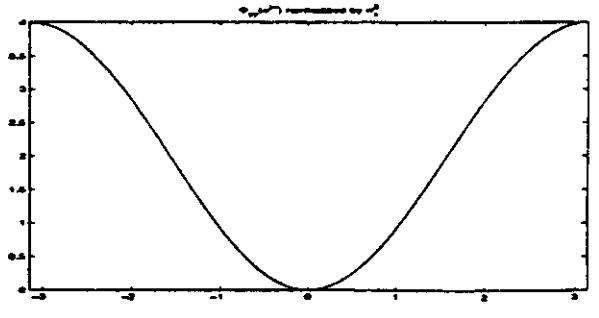
(a)

$$\begin{aligned}
\phi_{yy}[m] &= E(y[n]y[n+m]) \\
&= E((x[n] - x[n-1])(x[n+m] - x[n+m-1])) \\
&= E(x[n]x[n+m]) - E(x[n]x[n+m-1]) - E(x[n-1]x[n+m]) \\
&\quad + E(x[n-1]x[n+m-1]) \\
&= \phi_{xx}[m] - \phi_{xx}[m-1] - \phi_{xx}[m+1] + \phi_{xx}[m] \\
&= 2\phi_{xx}[m] - \phi_{xx}[m-1] - \phi_{xx}[m+1] \\
&= 2\sigma_x^2\delta[m] - \sigma_x^2\delta[m-1] - \sigma_x^2\delta[m+1].
\end{aligned}$$



To get the power spectrum, we take the Fourier transform of the autocorrelation function:

$$\begin{aligned}
\Phi_{yy}(e^{j\omega}) &= 2\sigma_x^2 - \sigma_x^2 e^{-j\omega} - \sigma_x^2 e^{j\omega} \\
&= 2\sigma_x^2 - 2\sigma_x^2 cos(\omega) \\
&= 2\sigma_x^2(1 - cos(\omega)).
\end{aligned}$$



(b) The average power of the output of the system is given by $\phi_{yy}[0]$:

$$\phi_{yy}[0] = 2\sigma_x^2.$$

(c) The noise power increased by going through the first-backward-difference system. This tells us that the first backward difference amplifies the noise of a signal.

2.85. (a)

$$\begin{aligned} E\{x[n]y[n]\} &= E\{x[n]\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]x[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]E\{x[n]x[n-k]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{xx}[k] \end{aligned}$$

Because $x[n]$ is a real, stationary white noise process:

$$\phi_{xx}[n] = \sigma_x^2\delta[n].$$

Therefore,

$$\begin{aligned} E\{x[n]y[n]\} &= \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\delta[k] \\ &= \sigma_x^2 h[0]. \end{aligned}$$

(b) The variance of the output:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E\{(y[n]-m_y)^2\} \\ &= E\{y^2[n]\} - m_y^2. \end{aligned}$$

When a zero-mean random process is input to a determistic LTI system, the output is also zero-mean:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]. \end{aligned}$$

Taking the expected value of both sides:

$$\begin{aligned} m_y &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{x[n]\}h[n-k] \\ m_y &= 0, \quad \text{if } m_x = 0. \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E\{y^2[n]\} \\ &= E\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m]h[k]E\{x[n-m]x[n-k]\} \\ &= \sigma_x^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[m]h[k]\delta[m-k] \\ \sigma_y^2 &= \sigma_x^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} h^2[m]. \end{aligned}$$

2.86. Using the solution to problem 2.85:

(a)

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1^2[k]$$

this statement is TRUE, because $x[n]$ is a white noise sequence.

(b) Since $y[n]$ is not a white noise sequence, this statement is FALSE.

(c) Let

$$\begin{aligned} h_1[n] &= a^n u[n] \\ h_2[n] &= b^n u[n]. \end{aligned}$$

These systems are cascaded:

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] * h_2[n] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}, \quad n \geq 0 \\ &= b^n \left(\frac{1-(a/b)^{n+1}}{1-(a/b)} \right) u[n] \end{aligned}$$

$$w[n] = x[n] * h[n].$$

Since $x[n]$ is zero-mean, $m_w = 0$ also.

$$\begin{aligned} \sigma_w^2 &= E\{w^2[n]\} \\ &= \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k]. \end{aligned}$$

2.87. (a) x[n] is a stationary white noise process.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k], \quad n \geq 0$$

$$\begin{aligned} E\{y[n]\} &= E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]x[n-k] \right\}, \quad n \geq 0 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] E\{x[n-k]\} \\ &= \begin{cases} m_x \sum_{k=-\infty}^{n} h[k], & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \phi_{yy}[n_1, n_2] &= E\{y[n_1]y[n_2]\} \\ &= E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{n_1} h[k]x[n_1-k] \sum_{m=-\infty}^{n_2} h[m]x[n_2-m] \right\}, \quad n \geq 0 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sum_{m=-\infty}^{n_2} h[k]h[m] E\{x[n_1-k]x[n_2-m]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n_1} \sum_{m=-\infty}^{n_2} h[k]h[m]\phi_{xx}[n_1-k, n_2-m]. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} m_x \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] &= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \\ &= m_y.\end{aligned}$$

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{n_1}\sum_{m=-\infty}^{n_2} h[k]h[m]\phi_{xx}[n_1-k,n_2-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[k]h[m]\phi_{xx}[k,m].$$

(d)

$$h[n] = a^n u[n]$$

$$\begin{aligned}E\{y[n]\} &= m_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^n u[n] \\ &= \frac{m_x}{1-a}.\end{aligned}$$

2.88. (a) No, the system is not linear. In the expression of $y[n]$, we have nonlinear terms such as $x^2[n]$ and divisions by $x[n]$, $x[n-1]$ and $x[n+1]$.

(b) Yes, the system is shift invariant. If we shift the input by n_0, $m_x[n]$ shifts by n_0 as well as $\sigma_x^2[n]$ and $\sigma_s^2[n]$, therefore $y[n]$ shifts by n_0 and the system is thus shift invariant.

(c) If $x[n]$ is bounded, $m_x[n]$ is bounded so is $\sigma_x^2[n]$ and $\sigma_s^2[n]$. As a result, $y[n]$ is bounded and therefore the system is stable.

(d) No, the system is not causal. Values of the output at time n depend on values of the input at time $n+1$ (through $\sigma_x^2[n]$ and $m_x[n]$). Since present values of the ouput depend of future values of the input, the system cannot be causal.

(e) When $\sigma_w^2[n]$ is very large, $\sigma_s^2[n]$ is zero, therefore:

$$\begin{aligned}y[n] &= m_x[n] \\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=n-1}^{n+1} x[k]\end{aligned}$$

which is the average of the previous, present and next value of the input.

When $\sigma_w^2[n]$ is very small (approximately zero), then:

$$y[n] = x[n].$$

$y[n]$ makes sense for these extreme cases, because in very small noise power, the ouput is equal to the input since the noise is negligible. On the other hand, in very large noise power, the input is too noisy and so the output is an average of the input.

2.89. (a)

$$E\{x[n]x[n]\} = \phi_{xx}[0].$$

(b)

$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) \\ &= W(e^{j\omega})H(e^{j\omega})W^*(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= \Phi_{ww}(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \\ &= \sigma_w^2 \frac{1}{1-\cos(\omega)+1/4}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\phi_{xx}[n] &= \phi_{ww}[n] * h[n] * h[-n] \\ &= \sigma_w^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \right) \\ &= \sigma_w^2 \phi_{hh}[n].\end{aligned}$$

2.90. (a)

$$\begin{aligned}\phi_{yx}[n] &= E\{y[k]x[k-n]\} \\ &= E\left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} h[r]x[k-r] \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]v[k-n-m] \right\}\end{aligned}$$

Note that $\phi_{xv}[n] = E\{x[p]v[p-\ell]\}$, therefore:

$$\begin{aligned}\phi_{yx}[n] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[r]h[m]E\{x[p]v[p-(n+\ell-s)]\} \\ &= h[-n] * h[n] * \phi_{xv}[n].\end{aligned}$$

$$\Phi_{yx}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{xv}(e^{j\omega}).$$

(b) No, consider $x[n]$ white and

$$\begin{aligned}v[n] &= -x[n] \\ \phi_{xv}[n] &= -\sigma_x^2 \delta[n] \\ \Phi_{xv}(e^{j\omega}) &= -\sigma_x^2.\end{aligned}$$

Noting that $|H(e^{j\omega})|^2$ is positive,

$$\Phi_{yx}(e^{j\omega}) = -\sigma_x^2 |H(e^{j\omega})|^2$$

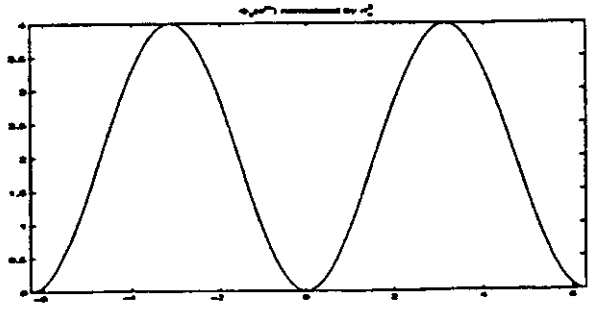
Hence, the cross power spectrum can be negative.

2.91. (a) Since $f[n] = e[n] - e[n-1]$,

$$H_1(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}.$$

$\Phi_{ff}(e^{j\omega})$ is given by:

$$\begin{aligned}\Phi_{ff}(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega}) H_1(e^{-j\omega}) \Phi_{ee}(e^{j\omega}) \\ &= (1 - e^{-j\omega})(1 - e^{j\omega})\sigma_e^2 \\ &= \sigma_e^2(2 - e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\ &= \sigma_e^2(2 - 2\cos(\omega)).\end{aligned}$$

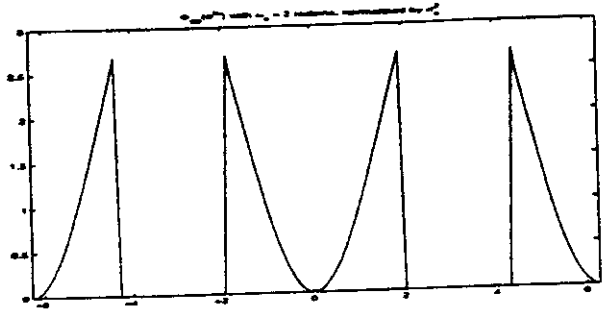


(b) $\phi_{ff}[m]$ is the inverse Fourier transform of $\Phi_{ff}(e^{j\omega})$. Using part (a), we get:

$$\phi_{ff}[m] = \sigma_e^2(2\delta[m] - \delta[m+1] - \delta[m-1]).$$

(c)

$$\begin{aligned}\Phi_{gg}(e^{j\omega}) &= H_2(e^{j\omega})H_2(e^{-j\omega})\Phi_{ff}(e^{j\omega}) \\ &= \begin{cases} \sigma_e^2(2-2\cos(\omega)) & , \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \quad \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases}\end{aligned}$$



(d)

$$\begin{aligned}\sigma_g^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{gg}(e^{j\omega})\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sigma_e^2(2-2\cos(\omega))\, d\omega \\ &= \frac{2\sigma_e^2}{\pi}(\omega_c - \sin(\omega_c)).\end{aligned}$$

Solutions – Chapter 3

The z-Transform

3.1. (a)

$$\mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)\right] &= -\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}(2z)^n \\ &= -\frac{2z}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| < \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c)

$$\mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]\right] = \sum_{n=-\infty}^{0}(2z)^n = \frac{1}{1-2z} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

(d)

$$\mathcal{Z}[\delta[n]] = z^0 = 1 \qquad \text{all } z$$

(e)

$$\mathcal{Z}[\delta[n-1]] = z^{-1} \qquad |z| > 0$$

(f)

$$\mathcal{Z}[\delta[n+1]] = z^{+1} \qquad 0 \le |z| < \infty$$

(g)

$$\mathcal{Z}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n]-u[n-10])\right] = \sum_{n=0}^{9}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}} \qquad |z| > 0$$

3.2.

$$x[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le N-1 \\ N, & N \le n \end{cases} = n\,u[n] - (n-N)u[n-N]$$

$$\begin{aligned} n\,x[n] &\Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z) \Rightarrow n\,u[n] \Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1 \\ n\,u[n] &\Leftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad |z|>1 \\ x[n-n_0] &\Leftrightarrow X(z)\cdot z^{-n_0} \Rightarrow (n-N)u[n-N] \Leftrightarrow \frac{z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad |z|>1 \end{aligned}$$

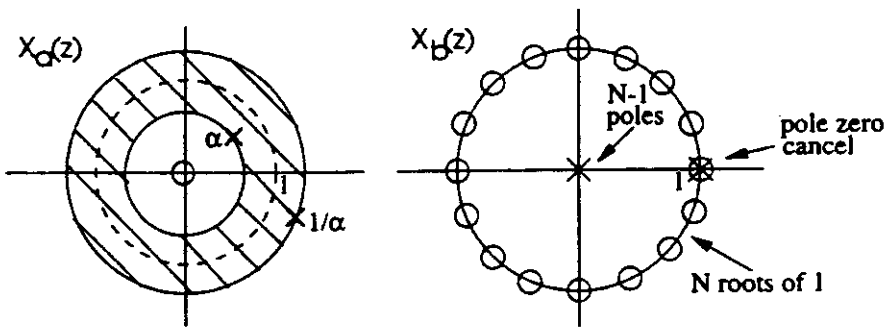
therefore

$$X(z) = \frac{z^{-1}-z^{-N-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z^{-1}(1-z^{-N})}{(1-z^{-1})^2}$$

3.3. (a)

$$x_a[n] = \alpha^{|n|} \qquad 0 < |\alpha| < 1$$

$$\begin{aligned} X_a(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} \\ &= \frac{\alpha z}{1-\alpha z} + \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z(1-\alpha^2)}{(1-\alpha z)(z-\alpha)}, \qquad |\alpha| < |z| < \frac{1}{|\alpha|} \end{aligned}$$



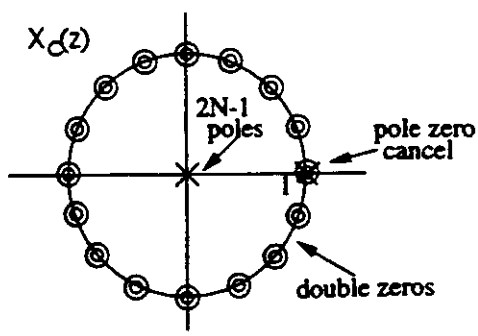
(b)

$$x_b = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & N \le n \\ 0, & n < 0 \end{cases} \Rightarrow X_b(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)} \qquad z \neq 0$$

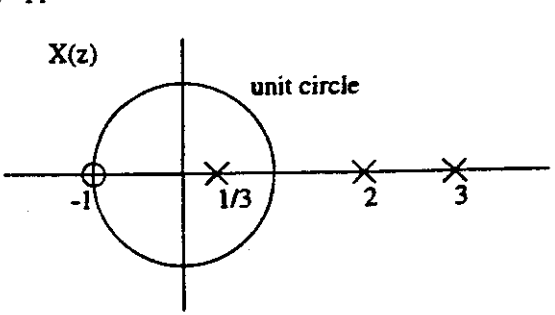
(c)

$$x_c[n] = x_b[n-1] * x_b[n] \Leftrightarrow X_c(z) = z^{-1} X_b(z) \cdot X_b(z)$$

$$X_c(z) = z^{-1}\left(\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}\right)^2 = \frac{1}{z^{2N-1}}\left(\frac{z^N-1}{z-1}\right)^2 \qquad z \neq 0, 1$$



3.4. The pole-zero plot of $X(z)$ appears below.



(a) For the Fourier transform of $x[n]$ to exist, the z-transform of $x[n]$ must have an ROC which includes the unit circle, therefore, $|\frac{1}{3}| < |z| < |2|$.
Since this ROC lies outside $\frac{1}{3}$, this pole contributes a right-sided sequence. Since the ROC lies inside 2 and 3, these poles contribute left-sided sequences. The overall $x[n]$ is therefore two-sided.

(b) Two-sided sequences have ROC's which look like washers. There are two possibilities. The ROC's corresponding to these are: $|\frac{1}{3}| < |z| < |2|$ and $|2| < |z| < |3|$.

(c) The ROC must be a connected region. For stability, the ROC must contain the unit circle. For causality the ROC must be outside the outermost pole. These conditions cannot be met by any of the possible ROC's of this pole-zero plot.

3.5.

$$\begin{aligned} X(z) &= (1+2z)(1+3z^{-1})(1-z^{-1}) \\ &= 2z+5-4z^{-1}-3z^{-2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \end{aligned}$$

Therefore,

$$x[n] = 2\delta[n+1] + 5\delta[n] - 4\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$$

3.6. (a)

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Partial fractions: one pole $\rightarrow$ inspection, $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$

Long division:

$$\begin{array}{r} 1 \;-\frac{1}{2}z^{-1} \;+\frac{1}{4}z^{-2} \;+\ldots \\ 1+\frac{1}{2}z^{-1} \;\overline{)\; 1} \\ \underline{1 \;+\frac{1}{2}z^{-1}} \\ -\frac{1}{2}z^{-1} \\ \underline{-\frac{1}{2}z^{-1} \;-\frac{1}{4}z^{-2}} \\ +\frac{1}{4}z^{-2} \\ \underline{+\frac{1}{4}z^{-2} \;+\frac{1}{8}z^{-3}} \end{array}$$

$$\Longrightarrow x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(b)

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

Partial Fractions: one pole $\rightarrow$ inspection, $x[n] = -(-\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

Long division:

$$\begin{array}{r|l} & 2z \;-\; 4z^2 \;+\; 8z^3 \;+\; \ldots \\ \hline \frac{1}{2}z^{-1}+1 & 1 \\ & \underline{1 \;+\; 2z} \\ & \quad -2z \\ & \quad \underline{-2z \;-\; 4z^2} \\ & \qquad\quad +4z^2 \\ & \qquad\quad \underline{+4z^2 \;+\; 8z^3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow x[n] = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

(c)

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Partial Fractions:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2} \\ x[n] &= \left[-3\left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n] \end{aligned}$$

Long division:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \;+\; (-\frac{3}{4}-\frac{1}{2})z^{-1} \;+\; (-\frac{3}{16}+1)z^{-2} \;+\; \ldots \\ \hline 1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2} & 1 \;-\; \frac{1}{2}z^{-1} \\ & \underline{1 \;+\; \frac{3}{4}z^{-1} \;+\; \frac{1}{8}z^{-2}} \\ & \quad (-\frac{3}{4}-\frac{1}{2})z^{-1} \;-\; \frac{1}{8}z^{-2} \\ & \quad \underline{(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2})z^{-1} \;+\; \frac{3}{4}(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2})z^{-2} \;+\; \frac{1}{8}(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2})z^{-3}} \\ & \qquad\qquad [-\frac{1}{8}+\frac{3}{4}(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})]z^{-2} \;+\; \frac{1}{8}(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})z^{-3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow x[n] = \left[-3\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] u[n]$$

(d)

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Partial Fractions:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2} \\ x[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

Long division: see part (i) above.

(e)

$$X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} \quad |z| > |a^{-1}|$$

Partial Fractions:

$$X(z) = -a - \frac{a^{-1}(1 - a^2)}{1 - a^{-1}z^{-1}} \qquad |z| > |a^{-1}|$$

$$x[n] = -a\delta[n] - (1 - a^2)a^{-(n+1)}u[n]$$

Long division:

$$\begin{array}{r|ll} & -\frac{1}{a} \quad -(\frac{a^{-1}-a}{a})z^{-1} \quad -(\frac{a^{-1}-a}{a^2})z^{-2} \quad + \ldots \\ -a + z^{-1} & 1 \qquad -az^{-1} \\ & 1 \qquad -az^{-1} \\ \hline & (a^{-1} - a)z^{-1} \qquad \ldots \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad x[n] = -a\delta[n] - (1 - a^2)a^{-(n+1)}u[n]$$

3.7. (a)

$$x[n] = u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\Rightarrow \qquad X(z) = \frac{-1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 1$$

Now to find $H(z)$ we simply use $H(z) = Y(z)/X(z)$; i.e.,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + z^{-1})} \cdot \frac{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$H(z)$ causal $\Rightarrow$ ROC $|z| > 1$.

(b) Since one of the poles of $X(z)$, which limited the ROC of $X(z)$ to be less than 1, is cancelled by the zero of $H(z)$, the ROC of $Y(z)$ is the region in the z-plane that satisfies the remaining two constraints $|z| > \frac{1}{2}$ and $|z| > 1$. Hence $Y(z)$ converges on $|z| > 1$.

(c)

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 + z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

Therefore,

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}(-1)^n u[n]$$

3.8. The causal system has system function

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

and the input is $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + u[-n-1]$. Therefore the z-transform of the input is

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - z^{-1})} \qquad \frac{1}{3} < |z| < 1$$

(a) $h[n]$ causal $\Rightarrow$

$$h[n] = \left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n] - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(b)

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})} \qquad \frac{3}{4} < |z| \\ &= \frac{-\frac{8}{13}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{8}{13}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} \end{aligned}$$

Therefore the output is

$$y[n] = -\frac{8}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{8}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(c) For $h[n]$ to be causal the ROC of $H(z)$ must be $\frac{3}{4} < |z|$ which includes the unit circle. Therefore, $h[n]$ absolutely summable.

3.9.

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} - \frac{1}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$

(a) $h[n]$ causal $\Rightarrow$ ROC outside $|z| = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$.

(b) ROC includes $|z| = 1 \Rightarrow$ stable.

(c)

$$\begin{aligned} y[n] &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1] \\ Y(z) &= \frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}} \\ &= \frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-2z^{-1})} \qquad \frac{1}{4} < |z| < 2 \\ X(z) &= \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-2z^{-1})} \qquad |z| < 2 \\ x[n] &= -(2)^n u[-n-1] + \frac{1}{2}(2)^{n-1} u[-n] \end{aligned}$$

(d)

$$h[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

3.10. (a)

$$\begin{aligned} x[n] &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-10] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-10] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \\ &\quad - \left[\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)(u[n] - u[n-11])\right] \end{aligned}$$

The last term is finite length and converges everywhere except at $z = 0$.
Therefore, ROC outside largest pole $\frac{3}{4} < |z|$.

(b)

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -10 \le n \le 10 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Finite length but has positive and negative powers at z in its $X(z)$. Therefore the ROC is $0 < |z| < \infty$.

(c)

$$\begin{aligned} x[n] &= 2^n u[-n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] \\ x[-n] &\leftrightarrow X(1/z) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] &\Rightarrow \text{ROC is} \quad |z| > \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] &\Rightarrow \text{ROC is} \quad |z| < 2 \end{aligned}$$

(d)

$$x[n] = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+4} - (e^{j\pi/3})^n\right] u[n-1]$$

$x[n]$ is right-sided, so its ROC extends outward from the outermost pole $e^{j\pi/3}$. But since it is non-zero at $n = -1$, the ROC does not include ∞. So the ROC is $1 < |z| < \infty$.

(e)

$$\begin{aligned} x[n] &= u[n+10] - u[n+5] \\ &= \begin{cases} 1, & -10 \le n \le -6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

$x[n]$ is finite-length and has only positive powers of z in its $X(z)$. So the ROC is $|z| < \infty$.

(f)

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n] + (2+3j)^{n-2} u[-n-1]$$

$x[n]$ is two-sided, with two poles. Its ROC is the ring between the two poles: $\frac{1}{2} < |z| < \left|\frac{1}{2+3j}\right|$, or $\frac{1}{2} < |z| < \frac{1}{\sqrt{13}}$.

3.11.

$$x[n] \text{ causal } \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

which means this summation will include *no* positive powers of z. This means that the closed form of $X(z)$ must converge at $z = \infty$, i.e., $z = \infty$ must be in the ROC of $X(z)$, or $\lim_{z\to\infty} X(z) \neq \infty$.

(a)

$$\lim_{z\to\infty} \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} = 1 \qquad \text{could be causal}$$

(b)

$$\lim_{z\to\infty} \frac{(z-1)^2}{(z-\frac{1}{2})} = \infty \qquad \text{could not be causal}$$

(c)

$$\lim_{z\to\infty} \frac{(z-\frac{1}{4})^5}{(z-\frac{1}{2})^6} = 0 \qquad \text{could be causal}$$

(d)

$$\lim_{z\to\infty} \frac{(z-\frac{1}{4})^6}{(z-\frac{1}{2})^5} = \infty \qquad \text{could not be causal}$$

3.12. (a)

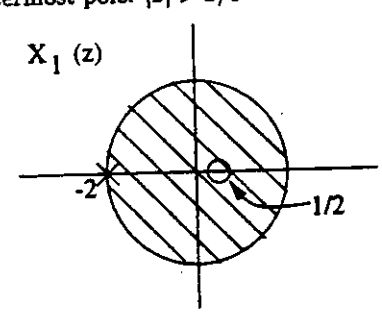
$$X_1(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+2z^{-1}}$$

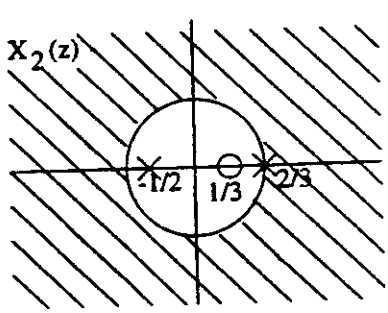
The pole is at -2, and the zero is at 1/2.

(b)

$$X_2(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}$$

The poles are at -1/2 and 2/3, and the zero is at 1/3. Since $x_2[n]$ is causal, the ROC is extends from the outermost pole: $|z| > 2/3$.

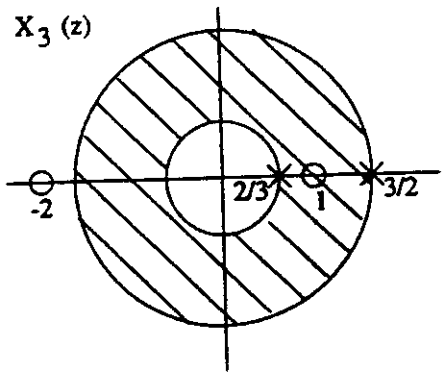




(c)

$$X_3(z) = \frac{1+z^{-1}-2z^{-2}}{1-\frac{13}{6}z^{-1}+z^{-2}}$$

The poles are at 3/2 and 2/3, and the zeros are at 1 and -2. Since $x_3[n]$ is absolutely summable, the ROC must include the unit circle: $2/3 < |z| < 3/2$.



3.13.

$$\begin{aligned} G(z) &= \sin(z^{-1})(1+3z^{-2}+2z^{-4}) \\ &= (z^{-1}-\frac{z^{-3}}{3!}+\frac{z^{-5}}{5!}-\frac{z^{-7}}{7!})(1+3z^{-2}+2z^{-4}) \\ &= \sum_n g[n]z^{-n} \end{aligned}$$

$g[11]$ is simply the coefficient in front of z^{-11} in this power series expansion of $G(z)$:

$$g[11] = -\frac{1}{11!}+\frac{3}{9!}-\frac{2}{11!}.$$

3.14.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \\ &= \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} \\ &= \frac{0.5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{0.5}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}$$

Taking the inverse z-Transform:

$$h[n] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

So,

$$A_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}; \quad A_2 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2};$$

3.15. Using long division, we get

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1-\frac{1}{1024}z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \sum_{n=0}^{n=9}(\frac{1}{2})^n z^{-n} \end{aligned}$$

Taking the inverse z-transform,

$$h[n] = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & n = 0,1,2,\ldots,9 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Since $h[n]$ is 0 for $n < 0$, the system is causal.

3.16. (a) To determine $H(z)$, we first find $X(z)$ and $Y(z)$:

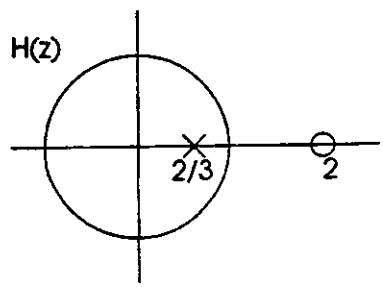
$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}} \\ &= \frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}, \qquad \frac{1}{3} < |z| < 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{5}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \\ &= \frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}, \qquad |z| > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{2}{3} \end{aligned}$$

The pole-zero plot of $H(z)$ is plotted below.



(b) Taking the inverse z-transform of $H(z)$, we get

$$\begin{aligned} h[n] &= (\frac{2}{3})^n u[n] - 2(\frac{2}{3})^{n-1} u[n-1] \\ &= (\frac{2}{3})^n (u[n] - 3u[n-1]) \end{aligned}$$

(c) Since

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}},$$

we can write

$$Y(z)(1-\frac{2}{3}z^{-1}) = X(z)(1-2z^{-1}),$$

whose inverse z-transform leads to

$$y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$$

(d) The system is stable because the ROC includes the unit circle. It is also causal since the impulse response $h[n] = 0$ for $n < 0$.

3.17. We solve this problem by finding the system function $H(z)$ of the system, and then looking at the different impulse responses which can result from our choice of the ROC.

Taking the z-transform of the difference equation, we get

$$Y(z)(1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}) = X(z)(1-z^{-1}),$$

and thus

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{1-z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$
$$= \frac{2/3}{1-2z^{-1}} + \frac{1/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

If the ROC is

(a) $|z| < \frac{1}{2}$:

$$h[n] = -\frac{2}{3}2^n u[-n-1] - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$$
$$\Longrightarrow \quad h[0] = 0.$$

(b) $\frac{1}{2} < |z| < 2$:

$$h[n] = -\frac{2}{3}2^n u[-n-1] + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n u[n]$$
$$\Longrightarrow \quad h[0] = \frac{1}{3}.$$

(c) $|z| > 2$:

$$h[n] = \frac{2}{3}2^n u[n] + \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n u[n]$$
$$\Longrightarrow \quad h[0] = 1.$$

(d) $|z| > 2$ or $|z| < \frac{1}{2}$:

$$h[n] = \frac{2}{3}2^n u[n] - \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^n u[n-1]$$
$$\Longrightarrow \quad h[0] = \frac{2}{3}.$$

3.18. (a)

$$H(z) = \frac{1+2z-1+z^{-2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$
$$= -2 + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{8}{3}}{1-z^{-1}}$$

Taking the inverse z-transform:

$$h[n] = -2\delta[n] + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{8}{3}u[n].$$

(b) We use the eigenfunction property of the input:

$$y[n] = H(e^{j\pi/2})x[n],$$

where

$$H(e^{j\pi/2}) = -2 + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}} + \frac{\frac{8}{3}}{1-e^{-j\pi/2}}$$
$$= -2 + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}j} + \frac{\frac{8}{3}}{1+j}$$
$$= \frac{-2j}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Putting it together,

$$y[n] = \frac{-2j}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}e^{j(\pi/2)n}.$$

3.19. The ROC($Y(z)$) includes the intersection of ROC($H(z)$) and ROC($X(z)$).

(a)

$$Y(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$$

The intersection of ROCs of $H(z)$ and $X(z)$ is $|z| > \frac{1}{2}$. So the ROC of $Y(z)$ is $|z| > \frac{1}{2}$.

(b) The ROC of $Y(z)$ is exactly the intersection of ROCs of $H(z)$ and $X(z)$: $\frac{1}{3} < |z| < 2$.

(c)

$$Y(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{6}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$$

The ROC is $|z| > \frac{1}{3}$.

3.20. In both cases, the ROC of $H(z)$ has to be chosen such that ROC($Y(z)$) includes the intersection of ROC($H(z)$) and ROC($X(z)$).

(a)

$$H(z) = \frac{1-\frac{3}{4}z^{-1}}{1+\frac{2}{3}z^{-1}}$$

The ROC is $|z| > \frac{2}{3}$.

(b)

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}$$

3.21. (a) The ROC is $|z| > \frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}
y[n] &= 0 \qquad n < 0 \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \qquad 0 \le n < N-1 \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} = a^{n+1}\frac{1-a^{-N}}{a-1}, \qquad n \ge N
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a| \\
X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 0
\end{aligned}$$

Therefore,

$$Y(z) = \frac{1-z^{-N}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} - \frac{z^{-N}}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} \qquad |z| > |a|$$

Now,

$$\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{\frac{1}{1-a^{-1}}}{1-az^{-1}} + \frac{\frac{1}{1-a}}{1-z^{-1}} = \left(\frac{1}{1-a}\right)\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right)$$

So

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\frac{1}{1-a}\right)\left[u[n]-a^{n+1}u[n]-u[n-N]-a^{n-N+1}u[n-N]\right] \\ &= \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]-\frac{1-a^{n-N+1}}{1-a}u[n-N] \end{aligned}$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0 \le n \le N-1 \\ a^{n+1}\left(\frac{1-a^{-N}}{a-1}\right) & n \ge N \end{cases}$$

3.22. (a)

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(3\left(-\frac{1}{3}\right)^k u[k]\right)u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \begin{cases} \frac{9}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right), & n \ge 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ &= \frac{3}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{\frac{9}{4}}{1-z^{-1}} \\ y[n] &= \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\frac{9}{4}u[n] \\ &= \frac{9}{4}\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)u[n] \\ &= \frac{9}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)u[n] \end{aligned}$$

3.23. (a)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} \\ &= -4+\frac{5+\frac{7}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} \\ &= -4-\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{7}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \\ h[n] &= -4\delta[n]-2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+7\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

(b)

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

3.24. The plots of the sequences are shown below.

(a) Let

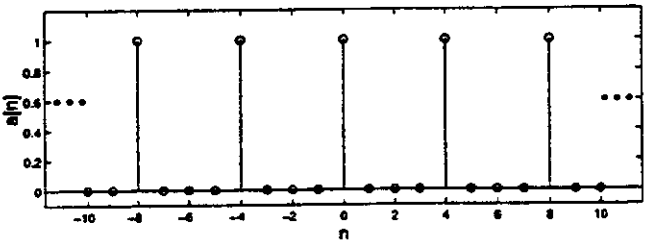
$$a[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k],$$

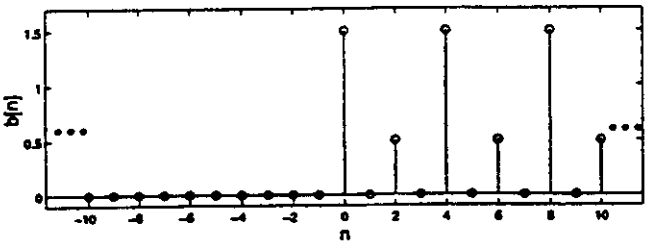
Then

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-4n}$$

(b)

$$\begin{aligned} b[n] &= \frac{1}{2}\left[e^{j\pi n} + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right] u[n] \\ &= \frac{1}{2}\left[(-1)^n + \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 1\right] u[n] \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2}, & n = 4k,\ k \geq 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 4k+2,\ k \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ B(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2} z^{-4n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} z^{-(4n+2)} \\ &= \frac{3/2 + 1/2z^{-2}}{1 - z^{-4}}, \quad |z| > 1 \end{aligned}$$





3.25.

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{z^2}{z^2 - (a+b)z + ab}$$

Obtain a proper fraction:

$$
\begin{array}{r|l}
z^2-(a+b)z+ab & 1 \\
\hline
 & z^2 \\
 & \underline{z^2 \quad -(a+b)z \quad +ab} \\
 & \quad (a+b)z \quad -ab
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= 1+\frac{(a+b)z-ab}{(z-a)(z-b)} = 1+\frac{\frac{(a+b)a-ab}{a-b}}{z-a}+\frac{\frac{(a+b)b-ab}{b-a}}{z-b} \\
&= 1+\frac{\frac{a^2}{a-b}}{z-a}-\frac{\frac{b^2}{a-b}}{z-b} = 1+\frac{1}{a-b}\left(\frac{a^2z^{-1}}{1-az^{-1}}-\frac{b^2z^{-1}}{1-bz^{-1}}\right) \\
x[n] &= \delta[n]+\frac{a^2}{a-b}a^{n-1}u[n-1]-\frac{b^2}{a-b}b^{n-1}u[n-1] \\
&= \delta[n]+\left(\frac{1}{a-b}\right)(a^{n+1}-b^{n+1})u[n-1]
\end{aligned}
$$

3.26. (a) $x[n]$ is right-sided and

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Long division:

$$
\begin{array}{r|l}
1+\frac{1}{3}z^{-1} & 1 \quad -\frac{2}{3}z^{-1} \quad +\frac{2}{9}z^{-2} \quad +\cdots \\
\hline
 & 1 \quad -\frac{1}{3}z^{-1} \\
 & \underline{1 \quad -\frac{1}{3}z^{-1}} \\
 & \quad -\frac{2}{3}z^{-1} \\
 & \quad \underline{-\frac{2}{3}z^{-1} \quad -\frac{2}{9}z^{-2}} \\
 & \qquad +\frac{2}{9}z^{-2}
\end{array}
$$

Therefore, $x[n]=2(-\frac{1}{3})^n u[n]-\delta[n]$

(b)

$$X(z)=\frac{3}{z-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}z^{-1}}=\frac{3z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{4}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Poles at $\frac{1}{2}$, and $-\frac{1}{4}$. $x[n]$ stable, $\Rightarrow |z|>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ causal.
Therefore,

$$x[n]=4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-4\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

(c)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \ln(1-4z) \qquad |z|<\frac{1}{4} \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(4z)^i}{i} = -\sum_{\ell=-\infty}^{-1}\frac{1}{\ell}(4z)^{-\ell}
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$x[n]=\frac{1}{n}(4)^{-n}u[-n-1]$$

(d)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-3}} \qquad |z| > (3)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \text{ causal}$$

By long division:

$$\begin{array}{r|l} & 1 + \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{1}{9}z^{-6} + \ldots \\ \hline 1 - \frac{1}{3}z^{-3} & 1 \\ & 1 - \frac{1}{3}z^{-3} \\ \hline & \quad + \frac{1}{3}z^{-3} \\ & \quad + \frac{1}{3}z^{-3} - \frac{1}{9}z^{-6} \\ \hline & \qquad + \frac{1}{9}z^{-6} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \qquad x[n] = \begin{cases} (\frac{1}{3})^{\frac{n}{3}}, & n = 0, 3, 6, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.27. (a)

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})} \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2 \\ &= \frac{\frac{1}{35}}{(1+\frac{1}{2}z^{-2})^2} + \frac{\frac{88}{1225}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})} - \frac{\frac{1568}{1225}}{(1-2z^{-1})} + \frac{\frac{2700}{1225}}{(1-3z^{-1})} \end{aligned}$$

Therefore,

$$x[n] = \frac{1}{35}(n+1)\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] + \frac{58}{(35)^2}\left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1568}{(35)^2}(2)^n u[-n-1] - \frac{2700}{(35)^2}(3)^n u[-n-1]$$

(b)

$$X(z) = e^{z^{-1}} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-4}}{4!} + \ldots$$

Therefore, $x[n] = \frac{1}{n!}u[n]$.

(c)

$$X(z) = \frac{z^3 - 2z}{z-2} = z^2 + 2z + \frac{2}{1-2z^{-1}} \qquad |z| < 2$$

Therefore,

$$x[n] = \delta[n+2] + 2\delta[n+1] - 2(2)^n u[-n-1]$$

3.28. (a)

$$nx[n] \Leftrightarrow -z\frac{d}{dx}X(z)$$

$$x[n-n_0] \Leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$$

$$X(z) = \frac{3z^{-3}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})^2} = 12z^{-2}\left[-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)\right]$$

$x[n]$ is left-sided. Therefore, $X(z)$ corresponds to:

$$x[n] = -12(n-2)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[-n+1]$$

(b)

$$X(z) = \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \text{ROC includes } |z| = 1$$

Therefore,

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \delta[n+2k+1]$$

Which is stable.

(c)

$$X(z) = \frac{z^7 - 2}{1 - z^{-7}} = z^7 - \frac{1}{1 - z^{-7}} \qquad |z| > 1$$

$$X(z) = z^7 - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-7n}$$

Therefore,

$$x[n] = \delta[n+7] - \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n - 7k]$$

3.29.

$$X(z) = e^z + e^{1/z} \quad z \neq 0$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \Longrightarrow x[n] = \frac{1}{|n|!} + \delta[n]$$

3.30.

$$X(z) = \log_2(\frac{1}{2} - z) \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

(a)

$$X(z) = \log(1 - 2z) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2z)^i}{i} = -\sum_{\ell=-\infty}^{-1} \frac{1}{-\ell} (2z)^{-\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{1} \frac{1}{\ell} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} z^{-\ell}$$

Therefore,

$$x[n] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

(b)

$$nx[n] \quad \Leftrightarrow \quad -z\frac{d}{dz} \log(1 - 2z) = -z \left(\frac{1}{1-2z}\right)(-2) = z^{-1} \left(\frac{-1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right), \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

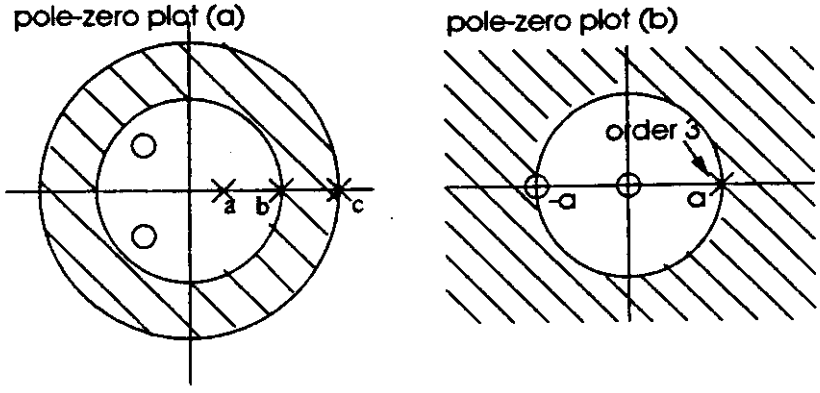
$$nx[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$x[n] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

3.31. (a)

$$\begin{aligned} x[n] &= a^n u[n] + b^n u[n] + c^n u[-n-1] && |a| < |b| < |c| \\ X(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-cz^{-1}} && |b| < |z| < |c| \\ X(z) &= \frac{1 - 2cz^{-1} + (bc+ac-ab)z^{-2}}{(1-az^{-1})(1-bz^{-1})(1-cz^{-1})} && |b| < |z| < |c| \end{aligned}$$

Poles: a, b, c,
Zeros: z_1, z_2, ∞ where z_1 and z_2 are roots of numerator quadratic.



(b)

$$\begin{aligned} x[n] &= n^2 a^n u[n] \\ x_1[n] &= a^n u[n] \Leftrightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} && |z| > a \\ x_2[n] = nx_1[n] &= na^n u[n] \Leftrightarrow X_2(z) = -z\frac{d}{dz}X_1(z) = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} && |z| > a \\ x[n] = nx_2[n] &= n^2 a^n u[n] \Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X_2(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}\right) && |z| > a \\ X(z) &= \frac{-az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3} && |z| > a \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x[n] &= e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)u[n] - e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)u[n-1] \\ &= e^{n^4}\left(\cos\frac{\pi}{12}n\right)(u[n] - u[n-1]) = \delta[n] \end{aligned}$$

Therefore, $X(z) = 1$ for all $|z|$.

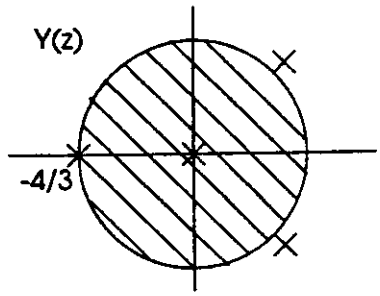
3.32. From the pole-zero diagram

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 - z + \frac{1}{2})(z + \frac{3}{4})} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[-n+3] = x[-(n-3)] \\ &\Rightarrow Y(z) = z^{-3}X(z^{-1}) = \frac{z^{-3}z^{-1}}{(z^{-2} - z^{-1} + \frac{1}{2})(z^{-1} + \frac{3}{4})} \\ &= \frac{8/3}{z(2 - 2z + z^2)(\frac{4}{3} + z)} \end{aligned}$$

Poles at $0, -\frac{4}{3}, 1 \pm j$, zeros at ∞

$x[n]$ causal $\Rightarrow$ $x[-n+3]$ is left-sided $\Rightarrow$ ROC is $0 < |z| < 4/3$.



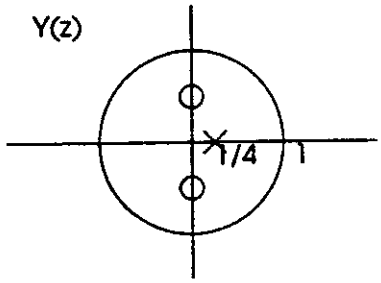
3.33. From pole-zero diagram

$$X(z) = \frac{z^2+1}{z-\frac{1}{2}}$$

(a)

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n] \Rightarrow Y(z) = X(2z) = \frac{4z^2+1}{2z-\frac{1}{2}}$$

zeros $\pm\frac{1}{2}j$
poles $\frac{1}{4}, \infty$



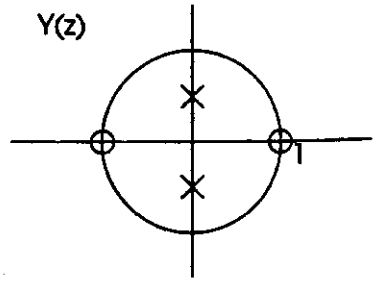
(b)

$$w[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) x[n] = \frac{1}{2}(e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2})x[n]$$

$$W(z) = \frac{1}{2}X(e^{-j\pi/2}z) + \frac{1}{2}X(e^{j\pi/2}z) = \frac{1}{2}X(-jz) + \frac{1}{2}X(jz)$$

$$W(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{-z^2+1}{-jz-\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-z^2+1}{jz-\frac{1}{2}}\right) = \frac{z^2-1}{2(z^2+\frac{1}{4})}$$

poles at $\pm\frac{1}{2}j$
zeros at ± 1



3.34.

$$H(z) = \frac{3 - 7z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = 5 + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] \text{ stable } \Rightarrow h[n] = 5\delta[n] - 2^n u[-n-1] - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

(a)

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \\ &= \begin{cases} -\sum_{k=-\infty}^{n} 2^k = -2^{n+1} & n < 0 \\ -\sum_{k-\infty}^{-1} 2^k + 5 - \sum_{k=0}^{n} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4 - 3\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \end{cases} \\ &= -2u[n] + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^{n+1}u[-n-1] \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}H(z) = -2\frac{1}{1-z^{-1}} + 2\frac{1}{1-2z^{-1}} + 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2 \\ y[n] &= -2u[n] - 2(2)^n u[-n-1] + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

3.35.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1-z^3}{1-z^4} = z^{-1}\left(\frac{1-z^{-3}}{1-z^{-4}}\right) \qquad |z| > 1 \\ u[n] &\Leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \qquad |z| > 1 \\ U(z)H(z) &= \frac{z^{-1} - z^{-4}}{(1-z^{-4})(1-z^{-1})} \\ &= \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-4}}{1-z^{-4}} \qquad |z| > 1 \\ u[n] * h[n] &= u[n-1] - \sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-4-4k] \end{aligned}$$

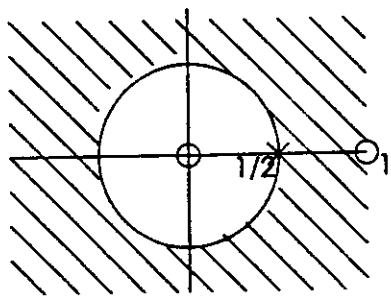
3.36.

$$x[n] = u[n] \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \Leftrightarrow Y(z) = \frac{4z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

(a)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(Z)} = \frac{4z(1 - z^{-1})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$



(b)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{4z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{2} \\ h[n] &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \\ &= 4\delta[n+1] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \end{aligned}$$

(c) The ROC of $H(z)$ includes $|z| = 1 \Rightarrow$ stable.

(d) From part (b) we see that $h[n]$ starts at $n = -1 \Rightarrow$ not causal

3.37.

$$X(z) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - 2z^{-1}}$$

has poles at $z = \frac{1}{2}$ and $z = 2$.

Since the unit circle is in the region of convergence $X(z)$ and $x[n]$ have both a causal and an anticausal part. The causal part is "outside" the pole at $\frac{1}{2}$. The anticausal part is "inside" the pole at 2, therefore, $x[0]$ is the sum of the two parts

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \lim_{z \to 0} \frac{\frac{1}{4}z}{z - 2} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

3.38.

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} \cdot \frac{2}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

Therefore using a contour C that lies outside of $|z| = 1$ we get

$$\begin{aligned} y[1] &= \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{2(z+1)z^n dz}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})(z-1)} \\ &= \frac{2(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})(\frac{1}{2}-1)} + \frac{2(-\frac{1}{3}+1)(-\frac{1}{3})}{(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2})(-\frac{1}{3}-1)} + \frac{2(1+1)(1)}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})} \\ &= -\frac{18}{5} - \frac{2}{5} + 6 = 2 \end{aligned}$$

3.39. (a)

$$X(z) = \frac{z^{10}}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})^{10}(z+\frac{3}{2})^2(z+\frac{5}{2})(z+\frac{7}{2})}$$

Stable $\Rightarrow$ ROC includes $|z| = 1$. Therefore, the ROC is $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

(b) $x[-8] = \Sigma$[residues of $X(z)z^{-9}$ inside C], where C is contour in ROC (say the unit circle).

$$x[8] = \Sigma\left[\text{residues of } \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{3}{2})^{10}(z+\frac{3}{2})^2(z+\frac{5}{2})(z+\frac{7}{2})} \text{ inside unit circle}\right]$$

First order pole at $z = \frac{1}{2}$ is only one inside the unit circle. Therefore

$$x[-8] = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2}-\frac{3}{2})^{10}(\frac{1}{2}+\frac{3}{2})^2(\frac{1}{2}+\frac{5}{2})(\frac{1}{2}+\frac{7}{2})} = \frac{1}{96}$$

3.40. (a) After writing the following equalities:

$$\begin{aligned} V(z) &= X(z) - W(z) \\ W(z) &= V(z)H(z) + E(z) \end{aligned}$$

we solve for W(z):

$$W(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)}X(z) + \frac{1}{1+H(z)}E(z)$$

(b)

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = z^{-1} \\ H_2(z) &= \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = 1 - z^{-1} \end{aligned}$$

(c) $H(z)$ is not stable due to its pole at $z = 1$, but $H_1(z)$ and $H_2(z)$ are.

3.41. (a) Yes, $h[n]$ is BIBO stable if its ROC includes the unit circle. Hence, the system is stable if $r_{min} < 1$ and $r_{max} > 1$.

(b) Let's consider the system step by step.

(i) First, $v[n] = \alpha^{-n}x[n]$. By taking the z-transform of both sides, $V(z) = X(\alpha z)$.

(ii) Second, $v[n]$ is filtered to get $w[n]$. So $W(z) = H(z)V(z) = H(z)X(\alpha z)$.

(iii) Finally, $y[n] = \alpha^n w[n]$. In the z-transform domain, $Y(z) = W(z/\alpha) = H(z/\alpha)X(z)$.

In conclusion, the system is LTI, with system function $G(z) = H(z/\alpha)$ and $g[n] = \alpha^n h[n]$.

(c) The ROC of $G(z)$ is $\alpha r_{min} < |z| < \alpha r_{max}$. We want $r_{min} < 1/\alpha$ and $r_{max} > 1/\alpha$ for the system to be stable.

3.42. (a) $h[n]$ is the response of the system when $x[n] = \delta[n]$. Hence,

$$h[n] + \sum_{k=1}^{10} \alpha_k h[n-k] = \delta[n] + \beta\delta[n-1],$$

Further, since the system is causal, $h[n] = 0$ for $n < 0$. Therefore,

$$h[0] + \sum_{k=1}^{10} \alpha_k h[-k] = h[0] = \delta[0] = 1.$$

(b) At $n = 1$,

$$h[1] + \alpha_1 h[0] = \delta[1] + \beta\delta[0] \qquad \Longrightarrow \alpha_1 = \frac{\beta - h[1]}{h[0]} = \beta - h[1]$$

(c) How can we extend h[n] for $n > 10$ and still have it compatible with the difference equation for S? Note that the difference equation can describe systems up to order 10. If we choose

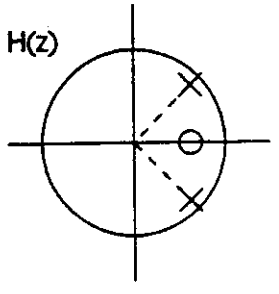
$$h[n] = (0.9)^n \cos(\frac{\pi}{4}n)u[n],$$

we only need a second order difference equation:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 = \alpha_{10} = 0.$$

The z-transform of $h[n]$ can be found from the z-transform table:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{0.9}{\sqrt{2}}}{(1 - 0.9e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j\pi/4}z^{-1})}$$



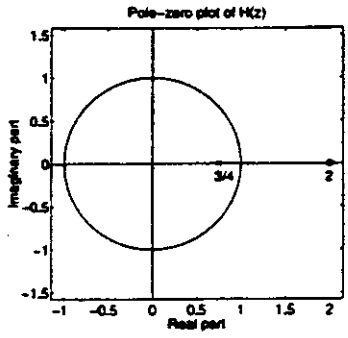
3.43. (a)

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$Y(z) = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})}}{\frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}}$$

$$= \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{3}{4}$$



(b)

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(c)

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$$

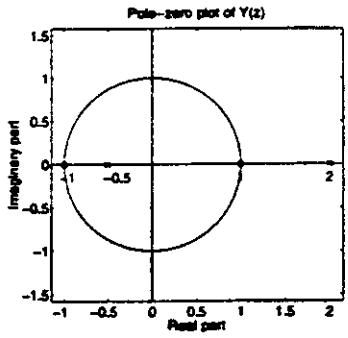
(d) The system is stable because the ROC includes the unit circle. It is also causal since $h[n] = 0$ for $n < 0$.

3.44. (a)

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{4}{3}}{1 - 2z^{-1}}$$

The ROC is $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

(b) The following figure shows the pole-zero plot of $Y(z)$. Since $X(z)$ has poles at 0.5 and 2, the poles at 1 and -0.5 are due to $H(z)$. Since $H(z)$ is causal, its ROC is $|z| > 1$. The ROC of $Y(z)$ must contain the intersection of the ROC of $X(z)$ and the ROC of $H(z)$. Hence the ROC of $Y(z)$ is $1 < |z| < 2$.



(c)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{\frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}}{\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}} \end{aligned}$$

$$= \frac{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$
$$= 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1-z^{-1}} + \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Taking the inverse z-transform, we find

$$h[n] = \delta[n] + \frac{2}{3}u[n] - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^n u[n]$$

(d) Since $H(z)$ has a pole on the unit circle, the system is not stable.

3.45. (a)

$$\begin{aligned} ny[n] &= x[n] \\ -z\frac{dY(z)}{dz} &= X(z) \\ Y(z) &= -\int z^{-1}X(z)dz \end{aligned}$$

(b) To apply the results of part (a), we let $x[n] = u[n-1]$, and $w[n] = y[n]$.

$$\begin{aligned} W(z) &= -\int z^{-1}\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}dz \\ &= -\int \frac{1}{z(z-1)}dz \\ &= -\int \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1}dz \\ &= \ln(z) - \ln(z-1) \end{aligned}$$

3.46. (a) Since $y[n]$ is stable, its ROC contains the unit-circle. Hence, $Y(z)$ converges for $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

(b) Since the ROC is a ring on the z-plane, $y[n]$ is a two-sided sequence.

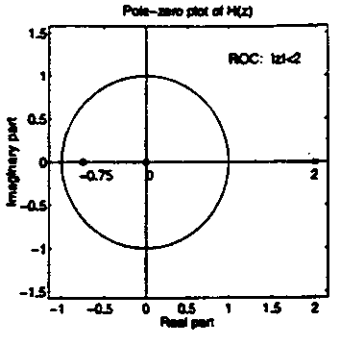
(c) $x[n]$ is stable, so its ROC contains the unit-circle. Also, it has a zero at ∞ so the ROC includes ∞. ROC: $|z| > \frac{3}{4}$.

(d) Since the ROC of $x[n]$ includes ∞, $X(z)$ contains no positive powers of z, and so $x[n] = 0$ for $n < 0$. Therefore $x[n]$ is causal.

(e)

$$\begin{aligned} x[0] &= X(z)|_{z=\infty} \\ &= \frac{A(1-\frac{1}{4}z^{-1})}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}|_{z=\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(f) $H(z)$ has zeros at -.75 and 0, and poles at 2 and ∞. Its ROC is $|z| < 2$.



(g) Since the ROC of $h[n]$ includes 0, $H(z)$ contains no negative powers of z, which implies that $h[n] = 0$ for $n > 0$. Therefore $h[n]$ is anti-causal.

3.47. (a)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(\infty) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]$$

Therefore, $X(\infty) = x[0] \neq 0$ and finite by assumption. Thus, $X(z)$ has neither a pole nor a zero at $z = \infty$.

(b) Suppose $X(z)$ has finite numbers of poles and zeros in the finite z-plane. Then the most general form for $X(z)$ is

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = Kz^{L} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - c_k)}{\prod_{K=1}^{N}(z - d_k)}$$

where K is a constant and M and N are finite positive integers and L is a finite positive or negative integer representing the net number of poles ($L < 0$) or zeros ($L > 0$) at $z = 0$. Clearly, since $X(\infty) = x[0] \neq 0$ and $< \infty$ we must have $L + M = N$; i.e., the total number of zeros in the finite z-plane must equal the total number of poles in the finite z-plane.

3.48.

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

where $P(z)$ and $Q(z)$ are polynomials in z. Sequence is absolutely summable $\Rightarrow$ ROC contains $|z| = 1$ and roots of $Q(z)$ inside $|z| = 1$.

These conditions do not necessarily imply that $x[n]$ is causal. A shift of a causal sequence would only add more zeros at $z = 0$ to $P(z)$. For example, consider

$$X(z) = \frac{z^2}{z - \frac{1}{2}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$= \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = z \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \Rightarrow \text{ right-sided but non-causal.}$$

3.49.

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n] + a\delta(n-N) \quad |a| < 1 \\ X(z) &= 1 + az^{-N} \\ \hat{X}(z) &= \log X(z) = \log(1+az^{-N}) = az^{-N} - \frac{a^2 z^{-2N}}{2} + \frac{a^3 z^{-3N}}{3} - \cdots \end{aligned}$$

Therefore,

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a^k \delta[n-kN]$$

3.50. (a)

$$x[n] = x[-n] \Longrightarrow X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Therefore,

$$X(z_0) = 0 = X\left(\frac{1}{z_0}\right)$$

i.e., $1/z_0$ is also a zero of $X(z)$.

(b)

$$x[n] \text{ real} \Longrightarrow x[n] = x^*[n] \Longrightarrow X(z) = X^*(z^*)$$

Therefore

$$X(z_0) = 0 = X(z_0^*)$$

i.e., z_0^* is also a zero and by part (a) so is $1/z_0^*$.

3.51. (a)

$$\mathcal{Z}[x^*[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^*[n] z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*)$$

(b)

$$\mathcal{Z}[x[-n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](z^{-1})^{-n} = X(z^{-1})$$

(c)

$$\mathcal{Z}[\mathcal{R}e\{x[n]\}] = \mathcal{Z}\left[\frac{x[n] + x^*[n]}{2}\right] = \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$$

(d)

$$\mathcal{Z}[\mathcal{I}m\{x[n]\}] = \mathcal{Z}\left[\frac{x[n] - x^*[n]}{2j}\right] = \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$$

3.52.

$$x_1(n) = (-1)^n x(n) \Rightarrow X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n) z^{-n} = X(-z)$$

The poles and zeros are rotated 180 degrees about the origin.

3.53. (a)

$$\theta_x(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}}{\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}}\right) \Longrightarrow \tan\theta_x(\omega) = \frac{-\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(n\omega)}{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(n\omega)}$$

$$\tan\theta_x(\omega)\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(\omega n) = -\sum_{n=1}^{N-1} x[n]\sin(n\omega)$$

$$\tan\theta_x(\omega)x[0] + \sum_{n=1}^{N-1} x[n](\tan\theta_x(\omega)\cos(n\omega) + \sin(n\omega)) = 0$$

$$\tan\theta_x(\omega_k) + \frac{1}{x[0]}\sum_{n=1}^{N-1} x[n](\tan\theta_x(\omega_k)\cos(n\omega_k) + \sin(n\omega_k)) = 0$$

for $N-1$ values of ω_k in the range $0 < \omega_k < \pi$.

(b) $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \Longrightarrow X(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

$$\theta_x(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-2\sin(\omega) - 3\sin(2\omega)}{1 + 2\cos(\omega) + 3\cos(2\omega)}\right)$$

Consider the values $\theta_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4}$ and $\theta_x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, which give the equations

$$\begin{aligned}
\tan\theta_x\left(\frac{\pi}{2}\right) &+ \frac{1}{x[0]}\left[x[1]\left(\tan\theta_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\right)\right. \\
&+ \left. x[2]\left(\tan\theta_x\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\pi + \sin\pi\right)\right] = 0 \\
\tan\theta_x\left(\frac{2\pi}{3}\right) &+ \frac{1}{x_0}\left[x[1]\left(\tan\theta_x\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)\right. \\
&+ \left. x[2]\left(\tan\theta_x\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{x[0]}(x[1]\cdot 1 + x[2]\cdot -1) &= 0 \\
-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x[0]}\left(x[1] + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x[2]\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x[0] + x[1] - x[2] &= 0 \\ -x[0] + 2x[1] - x[2] &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} x[1] &= 2x[0] \\ x[2] &= 3x[0] \end{aligned}\right.$$

Therefore

$$x[n] = x[0](\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2])$$

where $x[0]$ is undetermined.

3.54. $x[n] = 0$ for $n < 0$ implies:

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + \lim_{z\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0]$$

For the case $x[n] = 0$ for $n > 0$,

$$\lim_{z\to 0} X(z) = \lim_{z\to 0} \sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n} = x[0] + \lim_{z\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} x[-n]z^{n} = x[0]$$

3.55. (a)

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]x[n-k] = x[-n] * x[n]$$

$$C_{xx}(z) = X(z^{-1})X(z) = X(z)X(z^{-1})$$

$X(z)$ has ROC: $r_R < |z| < r_L$ and therefore $X(z^{-1})$ has ROC: $r_L^{-1} < |z| < r_R^{-1}$. Therefore $C_{xx}(z)$ has ROC: $\max[r_L^{-1}, r_R] < |z| < \min[r_R^{-1}, r_L]$

(b) $x[n] = a^n u[n]$ is stable if $|a| < 1$. In this case

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |a| < |z| \quad \text{and} \quad X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az} \qquad |z| < |a^{-1}|$$

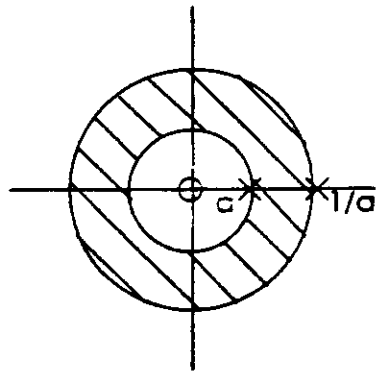
Therefore

$$\begin{aligned} C_{xx}(z) &= \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-az} = \frac{-az^{-1}}{(1-az^{-1})(1-a^{-1}z^{-1})} \\ &= \frac{\frac{1}{1-a^2}}{1-az^{-1}} - \frac{\frac{-a}{1-a^2}}{1-a^{-1}z^{-1}} \qquad |a| < |z| < |a^{-1}| \end{aligned}$$

This implies that

$$c_{xx}[n] = \frac{1}{1-a^2}\left[a^n u[n] + a^{-n}u[-n-1]\right]$$

Thus, in summary, the poles are at a and a^{-1}; the zeros are at 0 and ∞; and the ROC of $C_{xx}(z)$ is $|a| < |z| < |a^{-1}|$.



(c) Clearly, $x_1[n] = x[-n]$ will have the same autocorrelation function. For example,

$$X_1(z) = \frac{1}{1-az} \qquad |z| < |a^{-1}| \Longrightarrow C_{x_1x_1}(z) = \frac{1}{1-az}\frac{1}{1-az^{-1}} = C_{xx}(z)$$

(d) Also, any delayed version of $x[n]$ will have the same autocorrelation function; e.g., $x_2[n] = x[n-m]$ implies

$$X_2(z) = \frac{z^{-m}}{1-az^{-1}} \qquad |a| < |z| \Longrightarrow C_{x_2x_2}(z) = \frac{z^{-m}}{1-az^{-1}}\frac{z^{m}}{1-az} = C_{xx}(z)$$

3.56. In order to be a z-transform, $X(z)$ must be analytic in some annular region of the z-plane. To determine if $X(z) = z^*$ is analytic we examine the existence of $X'(z)$ by the Cauchy Riemann conditions. If

$$X(z) = X(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$$

then for the derivative to exist at z, we must have

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

In our case,

$$X(x + jy) = x - jy$$

and thus,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

unless x and y are zero. Thus, $X'(z)$ exists only at $z = 0$. $X(z)$ is not analytic anywhere. Therefore,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad \text{does not exist.}$$

3.57. If $X(z)$ has a pole at $z = z_0$ then $A(z)$ can be expressed as a Taylor's series about $z = z_0$.

$$A(z) = A(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

where $A(z_0) = 0$. Thus

$$\begin{aligned}
\text{Res } [X(z) \text{ at } z = z_0] &= X(z)(z - z_0)|_{z=z_0} = \left. \frac{B(z)}{A(z)} \right|_{z=z_0} \\
&= \left. \frac{B(z)(z - z_0)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n} \right|_{z=z_0} \\
&= \left. \frac{B(z)}{A'(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1}} \right|_{z=z_0} = \frac{B(z_0)}{A'(z_0)}
\end{aligned}$$

Solutions – Chapter 4

Sampling of Continuous-Time Signals

4.1.

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \\ &= \sin\left(2\pi(100)n\frac{1}{400}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

4.2. The discrete-time sequence

$$x[n] = \cos(\frac{\pi n}{4})$$

results by sampling the continuous-time signal

$$x_c(t) = \cos(\Omega_o t).$$

Since $\omega = \Omega T$ and $T = 1/1000$ seconds, the signal frequency could be:

$$\Omega_o = \frac{\pi}{4} \cdot 1000 = 250\pi$$

or possibly:

$$\Omega_o = (2\pi + \frac{\pi}{4}) \cdot 1000 = 2250\pi.$$

4.3. (a) Since $x[n] = x_c(nT)$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi n}{3} &= 4000\pi nT \\ T &= \frac{1}{12000} \end{aligned}$$

(b) No. For example, since

$$\cos(\frac{\pi}{3}n) = \cos(\frac{7\pi}{3}n),$$

T can be 7/12000.

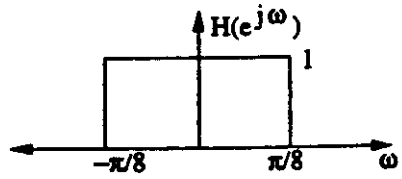
4.4. (a) Letting $T = 1/100$ gives

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \\ &= \sin\left(20\pi n\frac{1}{100}\right) + \cos\left(40\pi n\frac{1}{100}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

(b) No, another choice is $T = 11/100$:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \\ &= \sin\left(20\pi n\frac{11}{100}\right) + \cos\left(40\pi n\frac{11}{100}\right) \\ &= \sin\left(\frac{11\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{22\pi n}{5}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \end{aligned}$$

4.5. A plot of $H(e^{j\omega})$ appears below.



(a)

$$x_c(t) = 0, \quad , |\Omega| \geq 2\pi \cdot 5000$$

The Nyquist rate is 2 times the highest frequency. $\Rightarrow T = \frac{1}{10,000}$ sec. This avoids all aliasing in the C/D converter.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= 10kHz \\ \omega &= T\Omega \\ \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{10,000}\Omega_c \\ \Omega_c &= 2\pi \cdot 625\text{rad/sec} \\ f_c &= 625Hz \end{aligned}$$

(c)

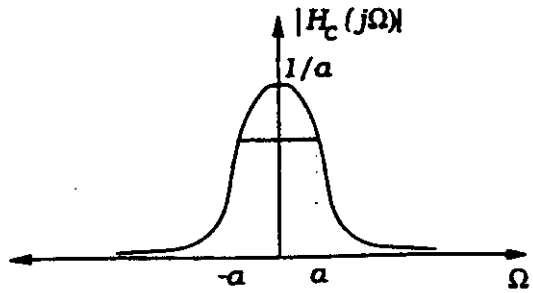
$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= 20kHz \\ \omega &= T\Omega \\ \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{20,000}\Omega_c \\ \Omega_c &= 2\pi \cdot 1250\text{rad/sec} \\ f_c &= 1250Hz \end{aligned}$$

4.6. (a) The Fourier transform of the filter impulse response

$$\begin{aligned} H_c(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_c(t)e^{-j\Omega t}\,dt \\ &= \int_0^{\infty} a^{-at}e^{-j\Omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{a+j\Omega} \end{aligned}$$

So, we take the magnitude

$$|H_c(j\Omega)| = \left(\frac{1}{a^2+\Omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$



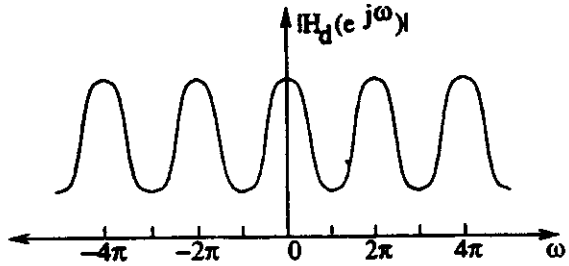
(b) Sampling the filter impulse response in (a), the discrete-time filter is described by

$$\begin{aligned} h_d[n] &= Te^{-anT}u[n] \\ H_d(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\infty} Te^{-anT}e^{-j\omega n} \\ &= \frac{T}{1-e^{-aT}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Taking the magnitude of this response

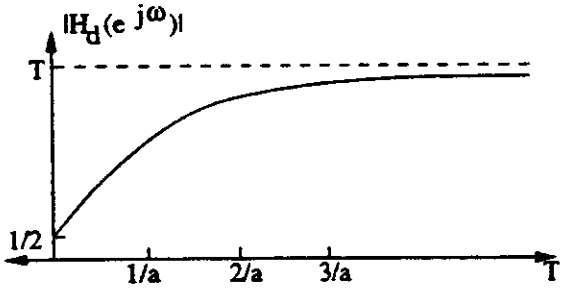
$$|H_d(e^{j\omega})| = \frac{T}{(1-2e^{-aT}\cos(\omega)+e^{-2aT})^{\frac{1}{2}}}.$$

Note that the frequency response of the discrete-time filter is periodic, with period 2π.



(c) The minimum occurs at $\omega = \pi$. The corresponding value of the frequency response magnitude is

$$\begin{aligned} |H_d(e^{j\pi})| &= \frac{T}{(1+2e^{-aT}+e^{-2aT})^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{T}{1+e^{-aT}}. \end{aligned}$$



4.7. The continuous-time signal contains an attenuated replica of the original signal with a delay of τ_d.

$$x_c(t) = s_c(t) + \alpha s_c(t-\tau_d)$$

(a) Taking the Fourier transform of the analog signal:

$$X_c(j\Omega) = S_c(j\Omega)\cdot(1+\alpha e^{-j\tau_d\Omega})$$

Note that $X_c(j\Omega)$ is zero for $|\Omega| > \pi/T$. Sampling the continuous-time signal yields the discrete-time sequence, $x[n]$. The Fourier transform of the sequence is

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_c\left(\frac{j\omega}{T}+j\frac{2\pi r}{T}\right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} S_c\left(\frac{j\omega}{T}+j\frac{2\pi r}{T}\right)e^{-j\tau_d\left(\frac{j\omega}{T}+\frac{2\pi r}{T}\right)}. \end{aligned}$$

(b) The desired response:

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1 + \alpha e^{-j\tau_d\Omega}, & \text{for } |\Omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Using $\omega = \Omega T$, we obtain a discrete-time system which simulates the above response:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \alpha e^{-j\frac{\tau_d}{T}\omega}$$

(c) We need to take the inverse Fourier transform of the discrete-time impulse response of part (b).

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1 + \alpha e^{-j\frac{\tau_d}{T}\omega})e^{j\omega n}\,d\omega \end{aligned}$$

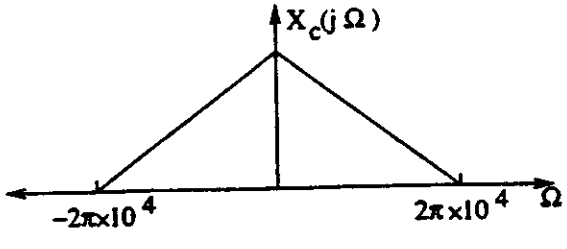
(i) Consider the case when $\tau_d = T$:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{j\omega n} + \alpha e^{j\omega(n-1)})\,d\omega \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\alpha\sin[\pi(n-1)]}{\pi(n-1)} \\ &= \delta[n] + \alpha\delta[n-1] \end{aligned}$$

(ii) For $\tau_d = T/2$:

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{j\omega n} + \alpha e^{j\omega(n-\frac{1}{2})})\,d\omega \\ &= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} + \frac{\alpha\sin[\pi(n-\frac{1}{2})]}{\pi(n-\frac{1}{2})} \\ &= \delta[n] + \frac{\alpha\sin[\pi(n-\frac{1}{2})]}{\pi(n-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

4.8. A plot of $X_c(j\Omega)$ appears below.



(a) For $x_c(t)$ to be recoverable from $x[n]$, the transform of the discrete signal must have no aliasing. When sampling, the radian frequency is related to the analog frequency by

$$\omega = \Omega T.$$

No aliasing will occur if the sampling interval satisfies the Nyquist Criterion. Thus, for the band-limited signal, $x_c(t)$, we should select T as:

$$T \leq \frac{1}{2 \times 10^4}.$$

(b) Assuming that the system is linear and time-invariant, the convolution sum describes the input-output relationship.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

We are given

$$\begin{aligned} y[n] &= T \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] \end{aligned}$$

Hence, we may infer that the impulse response of the system

$$h[n] = T \cdot u[n].$$

(c) We use the expression for $y[n]$ as given and examine the limit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y[n] &= \lim_{n\to\infty} T \cdot \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \\ &= T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \end{aligned}$$

Recall the analysis equation for the Fourier transform:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Hence,

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = T \cdot X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$$

(d) We use the result from part (c). Noting that

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(\frac{j\omega}{T} + \frac{j2\pi r}{T}).$$

Thus, we have

$$T \cdot X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(\frac{j2\pi r}{T})$$

From the given information, we seek a value of T such that:

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c(\frac{j2\pi r}{T}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)\,dt \\ &= X_c(j\Omega)|_{\Omega=0} \end{aligned}$$

For the final equality to be true, there must be no contribution from the terms for which $r \neq 0$. That is, we require no aliasing at $\Omega = 0$. Since we are only interested in preserving the spectral component at $\Omega = 0$, we may sample at a rate which is lower than the Nyquist rate. The maximum value of T to satisfy these conditions is

$$T \leq \frac{1}{1 \times 10^4}.$$

4.9. (a) Since $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$, $X(e^{j\omega})$ is periodic with period π.

(b) Using the inverse DTFT,

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j(\omega-\pi)})e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j(\omega+\pi)n}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{j\pi n}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &= (-1)^n x[n]. \end{aligned}$$

All odd samples of $x[n] = 0$, because $x[n] = -x[n]$. Hence $x[3] = 0$.

(c) Yes, $y[n]$ contains all even samples of $x[n]$, and all odd samples of $x[n]$ are 0.

$$x[n] = \begin{cases} y[n/2], & n \text{ even} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.10. Use $x[n] = x_c(nT)$, and simplify:

(a) $x[n] = \cos(2\pi n/3)$.

(b) $x[n] = \sin(4\pi n/3) = -\sin(2\pi n/3)$

(c) $x[n] = \frac{\sin(2\pi n/5)}{\pi n/5000}$

4.11. (a) Pick T such that

$$x[n] = x_c(nT) = \sin(10\pi nT) = \sin(\pi n/4) \qquad \Longrightarrow T = 1/40$$

There are other choices. For example, by realizing that $\sin(\pi n/4) = \sin(9\pi n/4)$, we find $T = 9/40$.

(b) Choose $T = 1/20$ to make $x[n] = x_c(nT)$. This is unique.

4.12. (a) Notice first that $H(e^{j\omega}) = 10j\omega, -\pi \le \omega < \pi$.

(i) After sampling,

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\frac{3\pi}{5}n), \\ y[n] &= |H(e^{j\frac{3\pi}{5}})|\cos(\frac{3\pi}{5}n + \angle H(e^{j\frac{3\pi}{5}})) \\ &= 6\pi\cos(\frac{3\pi}{5}n + \frac{\pi}{2}) \\ &= -6\pi\sin(\frac{3\pi}{5}n) \\ y_c(t) &= -6\pi\sin(6\pi t). \end{aligned}$$

(ii) After sampling, $x[n] = \cos(\frac{7\pi}{5}n) = \cos(\frac{3\pi}{5}n)$, so again, $y_c(t) = -6\pi\sin(6\pi t)$.

(b) $y_c(t)$ is what you would expect from a differentiator in the first case but not in the second case. This is because aliasing has occurred in the second case.

4.13. (a)

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \sin(\frac{\pi}{20}t) \\ y_c(t) &= \sin(\frac{\pi}{20}(t-5)) \\ &= \sin(\frac{\pi}{20}t - \frac{\pi}{4}) \\ y[n] &= \sin(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

(b) We get the same result as before:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \sin(\frac{\pi}{10}t) \\ y_c(t) &= \sin(\frac{\pi}{10}(t-2.5)) \\ &= \sin(\frac{\pi}{10}t - \frac{\pi}{4}) \\ y[n] &= \sin(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

(c) The sampling period T is not limited by the continuous time system $h_c(t)$.

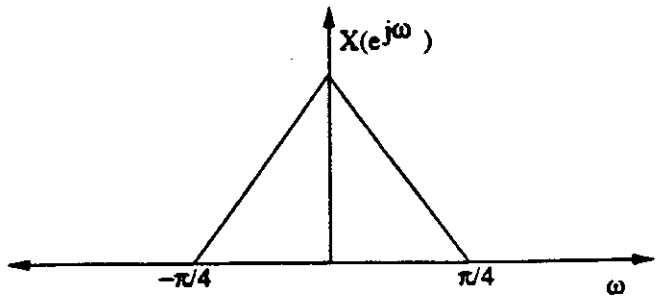
4.14. There is no loss of information if $X(e^{j\omega/2})$ and $X(e^{j(\omega/2-\pi)})$ do not overlap. This is true for (b), (d), (e).

4.15. The output $x_r[n] = x[n]$ if no aliasing occurs as result of downsampling. That is, $X(e^{j\omega}) = 0$ for $\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi$.

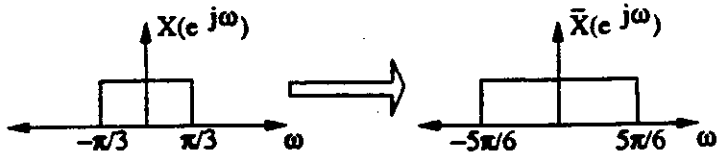
(a) $x[n] = \cos(\pi n/4)$. $X(e^{j\omega})$ has impulses at $\omega = \pm\pi/4$, so there is no aliasing. $x_r[n] = x[n]$.

(b) $x[n] = \cos(\pi n/2)$. $X(e^{j\omega})$ has impulses at $\omega = \pm\pi/2$, so there is aliasing. $x_r[n] \neq x[n]$.

(c) A sketch of $X(e^{j\omega})$ is shown below. Clearly there will be no aliasing and $x_r[n] = x[n]$.



4.16. (a) In the frequency domain, we have



$$\frac{M}{L} = \frac{5\pi/6}{\pi/3} = \frac{5}{2}$$

This is unique.

(b) One choice is

$$\frac{M}{L} = \frac{\pi/2}{3\pi/4} = \frac{2}{3}$$

However, this is not unique. We can also write $\tilde{x}_d[n] = \cos(\frac{5\pi}{2}n)$, so another choice is

$$\frac{M}{L} = \frac{5\pi/2}{3\pi/4} = \frac{10}{3}$$

4.17. (a) In the frequency domain,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi/3 \\ 0, & 2\pi/3 < |\omega| < \pi \end{cases}$$

After the sampling rate change,

$$\tilde{X}_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 4/3, & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| < \pi \end{cases},$$

which leads to

$$x[n] = \frac{4}{3}\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

(b) Upsampling by 3 and low-pass filtering $x[n] = \sin(3\pi n/4)$ results in $\sin(\pi n/4)$. Downsampling by 5 gives us $\tilde{x}_d[n] = \sin(5\pi n/4) = -\sin(3\pi n/4)$.

4.18. For the condition to be satisfied, we have to ensure that $\omega_0/L \leq \min(\pi/L, \pi/M)$, so that the lowpass filtering does not cut out part of the spectrum.

(a) $\omega_0/2 \leq \pi/3 \Longrightarrow \omega_{0,max} = 2\pi/3$.

(b) $\omega_0/3 \leq \pi/5 \Longrightarrow \omega_{0,max} = 3\pi/5$.

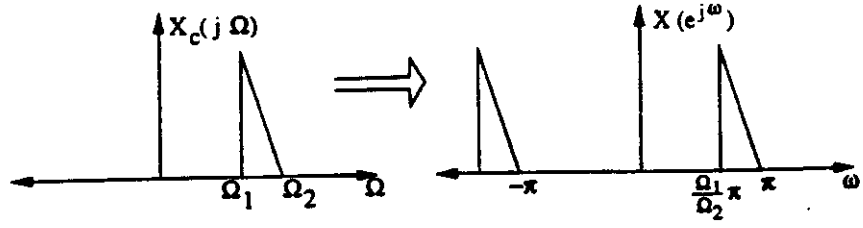
(c) Since $L > M$, there is no chance of aliasing. Hence $\omega_{0,max} = \pi$.

4.19. The nyquist sampling property must be satisfied: $T \leq \pi/\Omega_0$.

4.20. (a) The Nyquist sampling property must be satisfied: $T \leq \pi/\Omega_0 \Longrightarrow F_s \geq 2000$.

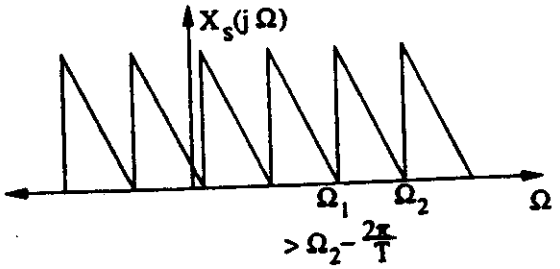
(b) We'd have to sample so that $X(e^{j\omega})$ lies between $|\omega| < \pi/2$. So $F_s \geq 4000$.

4.21. (a) Keeping in mind that after sampling, $\omega = \Omega T$, the Fourier transform of $x[n]$ is

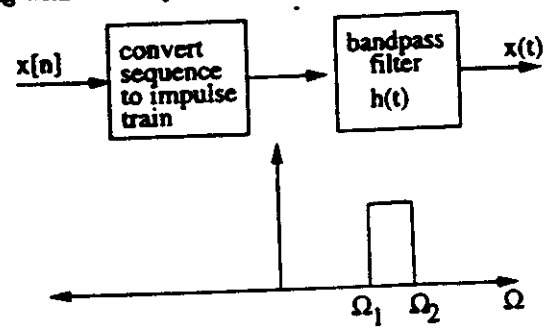


(b) A straight-forward application of the Nyquist criterion would lead to an incorrect conclusion that the sampling rate is at least twice the maximum frequency of $x_c(t)$, or $2\Omega_2$. However, since the spectrum is bandpass, we only need to ensure that the replications in frequency which occur as a result of sampling do not overlap with the original. (See the following figure of $X_s(j\Omega)$.) Therefore, we only need to ensure

$$\Omega_2 - \frac{2\pi}{T} < \Omega_1 \Longrightarrow T < \frac{2\pi}{\Delta\Omega}$$

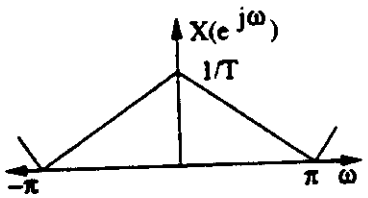


(c) The block diagram along with the frequency response of $h(t)$ is shown here:

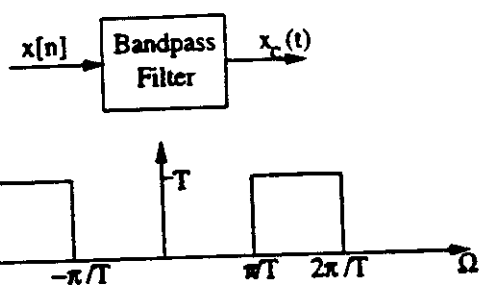


4.22. (a)

$$\omega = \Omega T, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$$



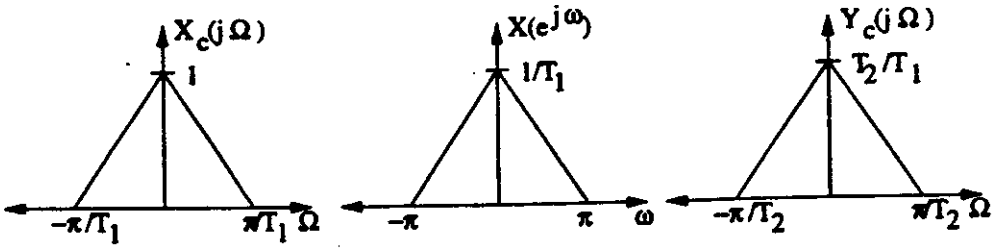
(b) To recover simply filter out the undesired parts of $X(e^{j\omega})$.



(c)

$$T \leq \frac{2\pi}{\Omega_0}$$

4.23. In the frequency domain, we have



$$x_c(t) = 0, \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T_1}$$

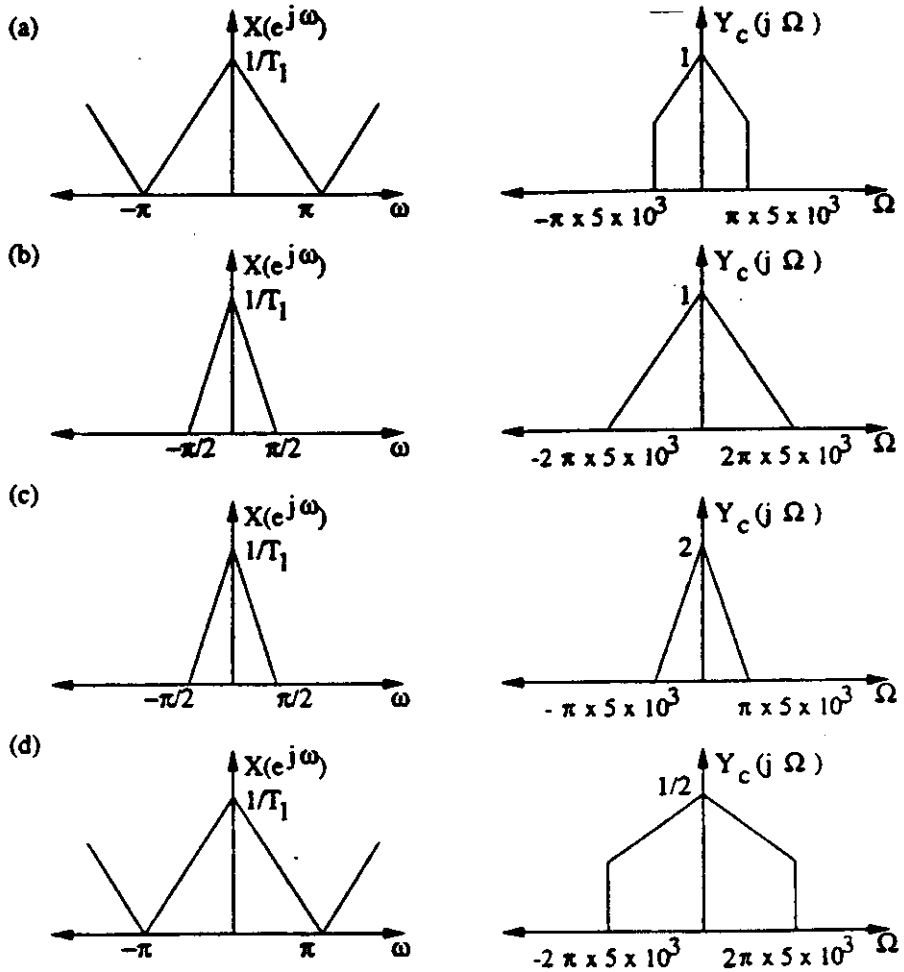
Therefore, since we are sampling this $x_c(t)$ at the Nyquist frequency $x[n]$ will be full band and unaliased.

$$x[n] = x_c(nT_1)$$

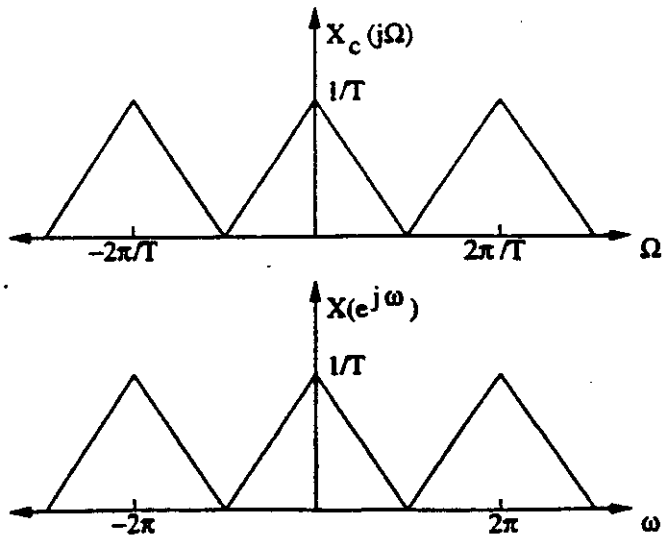
$y_c(t)$ is a band-limited interpolation of $x[n]$ at a different period. Since no aliasing occurs at $x[n]$, the spectrum of $y_c(t)$ will be a frequency axis scaling of the spectrum of $x_c(t)$ for $T_1 > T_2$ or $T_1 < T_2$. As we show in the figure,

$$y_c(t) = \frac{T_2}{T_1} x_c\left(\frac{T_2}{T_1} t\right)$$

4.24. The Fourier transform of $y_c(t)$ is sketched below for each case.



4.25. (a) $x_s(t) = x_c(t)s(t) \Rightarrow X_s(j\Omega) * s(j\Omega)$



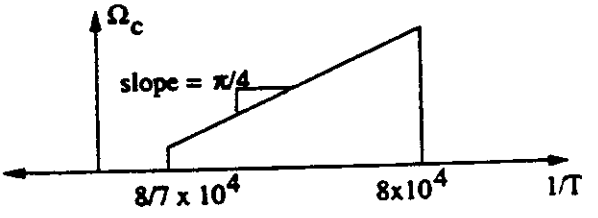
(b) Since $H_d(e^{j\omega})$ is an ideal lowpass filter with $\omega_c = \frac{\pi}{4}$, we don't care about any signal aliasing that occurs in the region $\frac{\pi}{4} \leq \omega \leq \pi$. We require:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} - 2\pi \cdot 10000 &\geq \frac{\pi}{4T} \\ \frac{1}{T} &\geq \frac{8}{7} \cdot 10000 \\ T &\leq \frac{7}{8} \times 10^{-4}\text{sec} \end{aligned}$$

Also, once all of the signal lies in the range $|\omega| \leq \frac{\pi}{4}$, the filter will be ineffective, i.e., $\frac{\pi}{4} \leq T(2\pi \times 10^4)$. So, $T \geq 12.5\mu$sec.

(c)

$$\Omega = \frac{\omega}{T} \Rightarrow \Omega_c = \frac{\pi}{4T}$$



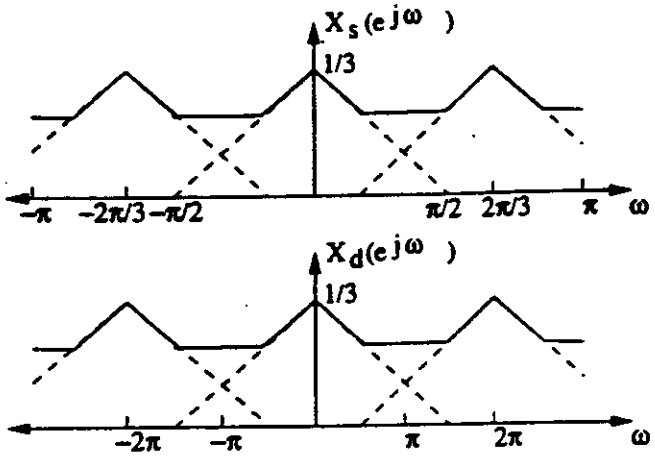
4.26. First we show that $X_s(e^{j\omega})$ is just a sum of shifted versions of $X(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned} x_s[n] &= \begin{cases} x[n], & n = Mk, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \left(\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j(2\pi kn/M)} \right) x[n] \\ X_s(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n] e^{j(2\pi kn/M)} e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j[\omega - (2\pi k/M)]n} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{j[\omega - (2\pi k/M)]} \right) \end{aligned}$$

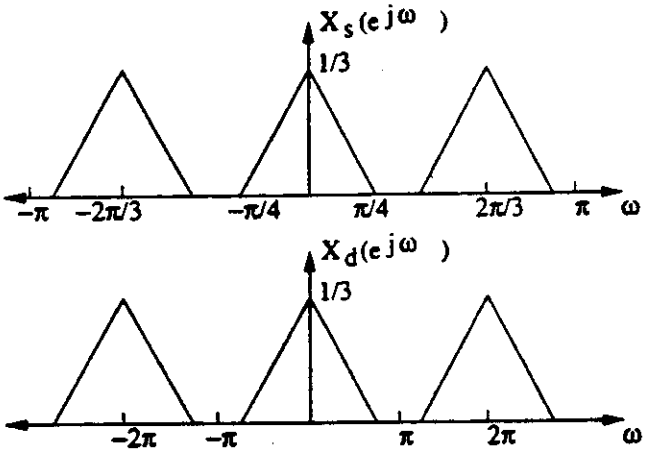
Additionally, $X_d(e^{j\omega})$ is simply $X_s(e^{j\omega})$ with the frequency axis expanded by a factor of M:

$$\begin{aligned} X_d(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_s[Mn] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_s[l] e^{-j(\omega/M)l} \\ &= X_s\left(e^{j(\omega/M)} \right) \end{aligned}$$

(a) (i) $X_s(e^{j\omega})$ and $X_d(e^{j\omega})$ are sketched below for $M = 3$, $\omega_H = \pi/2$.



(ii) $X_s(e^{j\omega})$ and $X_d(e^{j\omega})$ are sketched below for $M = 3$, $\omega_H = \pi/4$.



(b) From the definition of $X_s(e^{j\omega})$, we see that there will be no aliasing if the signal is bandlimited to π/M. In this problem, $M = 3$. Thus the maximum value of ω_H is $\pi/3$.

4.27. Parseval's Theorem:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

When we upsample, the added samples are zeros, so the upsampled signal $x_u[n]$ has the same energy as the original $x[n]$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_u[n]|^2,$$

and by Parseval's theorem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X_u(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Hence the amplitude of the Fourier transform does not change.

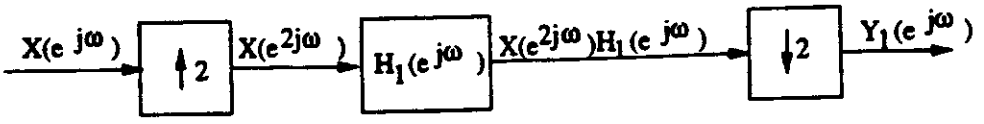
When we downsample, the downsampled signal $x_d[n]$ has less energy than the original $x[n]$ because some samples are discarded. Hence the amplitude of the Fourier transform will change after downsampling.

4.28. (a) Yes, the system is linear because each of the subblocks is linear. The C/D step is defined by $x[n] = x_c(nT)$, which is clearly linear. The DT system is an LTI system. The D/C step consists of converting the sequence to impulses and of CT LTI filtering, both of which are linear.

(b) No, the system is not time-invariant.

For example, suppose that $h[n] = \delta[n]$, $T = 5$ and $x_c(t) = 1$ for $-1 \le t \le 1$. Such a system would result in $x[n] = \delta[n]$ and $y_c(t) = \text{sinc}(\pi/5)$. Now suppose we delay the input to be $x_c(t-2)$. Now $x[n] = 0$ and $y_c(t) = 0$.

4.29. We can analyze the system in the frequency domain:



$Y_1(e^{j\omega})$ is $X(e^{2j\omega})H_1(e^{j\omega})$ downsampled by 2:

$$\begin{aligned}
Y_1(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}\left\{X(e^{2j\omega/2})H_1(e^{j\omega/2}) + X(e^{(2j(\omega-2\pi)/2)})H_1(e^{j(\omega-2\pi)/2})\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{X(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega-2\pi)})H_1(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{H_1(e^{j\omega/2}) + H_1(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right\} X(e^{j\omega}) \\
&= H_2(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\
H_2(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}\left\{H_1(e^{j\omega/2}) + H_1(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right\}
\end{aligned}$$

4.30.

$$\begin{aligned}
&X_c(j\Omega) = 0 && |\Omega| \ge 4000\pi \\
&Y(j\Omega) = |\Omega| X_c(j\Omega), && 1000\pi \le |\Omega| \le 2000\pi
\end{aligned}$$

Since only half the frequency band of $X_c(j\Omega)$ is needed, we can alias everything past $\Omega = 2000\pi$. Hence, $T = 1/3000$ s.

Now that T is set, figure out $H(e^{j\omega})$ band edges.

$$\omega_1 = \Omega_1 T \quad \Rightarrow \omega_1 = 2\pi \cdot 500 \cdot \tfrac{1}{3000} \quad \Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega_2 = \Omega_2 T \quad \Rightarrow \omega_2 = 2\pi \cdot 1000 \cdot \tfrac{1}{3000} \quad \Rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} |\omega| & \frac{\pi}{3} \le |\omega| \le \frac{2\pi}{3} \\ 0 & 0 \le |\omega| < \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

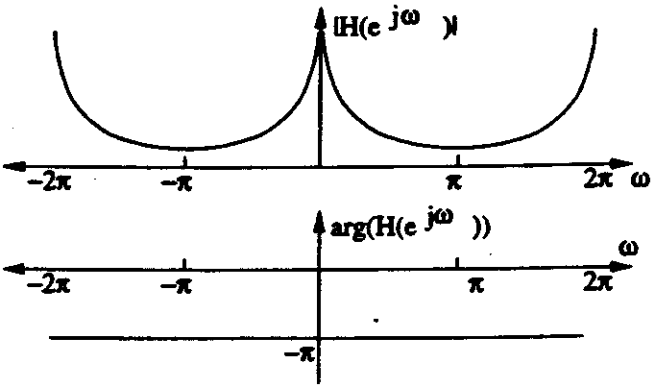
4.31.

$$X_c(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| > \frac{\pi}{T}$$

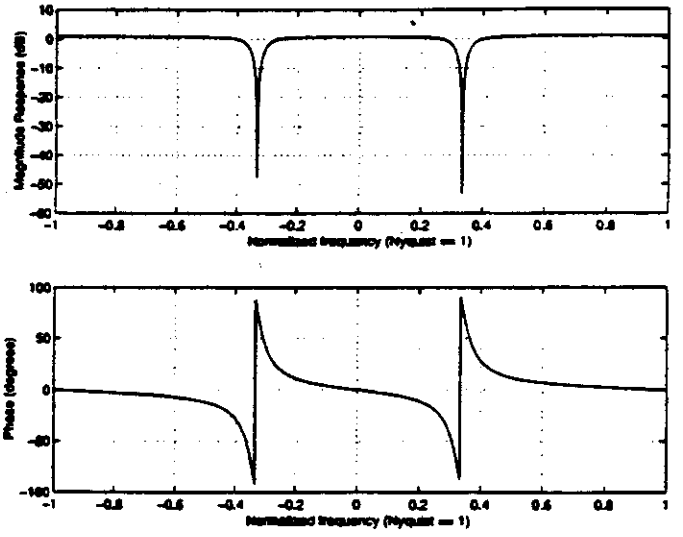
$$y_r(t) = \int_{-\infty}^{t} x_c(\tau)d\tau \Longrightarrow H_c(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega}$$

In discrete-time, we want

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega}, & -\pi \le \omega \le \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



4.32. (a) The highest frequency is $\pi/T = \pi \times 10000$.



(b)

(c) To filter the 60Hz out,

$$\omega_0 = T\Omega = \frac{1}{10,000} \cdot 2\pi \cdot 60 = \frac{3\pi}{250}$$

4.33.

$$\begin{aligned} y[n] &= x^2[n] \\ Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

therefore, $Y(e^{j\omega})$ will occupy twice the frequency band that $X(e^{j\omega})$ does if no aliasing occurs.
If $Y(e^{j\omega}) \neq 0, \quad -\pi < \omega < \pi$, then $X(e^{j\omega}) \neq 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2}$ and so $X(j\Omega) = 0, \quad |\Omega| \geq 2\pi(1000)$.
Since $\omega = \Omega T$,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &\geq T \cdot 2\pi(1000) \\ T &\leq \frac{1}{4000} \end{aligned}$$

4.34. (a) Since there is no aliasing involved in this process, we may choose T to be any value. Choose $T = 1$ for simplicity. $X_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$. Since $Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega)X_c(j\Omega)$, $Y_c(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$. Therefore, there will be no aliasing problems in going from $y_c(t)$ to $y[n]$.

Recall the relationship $\omega = \Omega T$. We can simply use this in our system conversion:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega/2} \\ H(j\Omega) &= e^{-j\Omega T/2} \\ &= e^{-j\Omega/2}, \quad T = 1 \end{aligned}$$

Note that the choice of T and therefore $H(j\Omega)$ is not unique.

(b)

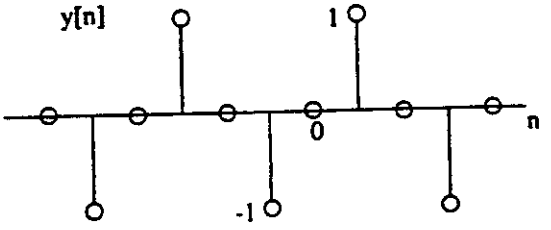
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\left[e^{j(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4})}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}e^{j(5\pi/2)n} + \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}e^{-j(5\pi/2)n} \end{aligned}$$

Since $H(e^{j\omega})$ is an LTI system, we can find the response to each of the two eigenfunctions separately.

$$y[n] = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}H\left(e^{j(5\pi/2)}\right)e^{j(5\pi/2)n} + \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}H\left(e^{-j(5\pi/2)}\right)e^{-j(5\pi/2)n}$$

Since $H(e^{j\omega})$ is defined for $0 \leq |\omega| \leq \pi$ we must evaluate the frequency at the baseband, i.e., $5\pi/2 \Rightarrow 5\pi/2 - 2\pi = \pi/2$. Therefore,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}H\left(e^{j(5\pi/2)}\right)e^{j(5\pi/2)n} + \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}H\left(e^{-j(5\pi/2)}\right)e^{-j(5\pi/2)n} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{j[(5\pi/2)n - (\pi/2)]} + e^{-j[(5\pi/2)n - (\pi/2)]}\right) \\ &= \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$



4.35. The frequency response $H(e^{j\omega}) = H_c(j\Omega/T)$. Finding that

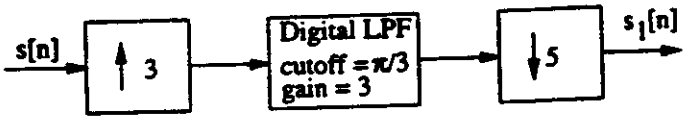
$$H_c(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3},$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{(10j\omega)^2 + 4(10j\omega) + 3} \\ &= \frac{1}{-100\omega^2 + 3 + 40j\omega} \end{aligned}$$

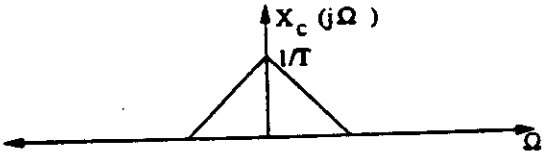
4.36. (a) Since $\Omega T = \omega$, $\quad (2\pi \cdot 100)T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{1}{400}$

(b) The downsampler has $M = 2$. Since $x[n]$ is bandlimited to $\frac{\pi}{M}$, there will be no aliasing. The frequency axis simply expands by a factor of 2.
For $y_c(t) = x_c(t) \Leftrightarrow Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)$.
Therefore $\Omega T' \Rightarrow 2\pi \cdot 100T' \Rightarrow T' = \frac{1}{200}$.

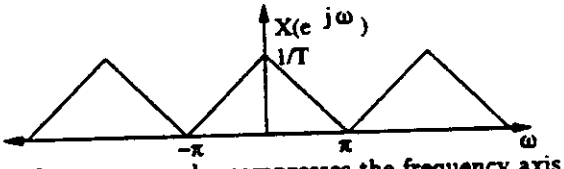
4.37. In both systems, the speech was filtered first so that the subsequent sampling results in no aliasing. Therefore, going $s[n]$ to $s_1[n]$ basically requires changing the sampling rate by a factor of 3kHz/5kHz = 3/5. This is done with the following system:



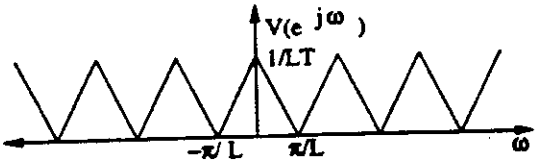
4.38. $X_c(j\Omega)$ is drawn below.



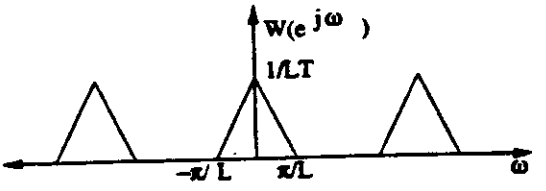
$x_c(t)$ is sampled at sampling period T, so there is no aliasing in $x[n]$.



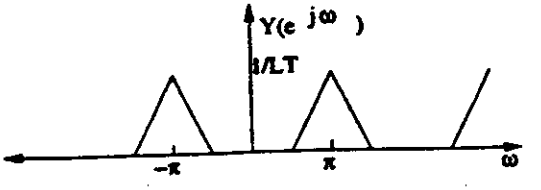
Inserting $L - 1$ zeros between samples compresses the frequency axis.



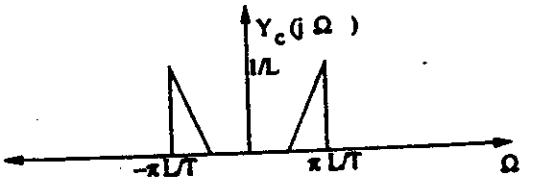
The filter $H(e^{j\omega})$ removes frequency components between π/L and π.



The multiplication by $(-1)^n$ shifts the center of the frequency band from 0 to π.



The D/C conversion maps the range $-\pi$ to π to the range $-\pi/T$ to π/T.



4.39. (a)

$$h[n] = 0, \quad |n| > (RL-1)$$

Therefore, for causal system delay by $RL-1$ samples.

(b) General interpolator condition:

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 \\ h[kL] &= 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

(c)

$$y[n] = \sum_{k=-(RL-1)}^{(RL-1)} h[k]v[n-k] = h[0]v[n] + \sum_{k=1}^{RL-1} h[n](v[n-k] + v[n+k])$$

This requires only RL-1 multiplies, (assuming $h[0] = 1$.)

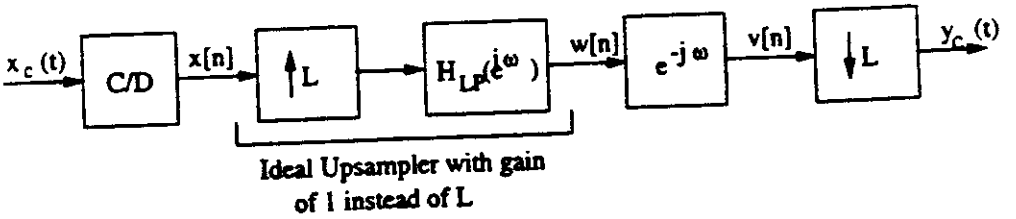
(d)

$$y[n] = \sum_{k=n-(RL-1)}^{n+(RL-1)} v[k]h[n-k]$$

If $n = mL$ (m an integer), then we don't have any multiplications since $h[0] = 1$ and the other non-zero samples of $v[k]$ hit at the zeros $h[n]$. Otherwise the impulse response spans $2RL-1$ samples of $v[n]$, but only $2R$ of these are non-zero. Therefore, there are $2R$ multiplies.

4.40. Split $H(e^{j\omega})$ into a lowpass and a delay.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_{LP}(e^{j\omega})e^{-j\omega} \\ H_{LP}(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{L} \\ 0, & \frac{\pi}{L} < |\omega| \le \pi \end{cases} \end{aligned}$$



Then we analyze the system as follows:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \quad \text{no aliasing assumed} \\ w[n] &= \frac{1}{L}x_c(n\frac{T}{L}) \quad \text{rate change} \\ v[n] &= w[n-1] = \frac{1}{L}x_c\left(n\frac{T}{L} - \frac{T}{L}\right), \quad \text{delay at higher rate} \\ y[n] &= v[nL] = \frac{1}{L}x_c\left(nT - \frac{T}{L}\right) \end{aligned}$$

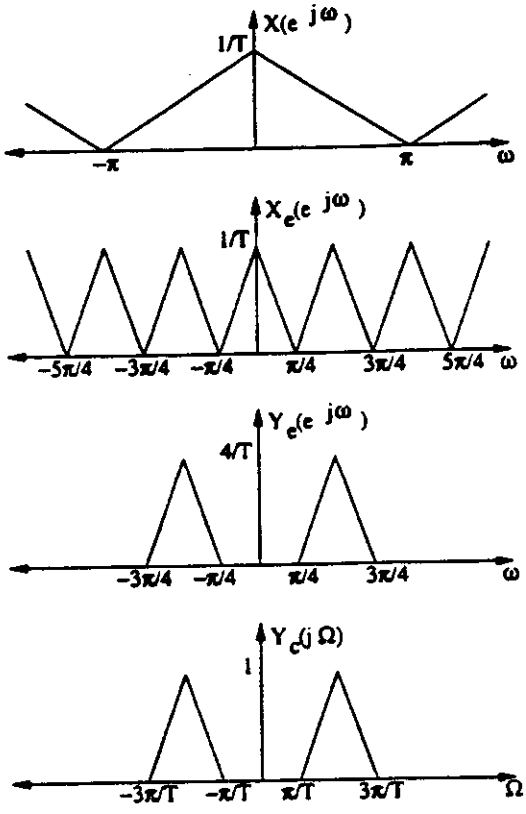
4.41. (a) See figures below.

(b) From part(a), we see that

$$Y_c(j\Omega) = X_c(j(\Omega - \frac{2\pi}{T})) + X_c(j(\Omega + \frac{2\pi}{T}))$$

Therefore,

$$y_c(t) = 2x_c(t)\cos(\frac{2\pi}{T}t)$$



4.42. (a) The Nyquist criterion states that $x_c(t)$ can be recovered as long as

$$\frac{2\pi}{T} \geq 2 \times 2\pi(250) \Longrightarrow T \leq \frac{1}{500}.$$

In this case, $T = 1/500$, so the Nyquist criterion is satisfied, and $x_c(t)$ can be recovered.

(b) Yes. A delay in time does not change the bandwidth of the signal. Hence, $y_c(t)$ has the sam bandwidth and same Nyquist sampling rate as $x_c(t)$.

(c) Consider first the following expressions for $X(e^{j\omega})$ and $Y(e^{j\omega})$:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}X_c(j\Omega)\,|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} = \frac{1}{500}X_c(j500\omega) \\ Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}Y_c(j\Omega)\,|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} = \frac{1}{T}e^{-j\Omega/1000}X_c(j\Omega)\,|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} \\ &= \frac{1}{500}e^{-j\omega/2}X_c(j500\omega) \\ &= e^{-j\omega/2}X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Hence, we let

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then, in the following figure,

$$\begin{aligned} R(e^{j\omega}) &= X(e^{j2\omega}) \\ W(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 2e^{-j\omega}X(e^{j2\omega}), & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ Y(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega/2}X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$



(d) Yes, from our analysis above,

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}$$

4.43. (a) Notice first that

$$X_c(j\Omega) = \begin{cases} F_c(j\Omega)|H_{aa}(j\Omega)|e^{-j\Omega^3}, & |\Omega| \le 400\pi \\ E_c(j\Omega)|H_{aa}(j\Omega)|e^{-j\Omega^3}, & 400\pi \le |\Omega| \le 800\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

For the given $T = 1/800$, there is no aliasing from the C/D conversion. Hence, the equivalent CT transfer function $H_c(j\Omega)$ can be written as

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}, & |\Omega| \le \pi/T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

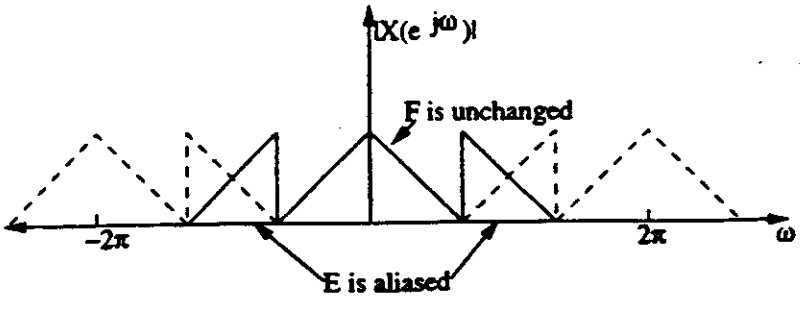
Furthermore, since $Y_c(j\Omega) = H_c(j\Omega)X_c(j\Omega)$, the desired tranfer function is

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} e^{j\Omega^3}, & |\Omega| \le 400\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Combining the two previous equations, we find

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j(800\omega)^3}, & |\omega| \le \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

(b) Some aliasing will occur if $2\pi/T < 1600\pi$. However, this is fine as long as the aliasing affects only $E_c(j\Omega)$ and not $F_c(j\Omega)$, as we show below:



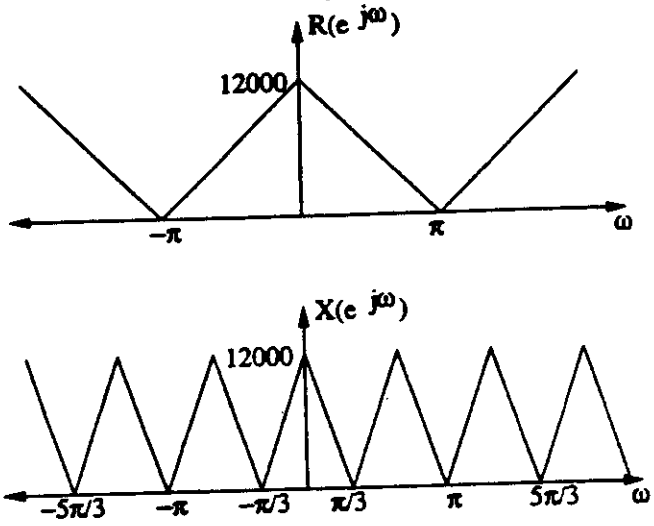
In order for the aliasing to not affect $F_c(j\Omega)$, we require

$$\frac{2\pi}{T} - 800\pi \geq 400\pi \Longrightarrow \frac{2\pi}{T} \geq 1200\pi$$

The minimum $\frac{2\pi}{T}$ is 1200π. For this choice, we get

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{j(600\omega)^3}, & |\omega| \leq 2\pi/3 \\ 0, & 2\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

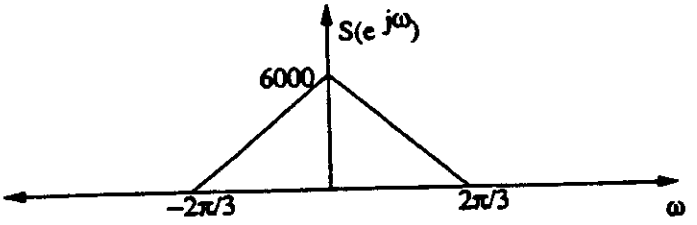
4.44. (a) See the following figure:



(b) For this to be true, $H(e^{j\omega})$ needs to filter out $X(e^{j\omega})$ for $\pi/3 \leq |\omega| \leq \pi$. Hence let $\omega_0 = \pi/3$. Furthermore, we want

$$\frac{\pi/2}{T_2} = 2\pi(1000) \Longrightarrow T_2 = 1/6000$$

(c) Matching the following figure of $S(e^{j\omega})$ with the figure for $R_c(j\Omega)$, and remembering that $\Omega = \omega/T$, we get $T_3 = (2\pi/3)/(2000\pi) = 1/3000$.



4.45. Notice first that since $x_c(t)$ is time-limited,

$$A = \int_0^{10} x_c(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t)dt = X_c(j\Omega)|_{\Omega=0}.$$

To estimate $X_c(j \cdot 0)$ by DT processing, we need to sample only fast enough so that $X_c(j \cdot 0)$ is not aliased. Hence, we pick

$$2\pi/T = 2\pi \times 10^4 \Longrightarrow T = 10^{-4}.$$

The resulting spectrum satisfies

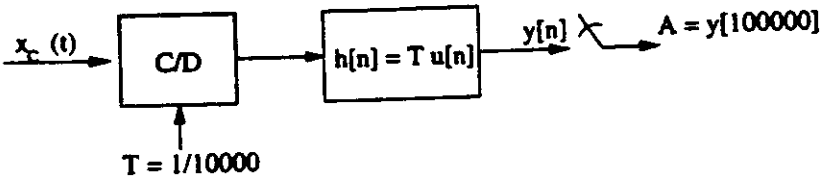
$$X(e^{j\cdot 0}) = \frac{1}{T}X_c(j\cdot 0)$$

Further,

$$X(e^{j\cdot 0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].$$

Therefore, we pick $h[n] = Tu[n]$, which makes the system an accumulator. Our estimate $\hat{A}$ is the output $y[n]$ at $n = 10/(10^{-4}) = 10^5$, when all of the non-zero samples of $x[n]$ have been added-up. This is an *exact* estimate given our assumption of both band- and time-limitedness. Since the assumption can never be exactly satisfied, however, this method only gives an approximate estimate for actual signals.

The overall system is as follows:



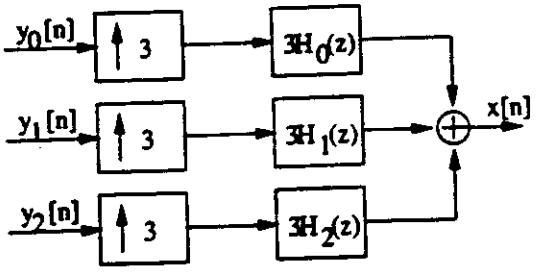
4.46. (a) Notice that

$$\begin{aligned} y_0[n] &= x[3n] \\ y_1[n] &= x[3n+1] \\ y_2[n] &= x[3n+2], \end{aligned}$$

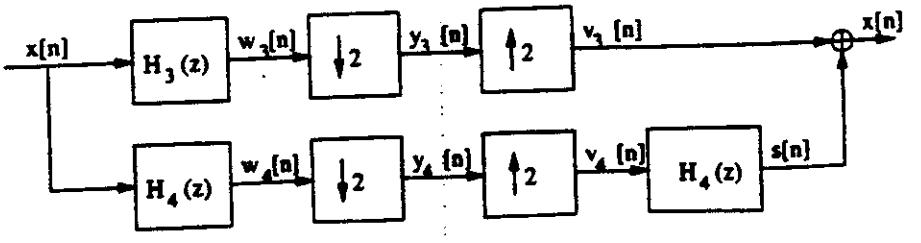
and therefore,

$$x[n] = \begin{cases} y_0[n/3], & n = 3k \\ y_1[(n-1)/3], & n = 3k+1 \\ y_2[(n-2)/3], & n = 3k+2 \end{cases}$$

(b) Yes. Since the bandwidth of the filters are $2\pi/3$, there is no aliasing introduced by downsampling. Hence to reconstruct $x[n]$, we need the system shown in the following figure:



(c) Yes, $x[n]$ can be reconstructed from $y_3[n]$ and $y_4[n]$ as demonstrated by the following figure:



In the following discussion, let $x_e[n]$ denote the even samples of $x[n]$, and $x_o[n]$ denote the odd samples of $x[n]$:

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \begin{cases} x[n], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ x_o[n] &= \begin{cases} 0, & n \text{ even} \\ x[n], & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

In the figure, $y_3[n] = x[2n]$, and hence,

$$\begin{aligned} v_3[n] &= \begin{cases} x[n], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ &= x_e[n] \end{aligned}$$

Furthermore, it can be verified using the IDFT that the impulse response $h_4[n]$ corresponding to $H_4(e^{j\omega})$ is

$$h_4[n] = \begin{cases} -2/(j\pi n), & n \text{ odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Notice in particular that every other sample of the impulse response $h_4[n]$ is zero. Also, from the form of $H_4(e^{j\omega})$, it is clear that $H_4(e^{j\omega})H_4(e^{j\omega}) = 1$, and hence $h_4[n] * h_4[n] = \delta[n]$. Therefore,

$$\begin{aligned} v_4[n] &= \begin{cases} y_4[n/2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ &= \begin{cases} w_4[n], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x * h_4)[n], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ &= x_o[n] * h_4[n] \end{aligned}$$

where the last equality follows from the fact that $h_4[n]$ is non-zero only in the odd samples. Now, $s[n] = v_4[n] * h_4[n] = x_o[n] * h_4[n] * h_4[n] = x_c[n]$, and since $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$, $s[n] + v_3[n] = x[n]$.

4.47. Sampling random processes

$$\phi_{x_c x_c}(\tau) = E(x_c(t)x_c^*(t+\tau)) \Leftrightarrow P_{x_c x_c}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x_c x_c}(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

(a)

$$\begin{aligned} \phi_{xx}[m] &= E(x[n]x^*[n+m]) = E(x_c(nT)x_c^*(nT+mT)) \\ &= \phi_{x_c x_c}(mT), \quad \text{i.e., sampled autocovariance} \end{aligned}$$

(b) Since $\phi_{xx}[m]$ is a sampled $\phi_{x_c x_c}(\tau)$

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} P_{x_c x_c}\left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi k}{T}\right)$$

(c) If

$$P_{x_c x_c} = 0, \text{ for } |\omega| \geq \pi$$

then

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T} P_{x_c x_c}\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| \leq \pi$$

4.48. (a)

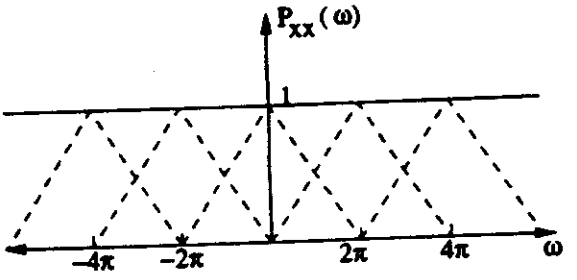
$$\begin{aligned}\phi_{x_c x_c}(\tau) &= E(x_c(t)x_c(t+\tau)\\ \phi_{xx}[m] &= E(x[n]x[n+m]) = E(x_c(nT)x_c(nT+mT))\\ &= \phi_{x_c x_c}(mT)\end{aligned}$$

(b)

$$P_{xx}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} P_{x_c x_c}\left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi r}{T}\right)$$

Therefore, we require that $\frac{\pi}{T} \geq \Omega_0$.

(c) For the spectrum of Fig P3.8-2 it is clear that if $T = \frac{2\pi}{\Omega_0}$ then the discrete-time power spectrum will be white, as shown in the figure above.

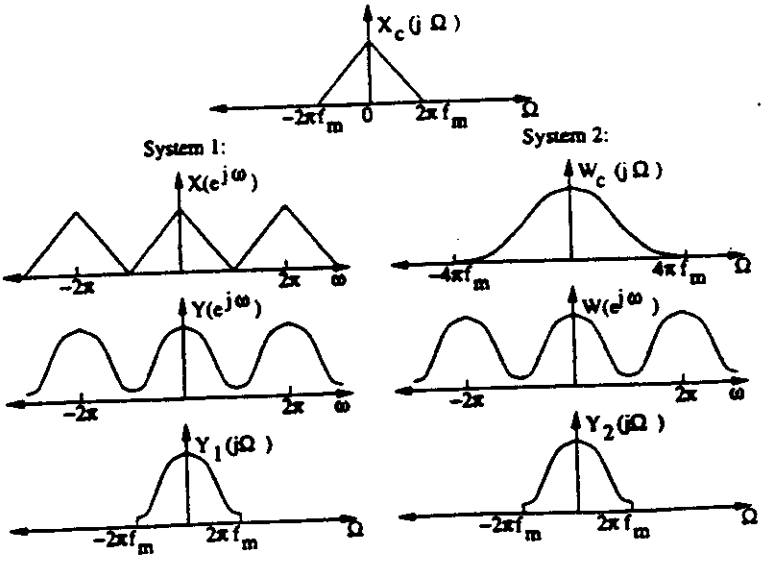


(d) For white discrete-time signal $\Rightarrow \phi_{xx}[m] = 0, \quad m \neq 0$ but $\phi_{xx}[m] = \phi_{x_c x_c}(mT)$. Therefore, any analog signal whose autocorrelation function has zeros equally spaced at intervals of T will yield a white discrete-time sequence is sampled with sampling period T. For example, for Fig P3.8-1:

$$\phi_{x_c x_c}(\tau) = \frac{\sin \Omega_0 T}{T\pi} \Rightarrow \phi_{xx}[m] = \frac{\sin \Omega_0 mT}{\pi mT}$$

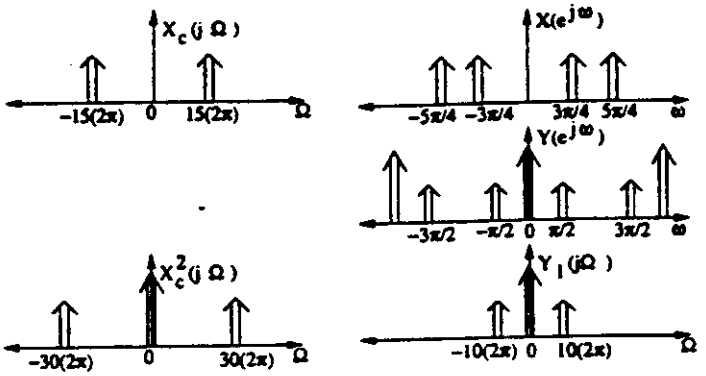
$$\text{if } T = \frac{\pi}{\Omega_0} \quad \phi_{xx}[m] = \frac{\sin \pi m}{\pi^2 m/\Omega_o} = 0, \quad m \neq 0$$

4.49. (a) Consider the following plots.



$y_1(t) = y_2(t)$: Convolution is a linear process. Aliasing is a linear process. Periodic convolution is equivalent to convolution followed by aliasing.
$y_1(t) \neq x^2(t)$: System 2 at Step 1 shows $X_c^2(j\Omega)$. This is clearly not $Y_1(j\Omega)$. $Y_1(j\Omega)$ is an aliased version of $X_c(j\Omega)$

(b) Now,



(c)

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(30\pi t) \\ x^3(t) &= \frac{3}{4}A\cos(30\pi t) + \frac{1}{4}A\cos(3\cdot 30\pi t), \\ v[n] &= \frac{3}{4}A\cos\left(\frac{3}{4}\pi n\right) + \frac{1}{4}A\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) \\ v[n] &= x^3[n] \\ y[n] &= x[n] \end{aligned}$$

We can see here that sometimes aliasing won't be destructive. When aliased sections do not overlap they can be reconstructed.

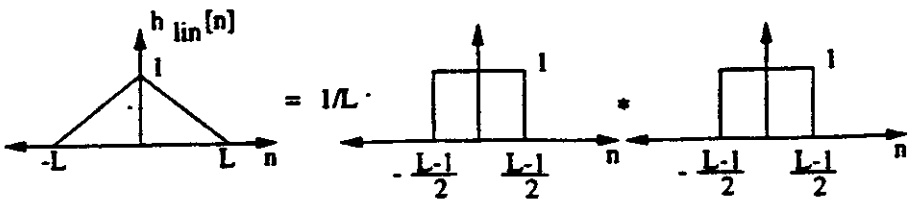
(d) This is the inverse to part (c). Since multiplication in time corresponds to convolution in frequency, a signal $x^2(t)$ has at most two times the bandwidth of $x(t)$. Therefore, $x^{1/2}$ will have at least $\frac{1}{2}$ the bandwidth of $x(t)$. If we run our signal through a box that will raise it to the $1/M$ power, then the sampling rate can be decreased by a factor of M.

4.50. (a)

$$\begin{aligned} x_i[n] &= x_u[n] * h_{zoh}[n] \\ h_{zoh}[n] &= \begin{cases} 1, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \end{aligned}$$

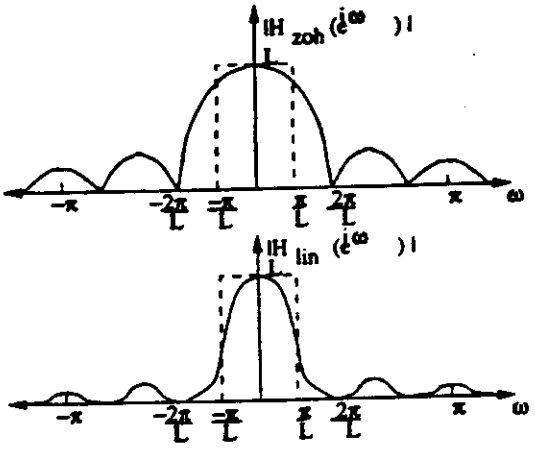
$$H_{zoh}(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j(L-1)\omega/2}$$

(b) The impulse response $h_{lin}[n]$ corresponds to the convolution of two rectangular sequences, as shown below.



$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\left(\frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)}\right)^2$$

(c) The frequency response of zero-order-hold is flatter in the region $[-\pi/L, \pi/L]$, but achieves less out-of-band attenuation.



4.51.

$$\begin{aligned} \phi_{xx}[n] &= x[n] * x[-n] \\ \Phi_{xx}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) * X^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

The bandwidth of $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ is no larger than the bandwidth of $X(e^{j\omega})$. Therefore, the outputs of the systems will be the same if $H_2(e^{j\omega})$ is an ideal lowpass filter with a cutoff of π/L.

4.52. The idea here is to exploit the fact that every other sample supplied to $h[n]$ in Fig 3.27-1 is zero. That is,

$$\begin{aligned} y_1[n] &= h[n] * w[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n-k]h[k] \\ &= aw[n] + bw[n-1] + cw[n-2] + dw[n-3] + ew[n-4] \\ &= \begin{cases} ax[n/2] + cx[(n/2)-1] + e[(n/2)-2], & n \text{ even} \\ bx[(n/2)-(1/2)] + dx[(n/2)-(3/2)], & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1[n] &= \begin{cases} h_1[n/2] * x[n/2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ &= \begin{cases} h_1[0]x[n/2] + h_1[1]x[(n/2)-1] + h_1[2]x[(n/2)-2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2[n] &= \begin{cases} h_2[n/2] * x[n/2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \\ &= \begin{cases} h_2[0]x[n/2] + h_2[1]x[(n/2)-1] + h_2[2]x[(n/2)-2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases} \end{aligned}$$

Comparing $w_1[n], w_2[n]$ with $y_1[n]$ above:

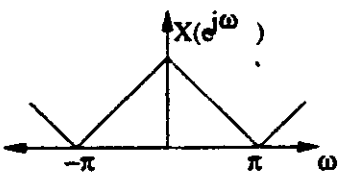
$w[n]$ can give even samples if $h_1[0] = a, h_1[1] = c, h_2[2] = e$. Similarly, $w_2[n]$ can give the odd samples if $h_3[n]$ delays $w_2[n]$ by one sample, i.e., $h_3[0] = 0, h_3[1] = 0, h_3[2] = 0$. Thus

$$w_3[n] = \begin{cases} h_2[0]x[(n-1)/2] + h_2[1]x[(n-1)/2-1] + h_2[2]x[(n-1)/2-2], & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$$

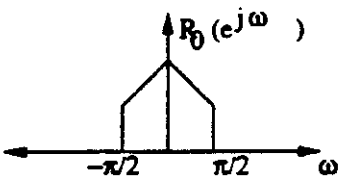
$$h_2[0] = b, \quad h_2[1] = d, \quad h_2[2] = 0$$

4.53. Sketches appear below.

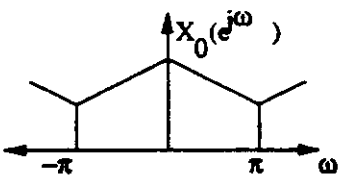
(a) First, $X(e^{j\omega})$ is plotted.



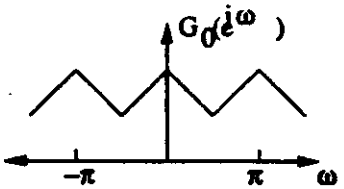
The lowpass filter cuts off at $\frac{\pi}{2}$.



The downsampler expands the frequency axis. Since $R_0(e^{j\omega})$ is bandlimited to $\frac{\pi}{M}$, no aliasing occurs.



The upsampler compresses the frequency axis by a factor of 2.



The lowpass filter cuts off at $\frac{\pi}{2} \Rightarrow Y_0(e^{j\omega}) = R_0(e^{j\omega})$ as sketched above.

(b) $G_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(X(e^{j\omega})H_0(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})H_0(e^{j(\omega+\pi)})\right)$

(c)
$$\begin{aligned} Y_0(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}H_0(e^{j\omega})\left(X(e^{j\omega})H_0(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})H_0(e^{j(\omega+\pi)})\right) \\ Y_1(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}H_1(e^{j\omega})\left(X(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})H_1(e^{j(\omega+\pi)})\right) \\ Y(e^{j\omega}) &= Y_0(e^{j\omega}) - Y_1(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2}X(e^{j\omega})\left[H_0^2(e^{j\omega}) - H_1^2(e^{j\omega})\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\pi)})\underbrace{\left[H_0(e^{j\omega})H_0(e^{j(\omega+\pi)}) - H_1(e^{j\omega})H_1(e^{j(\omega+\pi)})\right]}_{=0} \end{aligned}$$

The aliasing terms always cancel. $Y(e^{j\omega})$ is proportional to $X(e^{j\omega})$ if $[H_0^2(e^{j\omega}) - H_1^2(e^{j\omega})]$ is a constant.

$X(e^{j\omega}) = 0, \pi/3 \le |\omega| \le \pi$. $x[n]$ can be thought of as an oversampled signal. The approach is to determine whether n_0 is odd or even, then sample so that n_0 is avoided, upsampled and lowpass filter. This recovers $x[n_0]$.

4.54. (a) In the case where n_0 is not known, we determine whether it is even or odd as follows.

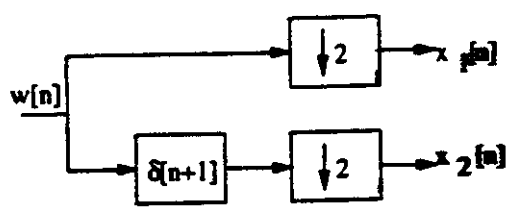
$$\begin{aligned} \hat{x}[n] &= x[n] - A\delta[n - n_0] \\ \hat{X}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega}) - Ae^{-j\omega n_0} \\ \hat{X}(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{\pi}{2}} &= \sum_n x[n](-j)^n \\ \hat{X}(e^{j(\pi/2)}) &= -A(-j)^{n_0} \end{aligned}$$

If the result is real, n_0 is even. If the result is imaginary, n_0 is odd.

(b) If n_0 is even, sample $\hat{x}[n]$ so that the even-numbered sequence values are set to zero. If n_0 is odd, sample so the odd-numbered samples are set to zero.

(c) Filter the sampled sequence with a lowpass filter with cutoff frequency $\pi/3$, and gain 2. This is an exact procedure if ideal filters are used.

4.55. (a)
$$\begin{aligned} w[n] &= \begin{cases} x_1[n/2], & n \text{ even} \\ x_2[(n-1)/2], & n \text{ odd} \end{cases} \\ x_1[n] &= w[2n] \\ x_2[n] &= w[2n+1] \end{aligned}$$



The system is linear, time-varying (due to downsampling), non-causal (due to $\delta[n+1]$), and stable.

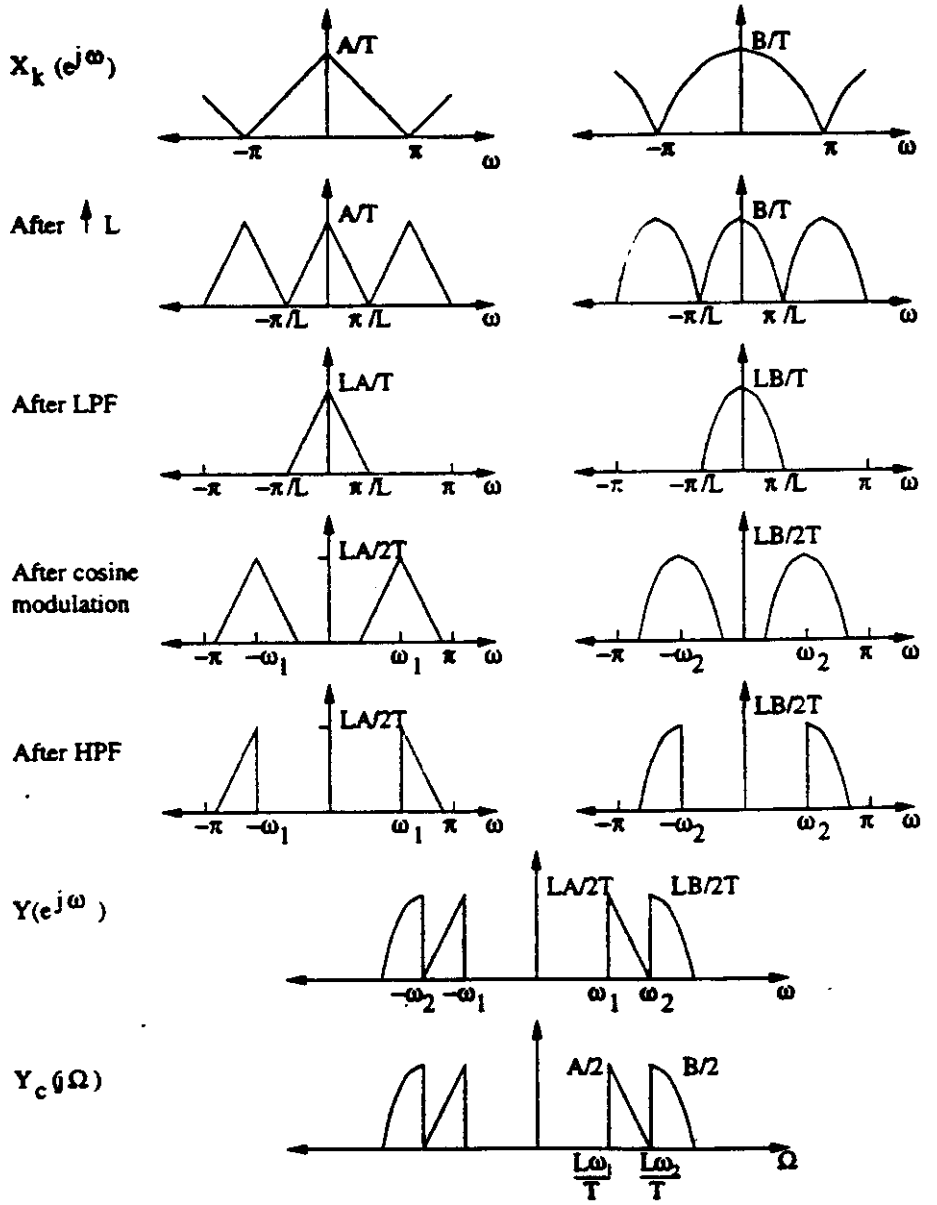
(b)
$$T = \frac{\pi}{\Omega_N} = \frac{\pi}{2\pi \times 5000} = 10^{-4}\text{sec}, \quad \frac{L\omega_1}{T} = 2\pi \times 10^5$$

To avoid aliasing in $y_c(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{L\omega_1}{T} + \frac{2\pi}{T} &\leq \frac{L\pi}{T} \\ \omega_1 &= \frac{20\pi}{L} \\ 20\pi + 2\pi &= L\pi \end{aligned}$$

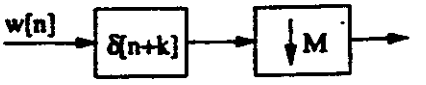
$$L = 22, \quad \omega_1 = 2\pi\left(\frac{10}{22}\right)$$

(c) The Fourier transforms are sketched below.

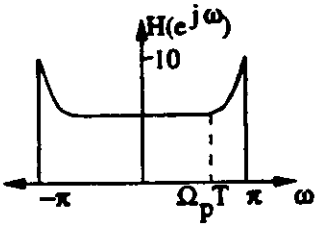


(d) To generalize for M channels, we would use the same modulators, but we would choose a larger value of L to make room for additional spectra above the lower frequency bound. If the lower

bound remained $2\pi \cdot 10^5$, L would become $L = 20 + M$ for M channels.
A branch of the TDM demultiplexing system would be:



4.56. Since we want $W(e^{j\omega})$ to equal $X(e^{j\omega})$, then $H(e^{j\omega})$ must compensate for the drop offs in $H_{aa}(j\Omega)$.



4.57. (a)

$$E(e) = \int ep(e)de = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} ede = \frac{e^2}{2\Delta}\Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = 0$$

$$\sigma_e^2 = E(e^2 - 0) = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 de = \frac{e^3}{3\Delta}\Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$r[m,n] = E(e[m]e[n]) = \begin{cases} E(e[m])E(e[n]), & m \neq n \\ E(e^2[n]), & m = n \end{cases}$$

$$r[n,m] = r[n-m] = \frac{\Delta^2}{12}\delta[n-m]$$

(b)

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} = \frac{12\sigma_x^2}{\Delta^2}$$

(c) Let $e_y[n]$ be the output noise.

$$\begin{aligned}
e_y[n] &= \sum_k h[k]e[n-k] \\
E(e_y^2[n]) &= E\left(\sum_k h[k]e[n-k]\sum_l h[l]e[n-l]\right) = \sum_k\sum_l h[k]h[l]\underbrace{E(e[n-k]e[n-l])}_{\sigma_e^2[k-l]} \\
\sigma_{e_y}^2 &= \sigma_e^2\sum_k h^2[k] \\
&= \sigma_e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(a^k + (-a)^k\right)^2 = \frac{\sigma_e^2}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(a^{2k} + 2a^k(-a)^k + (-a)^{2k}\right) \\
&= \frac{\sigma_e^2}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-a^2)^k\right) = \frac{\sigma_e^2}{2}\left(\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1+a^2}\right) \\
&= \sigma_e^2\left(\frac{1}{1-a^4}\right) = \frac{\Delta^2}{12(1-a^4)}
\end{aligned}$$

The variance of $x[n]$ is weighted similarly so the SNR does not change. $\text{SNR}_{\text{out}} = 12\frac{\sigma_x^2}{\Delta^2}$.

(d) $f[n] = x[n]e[n]$

$$E(f[n]) = E(x[n]e[n]) = E(x[n])E(e[n]) = 0$$

$$\sigma_f^2 = E(f^2[n]) = E(x^2[n]e^2[n]) = E(x^2[n])E(e^2[n]) = \sigma_x^2\sigma_e^2$$

$$r_f[n,m] = E(x[n]x[m]e[n]e[m]) = \underbrace{E(x[n]x[m])}_{\sigma_x^2\delta[n-m]} \cdot \underbrace{E(e[n]e[m])}_{\sigma_e^2\delta[n-m]}$$

(e)

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_f^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2\sigma_e^2} = \frac{1}{\sigma_e^2} = \frac{12}{\Delta^2}$$

(f) Using the results of part (c).

$$\sigma_{e_q}^2 = \sigma_f^2\left(\frac{1}{1-a^4}\right) = \frac{\sigma_x^2\sigma_e^2}{1-a^4}$$

Again, the variance of $x[n]$ is weighted by the same factor, so the SNR does not change.

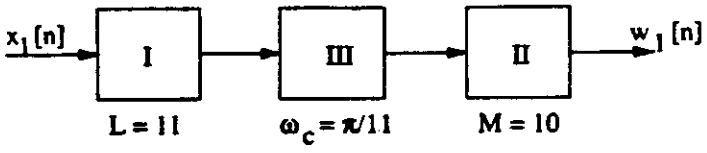
$$\text{SNR}_{\text{out}} = \frac{12}{\Delta^2}.$$

4.58. First, notice that since $y_c(t) = x_1(t)x_2(t)$, $Y_c(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}(X_1(j\Omega) * X_2(j\Omega))$, and so $Y_c(j\Omega) = 0$ for $|\Omega| \geq 11\pi/2 \times 10^4$. Hence the Nyquist rate $T = 1/55000$s.

Choose System A and B such that $w_1[n] = ax_1(nT)$ and $w_2[n] = bx_2(nT)$.

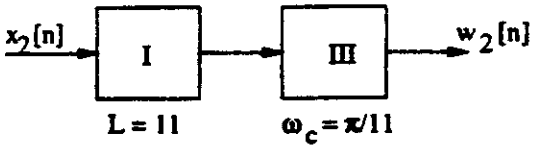
For System A, we need to resample such that

$$\frac{M}{L} = \frac{T}{T_1} = \frac{2 \times 10^{-5}}{1/55000} = \frac{10}{11}$$



For System B, we need to resample such that

$$\frac{M}{L} = \frac{T}{T_1} = \frac{2 \times 10^{-4}}{1/55000} = \frac{1}{11}$$



System C is simply the identity system.

4.59. The speech is first sampled at 44.1 kHz, and we wish to resample it so that the sampling rate is at 8 kHz. There are no aliasing effects anywhere in the system. Hence

$$\frac{L}{M} = \frac{44.1}{8} = \frac{441}{80}$$

We simply make $L = 441$, $M = 80$, and $\omega_c = \pi/441$.

4.60. Ω_p, and Ω_s has to be chosen such that

(a) The region $|\Omega| \leq \Omega_p$ maps to $|\omega| \leq \pi/4$:

$$\Omega_p T = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \Omega_p = 44\pi$$

(b) No aliasing occurs in the region $|\Omega| \leq \Omega_p$ during sampling:

$$\frac{2\pi}{T} - \Omega_s = \Omega_p \Longrightarrow \Omega_s = 2\pi(4 \cdot 44) - 44\pi = 308\pi$$

4.61. (a)

$$\begin{aligned} V(z) &= H_1(z)(X(z) - Y(z)) \\ U(z) &= H_2(z)(V(z) - Y(z)) \\ Y(z) &= U(z) + E(z) \\ &= \frac{H_1(z)H_2(z)}{1 + H_2(z)(1 + H_1(z))} X(z) + \frac{1}{1 + H_2(z)(1 + H_1(z))} E(z) \end{aligned}$$

Substituting $H_1(z) = 1/(1 - z^{-1})$ and $H_2(z) = z^{-1}/(1 - z^{-1})$, we find

$$\begin{aligned} H_{xy}(z) &= z^{-1} \\ H_{ey}(z) &= (1 - z^{-1})^2 \end{aligned}$$

Hence the difference equation is $y[n] = x[n-1] + f[n]$, where

$$f[n] = e[n] - 2e[n-1] + e[n-2].$$

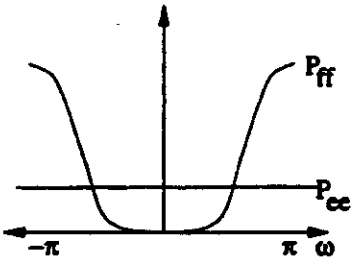
(b)

$$\begin{aligned} P_{ff}(e^{j\omega}) &= \sigma_e^2 |H_{ey}(e^{j\omega})|^2 \\ &= \sigma_e^2 |(1 - e^{-j\omega})^2|^2 \\ &= \sigma_e^2 (1 - e^{-j\omega})^2 (1 - e^{j\omega})^2 \\ &= \sigma_e^2 (2 - 2\cos(\omega))^2 \\ &= \sigma_e^2 (4\sin^2(\omega/2))^2 \\ &= 16\sigma_e^2 \sin^4(\omega/2) \end{aligned}$$

The total noise power σ_f^2 is the autocorrelation of $f[n]$ evaluated at 0:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= E[(e[n] - 2e[n-1] + e[n-2])^2] \\ &= E[e^2[n]] + E[-2e^2[n-1]] + E[e[n-2]^2] \\ &= 6\sigma_e^2, \end{aligned}$$

where we have used linearity of expectations, and the fact that since $e[n]$ is white, $E[e[n]e[n-k]] = 0$ for $k \neq 0$.



(c) Since $X(e^{j\omega})$ is bandlimited, $x[n] * h_3[n] = x[n]$. Hence,

$$w[n] = y[n] * h_3[n] = (x[n-1] + f[n]) * h_3[n] = x[n-1] + g[n],$$

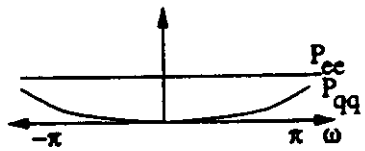
where $g[n]$ is the quantization noise in the region $|\omega| < \pi/M$.

(d) For a small angle x, $\sin x \approx x$. Therefore,

$$\begin{aligned}
\sigma_g^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/M}^{\pi/M} \sigma_e^2 (2\sin\omega/2)^4 d\omega \\
&\approx \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/M}^{\pi/M} \sigma_e^2 (2\omega/2)^4 d\omega \\
&= \frac{\sigma_e^2}{2\pi}\frac{\omega^5}{5}\Big|_{-\pi/M}^{\pi/M} \\
&= \frac{\sigma_e^2 \pi^4}{5M^5}
\end{aligned}$$

(e) $X_c(j\Omega)$ must be sufficiently bandlimited that $X(e^{j\omega}) = X_c(j\Omega T)$ is zero for $|\omega| > \pi/M$. Hence $X_c(j\Omega) = 0$ for $|\Omega| > \pi/MT$.
Assuming that is satisfied, $v_x[n] = x[Mn-1] = x_c(MTn - T)$.
Downsampling does not change the variance of the noise, and hence $\sigma_q^2 = \sigma_g^2$.

$$\begin{aligned}
P_{qq}(e^{j\omega}) &= P_{gg}(e^{j\omega/M}) \\
&= 16\sigma_e^2 \sin^4(\omega/2M)
\end{aligned}$$



4.62. (a) (i) The transfer function from $x[n]$ to $y_x[n]$ is

$$H_{xy}(z) = \frac{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = z^{-1}$$

Hence $y_x[n] = x[n-1]$.

(ii) The transfer function from $e[n]$ to $y_e[n]$ is

$$H_{ey}(z) = \frac{1}{1+\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}} = 1 - z^{-1}$$

So

$$\begin{aligned}
P_{y_e}(\omega) &= P_e(\omega) H_{ey}(e^{j\omega}) H_{ey} e^{-j\omega} \\
&= \sigma_e^2 (1-e^{-j\omega})(1-e^{j\omega}) \\
&= \sigma_e^2 (2 - 2\cos(\omega))
\end{aligned}$$

(b) (i) $x[n]$ contributes only to $y_1[n]$, but not $y_2[n]$. Therefore

$$\begin{aligned}
y_{1x}[n] &= x[n-1] \\
r_x[n] &= x[n-2]
\end{aligned}$$

(ii) In part(a), the difference equation describing the sigma-delta noise-shaper is

$$y[n] = x[n-1] + e[n] - e[n-1].$$

So here we apply the difference equation to both sigma-delta modulators:

$$\begin{aligned}
y_{1e}[n] &= e_1[n] - e_1[n-1] \\
y_{2e}[n] &= e_1[n-1] + e_2[n] - e_2[n-1] \\
r_e[n] &= y_{1e}[n-1] - (y_{2e}[n] - y_{2e}[n-1]) \\
&= -e_2[n] + 2e_2[n-1] - e_w[n-2] \\
H_{e_2r}(z) &= -(1-z^{-1})^2 \\
P_{r_e}(\omega) &= \sigma_e^2(2-2\cos\omega)^2
\end{aligned}$$

Solutions – Chapter 5

Transform Analysis of Linear Time-Invariant Systems

5.1.

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 10, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Therefore,

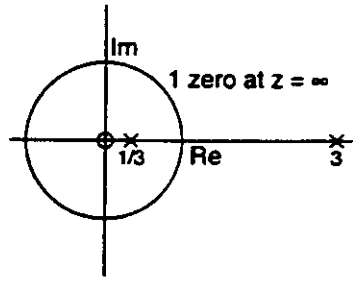
$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j5\omega} \frac{\sin \frac{11}{2}\omega}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

This $Y(e^{j\omega})$ is full band. Therefore, since $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, the only possible $x[n]$ and ω_c that could produce $y[n]$ is $x[n] = y[n]$ and $\omega_c = \pi$.

5.2. We have $y[n-1] - \frac{10}{3}y[n] + y[n+1] = x[n]$ or $z^{-1}Y(z) - \frac{10}{3}Y(z) + zY(z) = X(z)$. So,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z^{-1} - \frac{10}{3} + z} \\ &= \frac{z}{(z - \frac{1}{3})(z-3)} \\ &= \frac{-\frac{1}{8}}{z - \frac{1}{3}} + \frac{\frac{9}{8}}{z-3} \end{aligned}$$

(a)



(b)

$$H(z) = \frac{-\frac{1}{8}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{9}{8}z^{-1}}{1 - 3z^{-1}}$$

Stable $\Rightarrow$ ROC is $\frac{1}{3} \le |z| \le 3$. Therefore,

$$h[n] = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{9}{8}(3)^{n-1}u[-n]$$

5.3.

$$y[n-1] + \frac{1}{3}y[n-2] = x[n]$$

$$z^{-1}Y(z) + \frac{1}{3}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \\ H(z) &= \frac{z}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \end{aligned}$$

i) $\frac{1}{3} < |z|$, $h[n] = (-\frac{1}{3})^{n+1}u[n+1] \Rightarrow$ answer (a)
ii) $\frac{1}{3} > |z|$,

$$\begin{aligned} h[n] &= -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[-n-2] \\ &= -\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u[-n-2] \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} u[-n-2] \Rightarrow \text{answer (d)} \end{aligned}$$

5.4. (a)

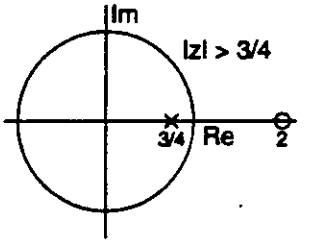
$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (2)^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{z}{z-2}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

$$Y(z) = \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{6}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}, \quad \frac{3}{4} < |z|$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{3}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{3}{4}z^{-1})} \cdot \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}{-\frac{3}{2}z^{-1}} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{3}{4}$$



(b)

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{3}{4}$$

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

(c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1]$$

(d) The ROC is outside $|z| = \frac{3}{4}$, which includes the unit circle. Therefore the system is stable. The $h[n]$ we found in part (b) tells us the system is also causal.

5.5.

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + u[n]$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$x[n] = u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 - \frac{19}{6}z^{-1} + \frac{2}{3}z^{-2}}{1 - \frac{7}{12}z^{-1} + \frac{1}{12}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

(a) Cross multiplying and equating z^{-1} with a delay in time:

$$y[n] - \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 3x[n] - \frac{19}{6}x[n-1] + \frac{2}{3}x[n-2]$$

(b) Using partial fractions on $H(z)$ we get:

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + 1, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

So,

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] + \delta[n]$$

(c) Since the ROC of $H(z)$ includes $|z| = 1$ the system is stable.

5.6. (a)

$$x[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(b)

$$Y(z) = \frac{1-z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

This has the same poles as the input, therefore the ROC is still $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

(c)

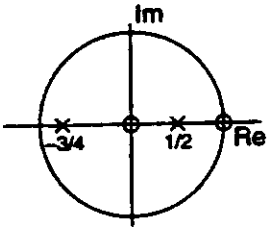
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-2} \Leftrightarrow h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

5.7. (a)

$$x[n] = 5u[n] \Leftrightarrow X(z) = \frac{5}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$y[n] = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right) u[n] \Leftrightarrow Y(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{3}{4}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{3}{4}$$



(b)

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{4}z^{-1})} = \frac{-\frac{2}{5}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{\frac{7}{5}}{(1 + \frac{3}{4}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{3}{4}$$

$$h[n] = -\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{7}{5}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

(c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

$$Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

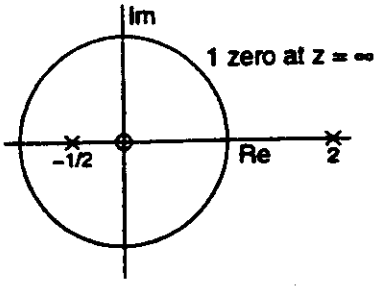
$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

5.8. (a)

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2] + x[n-1] \\ Y(z) &= \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}X(z) \end{aligned}$$

Therefore,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > 2$$



(b)

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{A}{(1-2z^{-1})} + \frac{B}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}, \quad |z| > 2$$

$$A = \left.\frac{z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}\right|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$B = \left.\frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})}\right|_{z^{-1}=-2} = -\frac{2}{5}$$

$$h[n] = \frac{2}{5}\left[(2)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(c) Use ROC of $\frac{1}{2} < |z| < 2$ since the ROC must include $|z| = 1$ for a stable system.

$$h[n] = -\frac{2}{5}(2)^n u[-n-1] - \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

5.9.

$$y[n-1] - \frac{5}{2}y[n] + y[n+1] = x[n]$$

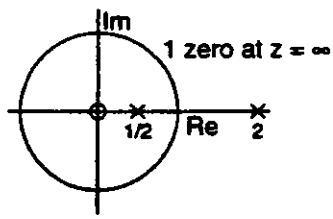
$$z^{-1}Y(z) - \frac{5}{2}Y(z) + zY(z) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$= \frac{z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

$$= \frac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1-2z^{-1}} - \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$



Three regions of convergence:

(a) $|z| < \frac{1}{2}$:

$$h[n] = -\frac{2}{3}(2)^n u[-n-1] + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

(b) $\frac{1}{2} < |z| < 2$:

$$h[n] = -\frac{2}{3}(2)^n u[-n-1] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Includes $|z| = 1$, so this is stable.

(c) $|z| > 2$:

$$h[n] = \frac{2}{3}(2)^n u[n] - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

ROC outside of largest pole, so this is causal.

5.10. Figure P5.16 shows two zeros and three poles inside the unit circle. Since the number of poles must equal the number of zeros, there must be an additional zero at $z = \infty$.

$H(z)$ is causal, so the ROC lies outside the largest pole and includes the unit circle. Therefore, the system is also stable.

The inverse system switches poles and zeros. The inverse system could have a ROC that includes $|z| = 1$, making it stable. However, the zero at $z = \infty$ of $H(z)$ is a pole for $H_i(z)$, so the system $H_i(z)$ cannot be causal.

5.11. (a) *It cannot be determined.* The ROC might or might not include the unit circle.

(b) *It cannot be determined.* The ROC might or might not include $z = \infty$.

(c) *False.* Given that the system is causal, we know that the ROC must be outside the outermost pole. Since the outermost pole is outside the unit circle, the ROC will not include the unit circle, and thus the system is not stable.

(d) *True.* If the system is stable, the ROC must include the unit circle. Because there are poles both inside and outside the unit circle, any ROC including the unit circle must be a ring. A ring-shaped ROC means that we have a two-sided system.

5.12. (a) *Yes.* The poles $z = \pm j(0.9)$ are inside the unit circle so the system is stable.

(b) First, factor $H(z)$ into two parts. The first should be minimum phase and therefore have all its poles and zeros inside the unit circle. The second part should contain the remaining poles and zeros.

$$H(z) = \underbrace{\frac{1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.81z^{-2}}}_{\text{minimum phase}} \cdot \underbrace{\frac{1 - 9z^{-2}}{1}}_{\substack{\text{poles \& zeros} \\ \text{outside unit circle}}}$$

Allpass systems have poles and zeros that occur in conjugate reciprocal pairs. If we include the factor $(1 - \frac{1}{9}z^{-2})$ in both parts of the equation above the first part will remain minimum phase and the second will become allpass.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1 + 0.2z^{-1})(1 - \frac{1}{9}z^{-2})}{1 + 0.81z^{-2}} \cdot \frac{1 - 9z^{-2}}{1 - \frac{1}{9}z^{-2}} \\ &= H_1(z)H_{ap}(z) \end{aligned}$$

5.13. *An aside:* Technically, this problem is not well defined, since a pole/zero plot does not uniquely determine a system. That is, many system functions can have the same pole/zero plot. For example, consider the systems

$$\begin{aligned} H_1(z) &= z^{-1} \\ H_2(z) &= 2z^{-1} \end{aligned}$$

Both of these systems have the same pole/zero plot, namely a pole at zero and a zero at infinity. Clearly, the system $H_1(z)$ is allpass, as it passes all frequencies with unity gain (it is simply a unit delay). However, one could ask whether $H_2(z)$ is allpass. Looking at the standard definition of an

allpass system provided in this chapter, the answer would be no, since the system does not pass all frequencies with *unity* gain.

A broader definition of an allpass system would be a system for which the system magnitude response $|H(e^{j\omega})| = a$, where a is a real constant. Such a system would pass all frequencies, and scale the output by a constant factor a. In a practical setting, this definition of an allpass system is satisfactory. Under this definition, both systems $H_1(z)$ and $H_2(z)$ would be considered allpass.

For this problem, it is assumed that none of the poles or zeros shown in the pole/zero plots are scaled, so this issue of using the proper definition of an allpass system does not apply. The standard definition of an allpass system is used.

Solution:

(a) Yes, the system is allpass, since it is of the appropriate form.

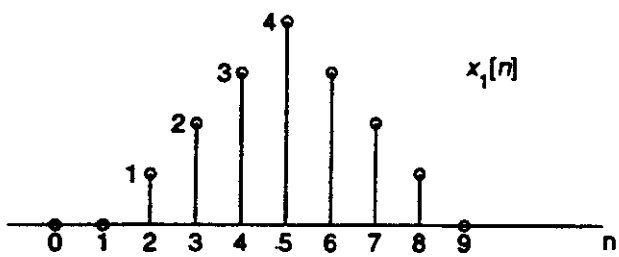
(b) No, the system is not allpass, since the zero does not occur at the conjugate reciprocal location of the pole.

(c) Yes, the system is allpass, since it is of the appropriate form.

(d) Yes, the system is allpass. This system consists of an allpass system in cascade with a pole at zero. The pole at zero is simply a delay, and does not change the magnitude spectrum.

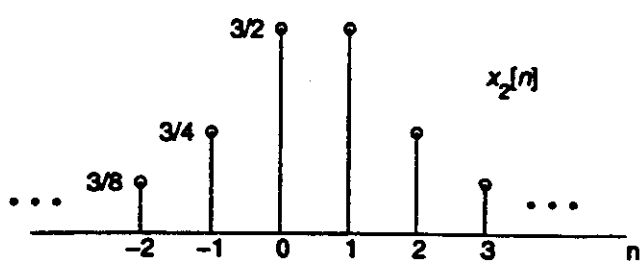
5.14. (a) By the symmetry of $x_1[n]$ we know it has linear phase. The symmetry is around $n = 5$ so the continuous phase of $X_1(e^{j\omega})$ is $\arg[X_1(e^{j\omega})] = -5\omega$. Thus,

$$\text{grd}[X_1(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[X_1(e^{j\omega})]\} = -\frac{d}{d\omega}\{-5\omega\} = 5$$



(b) By the symmetry of $x_2[n]$ we know it has linear phase. The symmetry is around $n = 1/2$ so we know the phase of $X_2(e^{j\omega})$ is $\arg[X_2(e^{j\omega}] = -\omega/2$. Thus,

$$\text{grd}[X_2(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[X_2(e^{j\omega})]\} = -\frac{d}{d\omega}\left\{-\frac{\omega}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$



5.15. (a) $h[n]$ is symmetric about $n = 1$.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 2 + e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} \\ &= e^{-j\omega}(2e^{j\omega} + 1 + 2e^{-j\omega}) \\ &= (1 + 4\cos\omega)e^{-j\omega} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = 1 + 4\cos\omega,\ \alpha = 1,\ \beta = 0$$

Generalized Linear phase but not Linear Phase since $A(\omega)$ is not always positive.

(b) This sequence has no even or odd symmetry, so it does not possess generalized linear phase.

(c) $h[n]$ is symmetric about $n = 1$.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 + 3e^{-j\omega} + e^{-2j\omega} \\ &= e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 3 + e^{-j\omega}) \\ &= (3 + 2\cos\omega)e^{-j\omega} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = 3 + 2\cos\omega,\ \alpha = 1,\ \beta = 0$$

Generalized Linear phase & Linear Phase.

(d) $h[n]$ has even symmetry.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 + e^{-j\omega} \\ &= e^{-j(1/2)\omega}(e^{j(1/2)\omega} + e^{-j(1/2)\omega}) \\ &= 2\cos(\omega/2)e^{-j(1/2)\omega} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = 2\cos(\omega/2),\ \alpha = \frac{1}{2},\ \beta = 0$$

Generalized Linear Phase but not Linear Phase since $A(\omega)$ is not always positive.

(e) $h[n]$ has odd symmetry.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-2j\omega} \\ &= e^{-j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) \\ &= e^{-j\omega}2j\sin\omega \\ &= (2\sin\omega)e^{-j\omega + j\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$A(\omega) = 2\sin\omega,\ \alpha = 1,\ \beta = \frac{\pi}{2}$$

Generalized Linear Phase but not Linear Phase since $A(\omega)$ is not always positive.

5.16. The causality of the system cannot be determined from the figure. A causal system $h_1[n]$ that has a linear phase response $\angle H(e^{j\omega}) = -\alpha\omega$, is:

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ H_1(e^{j\omega}) &= 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}) \\ &= e^{-j\omega}(2 + 2\cos(\omega)) \\ |H_1(e^{j\omega})| &= 2 + 2\cos(\omega) \\ \angle H_1(e^{j\omega}) &= -\omega \end{aligned}$$

An example of a non-causal system with the same phase response is:

$$\begin{aligned} h_2[n] &= \delta[n+1] + \delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \\ H_2(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} + 1 + 4e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} \\ &= e^{-j\omega}(e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 4 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) \\ &= e^{-j\omega}(4 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)) \\ |H_2(e^{j\omega})| &= 4 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \\ \angle H_2(e^{j\omega}) &= -\omega \end{aligned}$$

Thus, both the causal sequence $h_1[n]$ and the non-causal sequence $h_2[n]$ have a linear phase response $\angle H(e^{j\omega}) = -\alpha\omega$, where $\alpha = 1$.

5.17. A minimum phase system is one which has all its poles and zeros inside the unit circle. It is causal, stable, and has a causal and stable inverse.

(a) $H_1(z)$ has a zero outside the unit circle at $z = 2$ so it is not minimum phase.

(b) $H_2(z)$ is minimum phase since its poles and zeros are inside the unit circle.

(c) $H_3(z)$ is minimum phase since its poles and zeros are inside the unit circle.

(d) $H_4(z)$ has a zero outside the unit circle at $z = \infty$ so it is not minimum phase. Moreover, the inverse system would not be causal due to the pole at infinity.

5.18. A minimum phase system with an equivalent magnitude spectrum can be found by analyzing the system function, and reflecting all poles are zeros that are outside the unit circle to their conjugate reciprocal locations. This will move them inside the unit circle. Then, all poles and zeros for $H_{min}(z)$ will be inside the unit circle. Note that a scale factor may be introduced when the pole or zero is reflected inside the unit circle.

(a) Simply reflect the zero at $z = 2$ to its conjugate reciprocal location at $z = \frac{1}{2}$. Then, determine the scale factor.

$$H_{min}(z) = 2\left(\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}\right)$$

(b) First, simply reflect the zero at $z = -3$ to its conjugate reciprocal location at $z = -\frac{1}{3}$. Then, determine the scale factor. This results in

$$H_{min}(z) = 3\frac{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{z^{-1}\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

The $\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)$ terms cancel, leaving

$$H_{min}(z) = 3\frac{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{z^{-1}}$$

Note that the term $\frac{1}{z^{-1}}$ does not affect the frequency response magnitude of the system. Consequently, it can be removed. Thus, the remaining term has a zero inside the unit circle, and is therefore minimum phase. As a result, we are left with the system

$$H_{min}(z) = 3\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)$$

(c) Simply reflect the zero at 3 to its conjugate reciprocal location at $\frac{1}{3}$ and reflect the pole at $\frac{4}{3}$ to its conjugate reciprocal location at $\frac{3}{4}$. Then, determine the scale factor.

$$H_{min}(z) = \frac{9}{4}\frac{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)^2}$$

5.19. Due to the symmetry of the impulse responses, all the systems have generalized linear phase of $\arg[H(e^{j\omega})] = \beta - n_o\omega$ where n_o is the point of symmetry in the impulse response graphs. The group delay is

$$\text{grd}\left[H_i(e^{j\omega})\right] = -\frac{d}{d\omega}\left\{\arg\left[H_i(e^{j\omega})\right]\right\} = -\frac{d}{d\omega}\left\{\beta - n_o\omega\right\} = n_o$$

To find each system's group delay we need only find the point of symmetry n_o in each system's impulse response.

$$\begin{aligned} \text{grd}\left[H_1(e^{j\omega})\right] &= 2 & \qquad \text{grd}\left[H_4(e^{j\omega})\right] &= 3 \\ \text{grd}\left[H_2(e^{j\omega})\right] &= 1.5 & \qquad \text{grd}\left[H_5(e^{j\omega})\right] &= 3 \\ \text{grd}\left[H_3(e^{j\omega})\right] &= 2 & \qquad \text{grd}\left[H_6(e^{j\omega})\right] &= 3.5 \end{aligned}$$

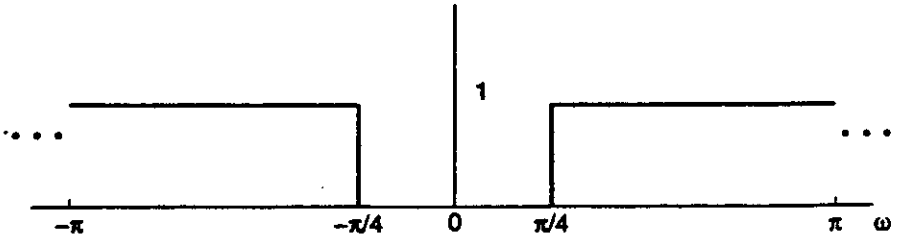
5.20. (a) *Yes.* The system function could be a generalized linear phase system implemented by a linear constant-coefficient differential equation (LCCDE) with real coefficients. The zeros come in a set of four: a zero, its conjugate, and the two conjugate reciprocals. The pole-zero plot could correspond to a Type I FIR linear phase system.

(b) *No.* This system function could not be a generalized linear phase system implemented by a LCCDE with real coefficients. Since the LCCDE has real coefficients, its poles and zeros must come in conjugate pairs. However, the zeros in this pole-zero plot do not have corresponding conjugate zeros.

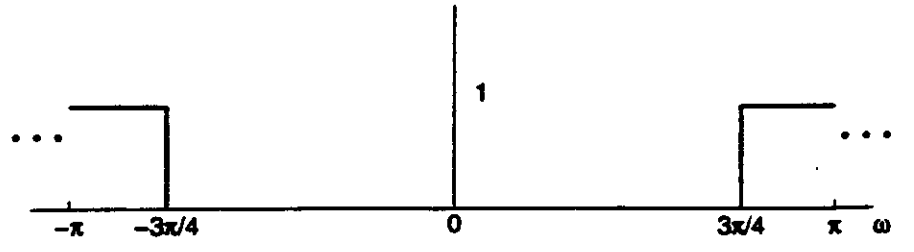
(c) *Yes.* The system function could be a generalized linear phase system implemented by a LCCDE with real coefficients. The pole-zero plot could correspond to a Type II FIR linear phase system.

5.21. $h_{lp}[n]$ is an ideal lowpass filter with $\omega_c = \frac{\pi}{4}$

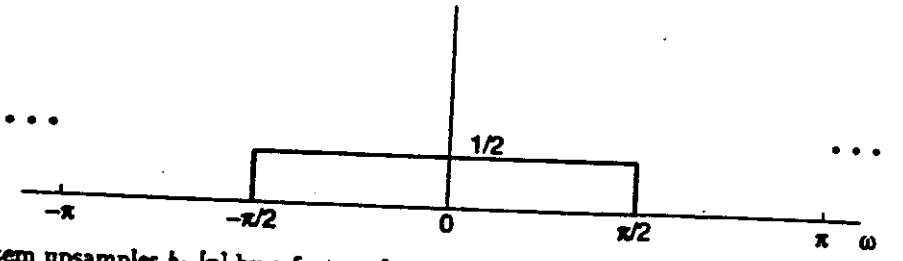
(a) $y[n] = x[n] - x[n] * h_{lp}[n] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$
This is a highpass filter.



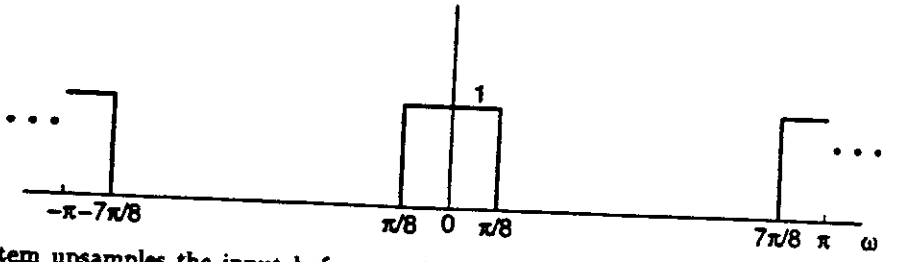
(b) $x[n]$ is first modulated by π, lowpass filtered, and demodulated by π. Therefore, $H_{lp}(e^{j\omega})$ filters the high frequency components of $X(e^{j\omega})$.
This is a highpass filter.



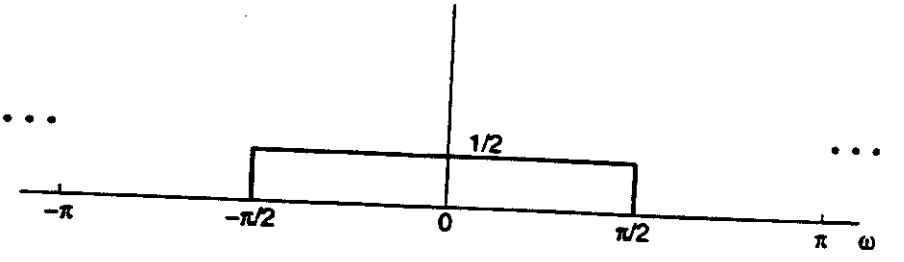
(c) $h_{lp}[2n]$ is a downsampled version of the filter. Therefore, the frequency response will be "spread out" by a factor of two, with a gain of $\frac{1}{2}$.
This is a lowpass filter.



(d) This system upsamples $h_{lp}[n]$ by a factor of two. Therefore, the frequency axis will be compressed by a factor of two.
This is a bandstop filter.



(e) This system upsamples the input before passing it through $h_{lp}[n]$. This effectively doubles the frequency bandwidth of $H_{lp}(e^{j\omega})$.
This is a lowpass filter.



5.22.

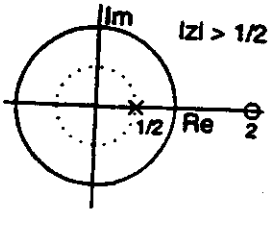
$$H(z) = \frac{1 - a^{-1}z^{-1}}{1 - az^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad \text{causal, so ROC is } |z| > a$$

(a) Cross multiplying and taking the inverse transform

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] - \frac{1}{a}x[n-1]$$

(b) Since $H(z)$ is causal, we know that the ROC is $|z| > a$. For stability, the ROC must include the unit circle. So, $H(z)$ is stable for $|a| < 1$.

(c) $a = \frac{1}{2}$



(d)

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}, \quad |z| > a$$

$$h[n] = (a)^n u[n] - \frac{1}{a}(a)^{n-1}u[n-1]$$

(e)

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \frac{1-a^{-1}e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1-a^{-1}e^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= \left(\frac{1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a}\left(\frac{a^2+1-2a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

5.23. (a) Type I:

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{M/2} a[n]\cos\omega n$$

$\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, so there are no restrictions.

Type II:

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$\cos 0 = 1$, $\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$. So $H(e^{j\pi}) = 0$.

Type III:

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{M/2} c[n]\sin\omega n$$

$\sin 0 = 0$, $\sin n\pi = 0$, so $H(e^{j0}) = H(e^{j\pi}) = 0$.

Type IV:

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n]\sin\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)$$

$\sin 0 = 0$, $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$, so just $H(e^{j0}) = 0$.

(b)

	Type I	Type II	Type III	Type IV
Lowpass	Y	Y	N	N
Bandpass	Y	Y	Y	Y
Highpass	Y	N	N	Y
Bandstop	Y	N	N	N
Differentiator	Y	N	N	Y

5.24. (a) Taking the z-transform of both sides and rearranging

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{1}{4} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

Since the poles and zeros {2 poles at $z = \pm 1/2$, 2 zeros at $z = \pm 2$} occur in conjugate reciprocal pairs the system is allpass. This property is easy to recognize since, as in the system above, the coefficients of the numerator and denominator z-polynomials get reversed (and in general conjugated).

(b) It is a property of allpass systems that the output energy is equal to the input energy. Here is the proof.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |Y(e^{j\omega})|^2 d\omega && \text{(by Parseval's Theorem)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega && (|H(e^{j\omega})|^2 = 1 \text{ since } h[n] \text{ is allpass}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 && \text{(by Parseval's theorem)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \\
&= 5
\end{aligned}$$

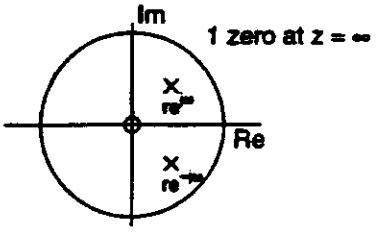
5.25. *The statement is false.* A non-causal system can indeed have a positive constant group delay. For example, consider the non-causal system

$$h[n] = \delta[n+1] + \delta[n] + 4\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$

This system has the frequency response

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} + 1 + 4e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} + e^{-j3\omega} \\
&= e^{-j\omega}(e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 4 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) \\
&= e^{-j\omega}(4 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)) \\
|H(e^{j\omega})| &= 4 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) \\
\angle H(e^{j\omega}) &= -\omega \\
\text{grd}[H(e^{j\omega})] &= 1
\end{aligned}$$

5.26. (a) A labeled pole-zero diagram appears below.



The table of common z-transform pairs gives us

$$(r^n \sin \omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{(r \sin \omega_0)z^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > r$$

which enables us to derive $h[n]$.

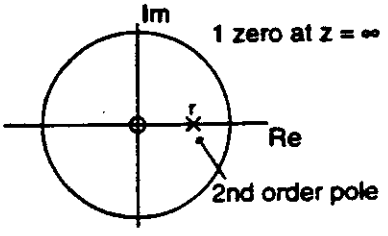
$$h[n] = \left(\frac{1}{\sin \omega_0}\right)(r^n \sin \omega_0 n)u[n]$$

(b) When $\omega_0 = 0$

$$H(z) = \frac{rz^{-1}}{1 - (2r \cos \omega_0)z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{rz^{-1}}{(1 - rz^{-1})^2}, \quad |z| > r$$

Again, using a table lookup gives us

$$h[n] = nr^n u[n]$$



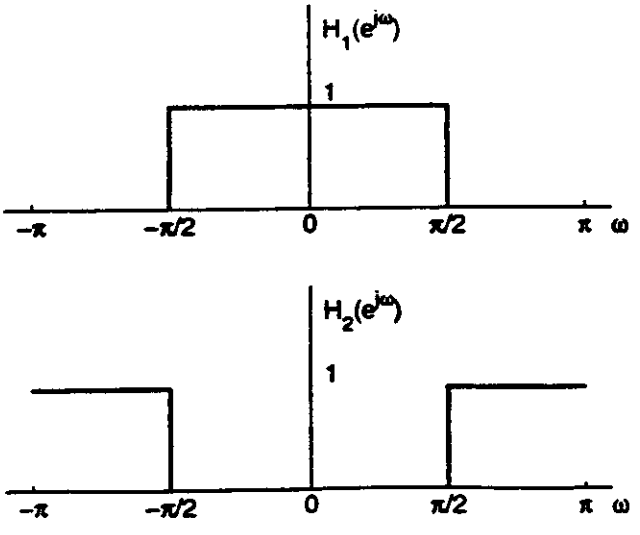
5.27. Making use of some DTFT properties can aide in the solution of this problem. First, note that

$$\begin{aligned} h_2[n] &= (-1)^n h_1[n] \\ h_2[n] &= e^{-j\pi n} h_1[n] \end{aligned}$$

Using the DTFT property that states that modulation in the time domain corresponds to a shift in the frequency domain,

$$H_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j(\omega+\pi)})$$

Consequently, $H_2(e^{j\omega})$ is simply $H_1(e^{j\omega})$ shifted by π. The ideal low pass filter has now become the ideal high pass filter, as shown below.



5.28. (a)

$$H(z) = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad h[n] \text{ causal}$$

$$H(1) = 6 \Rightarrow A = 4$$

(b)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{2} \\ &= \frac{(\frac{12}{5})}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{(\frac{8}{5})}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \\ h[n] &= \frac{12}{15}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

(c) (i)

$$x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1] \Leftrightarrow X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot \frac{4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > 1 \\ &= \frac{4}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} \\ &= \frac{3}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \\ y[n] &= 3u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \end{aligned}$$

(ii)

$$x(t) = 50 + 10\cos(20\pi t) + 30\cos(40\pi t)$$

$$T = \frac{1}{40} \qquad t = nT$$

$$\begin{aligned} x[n] &= 50 + 10\cos\frac{\pi}{2}n + 30\cos\pi n \\ &= 50 + 5e^{j(n\pi/2)} + 5e^{-j(n\pi/2)} + 15e^{jn\pi} + 15e^{-jn\pi} \end{aligned}$$

Using the eigenfunction property:

$$y[n] = 50H(e^{j0}) + 5e^{j(n\pi/2)}H(e^{j(\pi/2)}) + 5e^{-j(n\pi/2)}H(e^{-j(\pi/2)}) + 15e^{jn\pi}H(e^{j\pi}) + 15e^{-jn\pi}H(e^{-j\pi})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1-\frac{1}{6}e^{-j\omega} - \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

$H(e^{j0}) = 6$, $H(e^{j(\pi/2)}) = 7\left(\frac{12}{25}\right) - j\frac{12}{25}$, $H(e^{-j(\pi/2)}) = 7\left(\frac{12}{25}\right) + j\frac{12}{25}$,
$H(e^{j\pi}) = 4$, $H(e^{-j\pi}) = 4$

$$y[n] = 300 + 24\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right) + 120\cos\pi n$$

5.29.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{21}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{28}{1-2z^{-1}} + \frac{48}{1-4z^{-1}} \end{aligned}$$

Since we know the sequence is not stable, the ROC must not include $|z| = 1$, and since it is two-sided, the ROC must be a ring. This leaves only one possible choice: the ROC is $2 < |z| < 4$.

(a)

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 28(2)^n u[n] - 48(4)^n u[-n-1]$$

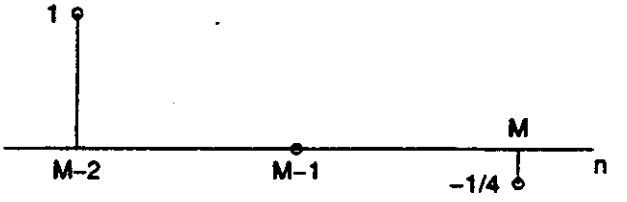
(b)

$$H_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{28}{1-2z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{48}{1-4z^{-1}}$$

5.30. (a)

$$H(z) = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}{z^M} = z^{-(M-2)}\left(1-\frac{1}{4}z^{-2}\right)$$



(b)

$$\begin{aligned} w[n] &= x[n-(M-2)] - \frac{1}{4}x[n-M] \\ y[n] &= w[2n] = x[2n-(M-2)] - \frac{1}{4}x[2n-M] \end{aligned}$$

Let $v[n] = x[2n]$,

$$y[n] = v[n-(M-2)/2] - \frac{1}{4}v[n-(M/2)]$$

Therefore,

$$g[n] = \delta[n-(M-2)/2] - \frac{1}{4}\delta[n-(M/2)], \quad M \text{ even}$$

$$G(z) = z^{-(M-2)/2} - \frac{1}{4}z^{-M/2}$$

5.31. (a)

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})}, \quad \text{stable, so the ROC is } \tfrac{1}{2} < |z| < 3$$

$$x[n] = u[n] \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{5}}{1 - 3z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad 1 < |z| < 3$$

$$y[n] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5}(3)^n u[-n-1] - u[n]$$

(b) ROC includes $z = \infty$ so $h[n]$ is causal. Since both $h[n]$ and $x[n]$ are 0 for $n < 0$, we know that $y[n]$ is also 0 for $n < 0$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}}$$

$$Y(z) - \frac{7}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{2}z^{-2}Y(z) = z^{-2}X(z)$$

$$y[n] = x[n-2] + \frac{7}{2}y[n-1] - \frac{3}{2}y[n-2]$$

Since $y[n] = 0$ for $n < 0$, recursion can be done:

$$y[0] = 0, \quad y[1] = 0, \quad y[2] = 1$$

(c)

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}, \quad \text{ROC: entire z-plane}$$

$$h_i[n] = \delta[n+2] - \frac{7}{2}\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n]$$

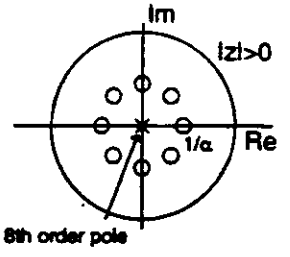
5.32. Since $H(e^{j\omega})$ has a zero on the unit circle, its inverse system will have a pole on the unit circle and thus is not stable.

5.33. (a)

$$X(z) = S(z)(1 - e^{-8\alpha}z^{-8})$$

$$H_1(z) = 1 - e^{-8\alpha}z^{-8}$$

There are 8 zeros at $z = e^{-\alpha}e^{j\frac{\pi}{4}k}$ for $k = 0, \ldots, 7$ and 8 poles at the origin.



(b)

$$Y(z) = H_2(z)X(z) = H_2(z)H_1(z)S(z)$$

$$H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)} = \frac{1}{1 - e^{-8\alpha}z^{-8}}$$

$|z| > e^{-\alpha}$ stable and causal, $|z| < e^{-\alpha}$ not causal or stable

(c) Only the causal $h_2[n]$ is stable, therefore only it can be used to recover $s[n]$.

$$h[n] = \begin{cases} e^{-\alpha n}, & n = 0, 8, 16, \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(d)

$$s[n] = \delta[n] \Rightarrow x[n] = \delta[n] - e^{-8\alpha}\delta[n-8]$$

$$\begin{aligned} x[n] * h_2[n] &= \delta[n] - e^{-8\alpha}\delta[n-8] \\ &\quad + e^{-8\alpha}(\delta[n-8] - e^{-8\alpha}\delta[n-16]) \\ &\quad + e^{-16\alpha}(\delta[n-16] - e^{-8\alpha}\delta[n-32]) + \cdots \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

5.34.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(a)

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2 - \frac{5}{6}z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Since $h[n], x[n] = 0$ for $n < 0$ we can assume initial rest conditions.

$$y[n] = \frac{5}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] + 2x[n] - \frac{5}{6}x[n-1]$$

(b)

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n], & n \leq 10^9 \\ 0, & n > 10^9 \end{cases}$$

(c)

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]z^{-m}, \quad N = 10^9 + 1$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m]$$

(d) For IIR, we have 4 multiplies and 3 adds per output point. This gives us a total of $4N$ multiplies and $3N$ adds. So, IIR grows with order N. For FIR, we have N multiplies and $N-1$ adds for the n^{th} output point, so this configuration has order N^2.

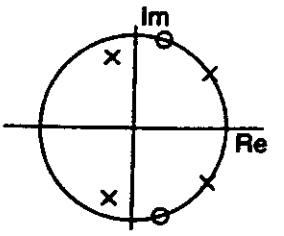
5.35. (a)

$$20\log_{10}|H(e^{j(\pi/5)})| = \infty \Rightarrow \text{pole at } e^{j(\pi/5)}$$

$$20\log_{10}|H(e^{j(2\pi/5)})| = -\infty \Rightarrow \text{zero at } e^{j(2\pi/5)}$$

Resonance at $\omega = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow$ pole inside unit circle here.

Since the impulse response is real, the poles and zeros must be in conjugate pairs. The remaining 2 zeros are at zero (the number of poles always equals the number of zeros).



(b) Since $H(z)$ has poles, we know $h[n]$ is IIR.

(c) Since $h[n]$ is causal and IIR, it cannot be symmetric, and thus cannot have linear phase.

(d) Since there is a pole at $|z| = 1$, the ROC does not include the unit circle. This means the system is not stable.

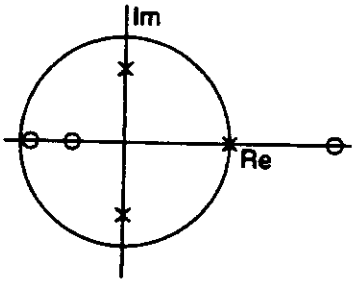
5.36. (a)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1+0.9z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.7jz^{-1})(1-0.7jz^{-1})} \\ &= \frac{1-0.6z^{-1}-2.35z^{-2}-0.9z^{-3}}{1-z^{-1}+0.49z^{-2}-0.49z^{-3}} \\ &= \frac{Y(z)}{X(z)} \end{aligned}$$

Cross multiplying and taking the inverse z-transform gives

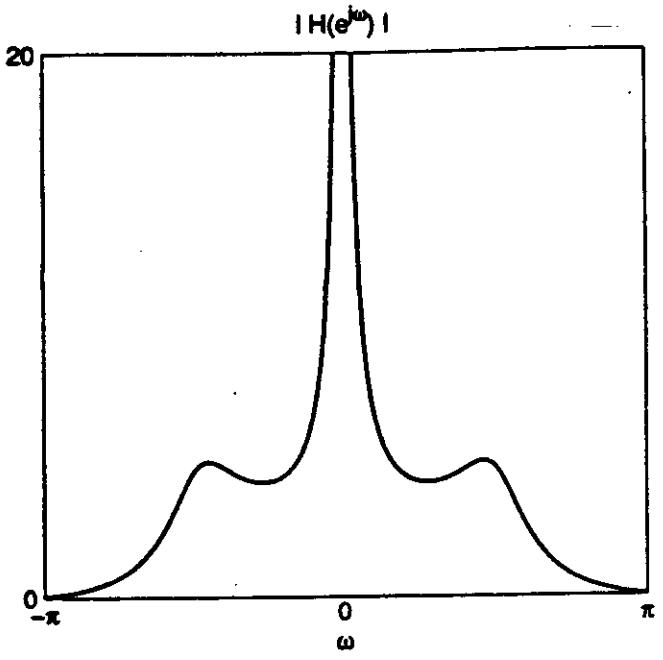
$$y[n] - y[n-1] + 0.49y[n-2] - 0.49y[n-3] = x[n] - 0.6x[n-1] - 2.35x[n-2] - 0.9x[n-3]$$

(b)



Note that since $h[n]$ is causal, ROC is $|z| > 1$.

(c)

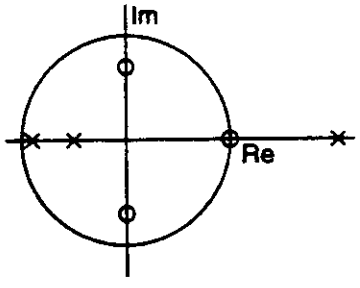


(d) (i) The system is not stable since the ROC does not include $|z| = 1$.

(ii) Because $h[n]$ is not stable, $h[n]$ does not approach a constant as $n \to \infty$.

(iii) We can see peaks at $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$ in the graph of $|H(e^{j\omega})|$ shown in part (c), so this is false.

(iv) Swapping poles and zeros gives:



There is a ROC that includes the unit circle ($0.9 < |z| < 2$). However, this stable system would be two sided, so we must conclude the statement is false.

5.37.

$$X(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{5}z)}{(1-\frac{1}{6}z)} = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-5z^{-1})}{(1-6z^{-1})}$$

$$\alpha^n x[n] \Leftrightarrow X(\alpha^{-1}z) = \frac{6}{5}\frac{(1-\frac{1}{2}\alpha z^{-1})(1-\frac{1}{4}\alpha z^{-1})(1-5\alpha z^{-1})}{(1-6\alpha z^{-1})}$$

A minimum phase sequence has all poles and zeros inside the unit circle.

$$|\alpha/2| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 2$$
$$|\alpha/4| < 1 \Rightarrow |\alpha| < 4$$
$$|5\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{5}$$
$$|6\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha| < \frac{1}{6}$$

Therefore, $\alpha^n x[n]$ is real and minimum phase iff α is real and $|\alpha| < \frac{1}{6}$.

5.38. (a) The causal systems have conjugate zero pairs inside or outside the unit circle. Therefore

$$\begin{aligned}
H(z) &= (1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \\
H_1(z) &= (0.9)^2(1.25)^2(1-(10/9)e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-(10/9)e^{-j0.6\pi}z^{-1})\cdot \\
&\quad (1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \\
H_2(z) &= (0.9)^2(1-(10/9)e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-(10/9)e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})\cdot \\
&\quad (1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \\
H_3(z) &= (1.25)^2(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})\cdot \\
&\quad (1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})
\end{aligned}$$

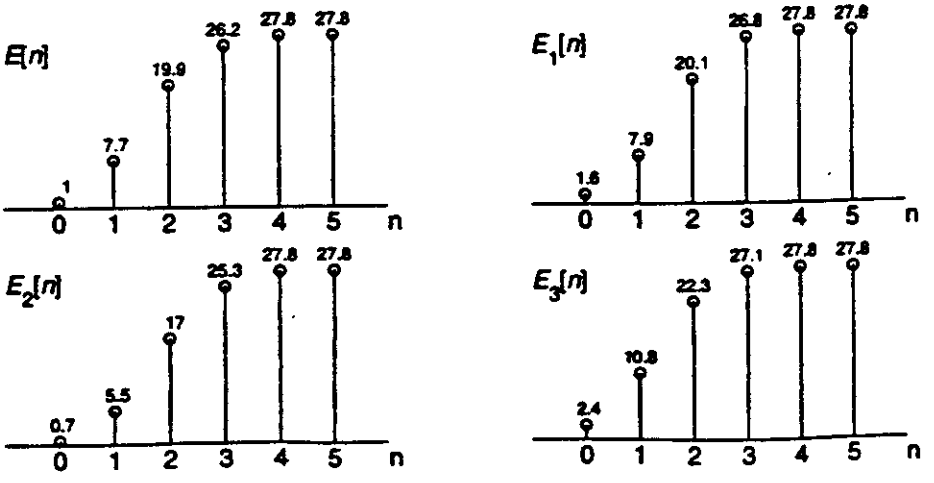
$H_2(z)$ has all its zeros outside the unit circle, and is a maximum phase sequence. $H_3(z)$ has all its zeros inside the unit circle, and thus is a minimum phase sequence.

(b)

$$\begin{aligned}
H(z) &= 1+2.5788z^{-1}+3.4975z^{-2}+2.5074z^{-3}+1.2656z^{-4} \\
h[n] &= \delta[n]+2.5788\delta[n-1]+3.4975\delta[n-2]+2.5074\delta[n-3]+1.2656\delta[n-4] \\
H_1(z) &= 1.2656+2.5074z^{-1}+3.4975z^{-2}+2.5788z^{-3}+z^{-4} \\
h_1[n] &= 1.2656\delta[n]+2.5074\delta[n-1]+3.4975\delta[n-2]+2.5788\delta[n-3]+\delta[n-4] \\
H_2(z) &= 0.81+2.1945z^{-1}+3.3906z^{-2}+2.8917z^{-3}+1.5625z^{-4} \\
h_2[n] &= 0.81\delta[n]+2.1945\delta[n-1]+3.3906\delta[n-2]+2.8917\delta[n-3]+1.5625\delta[n-4] \\
H_3(z) &= 1.5625+2.8917z^{-1}+3.3906z^{-2}+2.1945z^{-3}+0.81z^{-4} \\
h_3[n] &= 1.5625\delta[n]+2.8917\delta[n-1]+3.3906\delta[n-2]+2.1945\delta[n-3]+0.81\delta[n-4]
\end{aligned}$$

(c)

n	$E(n)$	$E_1(n)$	$E_2(n)$	$E_3(n)$
0	1.0	1.6	0.7	2.4
1	7.7	7.9	5.5	10.8
2	19.9	20.1	17.0	22.3
3	26.2	26.8	25.3	27.1
4	27.8	27.8	27.8	27.8
5	27.8	27.8	27.8	27.8



The plot of $E_3[n]$ corresponds to the minimum phase sequence.

5.39. All zeros inside the unit circle means the sequence is minimum phase. Since

$$\sum_{n=0}^{M} |h_{min}[n]|^2 \geq \sum_{n=0}^{M} |h[n]|^2$$

is true for all M, we can use $M = 0$ and just compute $h^2[0]$. The largest result will be the minimum phase sequence.

A	B	C	D	E	F	G	H
44.5	28.4	1.8	2.8	1.8	177.7	113.8	7.1

The answer is F.

5.40.

(i) A zero phase sequence has all its poles and zeros in conjugate reciprocal pairs. Generalized linear phase systems are zero phase systems with additional poles or zeros at $z = 0, \infty, 1$ or -1.

(ii) A stable system's ROC includes the unit circle.

(a) The poles are not in conjugate reciprocal pairs, so this does not have zero or generalized linear phase. $H_i(z)$ has a pole at $z = 0$ and perhaps $z = \infty$. Therefore, the ROC is $0 < |z| < \infty$, which means the inverse is stable. If the ROC includes $z = \infty$, the inverse will also be causal.

(b) Since the poles are not conjugate reciprocal pairs, this does not have zero or generalized linear phase either. $H_i(z)$ has poles inside the unit circle, so ROC is $|z| > \frac{2}{3}$ to match the ROC of $H(z)$. Therefore, the inverse is both stable and causal.

(c) The zeros occur in conjugate reciprocal pairs, so this is a zero phase system. The inverse has poles both inside and outside the unit circle. Therefore, a stable non-causal inverse exists.

(d) The zeros occur in conjugate reciprocal pairs, so this is a zero phase system. Since the poles of the inverse system are on the unit circle a stable inverse does not exist.

5.41. Convolving two symmetric sequences yields another symmetric sequence. A symmetric sequence convolved with an antisymmetric sequence gives an antisymmetric sequence. If you convolve two antisymmetric sequences, you will get a symmetric sequence.

$$A: \; h_1[n] * h_2[n] * h_3[n] = (h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n]$$

$h_1[n] * h_2[n]$ is symmetric about $n = 3, \quad (-1 \leq n \leq 7)$
$(h_1[n] * h_2[n]) * h_3[n]$ is antisymmetric about $n = 3, \quad (-3 \leq n \leq 9)$

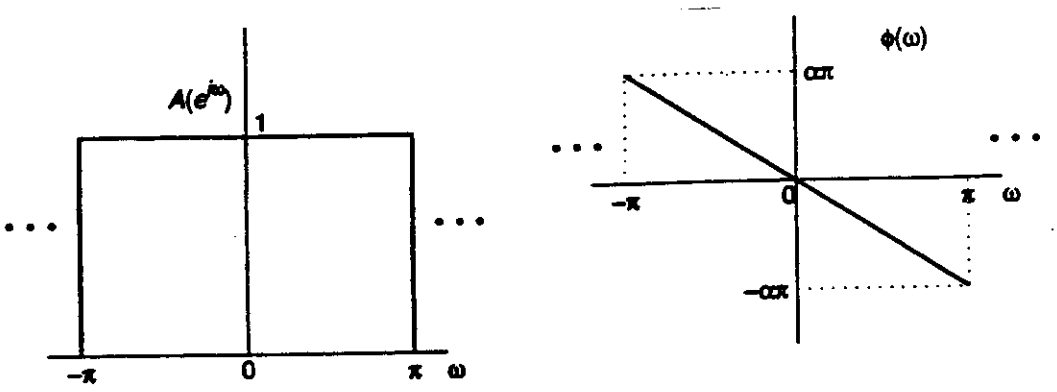
Thus, system A has generalized linear phase

$$B: \; (h_1[n] * h_2[n]) + h_3[n]$$

$h_1[n] * h_2[n]$ is symmetric about $n = 3$, as we noted above. Adding $h_3[n]$ to this sequence will destroy all symmtery, so this does not have generalized linear phase.

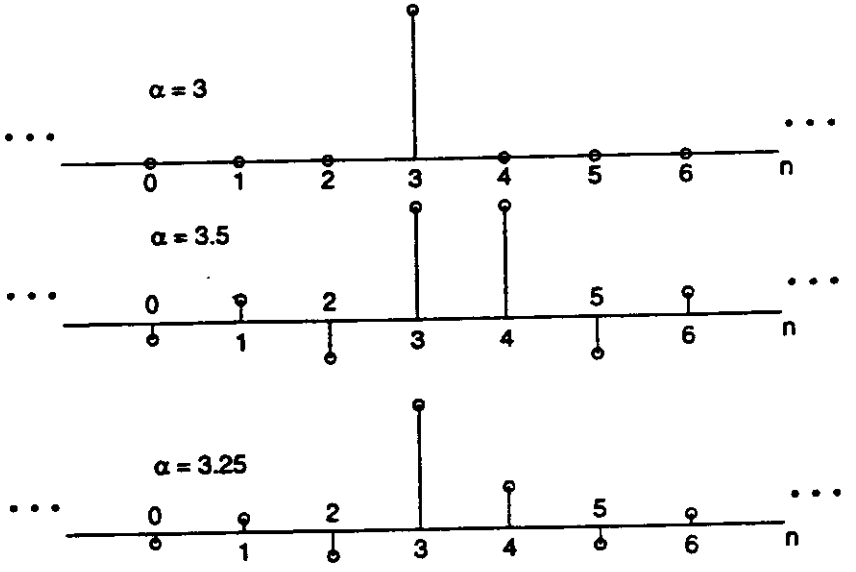
5.42. (a)

$$A(e^{j\omega}) = 1, \quad |\omega| < \pi$$
$$\phi(\omega) = -\alpha\omega, \quad |\omega| < \pi$$



(b)

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\alpha\omega}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin\pi(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)}$$



(c) If α is an integer, then $h[n]$ is symmetric about about the point $n = \alpha$. If $\alpha = \frac{M}{2}$, where M is odd, then $h[n]$ is symmetric about $\frac{M}{2}$, which is not a point of the sequence. For α in general, $h[n]$ will not be symmetric.

5.43. Type I: Symmetric, M Even, Odd Length

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+2)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} + h[M/2]e^{-j\omega(M/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{(M-2)/2} h[M-m]e^{-j\omega(M-m)} + h[M/2]e^{-j\omega(M/2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-j\omega(M/2)}\left(\sum_{m=0}^{(M-2)/2} h[m]e^{j\omega((M/2)-m)} + \sum_{m=0}^{(M-2)/2} h[m]e^{-j\omega((M/2)-m)} + h[M/2]\right)\\
&= e^{-j\omega(M/2)}\left(\sum_{m=0}^{(M-2)/2} 2h[m]\cos\omega((M/2)-m) + h[M/2]\right)\\
&= e^{-j\omega(M/2)}\left(\sum_{n=1}^{M/2} 2h[(M/2)-n]\cos\omega n + h[M/2]\right)
\end{aligned}
$$

Let

$$
a[n] = \begin{cases} h[M/2], & n = 0 \\ 2h[(M/2)-n], & n = 1,\ldots,M/2 \end{cases}
$$

Then

$$
H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(M/2)}\sum_{n=0}^{M/2} a[n]\cos\omega n
$$

and we have

$$
A(\omega) = \sum_{n=0}^{M/2} a[n]\cos(\omega n), \quad \alpha = \frac{M}{2}, \quad \beta = 0
$$

Type II: Symmetric, M Odd, Even Length

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}\\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n}\\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[M-m]e^{-j\omega(M-m)}\\
&= e^{-j\omega(M/2)}\left(\sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[m]e^{j\omega((M/2)-m)} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[m]e^{-j\omega((M/2)-m)}\right)\\
&= e^{-j\omega(M/2)}\left(\sum_{m=0}^{(M-1)/2} 2h[m]\cos\omega((M/2)-m)\right)\\
&= e^{-j\omega(M/2)}\left(\sum_{n=1}^{(M+1)/2} 2h[(M+1)/2-n]\cos\omega(n-(1/2))\right)
\end{aligned}
$$

Let

$$
b[n] = 2h[(M+1)/2-n], \quad n = 1,\ldots,(M+1)/2
$$

Then

$$
H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(M/2)}\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega(n-(1/2))
$$

and we have

$$
A(\omega) = \sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega(n-(1/2)), \quad \alpha = \frac{M}{2}, \quad \beta = 0
$$

Type III: Antisymmetric, M Even, Odd Length

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + 0 + \sum_{(M+2)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-2)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{(M-2)/2} h[M-m]e^{-j\omega(M-m)} \\
&= e^{-j\omega(M/2)} \left(\sum_{m=0}^{(M-2)/2} h[m]e^{j\omega((M/2)-m)} - \sum_{m=0}^{(M-2)/2} h[m]e^{-j\omega((M/2)-m)} \right) \\
&= e^{-j\omega(M/2)} \left(j \sum_{m=0}^{(M-2)/2} 2h[m] \sin\omega((M/2)-m) \right) \\
&= e^{-j\omega(M/2)} e^{j(\pi/2)} \left(\sum_{n=1}^{M/2} 2h[(M/2)-n] \sin\omega n \right)
\end{aligned}$$

Let

$$c[n] = h[(M/2)-n], \quad n = 1, \ldots, M/2$$

Then

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(M/2)} e^{j(\pi/2)} \sum_{n=1}^{M/2} c[n] \sin\omega n$$

and we have

$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{M/2} c[n] \sin(\omega n), \quad \alpha = \frac{M}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

Type IV: Antisymmetric, M Odd, Even Length

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[M-m]e^{-j\omega(M-m)} \\
&= e^{-j\omega(M/2)} \left(\sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[m]e^{j\omega((M/2)-m)} - \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[m]e^{-j\omega((M/2)-m)} \right) \\
&= e^{-j\omega(M/2)} \left(j \sum_{m=0}^{(M-1)/2} 2h[m] \sin\omega((M/2)-m) \right) \\
&= e^{-j\omega(M/2)} e^{j(\pi/2)} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} 2h[(M+1)/2-n] \sin\omega(n-(1/2))
\end{aligned}$$

Let

$$d[n] = 2h[(M+1)/2 - n], \quad n = 1, \ldots, (M+1)/2$$

Then

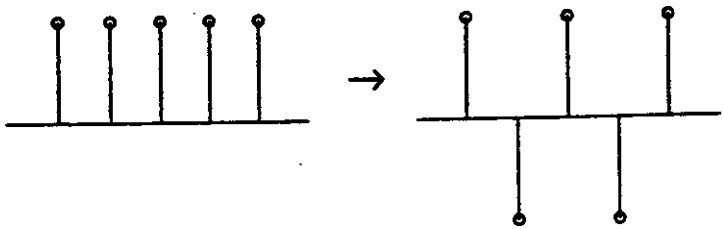
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(M/2)} e^{j(\pi/2)} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \sin \omega(n - (1/2))$$

and we have

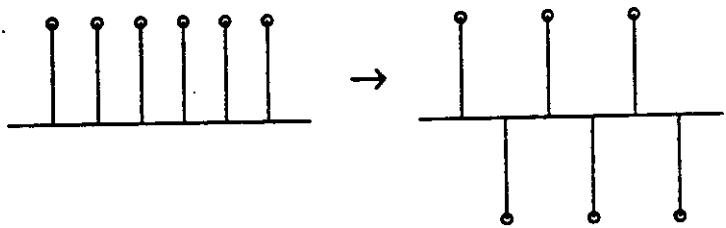
$$A(\omega) = \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n] \sin \omega(n - (1/2)), \quad \alpha = \frac{M}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

5.44. Filter Types II and III cannot be highpass filters since they both must have a zero at $z = 1$.

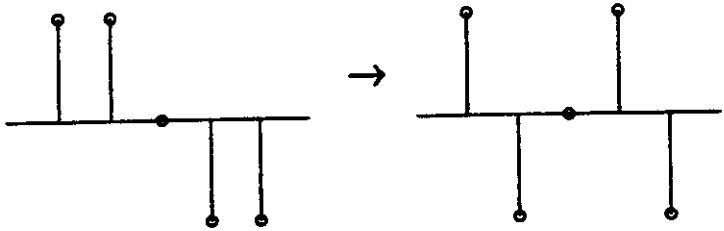
Type I → Type I could be highpass:



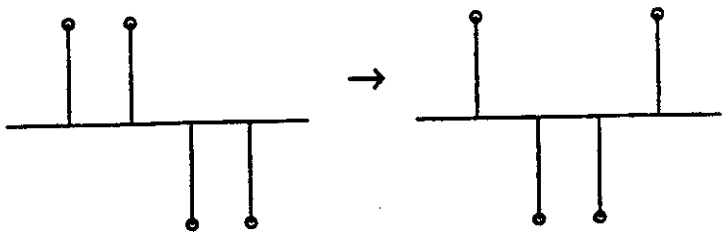
Type II → Type IV can be highpass:



Type III → Type III cannot be highpass:

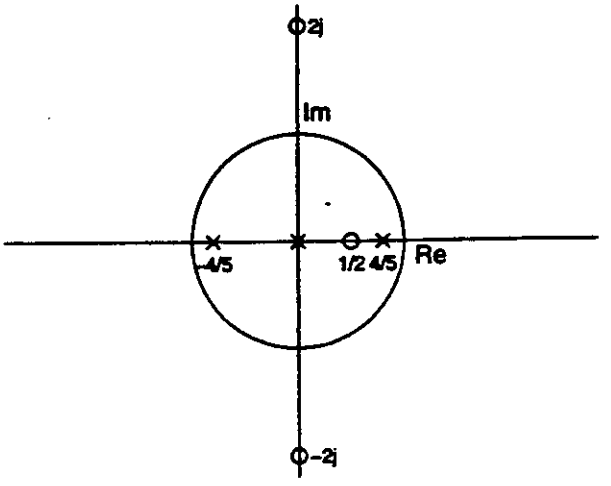


Type IV → Type II cannot be highpass:



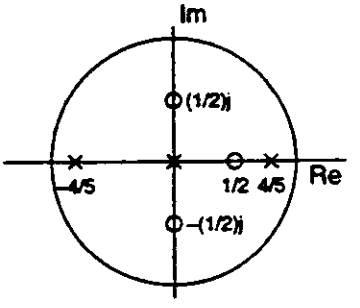
5.45.

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})}$$

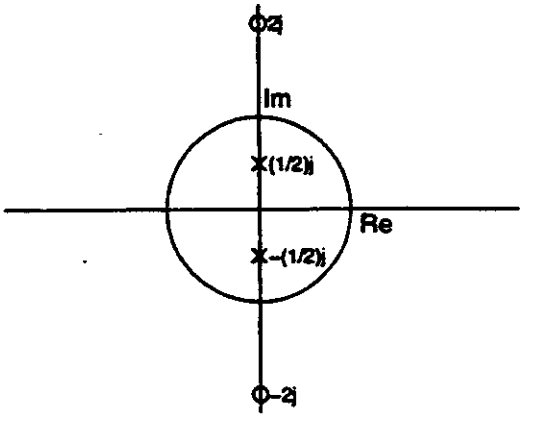


(a) A minimum phase system has all poles and zeros inside $|z| = 1$

$$H_1(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}{(1 - 0.64z^{-2})}$$

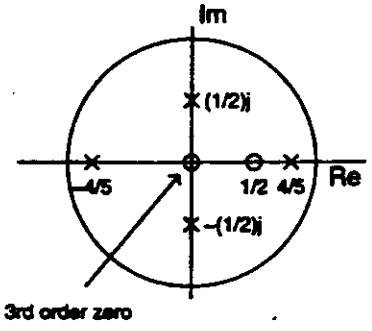


$$H_{ap}(z) = \frac{(1 + 4z^{-2})}{(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}$$

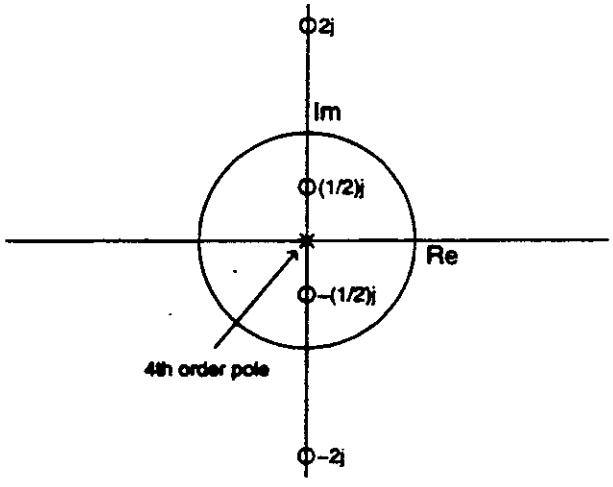


(b) A generalized linear phase system has zeros and poles at $z = 1, -1, 0$ or ∞ or in conjugate reciprocal pairs.

$$H_2(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 - 0.64z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-2})}$$



$$H_{lin}(z) = (1 + \tfrac{1}{4}z^{-2})(1 + 4z^{-2})$$

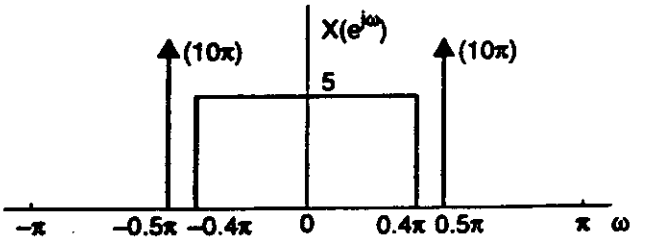


5.46. (a) Minimum phase systems have all poles and zeros inside $|z| = 1$. Allpass systems have pole-zero pairs at conjugate reciprocal locations. Generalized linear phase systems have pole pairs and zero pairs in conjugate reciprocal locations and at $z = 0, 1, -1$ and ∞. This implies that all the poles and zeros of $H_{min}(z)$ are second-order. When the allpass filter flips a pole or zero outside the unit circle, one is left in the conjugate reciprocal location, giving us linear phase.

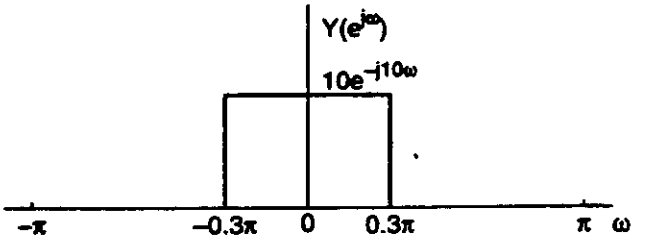
(b) We know that $h[n]$ is length 8 and therefore has 7 zeros. Since it is an even length generalized linear phase filter with real coefficients and odd symmetry it must be a Type IV filter. It therefore has the property that its zeros come in conjugate reciprocal pairs stated mathematically as $H(z) = H(1/z^*)$. The zero at $z = -2$ implies a zero at $z = -\frac{1}{2}$, while the zero at $z = 0.8e^{j(\pi/4)}$ implies zeros at $z = 0.8e^{-j(\pi/4)}$, $z = 1.25e^{j(\pi/4)}$ and $z = 1.25e^{-j(\pi/4)}$. Because it is a IV filter, it also must have a zero at $z = 1$. Putting all this together gives us

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 + 2z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})(1 - 0.8e^{j(\pi/4)}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j(\pi/4)}z^{-1}) \cdot \\ &\quad (1 - 1.25e^{j(\pi/4)}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j(\pi/4)}z^{-1})(1 - z^{-1}) \end{aligned}$$

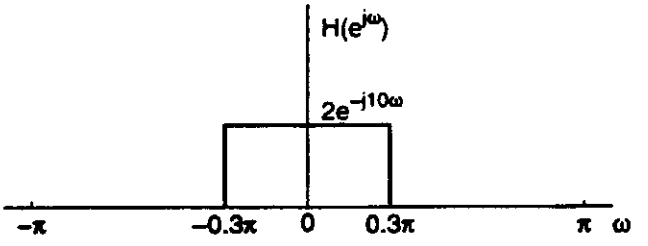
5.47. The input $x[n]$ in the frequency domain looks like



while the corresponding output $y[n]$ looks like



Therefore, the filter must be



In the time domain this is

$$h[n] = \frac{2\sin[0.3\pi(n-10)]}{\pi(n-10)}$$

5.48. (a)

Property	Applies?	Comments
Stable	No	For a stable, causal system, all poles must be inside the unit circle.
IIR	Yes	The system has poles at locations other than $z = 0$ or $z = \infty$.
FIR	No	FIR systems can only have poles at $z = 0$ or $z = \infty$.
Minimum Phase	No	Minimum phase systems have all poles and zeros located inside the unit circle.
Allpass	No	Allpass systems have poles and zeros in conjugate reciprocal pairs.
Generalized Linear Phase	No	The causal generalized linear phase systems presented in this chapter are FIR.
Positive Group Delay for all w	No	This system is not in the appropriate form.

(b)

Property	Applies?	Comments
Stable	Yes	The ROC for this system function, $\|z\| > 0$, contains the unit circle. (Note there is 7th order pole at $z = 0$).
IIR	No	The system has poles only at $z = 0$.
FIR	Yes	The system has poles only at $z = 0$.
Minimum Phase	No	By definition, a minimum phase system must have all its poles and zeros located *inside* the unit circle.
Allpass	No	Note that the zeros on the unit circle will cause the magnitude spectrum to drop zero at certain frequencies. Clearly, this system is not allpass.
Generalized Linear Phase	Yes	This is the pole/zero plot of a type II FIR linear phase system.
Positive Group Delay for all w	Yes	This system is causal and linear phase. Consequently, its group delay is a positive constant.

(c)

Property	Applies?	Comments
Stable	Yes	All poles are inside the unit circle. Since the system is causal, the ROC includes the unit circle.
IIR	Yes	The system has poles at locations other than $z = 0$ or $z = \infty$.
FIR	No	FIR systems can only have poles at $z = 0$ or $z = \infty$.
Minimum Phase	No	Minimum phase systems have all poles and zeros located inside the unit circle.
Allpass	Yes	The poles inside the unit circle have corresponding zeros located at conjugate reciprocal locations.
Generalized Linear Phase	No	The causal generalized linear phase systems presented in this chapter are FIR.
Positive Group Delay for all w	Yes	Stable allpass systems have positive group delay for all w.

5.49. (a) *Yes.* By the region of convergence we know there are no poles at $z = \infty$ and it therefore must be causal. Another way to see this is to use long division to write $H_1(z)$ as

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-5}}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\,, \quad |z| > 0$$

(b) $h_1[n]$ is a causal rectangular pulse of length 5. If we convolve $h_1[n]$ with another causal rectangular pulse of length N we will get a triangular pulse of length $N + 5 - 1 = N + 4$. The triangular pulse is symmetric around its apex and thus has linear phase. To make the triangular pulse $g[n]$ have at least 9 nonzero samples we can choose $N = 5$ or let $h_2[n] = h_1[n]$.

Proof:

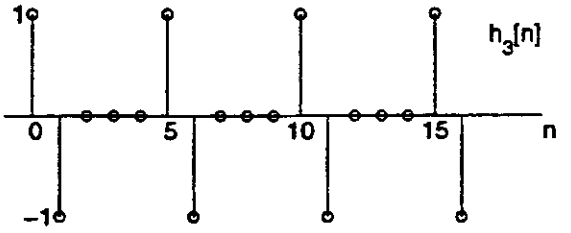
$$G(e^{j\omega}) \;=\; H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) = H_1^2(e^{j\omega})$$

$$= \left[\frac{1-e^{-j5\omega}}{1-e^{-j\omega}}\right]^2$$
$$= \left[\frac{e^{-j\omega 5/2}\left(e^{j\omega 5/2}-e^{-j\omega 5/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\right)}\right]^2$$
$$= \frac{\sin^2(5\omega/2)}{\sin^2(\omega/2)}\,e^{-j4\omega}$$

(c) The required values for $h_3[n]$ can intuitively be worked out using the flip and slide idea of convolution. Here is a second way to get the answer. Pick $h_3[n]$ to be the inverse system for $h_1[n]$ and then simplify using the geometric series as follows.

$$\begin{aligned} H_3(z) &= \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-5}} \\ &= (1-z^{-1})\left[1+z^{-5}+z^{-10}+z^{-15}+\cdots\right] \\ &= 1-z^{-1}+z^{-5}-z^{-6}+z^{-10}-z^{-11}+z^{-15}-z^{-16}+\cdots \end{aligned}$$

This choice for $h_3[n]$ will make $q[n] = \delta[n]$ for all n. However, since we only need equality for $0 \le n \le 19$ truncating the infinite series will give us the desired result. The final answer is shown below.



5.50. (a) This system does not necessarily have generalized linear phase. The phase response,

$$G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\left(\frac{Im(H_1(e^{j\omega})+H_2(e^{j\omega}))}{Re(H_1(e^{j\omega})+H_2(e^{j\omega}))}\right)$$

is not necessarily linear. As a counter-example, consider the systems

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \delta[n]+\delta[n-1] \\ h_2[n] &= 2\delta[n]-2\delta[n-1] \\ g_1[n] &= h_1[n]+h_2[n] = 3\delta[n]-\delta[n-1] \\ G_1(e^{j\omega}) &= 3-e^{-j\omega} = 3-\cos\omega+j\sin\omega \\ \angle G_1(e^{j\omega}) &= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\omega}{3-\cos\omega}\right) \end{aligned}$$

Clearly, $G_1(e^{j\omega})$ does not have linear phase.

(b) This system must have generalized linear phase.

$$\begin{aligned} G_2(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) \\ |G_2(e^{j\omega})| &= |H_1(e^{j\omega})|\,|H_2(e^{j\omega})| \\ \angle G_2(e^{j\omega}) &= \angle H_1(e^{j\omega})+\angle H_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

The sum of two linear phase responses is also a linear phase response.

(c) This system does not necessarily have linear phase. Using properties of the DTFT, the circular convolution of $H_1(e^{j\omega})$ and $H_2(e^{j\omega})$ is related to the product of $h_1[n]$ and $h_2[n]$. Consider the systems

$$\begin{aligned} h_1[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ h_2[n] &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ g_3[n] &= h_1[n]h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] \\ G_3(e^{j\omega}) &= 1 + 2e^{-j\omega} = 1 + 2\cos\omega - j2\sin\omega \\ \angle G_3(e^{j\omega}) &= \tan^{-1}\left(\frac{2\sin\omega}{1+2\cos\omega}\right) \end{aligned}$$

Clearly, $G_3(e^{j\omega})$ does not have linear phase.

5.51. *False.* Let $h[n]$ equal

$$h[n] = \frac{\sin\omega_c(n-4.3)}{\pi(n-4.3)} \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-4.3\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Proof: Although the group delay is constant (grd $\left[H(e^{j\omega})\right] = 4.3$) the resulting M is not an integer.

$$\begin{aligned} h[n] &= \pm h[M-n] \\ H(e^{j\omega}) &= \pm e^{jM\omega}H(e^{-j\omega}) \\ e^{-j4.3\omega} &= \pm e^{j(M+4.3)\omega}, \qquad |\omega| < \omega_c \\ M &= -8.6 \end{aligned}$$

5.52. The type II FIR system $H_{II}(z)$ has generalized linear phase. Therefore, it can be written in the form

$$H_{II}(e^{j\omega}) = A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}$$

where M is an odd integer and $A_e(e^{j\omega})$ is a real, even, periodic function of ω. Note that the system $G(z) = (1 - z^{-1})$ is a type IV generalized linear phase system.

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} \\ &= e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \\ &= e^{-j\omega/2}(2j\sin(\omega/2)) \\ &= 2\sin(\omega/2)e^{-j\omega/2+j\pi/2} \\ &= A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega/2+j\pi/2} \\ A_o(e^{j\omega}) &= 2\sin(\omega/2) \\ \angle G(e^{j\omega}) &= -\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

The cascade of $H_{II}(z)$ with $G(z)$ results in a generalized linear phase system $H(z)$.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A_e(e^{j\omega})A_o(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}e^{-j\omega/2+j\pi/2} \\ &= A'_o(e^{j\omega})e^{j\omega M'/2+j\pi/2} \end{aligned}$$

where $A'_o(e^{j\omega})$ is a real, odd, periodic function of ω and M' is an even integer.

Thus, the resulting system $H(e^{j\omega})$ has the form of a type III FIR generalized linear phase system. It is antisymmetric, has odd length (M is even), and has generalized linear phase.

5.53. For all of the following we know that the poles and zeros are real or occur in complex conjugate pairs since each impulse response is real. Since they are causal we also know that none have poles at infinity.

(a)
- Since $h_1[n]$ is real there are complex conjugate poles at $z = 0.9e^{\pm j\pi/3}$.
- If $x[n] = u[n]$

$$Y(z) = H_1(z)X(z) = \frac{H_1(z)}{1 - z^{-1}}$$

We can perform a partial fraction expansion on $Y(z)$ and find a term $(1)^n u[n]$ due to the pole at $z = 1$. Since $y[n]$ eventually decays to zero this term must be cancelled by a zero. Thus, the filter must have a zero at $z = 1$.
- The length of the impulse response is infinite.

(b)
- Linear phase and a real impulse response implies that zeros occur at conjugate reciprocal locations so there are zeros at $z = z_1, 1/z_1, z_1^*, 1/z_1^*$ where $z_1 = 0.8e^{j\pi/4}$.
- Since $h_2[n]$ is both causal and linear phase it must be a Type I, II, III, or IV FIR filter. Therefore the filter's poles only occur at $z = 0$.
- Since the $\arg\{H_2(e^{j\omega})\} = -2.5\omega$ we can narrow down the filter to a Type II or Type IV filter. This also tells us that the length of the impulse response is 6 and that there are 5 zeros. Since the number of poles always equal the number of zeros, we have 5 poles at $z = 0$.
- Since $20\log|H_2(e^{j0})| = -\infty$ we must have a zero at $z = 1$. This narrows down the filter type even more from a Type II or Type IV filter to just a Type IV filter.

With all the information above we can determine $H_2(z)$ completely (up to a scale factor)

$$H_2(z) = A(1 - z^{-1})(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 - 1.25e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j\pi/4}z^{-1})$$

(c) Since $H_3(z)$ is allpass we know the poles and zeros occur in conjugate reciprocal locations. The impulse response is infinite and in general looks like

$$H_3(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j\pi/4})(z^{-1} - 0.8e^{-j\pi/4})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})}H_{ap}(z)$$

5.54. (a) To be rational, X(z) must be of the form

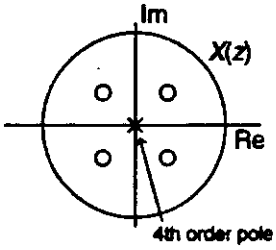
$$X(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

Because x[n] is real, its zeros must appear in conjugate pairs. Consequently, there are two more zeros, at $z = \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}$, and $z = \frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}$. Since x[n] is zero outside $0 \le n \le 4$, there are only four zeros (and poles) in the system function. Therefore, the system function can be written as

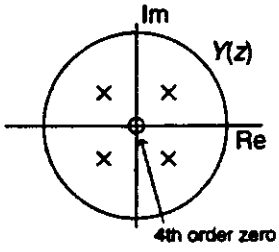
$$X(z) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{j3\pi/4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j3\pi/4}z^{-1}\right)$$

Clearly, X(z) is rational.

(b) A sketch of the pole-zero plot for $X(z)$ is shown below. Note that the ROC for X(z) is $|z| > 0$.



(c) A sketch of the pole-zero plot for $Y(z)$ is shown below. Note that the ROC for Y(z) is $|z| > \frac{1}{2}$.



5.55.

- Since $x[n]$ is real the poles & zeros come in complex conjugate pairs.
- From (1) we know there are no poles except at zero or infinity.
- From (3) and the fact that $x[n]$ is finite we know that the signal has generalized linear phase.
- From (3) and (4) we have $\alpha = 2$. This and the fact that there are no poles in the finite plane except the five at zero (deduced from (1) and (2)) tells us the form of $X(z)$ must be

$$X(z) = x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + x[4]z^{-4} + x[5]z^{-5}$$

The phase changes by π at $\omega = 0$ and π so there must be a zero on the unit circle at $z = \pm 1$. The zero at $z = 1$ tells us $\sum x[n] = 0$. The zero at $z = -1$ tells us $\sum(-1)^n x[n] = 0$.
We can also conclude $x[n]$ must be a Type III filter since the length of $x[n]$ is odd and there is a zero at both $z = \pm 1$. $x[n]$ must therefore be antisymmetric around $n = 2$ and $x[2] = 0$.

- From (5) and Parseval's theorem we have $\sum |x[n]|^2 = 28$.
- From (6)

$$\begin{aligned} y[0] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})d\omega = 4 \\ &= x[n] * u[n]\,|_{n=0} = x[-1] + x[0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y[1] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega = 6 \\ &= x[n] * u[n]\,|_{n=1} = x[-1] + x[0] + x[1] \end{aligned}$$

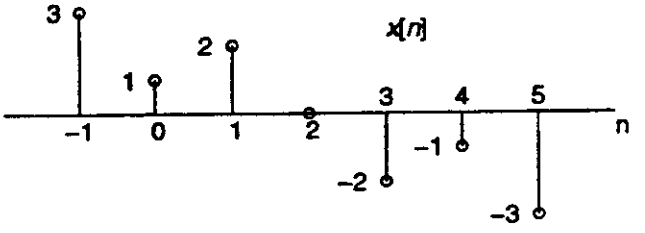
- The conclusion from (7) that $\sum(-1)^n x[n] = 0$ we already derived earlier.
- Since the DTFT $\{x_e[n]\} = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ we have

$$\begin{aligned} \frac{x[5] + x[-5]}{2} &= -\frac{3}{2} \\ x[5] &= -3 + x[-5] \\ x[5] &= -3 \end{aligned}$$

Summarizing the above we have the following (dependent) equations

(1) $x[-1] + x[0] + x[1] + x[2] + x[3] + x[4] + x[5] = 0$
(2) $-x[-1] + x[0] - x[1] + x[2] - x[3] + x[4] - x[5] = 0$
(3) $x[2] = 0$
(4) $x[-1] = -x[5]$
(5) $x[0] = -x[4]$
(6) $x[1] = -x[3]$
(7) $x[-1]^2 + x[0]^2 + x[1]^2 + x[2]^2 + x[3]^2 + x[4]^2 + x[5]^2 = 28$
(8) $x[-1] + x[0] = 4$
(9) $x[-1] + x[0] + x[1] = 6$
(10) $x[5] = -3$

$x[n]$ is easily obtained from solving the equations in the following order: (3),(10),(4),(8),(5),(9), and (6).



5.56. (a) The LTI system S_2 is characterized as a lowpass filter.
The z-transform of $h_1[n]$ is found below.

$$\begin{aligned} y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] &= x[n] \\ Y(z) - Y(z)z^{-1} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} &= X(z) \\ Y(z)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right) &= X(z) \end{aligned}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

This system function has a second order pole at $z = \frac{1}{2}$. (There is also a second order zero at $z = 0$). Evaluating this pole-zero plot on the unit circle yields a low pass filter, as the second order pole boosts the low frequencies.
Since

$$\begin{aligned} H_2(e^{j\omega}) &= H_1(-e^{j\omega}) \\ H_2(z) &= H_1(-z) \end{aligned}$$

If we replace all references to z in $H_1(z)$ with $-z$, we will get $H_2(z)$.

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

Consequently, $H_2(z)$ has two poles at $z = -\frac{1}{2}$. (There is also a second order zero at $z = 0$). Evaluating this pole-zero plot on the unit circle yields a high pass filter, as the second order pole now boosts the high frequencies.

(b) The LTI system S_3 is characterized as a highpass filter. $H_3(e^{j\omega})$ is the inverse system of $H_1(e^{j\omega})$, since $H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1$. Consequently, $H_3(z)H_1(z) = 1$.

As shown in part (a), $H_1(z)$ has a second order pole at $z = \frac{1}{2}$, and a second order zero at $z = 0$. Thus, $H_3(z)$ has a second order zero at $z = \frac{1}{2}$, and a second order pole at $z = 0$. Evaluating this pole-zero plot on the unit circle yields a high pass filter, as the second order zero attenuates the low frequencies.

S_3 is a minimum phase filter, since its poles and zeros are located inside the unit circle. However, because the zeros of S_3 do not occur in conjugate reciprocal pairs, S_3 cannot be classified as one of the four types of FIR filters with generalized linear phase.

(c) First, we compute the system function $H_4(z)$

$$\begin{aligned} y[n] + \alpha_1 y[n-1] + \alpha_2 y[n-2] &= \beta_0 x[n] \\ Y(z) + \alpha_1 Y(z)z^{-1} + \alpha_2 Y(z)z^{-2} &= \beta_0 X(z) \end{aligned}$$

$$H_4(z) = \frac{\beta_0}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2}}$$

S_4 is a stable and noncausal LTI system. Therefore, its poles must be located *outside* the unit circle, and its ROC must be an interior region that includes the unit circle. We place a second order pole at $z = 2$, which is the (conjugate) reciprocal location of the second order pole of $H_1(z)$ at $z = \frac{1}{2}$. This gives

$$\begin{aligned} H_4(z) &= \frac{\beta_0}{(1 - 2z^{-1})^2} \\ &= \frac{\beta_0}{(1 - 4z^{-1} + 4z^{-2})} \end{aligned}$$

In order for

$$|H_4(e^{j\omega})| = |H_1(e^{j\omega})|$$

an appropriate value of β_0 must be found. Consider the case when $z = 1$. Then,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\beta_0}{(1 - 4z^{-1} + 4z^{-2})}\right| &= \left|\frac{1}{(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})}\right| \\ \left|\frac{\beta_0}{(1 - 4 + 4)}\right| &= \left|\frac{1}{(1 - 1 + \frac{1}{4})}\right| \\ |\beta_0| &= 4 \end{aligned}$$

The values $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 4$, and $\beta_0 = 4$ satisfy the criteria. Note that $\beta_0 = -4$ also is a valid solution.

(d) If $h_5[n] * h_1[n]$ is FIR, then the poles of $H_1(z)$ must be cancelled by zeros of $H_5(z)$. Thus, we expect a second order zero of $H_5(z)$ at $z = \frac{1}{2}$. Therefore, $H_5(z)$ will have the term $(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2$.

In order for the filter $h_5[n]$ to be zero phase, it must satisfy the symmetry property $h_5[n] = h_5^*[-n]$, which means that $H_5(z) = H_5^*(z)$. For this property to be satisfied, we need two more zeros located at $z = 2$. In addition, we want these zeros to correspond to a noncausal sequence. Therefore, $H_5(z)$ will also have the term $(1 - \frac{1}{2}z)^2$.

Combining these two results,

$$\begin{aligned} H_5(z) &= \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}z\right)^2 \\ &= \left(1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 - z + \frac{1}{4}z^2\right) \\ &= \frac{1}{4}z^{-2} - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{33}{16} - \frac{5}{4}z + \frac{1}{4}z^2 \end{aligned}$$

Taking the inverse z-transform yields

$$h_5[n] = \frac{1}{4}\delta[n-2] - \frac{5}{4}\delta[n-1] + \frac{33}{16}\delta[n] - \frac{5}{4}\delta[n+1] + \frac{1}{4}\delta[n+2]$$

5.57. (a)

$$x[n] = s[n]\cos\omega_0 n = \frac{1}{2}s[n]e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}s[n]e^{-j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}S(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}S(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\phi_0}S(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}e^{j\phi_0}S(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}s[n]e^{j(\omega_0 n-\phi_0)} + \frac{1}{2}s[n]e^{-j(\omega_0 n-\phi_0)} \\ &= s[n]\cos(\omega_0 n - \phi_0) \end{aligned}$$

(b) This time,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\phi_0}e^{-j\omega n_d}S(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}e^{j\phi_0}e^{-j\omega n_d}S(e^{j(\omega+\omega_0)})$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \delta[n-n_d] * \left(\frac{1}{2}s[n]e^{j(\omega_0 n-\phi_0)} + \frac{1}{2}s[n]e^{-j(\omega_0 n-\phi_0)}\right) \\ &= \delta[n-n_d] * s[n]\cos(\omega_0 n - \phi_0) \\ &= s[n-n_d]\cos(\omega_0 n - \omega_0 n_d - \phi_0) \end{aligned}$$

Therefore, if $\phi_1 = \phi_0 + \omega_0 n_d$ then

$$y[n] = s[n-n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_1)$$

for narrowband $s[n]$.

(c)

$$\begin{aligned} \tau_{gr} &= -\frac{d}{d\omega}arg[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}[-\phi_0 - \omega n_d] = n_d \\ \tau_{ph} &= -\frac{1}{\omega}arg[H(e^{j\omega})] = -\frac{1}{\omega}[-\phi_0 - \omega n_d] = \frac{\phi_0}{\omega} - n_d \end{aligned}$$

$$y[n] = s[n - \tau_{gr}(\omega_0)]\cos[\omega_0(n - \tau_{ph}(\omega_0))]$$

(d) The effect would be the same as the following:

(i) Bandlimit interpolate the composite signal to a C–T signal with some rate T.

(ii) Delay the envelope by $T \cdot \tau_{gr}$, and delay the carrier by $T \cdot \tau_{ph}$.

(iii) Sample to a D–T signal at rate T

5.58. (a)

$$m_x = 0 \Rightarrow \phi_{yy}[m] = \Gamma_{yy}[m] \Leftrightarrow \Gamma_{yy}(z) = \Phi_{yy}(z)$$

$$\phi_{yy}[m] = y[n] * y[-n] = x[n] * x[-n] * h[n] * h[-n]$$

$$\Phi_{yy}(z) = X(z)X(z^{-1})H(z)H(z^{-1}) = \Phi_{xx}(z)H(z)H(z^{-1})$$

$$\phi_{xx}[m] = \sigma_x^2\delta[m] \Leftrightarrow \Phi_{xx}(z) = \sigma_x^2$$

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k], \quad b_0 = 1$$

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{N} a_k Y(z)z^{-k} + X(z) + \sum_{k=1}^{M} b_k X(z)z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{1 + \sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = A\frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})}$$

So,

$$\Gamma_{yy}(z) = \Phi_{xx}(z)H(z)H(z^{-1}) = \sigma_x^2 \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{M} b_k z^{k}\right)}{\left(1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\right)\left(1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{k}\right)}$$

Or equivalently,

$$\Gamma_{yy}(z) = A^2\sigma_x^2 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k z)}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k z)}$$

(b) To "whiten" the signal $y[n]$ we need a system:

$$H_w(z)H_w(z^{-1}) = \frac{1}{H(z)H(z^{-1})}$$

Therefore,

$$H_w(z)H_w(z^{-1}) = \frac{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k z)}{\prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k z)}$$

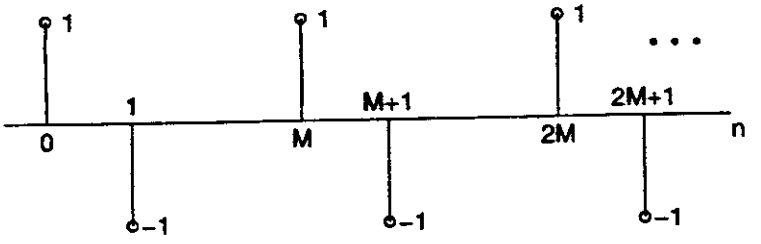
The poles of $H_w(z)$ are the zeros of $H(z)$ and the zeros of $H_w(z)$ are the poles of $H(z)$. We must now decide which N of the $2N$ zeros of $H_w(z)H_w(z^{-1})$ to associate with $H_w(z)$. The remaining N zeros and M poles will be reciprocals and will be associated with $H_w(z^{-1})$. In order for $H_w(z)$ to be stable, we must chose all its poles inside the unit circle. Thus for a pair c_k, c_k^{-1} we chose the one which is inside the unit circle.

(c) There is no real constraint on the zeros of $H_w(z)$, so we can select either d_k or d_k^{-1}. Thus, it is not unique.

5.59. (a)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega M}} \Leftrightarrow h_i[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - kM] - \delta[n - kM - 1]$$



$h_i[n]$ has infinite length, so we can never get a result without infinite sums. Therefore, it is not a real time filter. We can use the transform approach but we must have all the input data available to do this.

(b) The proposed system is a windowed version of $h_i[n]$:

$$h_1[n] * h_2[n] = h_i[n]p[n]$$

Where

$$p[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le qM \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x[n] * h[n] * h_i[n]p[n] = w[n]$$

Therefore, if $x[n]$ is shorter than qM points, we can recover it by looking at $w[n]$ in the range $0 \le n \le qM - 1$.

(c)

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

$$h_1[n] = \sum_{k=0}^{q} \delta[n - kM] \Leftrightarrow H_1(z) = \frac{1 - z^{-qM}}{1 - z^{-M}}$$

Thus,

$$H_2(z) = \frac{1}{H(z)} \frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-qM}}$$

Note that

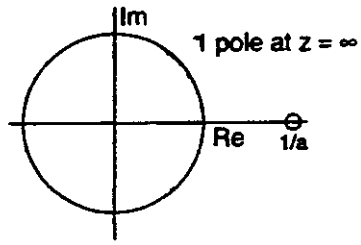
$$\frac{1 - z^{-M}}{1 - z^{-qM}}$$

has M zeros and qM poles. Since $H_2(z)$ is causal, there are no poles at $z = \infty$. If $H(z)$ has P poles and Z zeros:

$$Z + M \le P + qM$$

5.60. (a)

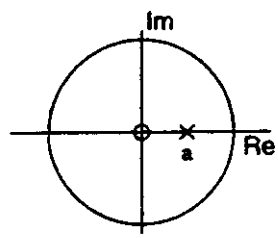
$$H(z) = z - \frac{1}{a} = \frac{az-1}{a} = \frac{a - z^{-1}}{az^{-1}}$$



$$H(e^{j\omega}) = e^{j\omega} - \frac{1}{a} = \cos\omega + j\sin\omega - \frac{1}{a}$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\omega}{\cos\omega - \frac{1}{a}}\right)$$

(b)



$$G(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{1-a\cos\omega + ja\sin\omega}$$

$$\begin{aligned}\arg[G(e^{j\omega})] &= -\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)\\ &= \tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega}{a\cos\omega - 1}\right)\\ &= \arg[H(e^{j\omega})]\end{aligned}$$

5.61. (a) Because $h_1[n], h_2[n]$ are minimum phase sequences, all poles and zeros of their transforms must be inside the unit circle.

$$h_1[n] * h_2[n] \leftrightarrow H_1(z)H_2(z)$$

Since $H_1(z)$ and $H_2(z)$ have all their poles and zeros inside the unit circle, their product will also.

(b)

$$h_1[n] + h_2[n] \leftrightarrow H_1(z) + H_2(z)$$

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = X_1(z)$$

$$x_2[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = X_2(z)$$

Both of these are minimum phase, with a zero at $z = 0$ and a pole at $z = \frac{1}{2}$.

$$X_1(z) + X_2(z) = \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

This is minimum phase, with the same pole and zero as $X_1(z)$ and $X_2(z)$.

$$x_1[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = X_1(z)$$

$$x_2[n] = -6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{-6}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = X_2(z)$$

$X_1(z)$ has a pole at $z = \frac{1}{2}$ and a zero at $z = 0$. $X_2(z)$ has a pole at $z = \frac{1}{3}$ and a zero at $z = 0$.

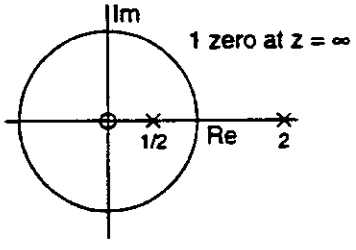
$$X_1(z) + X_2(z) = \frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$$

This has zeros at $z = 0, \infty$ and poles at $z = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Therefore, it is not minimum phase.

5.62. (a)

$$r[n] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3}(2)^n u[-n-1]$$

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}} \\ &= \frac{-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \\ &= \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}, \quad \text{ROC: } \tfrac{1}{2} < |z| < 2 \end{aligned}$$



(b)

$$r[n] = h[n] * h[-n] \Leftrightarrow R(z) = H(z)H(z^{-1})$$

$$R(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$$

We have two choices from $H(z)$. Since $h[n]$ is minimum phase we need the one which has the pole at $z = \frac{1}{2}$, which is inside the unit circle.

$$H(z) = \frac{\pm 1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}, \quad \text{ROC: } |z| > \tfrac{1}{2}$$

$$h[n] = \pm\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

5.63. (a) Maximum phase systems are of the form

$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^{M}(z - c_k)}{\prod_{k=1}^{M}(z - d_k)}, \qquad |c_k|, |d_k| > 1$$

Since the poles are outside the unit circle, the only stable system will have a ROC of $|z| < \min |d_k|$. This implies the poles will all contribute to the $h[n]$ with terms of the form $-(d_k)^n u[-n-1]$, which are anticausal. The zeros are all positive powers of z, which means they are shifting to left, and $h[n]$ is still anticausal.

(b)

$$H_{min}(z) = h_{min}[0] \prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1})$$

$$H_{max}(z) = h_{min}[0] \prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M}\left(\frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k z^{-1}}\right)$$

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{M}\left(\frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k z^{-1}}\right)$$

(c)

$$\begin{aligned} H_{max}(z) &= h_{min}[0] \prod_{k=1}^{M}(1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M}\left(\frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k z^{-1}}\right) \\ &= h_{min}[0] \prod_{k=1}^{M}(z^{-1} - c_k^*) \\ &= z^{-M} h_{min}[0] \prod_{k=1}^{M}(1 - c_k^* z) \\ &= z^{-M} H_{min}(z^{-1}) \end{aligned}$$

(d)

$$H_{max}(z) = z^{-M} H_{min}(z^{-1})$$

$$h_{max}[n] = \delta[n - M] * h_{min}[-n] = h_{min}[-n + M]$$

5.64. (a) We desire $|H(z)H_c(z)| = 1$, where $H_c(z)$ is stable and causal and $H(z)$ is not minimum phase. So,

$$|H_{ap}(z)H_{min}(z)H_c(z)| = 1$$

Since $|H_{ap}(z)| = 1$, we want

$$|H_{min}(z)H_c(z)| = 1$$

This means we have

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$$

which will be stable and causal since all the zeros of $H_{min}(z)$, which become the poles of $H_c(z)$, are inside the unit circle.

(b) Since

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{min}(z)}$$

We have

$$G(z) = H_{ap}(z)$$

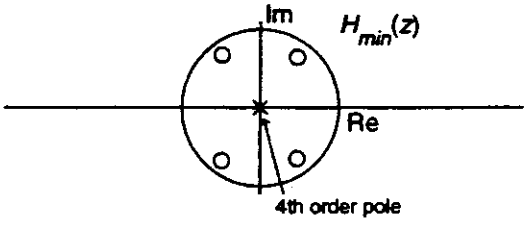
(c)

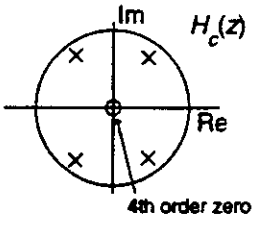
$$H(z) = (1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - 1.2e^{-j0.7\pi}z^{-1})$$

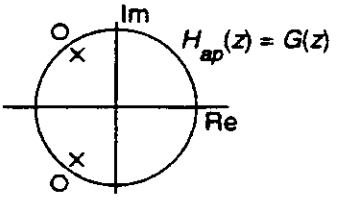
$$H_{min}(z) = (1.44)(1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - (5/6)e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - (5/6)e^{-j0.7\pi}z^{-1})$$

$$H_c(z) = \frac{1}{(1.44)(1 - 0.8e^{j0.3\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.3\pi}z^{-1})(1 - (5/6)e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - (5/6)e^{-j0.7\pi}z^{-1})}$$

$$G(z) = H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - (5/6)e^{-j0.7\pi})(z^{-1} - (5/6)e^{j0.7\pi})}{(1 - (5/6)e^{j0.7\pi}z^{-1})(1 - (5/6)e^{-j0.7\pi}z^{-1})}$$







5.65.

$$H(z) = H_{min}(z)\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < 1$$

Thus,

$$\lim_{z\to\infty} H_{min}(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a}H(z)$$

$$h_{min}[0] = -\frac{1}{a}h[0]$$

Therefore, $|h_{min}[0]| > |h[0]|$ since $|a| < 1$. This process can be repeated if more than one allpass system is cascaded. In each case, the factor for each will be larger than unity in the limit.

5.66. (a) We use the allpass principle and place a pole at $z = z_k$ and a zero at $z = \frac{1}{z_k^*}$.

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{min}(z)\frac{z^{-1} - z_k^*}{1 - z_k z^{-1}} \\ &= Q(z)(z^{-1} - z_k^*) \end{aligned}$$

(b)

$$H(z) = Q(z)z^{-1} - z_k^* Q(z)$$

$$h[n] = q[n-1] - z_k^* q[n]$$

$$H_{min}(z) = Q(z) - z_k Q(z)z^{-1}$$

$$h_{min}[n] = q[n] - z_k q[n-1]$$

(c)

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \\
&= \sum_{m=0}^{n} (|q[m]|^2 - z_k q[m-1]q^*[m] - z_k^* q^*[m-1]q[m] + |z_k|^2 |q[m-1]|^2) \\
&\quad - \sum_{m=0}^{n} (|q[m-1]|^2 - z_k^* q^*[m-1]q[m] - z_k q[m-1]q^*[m] + |z_k|^2 |q[m]|^2) \\
&= (1 - |z_k|^2) \sum_{m=0}^{n} (|q[m]|^2 - |q[m-1]|^2) \\
&= (1 - |z_k|^2)|q[n]|^2
\end{aligned}$$

(d)

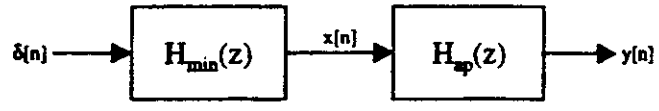
$$\varepsilon = (1 - |z_k|^2)|q[n]|^2 \geq 0 \quad \forall n \text{ since } |z_k| < 1$$

Then

$$\sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2 - \sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \geq 0$$

$$\sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2 \quad \forall n$$

5.67. (a) $x[n]$ is real, minimum phase and $x[n] = 0$ for $n < 0$. Consider the system:



$x[n]$ is the impulse response of a minimum phase system. $y[n]$ is the impulse response of a system which has the same frequency response magnitude as that of $x[n]$ but it is not minimum phase. Therefore, the equation applies.

$$\sum_{k=0}^{n} |x[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} |y[k]|^2$$

Since $h_{ap}[n]$ is causal and $x[n]$ is causal, $y[n]$ is also causal, and these sums are meaningful.

(b) As discussed in the book, the group delay for a rational allpass system is always positive. That is,

$$\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \geq 0$$

Therefore, filtering a signal $x[n]$ by such a system will delay the energy in the output $y[n]$. If we require that $x[n]$ is causal, then $y[n]$ will be causal as well, and the equation

$$\sum_{k=0}^{n} |x[k]|^2 \geq \sum_{k=0}^{n} |y[k]|^2$$

applies to the system.

5.68. (a)

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] * h[n] \\ r[n] &= g[-n] * h[n] \end{aligned}$$

$$s[n] = r[-n] = g[n] * h[-n] = x[n] * (h[n] * h[-n])$$

$$\begin{aligned} h_1[n] &= h[n] * h[-n] \\ H_1(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \end{aligned}$$

Since $H_1(e^{j\omega})$ is real, it is zero phase.

(b)

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] * h[n] \\ r[n] &= x[-n] * h[n] \end{aligned}$$

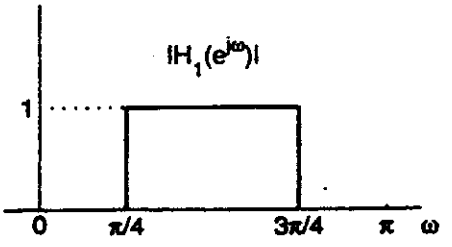
$$y[n] = g[n] + r[-n] = x[n] * h[n] + x[n] * h[-n] = x[n] * (h[n] + h[-n])$$

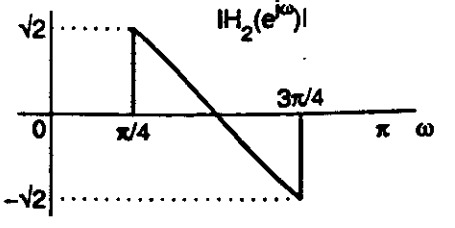
$$\begin{aligned} h_2[n] &= h[n] + h[-n] \\ H_2(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) + H^*(e^{j\omega}) \\ &= 2\mathcal{R}e\{H(e^{j\omega})\} \end{aligned}$$

$H_2(e^{j\omega})$ is real, so it is also zero phase.

$$|H_2(e^{j\omega})| = 2|H(e^{j\omega})| \cos\left(\angle H(e^{j\omega})\right)$$

(c)





In general, method A is preferable since method B causes a magnitude distortion which is a function of the (possibly non-linear) phase of $h[n]$.

5.69. *False.* Consider

$$H(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{1}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

This system function has poles at $z = 1/2$ and $z = 2$. However, as the following shows it is a generalized linear phase filter.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-\frac{5}{2}e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\frac{5}{2}+e^{-j\omega}} \\ &= \left(\frac{1}{2\cos w-\frac{5}{2}}\right)e^{j\omega} \end{aligned}$$

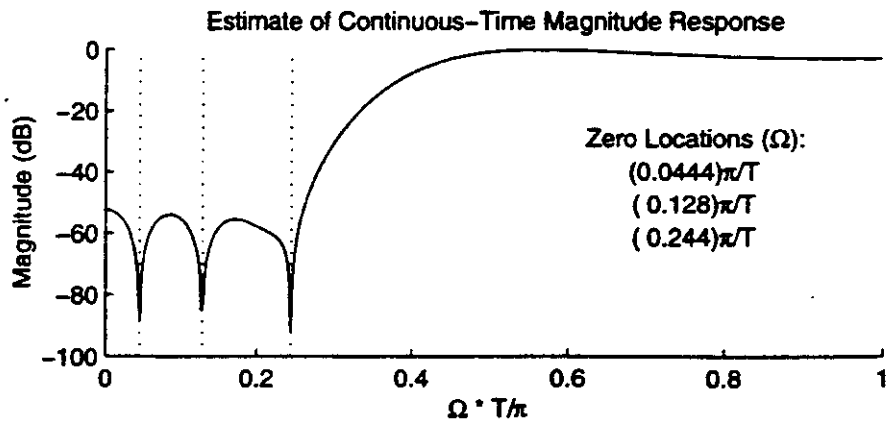
5.70. (a) Since $h[n]$ is a real causal linear phase filter the zeros must occur in sets of 4. Thus, if z_1 is a zero of $H(z)$ then $z_1^*, 1/z_1$ and $1/z_1^*$ must also be zeros. We can use this to find 4 zeros of $H(z)$ from the given information.

z_1,	magnitude = 0.5,	angle = 153 degrees
z_1^*,	magnitude = 0.5,	angle = 207 degrees
$1/z_1$,	magnitude = 2,	angle = 207 degrees
$1/z_1^*$,	magnitude = 2,	angle = 153 degrees

(b) There are 24 zeros so the length of $h[n]$ is 25. Since it is a linear phase filter it has a delay of $(L-1)/2 = (25-1)/2 = 12$ samples. That corresponds to a time delay of

$$\left(0.5\ \frac{\text{ms}}{\text{sample}}\right)(12\ \text{samples}) = 6\ \text{ms}$$

(c) The zero locations used to create the following plot were estimated from the figure using a ruler and a protractor.



5.71. (a) There are many possible solutions to this problem. The idea behind any solution is to have $h[n]$ be an upsampled (by a factor of 2) version of $g[n]$. That is,

$$h[n] = \begin{cases} g[n/2], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Thus, $h[n]$ will process only the even-indexed samples. One such system would be described by

$$\begin{aligned} h[n] &= 1+\delta[n-2] \\ g[n] &= 1+\delta[n-1] \\ H(z) &= 1+z^{-2} \\ G(z) &= 1+z^{-1} \end{aligned}$$

(b) As in part a, there are many possible solutions to this problem. The idea behind any solution is to choose an $h[n]$ that cannot be an upsampled (by a factor of 2) version of $g[n]$. Clearly, choosing $h[n]$ to filter odd-indexed samples satisfies this criterion. One such $h[n]$ would be

$$\begin{aligned} h[n] &= 1+\delta[n-1]+\delta[n-2] \\ H(z) &= 1+z^{-1}+z^{-2} \end{aligned}$$

(c) In general, the odd-indexed samples of $h[n]$ must be zero, in order for a $g[n]$ to be found for which $r[n]=y[n]$. Thus, there must not be any odd powers of z^{-1} in $H(z)$.

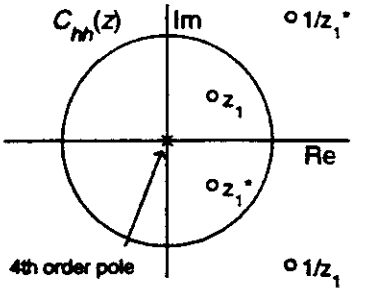
(d) For the conditions determined in part c, $g[n]$ is a downsampled (by a factor of 2) version of $h[n]$. That is,

$$g[n] = h[2n]$$

5.72. (a) *No.* You cannot uniquely recover $h[n]$ from $c_{hh}[l]$.

$$\begin{aligned} c_{hh}[l] &= h[l]*h[-l] \\ C_{hh}(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \\ C_{hh}(z) &= H(z)H^*(1/z^*) \end{aligned}$$

Causality and stability put restrictions on the poles of $H(z)$ (they must be inside the unit circle) but not its zeros. We know the zeros of $C_{hh}(z)$ in general occur in sets of 4. Here is why. A complex conjugate pair of zeros occur in $H(z)$ due to the fact that $h[n]$ is real. These 2 zeros and their conjugate reciprocals occur in $C_{hh}(z)$ due to the formula above for a total of 4. Thus, $H(z)$ is not uniquely determined since we do not know which 2 out of these 4 zeros to factor into $H(z)$. This is illustrated with a simple example below.



Let the above be the pole-zero diagram for $C_{hh}(z)$ and

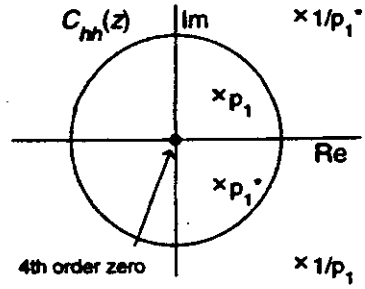
$$\begin{aligned} H_1(z) &= \left(1-z_1z^{-1}\right)\left(1-z_1^*z^{-1}\right) \\ H_2(z) &= \left(1-\frac{1}{z_1}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{z_1^*}z^{-1}\right) \end{aligned}$$

Since

$$C_{hh}(z) = H_1(z)H_1^*(1/z^*) = H_2(z)H_2^*(1/z^*)$$

we cannot determine whether $h_1[n]$ or $h_2[n]$ generated $c_{hh}[l]$.

(b) *Yes.* The poles of $C_{hh}(z)$ must occur in sets of 4 for the same reasons outlined above for the zeros. However, since the poles of $h[n]$ must be inside the unit circle to be causal and stable we do not have any ambiguity in determining which poles to group into $h[n]$. We always choose the complex conjugate poles inside the unit circle. Here is an example



Let the above be the zero/pole diagram for $C_{hh}(z)$. Then, if $h[n]$ is to be real, causal, and stable $H(z)$ must equal

$$H(z) = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_1^* z^{-1})}$$

5.73. As shown in the book, the most general form of the system function of an allpass system with a real-valued impulse response is

$$H(z) = \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)}{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}, \quad |z| \in R_x$$

where R_x is the ROC which includes the unit circle. Correspondingly, the associated inverse system is

$$\begin{aligned} H_i(z) &= \frac{1}{H(z)} \\ &= \prod_{k=1}^{M_r} \frac{1 - d_k z^{-1}}{z^{-1} - d_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(1 - e_k z^{-1})(1 - e_k^* z^{-1})}{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)} \\ &= \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1}(z - d_k)}{z^{-1} - d_k} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{z^{-2}(z - e_k)(z - e_k^*)}{(z^{-1} - e_k^*)(z^{-1} - e_k)} \\ &= \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z - d_k}{1 - d_k z} \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(z - e_k)(z - e_k^*)}{(1 - e_k^* z)(1 - e_k z)} \\ &= H(1/z), \quad |z| \in \frac{1}{R_x} \end{aligned}$$

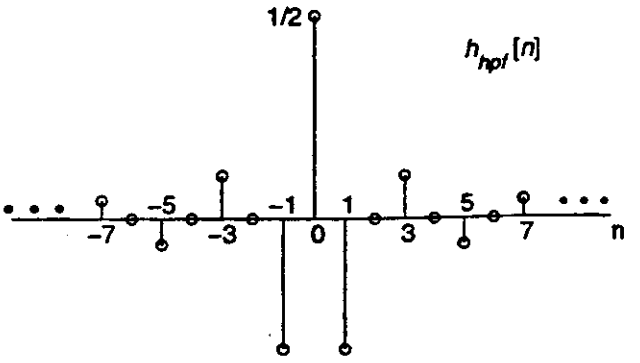
which in the time domain is

$$h_i[n] = h[-n]$$

5.74. We can model $g[n]$ as

$$g[n] = x[n] + \alpha\delta[n - n_0]$$

Now send the corrupted signal $g[n]$ through a highpass filter $h_{hpf}[n]$ with a cutoff of $w_c = \pi/2$.



$$h_{hpf}[n] = (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\pi n}$$

The highpass filter completely filters out the lowpass signal $x[n]$. The output $y[n]$ is

$$\begin{aligned} y[n] &= (x[n] + \alpha\delta[n - n_0]) * h_{hpf}[n] \\ &= \alpha h_{hpf}[n - n_0] \\ &= \alpha(-1)^{(n-n_0)} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(n - n_0)}{\pi(n - n_0)} \end{aligned}$$

$y[n]$ looks similar to the picture of $h_{hpf}[n]$ above except that it is scaled by α and shifted to n_0. Thus,

$$\alpha = 2y[n_0]$$

$$x[n] = g[n] - 2y[n_0]\delta[n - n_0]$$

(a) When n_0 is odd, $y[n] = 0$ at all odd values of n except $n = n_0$. This leads to a procedure to find $x[n]$ from $g[n]$:
- Filter $g[n]$ with the highpass filter described above.
- Find the only nonzero value at an odd index in the output $y[n]$. This value is $y[n_0]$.
- $x[n] = g[n] - 2y[n_0]\delta[n - n_0]$

(b) The only time three consecutive nonzero samples occur in $y[n]$ is at $n = n_0$. The procedure to find $x[n]$ is
- Filter $g[n]$ with the highpass filter described above.
- Look for three consecutive nonzero output samples. The middle value is $y[n_0]$.
- $x[n] = g[n] - 2y[n_0]\delta[n - n_0]$

5.75. Looking at the z-transform of the FIR filter,

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h[N - 1 - n]z^{-n} \end{aligned}$$

Substituting $m = N - 1 - n$ into the summation gives

$$H(z) = \sum_{m=N-1}^{0} h[m]z^{m-N+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{N-1} h[m] z^m z^{-N+1} \\
&= z^{-N+1} \sum_{m=0}^{N-1} h[m] z^m \\
&= z^{-N+1} H(z^{-1})
\end{aligned}
$$

Thus, for such a filter,

$$H(1/z) = z^{N-1} H(z)$$

If z_0 is a zero of $H(z)$, then $H(z_0) = 0$, and

$$H(1/z_0) = z_0^{N-1} H(z_0) = 0$$

Consequently, even-symmetric linear phase FIR filters have zeros that are reciprocal images.

Solutions – Chapter 6

Structures for Discrete-Time Systems

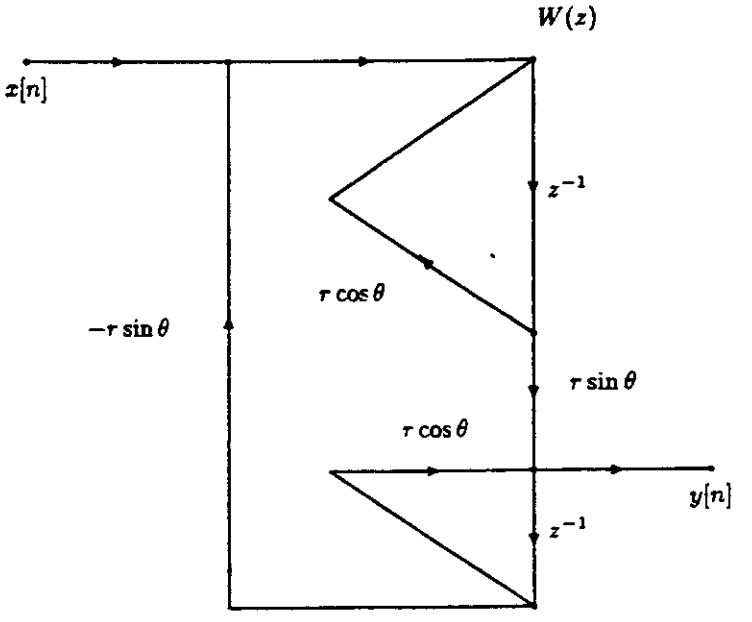
6.1. We proceed by obtaining the transfer functions for each of the networks. For network 1,

$$Y(z) = 2r\cos\theta z^{-1}Y(z) - r^2z^{-2}Y(z) + X(z)$$

or

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2z^{-2}}$$

For network 2, define $W(z)$ as in the figure below:



then

$$W(z) = X(z) - r\sin\theta z^{-1}Y(z) + r\cos\theta z^{-1}W(z)$$

and

$$Y(z) = r\sin\theta z^{-1}W(z) + r\cos\theta z^{-1}Y(z)$$

Eliminate $W(z)$ to get

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{r\sin\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2z^{-2}}$$

Hence the two networks have the same poles.

6.2. The only input to the $y[n]$ node is a unity branch connection from the $x[n]$ node. The rest of the network does not affect the input-output relationship. The difference equation is $y[n] = x[n]$.

6.3.

$$H(z) = \frac{2 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}$$

System (d) is recognizable as a transposed direct form II implementation of $H(z)$.

6.4. (a) From the flow graph, we have:

$$Y(z) = 2X(z) + (\frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{4}Y(z) + \frac{3}{8}Y(z)z^{-1})z^{-1}.$$

That is:

$$Y(z)(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}) = X(z)(2+\frac{1}{4}z^{-1}).$$

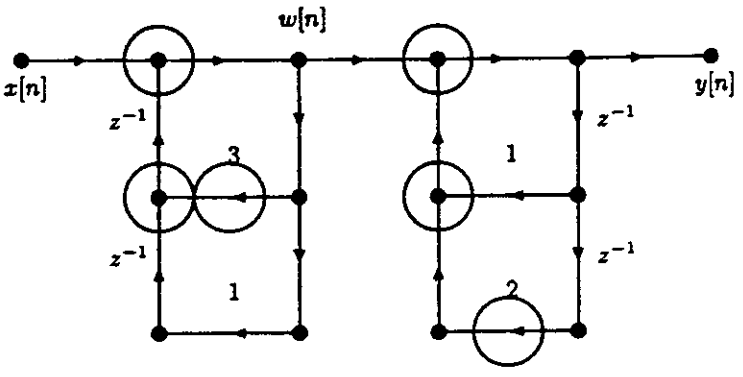
The system function is thus given by:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}.$$

(b) To get the difference equation, we just inverse $Z-$transform the equation in a. We get:

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{3}{8}y[n-2] = 2x[n]+\frac{1}{4}x[n-1].$$

6.5. The flow graph for this system is drawn below.



(a)

$$w[n] = x[n]+3w[n-1]+w[n-2]$$

$$y[n] = w[n]+y[n-1]+2y[n-2]$$

(b)

$$W(z) = X(z)+3z^{-1}W(z)+z^{-2}W(z)$$

$$Y(z) = W(z)+z^{-1}Y(z)+2z^{-2}Y(z)$$

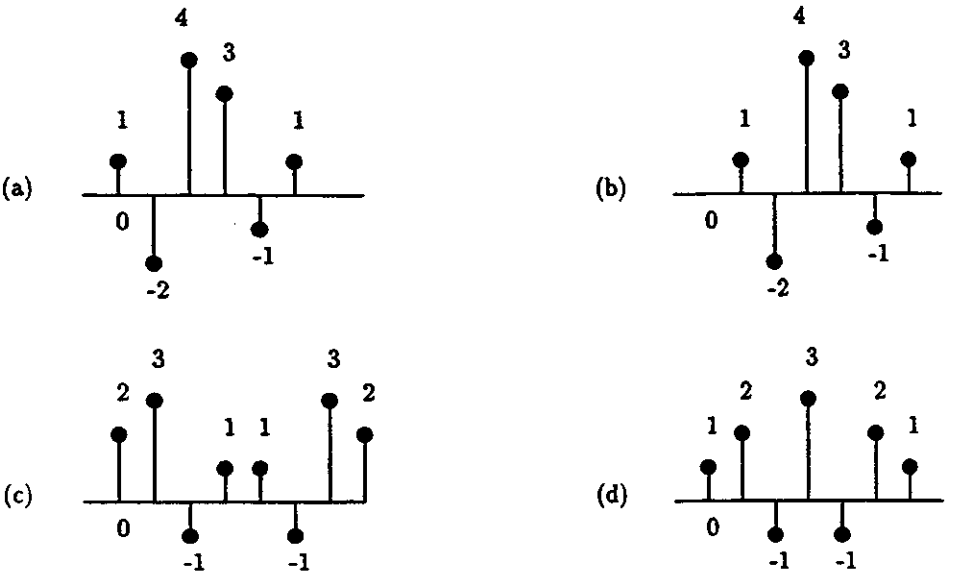
So

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{X(z)} &= H(z)\\ &= \frac{1}{(1-z^{-1}-2z^{-2})(1-3z^{-1}-z^{-2})}\\ &= \frac{1}{1-4z^{-1}+7z^{-3}+2z^{-4}}.\end{aligned}$$

(c) Adds and multiplies are circled above: 4 real adds and 2 real multiplies per output point.

(d) It is not possible to reduce the number of storage registers. Note that implementing $H(z)$ above in the canonical direct form II (minimum storage registers) also requires 4 registers.

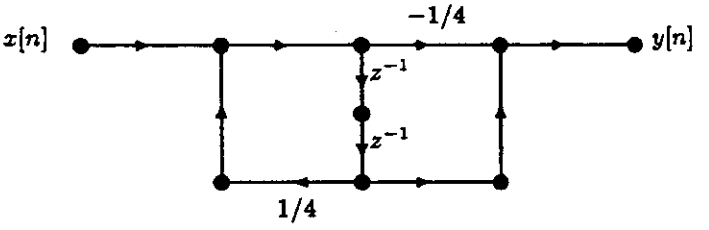
6.6. The impulse responses of each system are shown below.



6.7. We have

$$H(z) = \frac{-\frac{1}{4} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}.$$

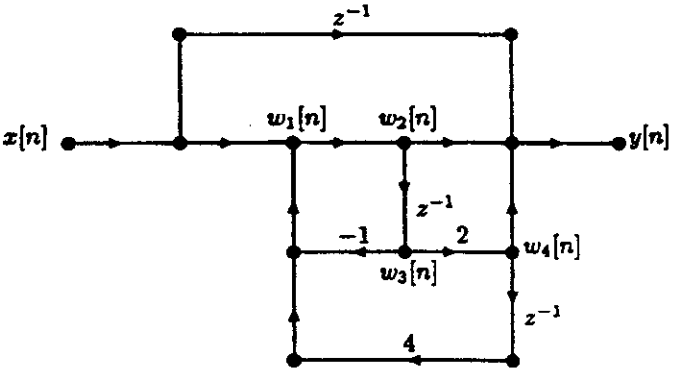
Therefore the direct form II is given by:



6.8. By looking at the graph, we get:

$$y[n] = 2y[n-2] + 3x[n-1] + x[n-2].$$

6.9. The signal flow graph for the system is:



(a) First we need to determine the transfer function. We have

$$\begin{aligned} w_1[n] &= x[n] - w_3[n] + 4w_4[n-1] \\ w_2[n] &= w_1[n] \\ w_3[n] &= w_2[n-1] \\ w_4[n] &= 2w_3[n] \\ y[n] &= w_2[n] + x[n-1] + w_4[n]. \end{aligned}$$

Taking the $Z-$transform of the above equations, rearranging and substituting terms, we get:

$$H(z) = \frac{1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}.$$

The difference equation is thus given by:

$$y[n] + y[n-1] - 8y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + x[n-2] - 8x[n-3].$$

The impulse response is the response to an impulse, therefore:

$$h[n] + h[n-1] - 8h[n-2] = \delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] - 8\delta[n-3].$$

From the above equation, we have:

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 \\ h[1] &= 3 - h[0] = 2. \end{aligned}$$

(b) From part (a) we have:

$$y[n] + y[n-1] - 8y[n-2] = x[n] + 3x[n-1] + x[n-2] - 8x[n-3].$$

6.10. (a)

$$\begin{aligned} w[n] &= \frac{1}{2}y[n] + x[n] \\ v[n] &= \frac{1}{2}y[n] + 2x[n] + w[n-1] \\ y[n] &= v[n-1] + x[n]. \end{aligned}$$

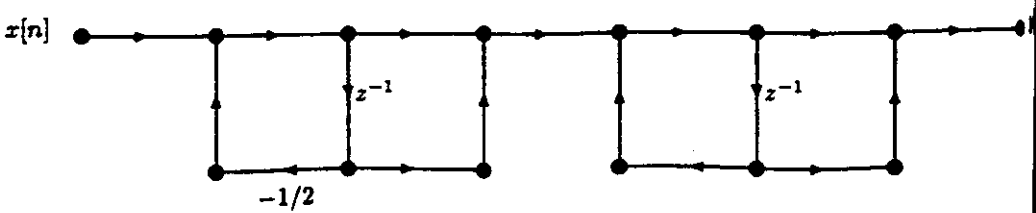
(b) Using the $Z-$transform of the difference equations in part (a), we get the transfer function:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

We can rewrite it as :

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}.$$

We thus get the following cascade form:

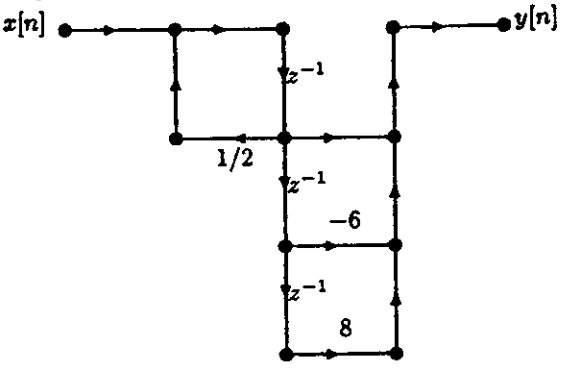


(c) The system function has poles at $z = -\frac{1}{2}$ and $z = 1$. Since the second pole is on the unit circle, the system is not stable.

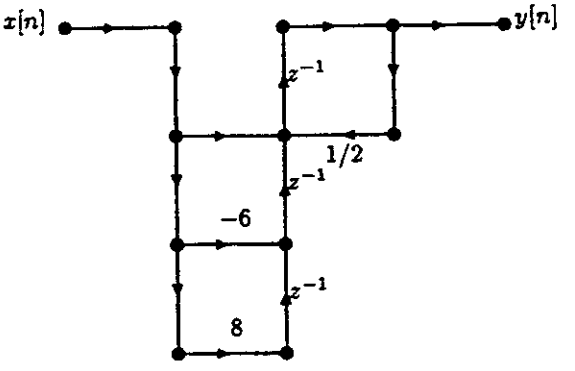
6.11. (a) $H(z)$ can be rewritten as:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 6z^{-2} + 8z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}.$$

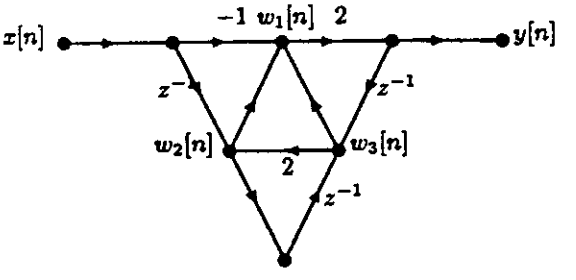
We thus get the following direct from II flow graph :



(b) To get the transposed form, we just reverse the arrows and exchange the input and the ouput. The graph can then be redrawn as:



6.12. We define the intermediate variables $w_1[n]$, $w_2[n]$ and $w_3[n]$ as follows:



We thus have the following relationships:

$$\begin{aligned} w_1[n] &= -x[n] + w_2[n] + w_3[n] \\ w_2[n] &= x[n-1] + 2w_3[n] \\ w_3[n] &= w_2[n-1] + y[n-1] \\ y[n] &= 2w_1[n]. \end{aligned}$$

$Z-$transforming the above equations and rearranging and grouping terms, we get:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-2 + 6z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 8z^{-1}}.$$

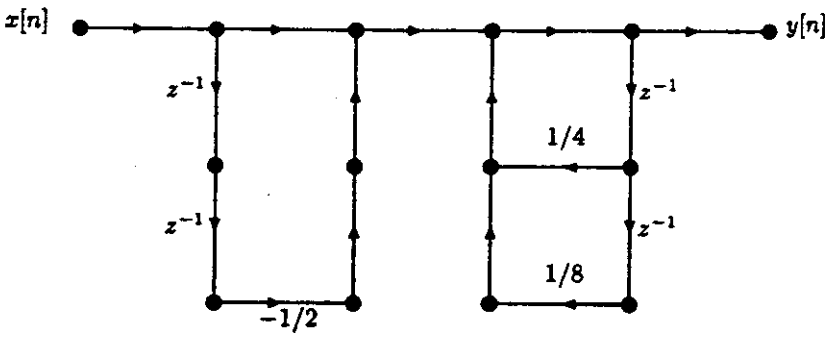
Taking the inverse $Z-$transform, we get the following difference equation:

$$y[n] - 8y[n-1] = -2x[n] + 6x[n-1] + 2x[n-2].$$

6.13.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

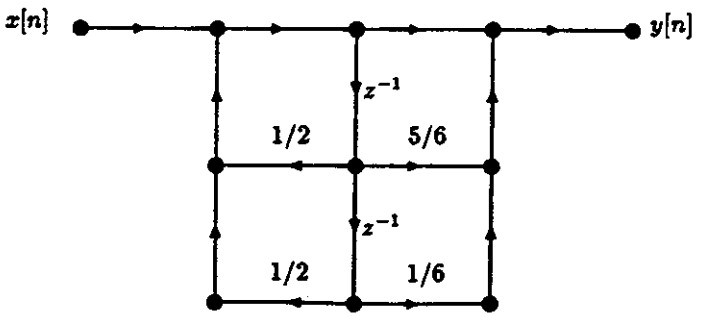
The direct form I implementation is:



6.14.

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

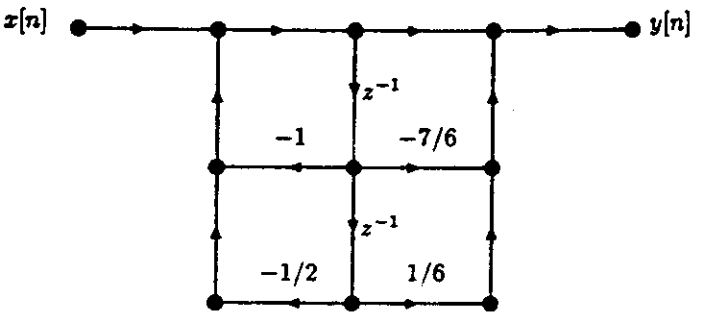
The direct form II implementation is:



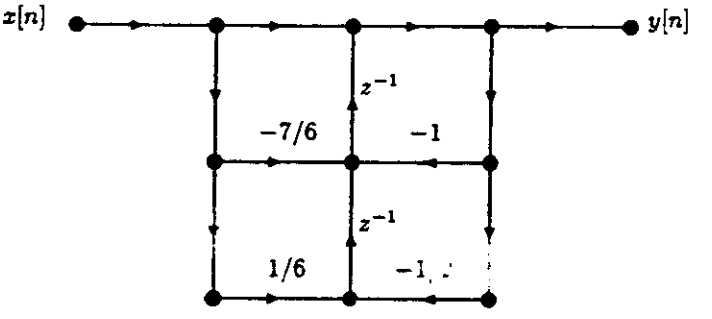
6.15.

$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

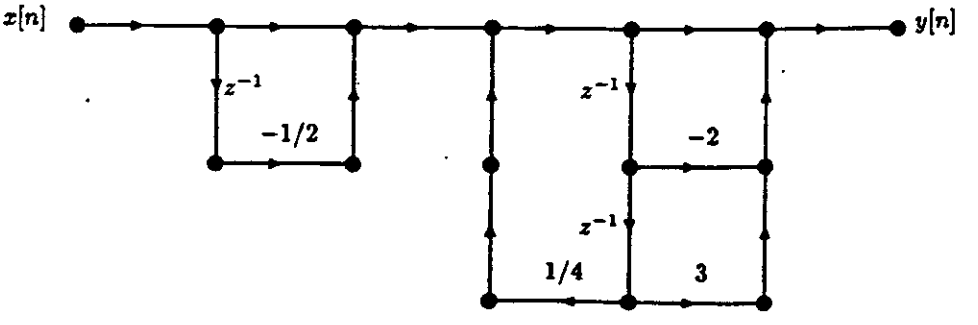
To get the transposed direct form II implementation, we first get the direct form II:



Now, we reverse the arrows and exchange the role of the input and the ouput to get the transposed direct form II:



6.16. (a) We just reverse the arrows and reverse the role of the input and the output, we get:



(b) The original system is the cascade of two transposed direct form II structures, therefore the system function is given by:

$$H(z) = (\frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}})(1 - \frac{1}{2}z^{-1}).$$

The transposed graph, on the other hand, is the cascade of two direct form II structures, therefore the system function is given by:

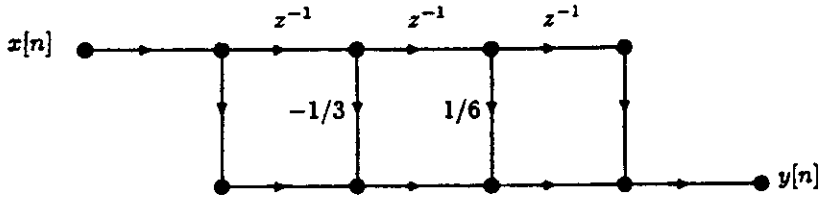
$$H(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})(\frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}).$$

This confirms that both graphs have the same system function $H(z)$.

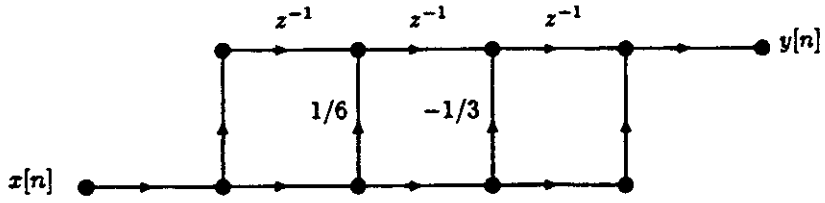
6.17.

$$H(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-3}.$$

(a) Direct form implementation of this system:



(b) Transposed direct form implementation of the system:



6.18. The flow graph is just a cascade of two transposed direct form II structures, the system function is thus given by:

$$H(z) = (\frac{1 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{4}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}})(\frac{1}{1 - az^{-1}}).$$

Which can be rewritten as:

$$H(z) = \frac{(1+2z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}{(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2})(1-az^{-1})}.$$

In order to implement this system function with a second-order direct form II signal flow graph, a pole-zero cancellation has to occur, this happens if $a = \frac{2}{3}$, $a = -2$ or $a = 0$. If $a = \frac{2}{3}$, the overall system function is:

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}.$$

If $a = -2$, the overall system function is:

$$H(z) = \frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}.$$

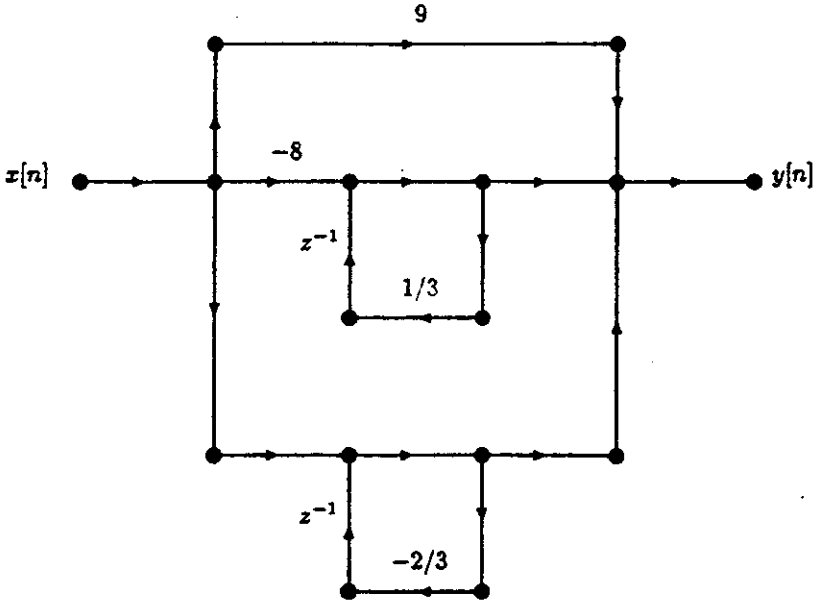
And finally if $a = 0$, the overall system function is:

$$H(z) = \frac{(1+2z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}.$$

6.19. Using partial fraction expansion, the system function can be rewritten as:

$$H(z) = \frac{-8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{2}{3}z^{-1}} + 9.$$

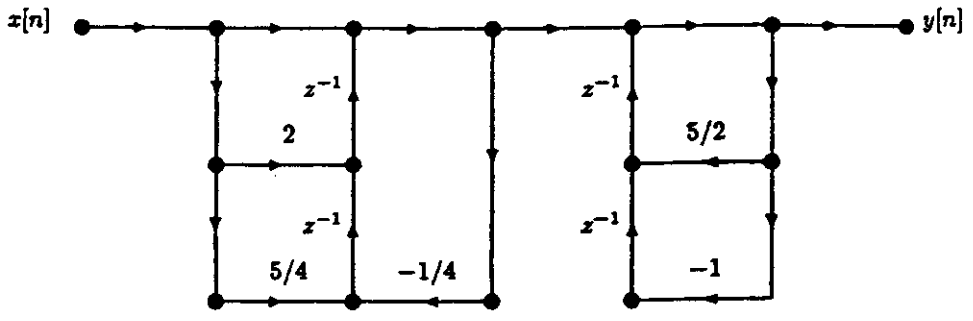
Now we can draw the flow graph that implements this system as a parallel combination of first-order transposed direct form II sections:



6.20. The transfer function can be rewritten as:

$$H(z) = \frac{(1+2z^{-1}+\frac{5}{4}z^{-2})}{(1+\frac{1}{4}z^{-2})(1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2})}$$

which can be implemented as the following cascade of second-order transposed direct form II sections:

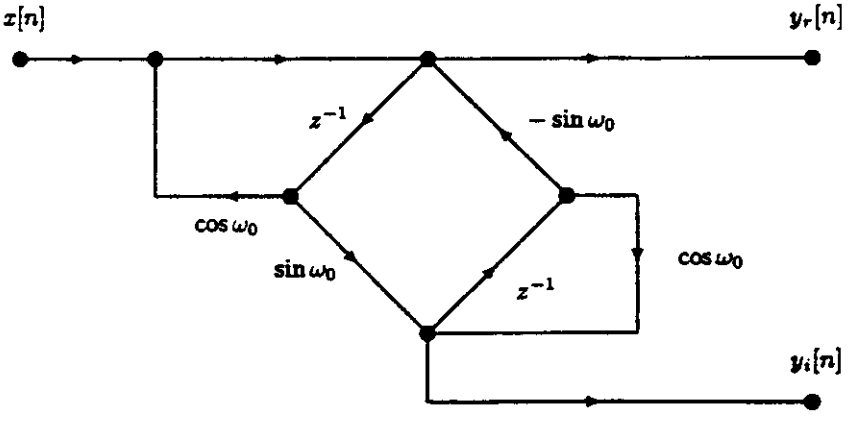


6.21.

$$h[n] = e^{j\omega_0 n}u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

So $y[n] = e^{j\omega_0}y[n-1] + x[n]$. Let $y[n] = y_r[n] + jy_i[n]$. Then $y_r[n] + jy_i[n] = (\cos\omega_0 + j\sin\omega_0)(y_r[n-1] + jy_i[n-1]) + x[n]$. Separate the real and imaginary parts:

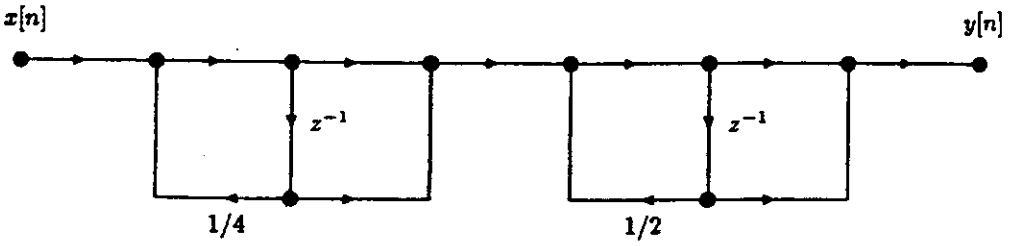
$$\begin{aligned} y_r[n] &= x[n] + \cos\omega_0 y_r[n-1] - \sin\omega_0 y_i[n-1] \\ y_i[n] &= \sin\omega_0 y_r[n-1] + \cos\omega_0 y_i[n-1]. \end{aligned}$$



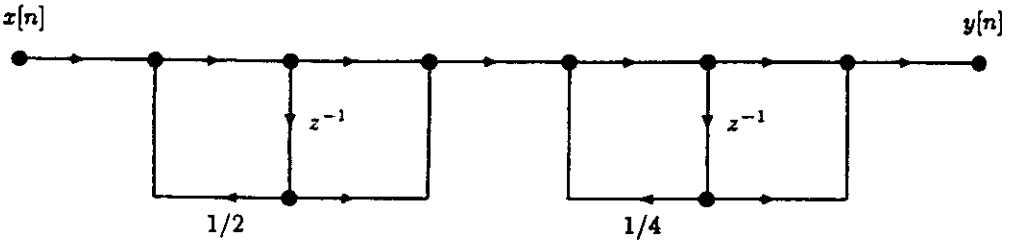
6.22.

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}.$$

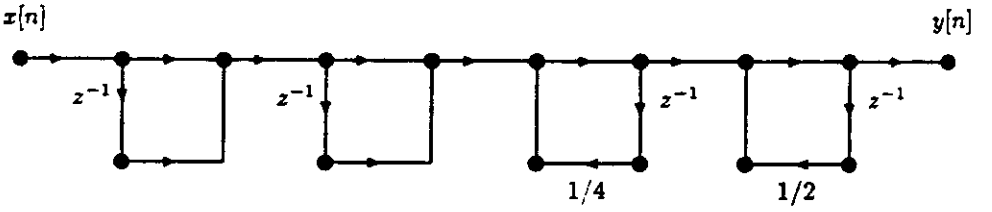
$$H(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)\left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right).$$



$$H(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right).$$



Plus 12 systems of this form:



with the three types of 1st-order systems taken in various orders.

6.23. Causal LTI system with system function:

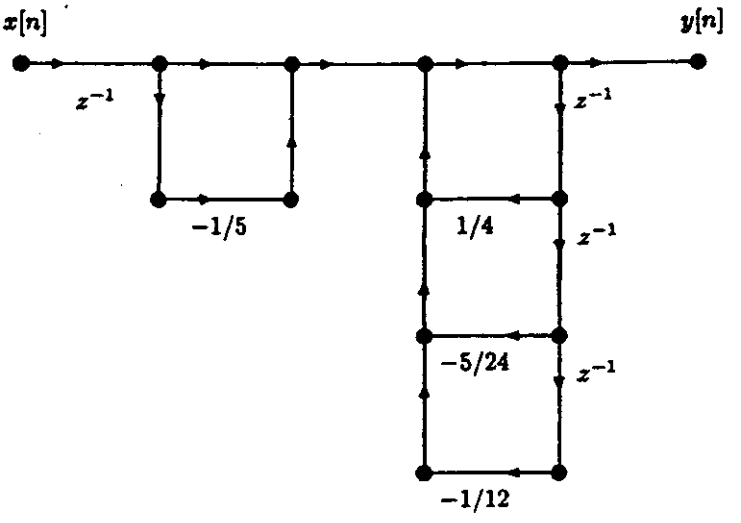
$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{5}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2})(1+\frac{1}{4}z^{-1})}.$$

(a) (i) Direct form I.

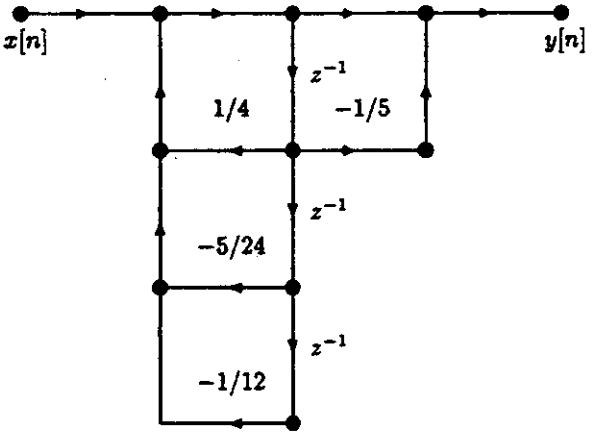
$$H(z) = \frac{1-\frac{1}{5}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{5}{24}z^{-2}+\frac{1}{12}z(-3)}$$

so

$$b_0 = 1\ ,\ b_1 = -\frac{1}{5}\ \text{and}\ a_1 = \frac{1}{4}\ ,\ a_2 = -\frac{5}{24}\ ,\ a_3 = -\frac{1}{12}.$$



(ii) Direct form II.

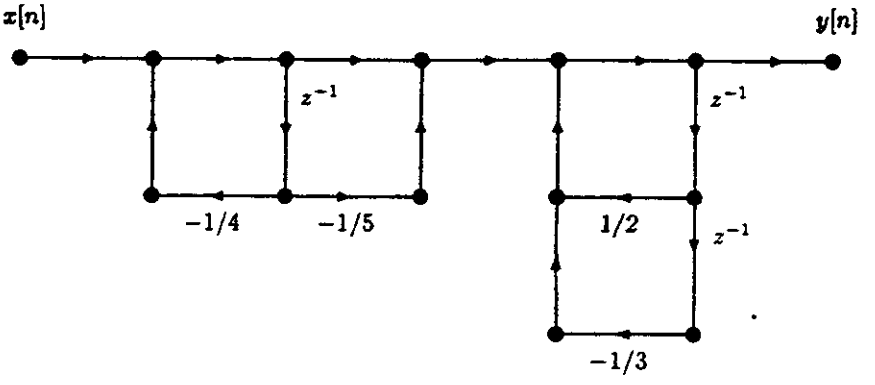


(iii) Cascade form using first and second order direct form II sections.

$$H(z) = \left(\frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}\right).$$

So

$$b_{01} = 1\ ,\ b_{11} = -\tfrac{1}{5}\ ,\ b_{21} = 0\ ,$$
$$b_{02} = 1\ ,\ b_{12} = 0\ ,\ b_{22} = 0 \text{ and}$$
$$a_{11} = -\tfrac{1}{4}\ ,\ a_{21} = 0\ ,\ a_{12} = \tfrac{1}{2}\ ,\ a_{22} = -\tfrac{1}{3}.$$

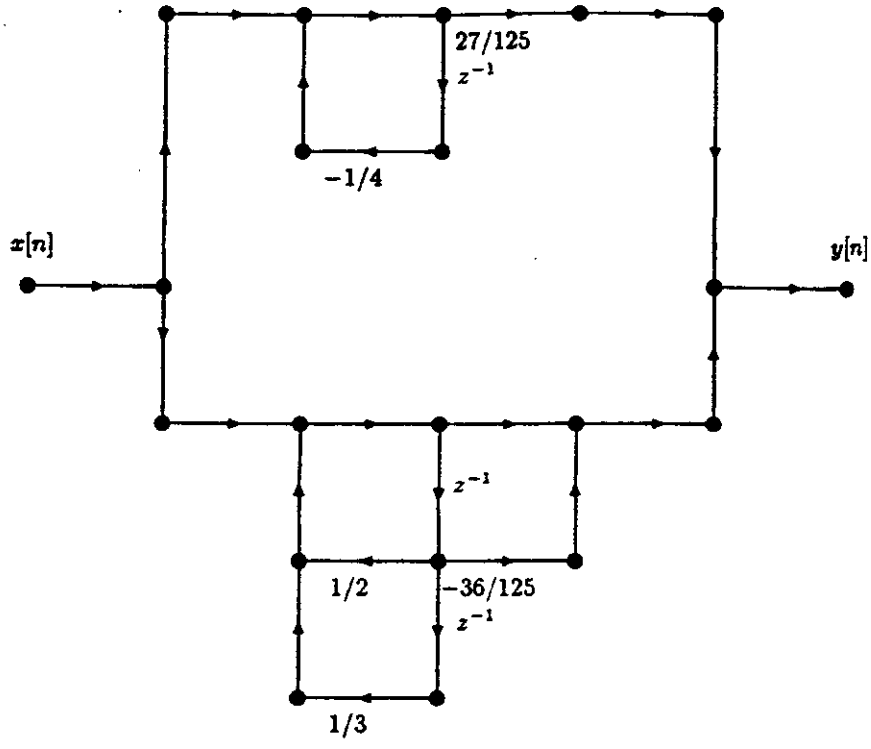


(iv) Parallel form using first and second order direct form II sections.
We can rewrite the transfer function as:

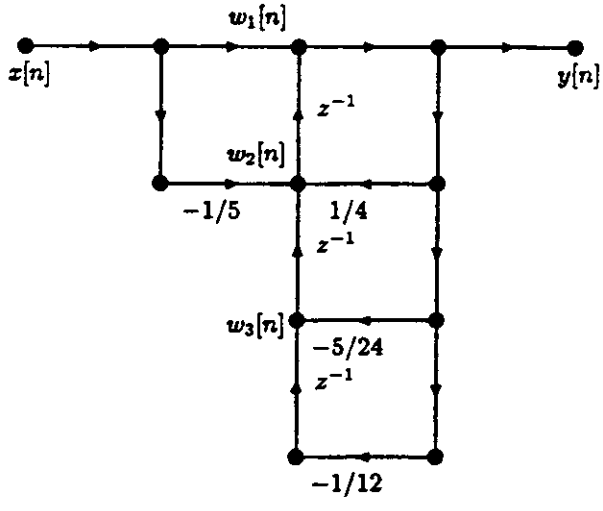
$$H(z) = \frac{\frac{27}{125}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{98}{125} - \frac{36}{125}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}.$$

So

$$e_{01} = \tfrac{27}{125}\ ,\ e_{11} = 0\ ,$$
$$e_{02} = \tfrac{98}{125}\ ,\ e_{12} = -\tfrac{36}{125}\ ,\ \text{and}$$
$$a_{11} = -\tfrac{1}{4}\ ,\ a_{21} = 0\ ,\ a_{12} = \tfrac{1}{2}\ ,\ a_{22} = -\tfrac{1}{3}.$$



(v) Transposed direct form II
We take the direct form II derived in part (ii) and reverse the arrows as well as exchange the input and output. Then redrawing the flow graph, we get:



(b) To get the difference equation for the flow graph of part (v) in (a), we first define the intermediate variables: $w_1[n]$, $w_2[n]$ and $w_3[n]$. We have:

$$
\begin{aligned}
(1)\ w_1[n] &= x[n] + w_2[n-1] \\
(2)\ w_2[n] &= \frac{1}{4}y[n] + w_3[n-1] - \frac{1}{5}x[n] \\
(3)\ w_3[n] &= -\frac{5}{24}y[n] - \frac{1}{12}y[n-1] \\
(4)\ y[n] &= w_1[n].
\end{aligned}
$$

Combining the above equations, we get:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{5}{24}y[n-2] + \frac{1}{12}y[n-3] = x[n] - \frac{1}{5}x[n-1].$$

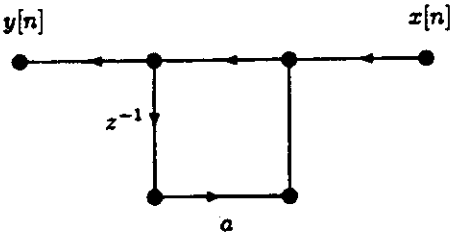
Taking the Z-transform of this equation and combining terms, we get the following transfer function:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{5}{24}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}}$$

which is equal to the initial transfer function.

6.24. (a)

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

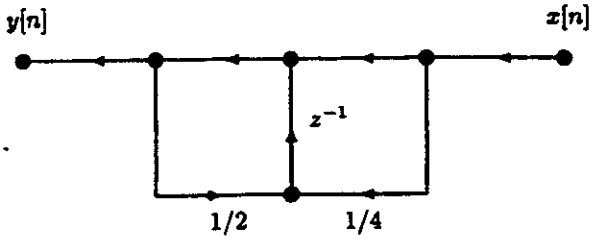


$$y[n] = x[n] + ay[n-1]$$

$$H_T(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = H(z)$$

(b)

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

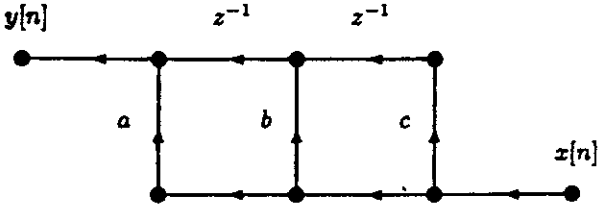


$$y[n] = x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

$$H_T(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = H(z)$$

(c)

$$H(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2}$$

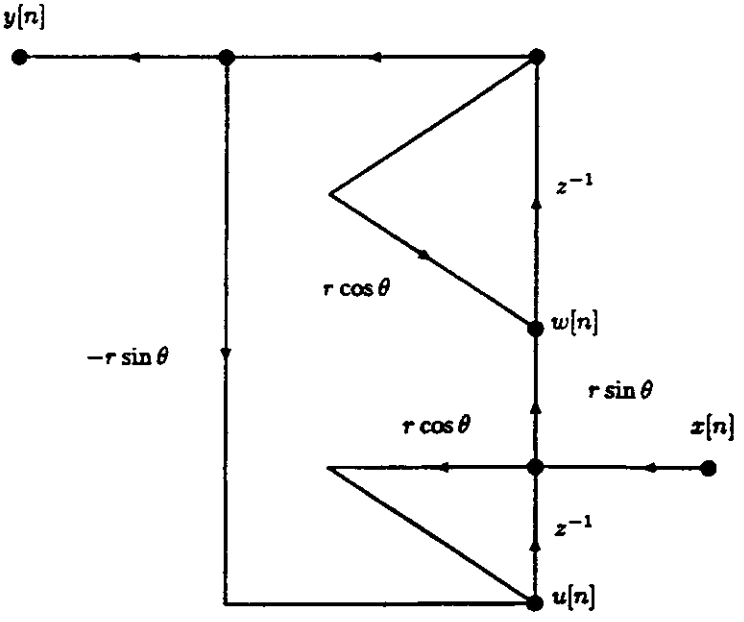


$$y[n] = ax[n] + bx[n-1] + cx[n-2]$$

$$H_T(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2} = H(z)$$

(d)

$$H(z) = \frac{r \sin\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



$$
\begin{aligned}
V &= X + z^{-1}U \\
U &= r\cos\theta V - r\sin\theta Y \\
W &= r\sin\theta V + r\cos\theta z^{-1}W \\
Y &= z^{-1}W \\
\Longrightarrow \frac{Y}{X} &= H_T(z) \\
&= \frac{r\sin\theta z^{-1}}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}} \\
&= H(z)..
\end{aligned}
$$

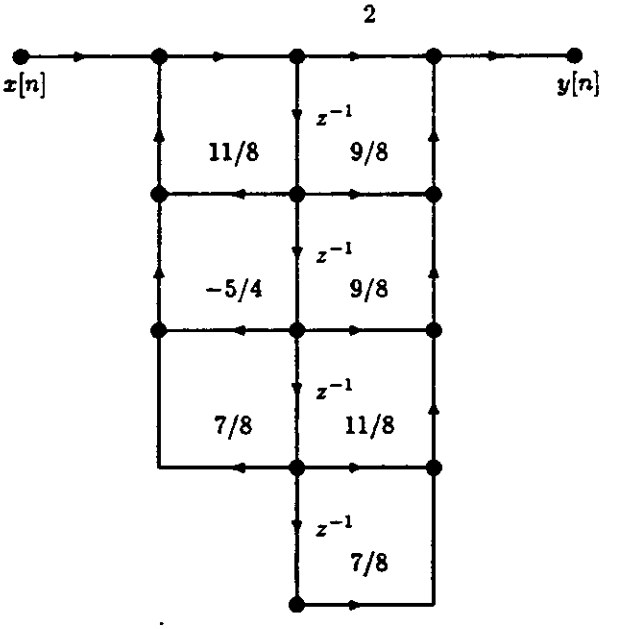
6.25. (a)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{8}z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}} + 1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right] \\
&= \frac{2+\frac{9}{8}z^{-1}+\frac{9}{8}z^{-2}+\frac{11}{8}z^{-3}+\frac{7}{8}z^{-4}}{1-\frac{11}{8}z^{-1}+\frac{5}{4}z^{-2}-\frac{7}{8}z^{-3}}.
\end{aligned}
$$

(b)

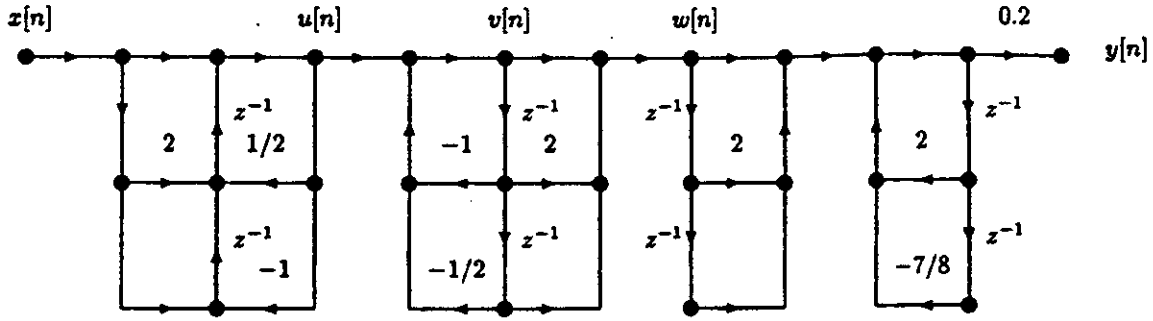
$$
\begin{aligned}
y[n] &= 2x[n] + \frac{9}{8}x[n-1] + \frac{9}{8}x[n-2] + \frac{11}{8}x[n-3] + \frac{7}{8}x[n-4] \\
&+ \frac{11}{8}y[n-1] - \frac{5}{4}y[n-2] + \frac{7}{8}y[n-3].
\end{aligned}
$$

(c) Use Direct Form II:



6.26. (a) We can rearrange $H(z)$ this way:

$$
H(z) = \frac{(1+z^{-1})^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}} \cdot \frac{(1+z^{-1})^2}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \cdot (1+z^{-1})^2 \cdot \frac{1}{1-2z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}} \cdot 0.2
$$

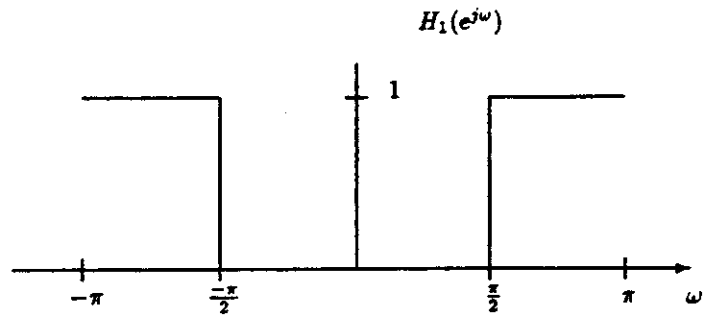


The solution is not unique; the order of the denominator 2nd-order sections may be rearranged.

(b)

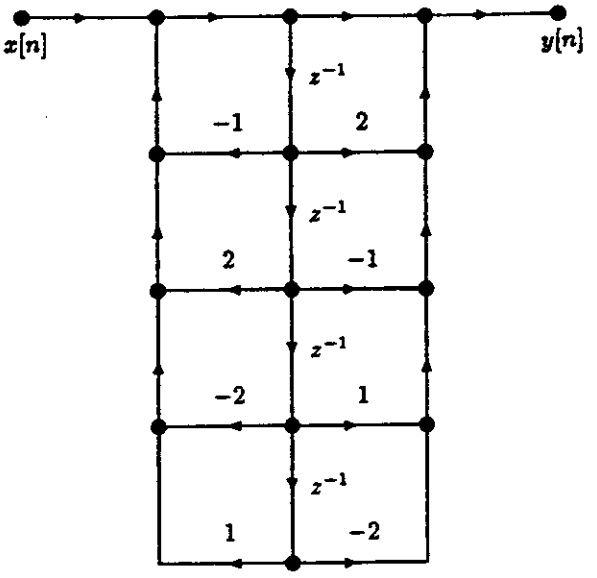
$$\begin{aligned} u[n] &= x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + \frac{1}{2}u[n-1] - u[n-2] \\ v[n] &= u[n] - v[n-1] - \frac{1}{2}v[n-2] \\ w[n] &= v[n] + 2v[n-1] + v[n-2] \\ y[n] &= w[n] + 2w[n-1] + w[n-2] + 2y[n-1] - \frac{7}{8}y[n-2]. \end{aligned}$$

6.27. (a) $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$.

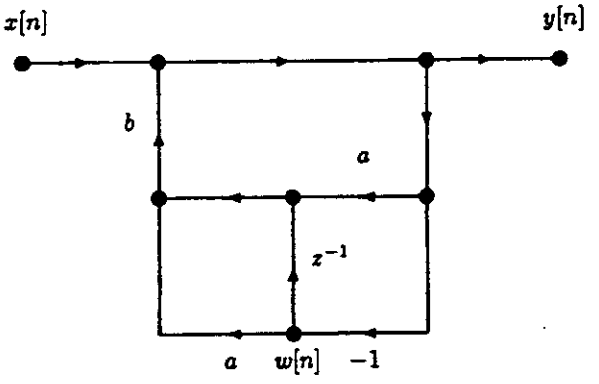


(b) For $H_1(z) = H(-z)$, replace each z^{-1} by $-z^{-1}$. Alternatively, replace each coefficient of an odd-delayed variable by its negative.

(c)



6.28.



(a)

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + abw[n] + bw[n-1] + aby[n] \\ w[n] &= -y[n]. \end{aligned}$$

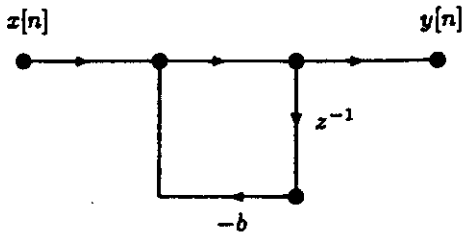
Eliminate w[n]:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] - aby[n] - by[n-1] + aby[n] \\ y[n] &= x[n] - by[n-1] \end{aligned}$$

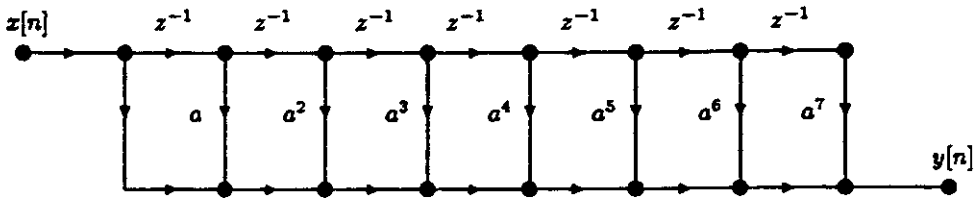
So:

$$H(z) = \frac{1}{1 + bz^{-1}}.$$

(b)



6.29. (a)



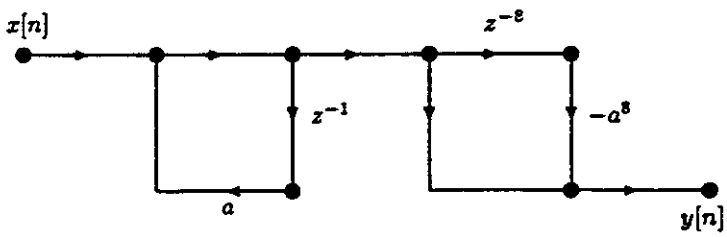
(b) From

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1-\alpha}$$

it follows that

$$\sum_{n=0}^{7} a^n z^{-n} = \frac{1-a^8 z^{-8}}{1-az^{-1}}.$$

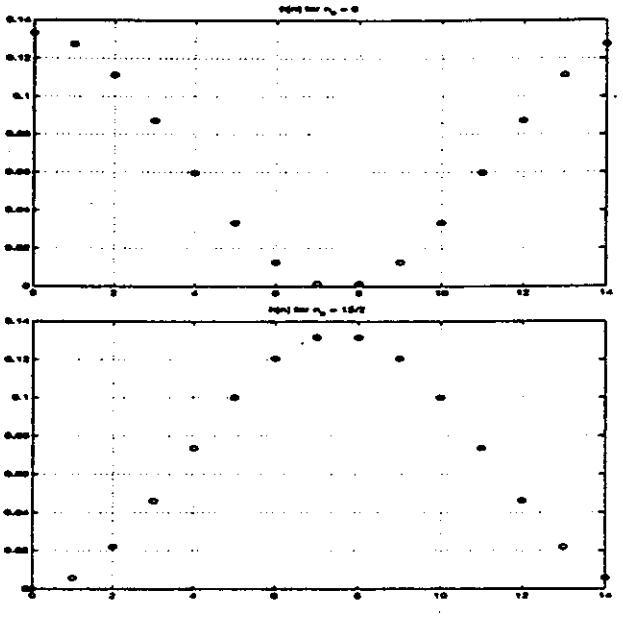
(c)



(d) (i) (c) has the most storage: 9 vs. 7.
(ii) (a) has the most arithmetic: 7 adds + 7 multiplies per sample, vs. 2 multiplies + 2 adds per sample.

6.30.

(a)



(b)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{14}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{15}(n-n_0)\right)\right]z^{-n} \\
&= \frac{1}{15}\sum_{n=0}^{14}z^{-n}+\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{14}\frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{15}(n-n_0)}+e^{-j\frac{2\pi}{15}(n-n_0)}\right]z^{-n} \\
&= \frac{1}{15}\frac{1-z^{-15}}{1-z^{-1}}+\frac{1}{15}\frac{1}{2}\frac{e^{-j\frac{2\pi}{15}n_0}[1-(e^{j\frac{2\pi}{15}}z^{-1})^{15}]}{1-e^{j\frac{2\pi}{15}}z^{-1}} \\
&\quad +\frac{1}{15}\frac{1}{2}\frac{e^{j\frac{2\pi}{15}n_0}[1-(e^{-j\frac{2\pi}{15}}z^{-1})^{15}]}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}}z^{-1}} \\
&= \frac{1}{15}(1-z^{-15})\left[\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{15}n_0}}{1-e^{j\frac{2\pi}{15}}z^{-1}}+\right. \\
&\quad \left.\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{15}n_0}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}}z^{-1}}\right].
\end{aligned}
$$

(c)

$$
H(e^{j\omega})=\frac{1}{15}e^{-j7\omega}\left[\frac{\sin((15\omega)/2)}{\sin(\omega/2)}-\frac{1}{2}\frac{e^{-j\frac{\pi}{15}}\sin((15\omega)/2)}{\sin((\omega-\frac{2\pi}{15})/2)}-\frac{1}{2}\frac{e^{j\frac{\pi}{15}}\sin((15\omega)/2)}{\sin((\omega+(2\pi)/15)/2)}\right].
$$

$$
H(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j15\omega}}{15}\left[\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n_0}{15}}}{1-e^{j\frac{2\pi}{15}}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n_0}{15}}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{15}}e^{-j\omega}}\right]
$$

When $n_0 = 15/2$, .

$$
H(e^{j\omega}) = \frac{1}{15}\left[\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}(1-e^{-j15\omega})}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}-\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{\omega-(2\pi/15)}{2}}(1-e^{-j15\omega})}{e^{j\frac{\omega-(2\pi/15)}{2}}-e^{-j\frac{\omega-(2\pi/15)}{2}}}-\right.
$$

$$\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{\omega+(2\pi/15)}{2}}(1-e^{-j15\omega})}{e^{j\frac{\omega+(2\pi/15)}{2}}-e^{-j\frac{\omega+(2\pi/15)}{2}}}\Bigg]$$

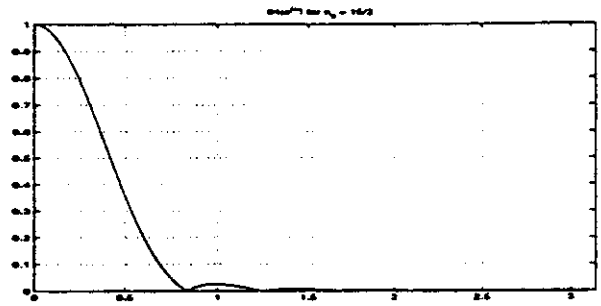
$$= \frac{1}{15}\left[\frac{e^{-j\omega 7}\left(e^{j\omega\frac{15}{2}}-e^{-j\omega\frac{15}{2}}\right)}{2j\sin\frac{\omega}{2}} - \right.$$

$$\frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega 7}e^{-j\frac{\pi}{15}}\left(e^{j\omega\frac{15}{2}}-e^{-j\omega\frac{15}{2}}\right)}{2j\sin\left(\frac{\omega-(2\pi/15)}{2}\right)} -$$

$$\left.\frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega 7}e^{j\frac{\pi}{15}}\left(e^{j\frac{15}{2}\omega}-e^{-j\frac{15}{2}\omega}\right)}{2j\sin\left(\frac{\omega+(2\pi/15)}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{e^{-j\omega 7}}{15}\left[\frac{\sin(15\omega/2)}{\sin(\omega/2)} - \frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{15}}\sin(15\omega/2)}{\sin\left(\frac{\omega-(2\pi/15)}{2}\right)} - \right.$$

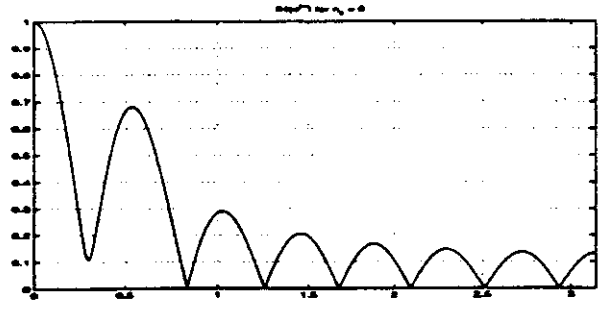
$$\left.\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{15}}\sin(15\omega/2)}{\sin\left(\frac{\omega+(2\pi/15)}{2}\right)}\right]$$



When $n_0 = 0$,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega 7}}{15}\left[\frac{\sin(15\omega/2)}{\sin(\omega/2)} + \frac{\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{15}}\sin(15\omega/2)}{\sin\left(\frac{\omega-(2\pi/15)}{2}\right)} + \right.$$

$$\left.\frac{\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{15}}\sin(15\omega/2)}{\sin\left(\frac{\omega+(2\pi/15)}{2}\right)}\right]$$



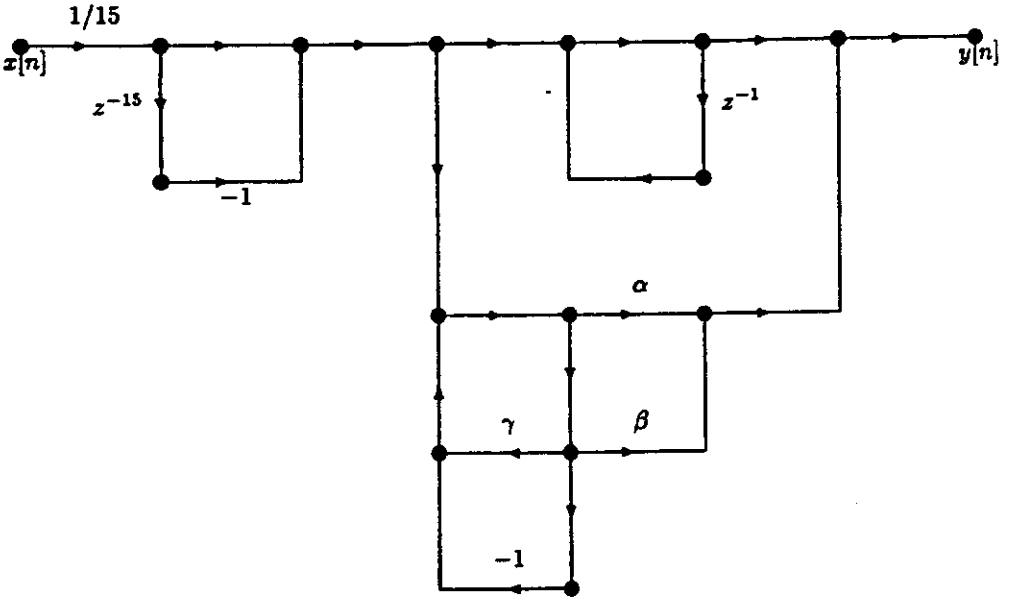
The system will have generalized linear phase if the impulse response has even symmetry (note it cannot have odd symmetry), or alternatively, if the frequency response can be expressed as:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega 7}A_e(e^{j\omega})$$

where $A_e(e^{j\omega})$ is a real, even, periodic function in ω. We thus conclude that the system will have generalized linear phase for $n_0 = \frac{15}{2}k$, where k is an odd integer.

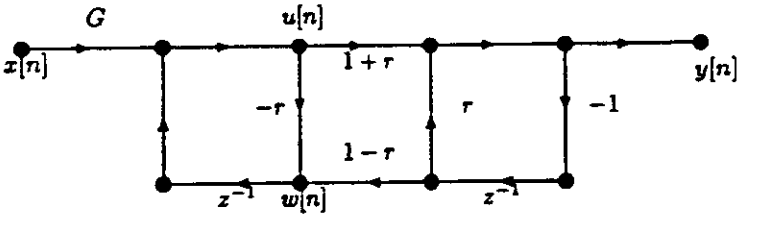
(d) Rewrite $H(z)$ as

$$H(z) = \frac{1 - z^{-15}}{15}\left[\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{\cos\frac{2\pi n_0}{15} - \cos\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n_0}{15}\right)z^{-1}}{1 - 2\cos\frac{2\pi}{15}z^{-1} + z^{-2}}\right].$$



where $\alpha = \cos(2\pi n_0/15)$, $\beta = -\cos(2\pi(n_0 + 1)/15)$, and $\gamma = 2\cos(2\pi/15)$.

6.31. (a)



$$\begin{aligned} u[n] &= Gx[n] + w[n-1] \\ w[n] &= -ru[n] - (1-r)y[n-1] \\ y[n] &= (1+r)u[n] - ry[n-1]. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} U(z) &= GX(z) + z^{-1}W(z) \\ W(z) &= -ru(z) - (1-r)z^{-1}Y(z) \\ Y(z) &= (1+r)U(z) - rz^{-1}Y(z). \end{aligned}$$

Solve for $U(z)$ in terms of $X(z)$ and $Y(z)$:

$$U(z) = \frac{GX(z) - (1-r)z^{-2}Y(z)}{1 + rz^{-1}}$$

Then

$$Y(z) = (1+r)\left\{\frac{GX(z) - (1-r)z^{-2}Y(z)}{1 + rz^{-1}}\right\} - rz^{-1}Y(z)$$

$$Y(z)(1 + rz^{-1}) = G(1+r)X(z) - (1-r^2)z^{-2}Y(z) - rz^{-1}Y(z) - r^2z^{-2}Y(z)$$

$$Y(z)(1 + 2rz^{-1} + z^{-2}) = G(1+r)X(z)$$

$$H_1(z) = \frac{G(1+r)}{1 + 2rz^{-1} + z^{-2}}.$$

From the quadratic formula, the poles are at $(-r + j\sqrt{1-r^2})^{-1}$ and $(-r - j\sqrt{1-r^2})^{-1}$. The magnitude of each pole is 1. The angles are

$$-\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\right) \quad \text{and} \quad \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\right),$$

respectively.

(c) $U(z) = z^{-1}(GX(z) + W(z))$, $W(z) = -rU(z) - (1-r)Y(z)$, and $Y(z) = z^{-1}((1+r)U(z) - rY(z))$ lead to

$$H_2(z) = \frac{G(1+r)z^{-2}}{1 + 2rz^{-1} + z^{-2}} = z^{-2}H_1(z).$$

6.32. (a)

$$\begin{aligned} y_1[n] &= (1+r)x_1[n] + rx_2[n] \\ y_2[n] &= -rx_1[n] + (1-r)x_2[n]. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y_1[n] &= (1+a)x_1[n] + dx_2[n] \quad (a = r = d) \\ y_2[n] &= (1+cd)x_2[n] + abx_1[n] \quad (c = d = -1). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y_1[n] &= (1+e)x_1[n] + ex_2[n] \quad (e = r) \\ y_2[n] &= efx_1[n] + (1+ef)x_2[n] \quad (f = -1). \end{aligned}$$

(d) B and C preferred over A:

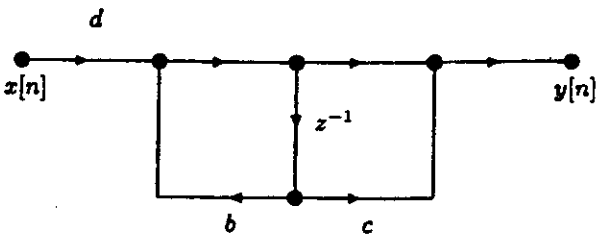
(i) coefficient quantization. If r is small, $1+r$ may not be precisely representable even in floating point. Also, network A has 4 multipliers that must be quantized, while B and C have only 1.

(ii) computational complexity. Networks B and C require fewer multiplications per output sample.

6.33.

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0.54}{1 - 0.54z^{-1}}.$$

(a)

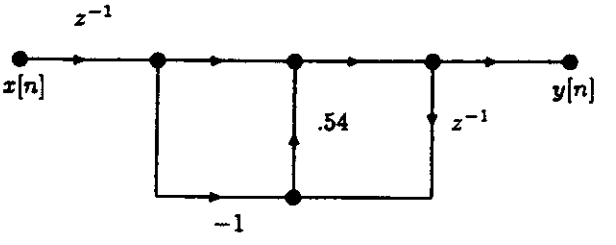


$$H(z) = \frac{cdz^{-1} + d}{1 - bz^{-1}}$$

so set $b = 0.54$, $c = -1.852$, and $d = -0.54$.

(b) With quantized coefficients $\hat{b}$, $\hat{c}$, and $\hat{d}$, $\hat{c}\hat{d} \neq 1$ and $\hat{d} \neq -\hat{b}$ in general, so the resulting system would not be allpass.

(c)

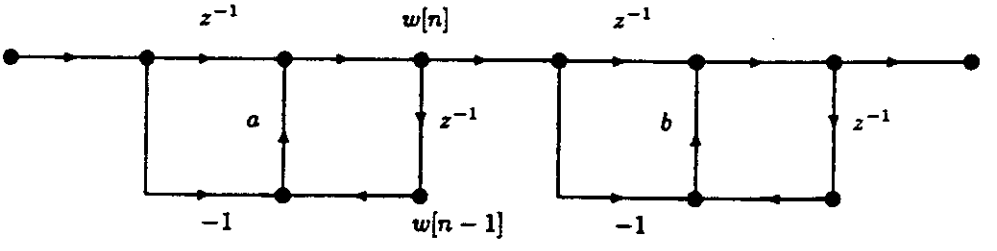


(d) Yes, since there is only one "0.54" to quantize.

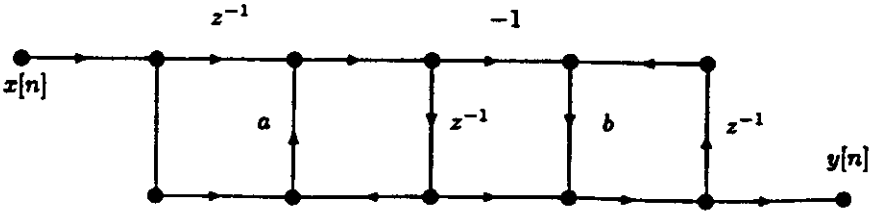
(e)

$$H(z) = \left(\frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1} - b}{1 - bz^{-1}}\right)$$

Cascading two sections like (c) gives

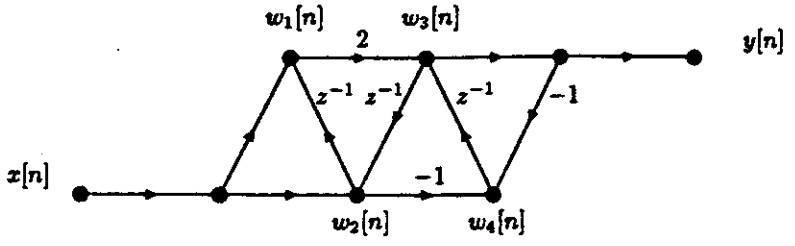


The first delay in the second section has output $w[n-1]$ so we can combine with the second delay of the first section.



(f) Yes, same reason as part (d).

6.34. (a) We have:



First, we find the system function, we have:

$$\begin{aligned}
(1)\ w_1[n] &= x[n] + w_2[n-1] \\
(2)\ w_2[n] &= x[n] + w_3[n-1] \\
(3)\ w_3[n] &= 2w_1[n] + w_4[n-1] \\
(4)\ \ y[n] &= w_3[n] \\
(5)\ w_4[n] &= -y[n] - w_2[n]
\end{aligned}$$

Taking the Z-transform of the above equations and combining terms, we get:

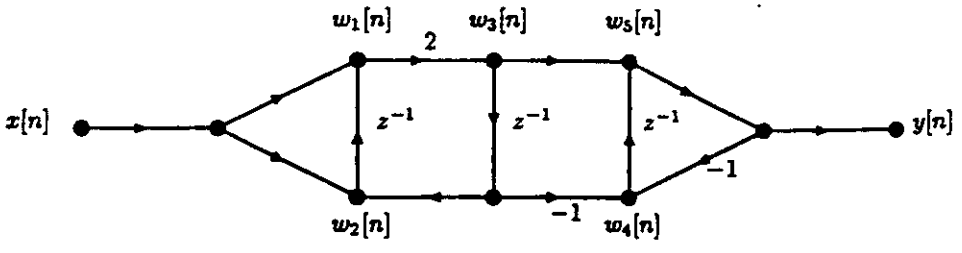
$$(1 - z^{-1})Y(z) + z^{-1}Y(z) = (2 + z^{-1})X(z).$$

The system function is thus given by:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 + z^{-1} - z^{-2}}$$

Since the system function is second order (highest order term is z^{-2}), we should be able to implement this system using only 2 delays, this can be done with a direct form II implementation. Therefore, the minimum number of delays required to implement an equivalent system is 2.

(b) Now we have:



Let's find the transfer function, we have:

$$
\begin{aligned}
(1)\ w_1[n] &= x[n] + w_2[n-1] \\
(2)\ w_2[n] &= x[n] + w_3[n-1] \\
(3)\ w_3[n] &= 2w_1[n] \\
(4)\ w_4[n] &= -w_3[n-1] - y[n] \\
(5)\ w_5[n] &= w_3[n] + w_4[n-1] \\
(6)\ \ y[n] &= w_5[n]
\end{aligned}
$$

Taking the Z-transform of the above equations and combining terms, we get:

$$(1 + z^{-1})Y(z) = \frac{(1 - z^{-2})(2 + 2z^{-1})}{1 - 2z^{-2}} X(z).$$

The system function is thus given by:

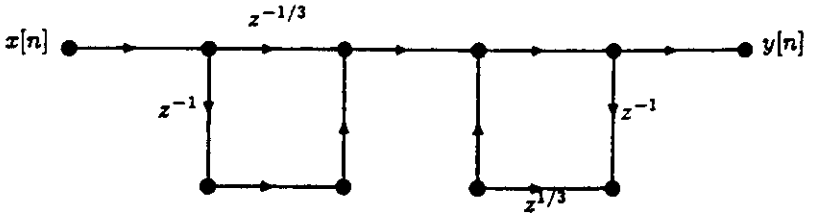
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})}{1 - 2z^{-2}}.$$

Since the transfer function is not the same as the one in part a, we conclude that system B does not represent the same input-output relationship as system A. This should not be surprising since in system B we added two unidirectional wires and therefore changed the input-output relationship.

6.35.

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

(a) Direct form I:



From the graph above, it is clear that 2 delays and 2 multipliers are needed.

(b)

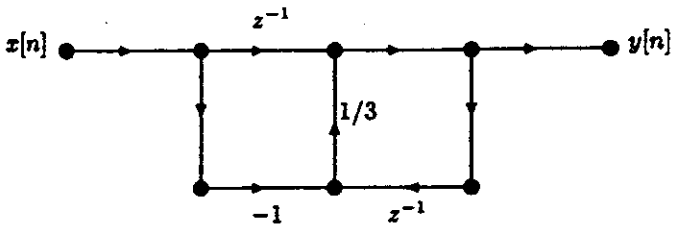
$$(1 - \frac{1}{3}z^{-1})Y(z) = (-\frac{1}{3} + z^{-1})X(z)$$

Inverse $Z-$transforming, we get:

$$y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = -\frac{1}{3}x[n] + x[n-1]$$

$$y[n] = \frac{1}{3}(y[n-1] - x[n]) + x[n-1]$$

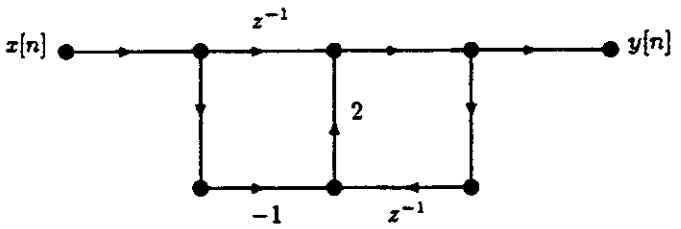
Which can be implemented with the following flow diagram:



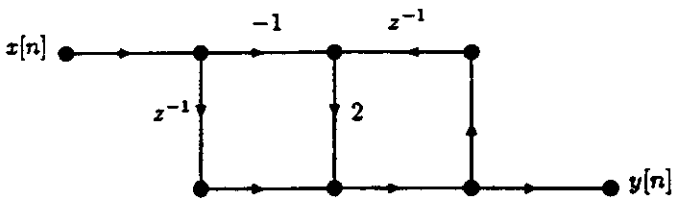
(c)

$$H(z) = \left(\frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\right)\left(\frac{z^{-1} - 2}{1 - 2z^{-1}}\right).$$

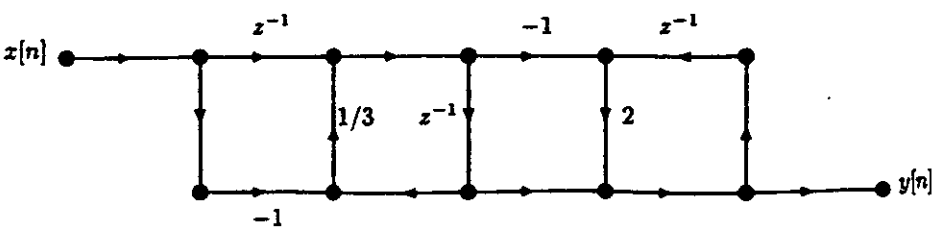
This can be implemented as the cascade of the flow graph in part (b) with the following flow graph:



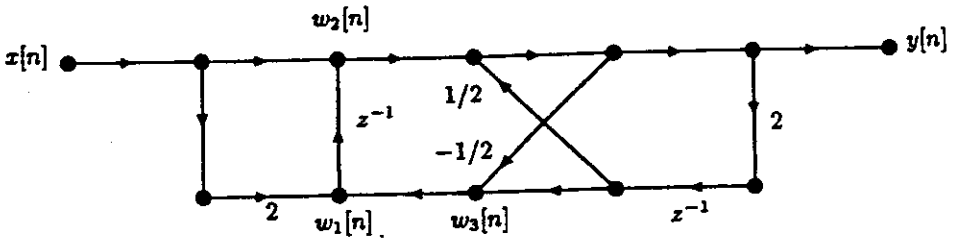
However the above flow graph can be redrawn as:



Now cascading the above flow graph with the one from part (b) and grouping the delay element we get the following system with two multipliers and three delays:



6.36. (a) Transpose = reverse arrows direction and reverse the input/output, we get:



(b) From part (a), we have:

$$(1)\ w_1[n] = 2x[n] + w_3[n]$$
$$(2)\ w_2[n] = x[n] + w_1[n-1]$$
$$(3)\ w_3[n] = -\frac{1}{2}y[n] + 2y[n-1]$$
$$(4)\ y[n] = w_2[n] + y[n-1]$$

Taking the $Z-$transform of the above equations, substituting and rearranging terms, we get:

$$(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - 2z^{-2})Y(z) = (2z^{-1} + 1)X(z).$$

Finally, inverse $Z-$transforming, we get the following difference equation:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] + 2x[n-1].$$

(c) From part (b), the system function is given by:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - 2z^{-2}}.$$

It has poles at

$$z = -\frac{8}{1 - \sqrt{33}} \text{ and } z = -\frac{8}{1 + \sqrt{33}}$$

which are outside the unit circle, therefore the system is NOT BIBO stable.

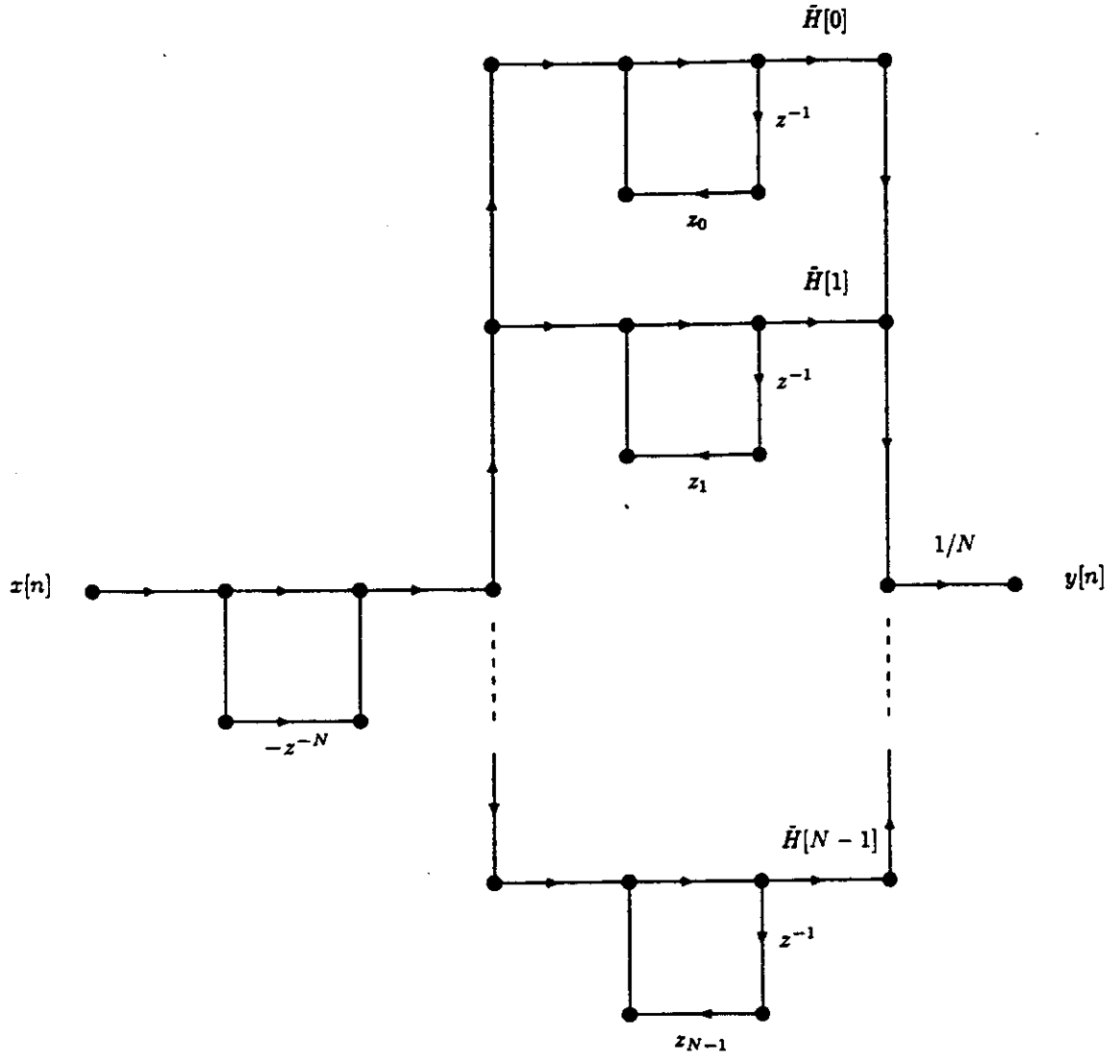
(d)

$$y[2] = x[2] + 2x[1] + \tfrac{1}{2}y[1] + 2y[0]$$
$$y[0] = x[0] = 1$$
$$y[1] = x[1] + 2x[0] + \tfrac{1}{2}y[0] = \tfrac{1}{2} + 2 + \tfrac{1}{2} = 3$$

Therefore,

$$y[2] = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{19}{4}.$$

6.37. (a)



(b) Note that the z_k's are the zeros of $(1 - z^{-N})$. Then write $H(z)$ over a common denominator:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\prod_{\ell=0}^{N-1}(1 - z_\ell z^{-1}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}[k]}{N} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{N-1}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=0}^{N-1}(1 - z_k z^{-1})} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{H}[k]}{N} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{N-1}(1 - z_i z^{-1}). \end{aligned}$$

Therefore, $H(z)$ is the sum of polynomials in z^{-1} with degree $\leq N-1$. Hence, the system impulse response has length $\leq N$.

(c)

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(1 - z^{-N})\frac{\tilde{H}[k]/N}{1 - z_k z^{-1}}\right] = \frac{\tilde{H}[k]}{N}\mathcal{Z}^{-1}[1 - z^{-N}] * \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1 - z_k z^{-1}}\right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tilde{H}[k]}{N}(\delta[n]-\delta[n-N]) * (z_k^n u[n]) \\ &= \frac{\tilde{H}[k]}{N}[z_k^n u[n] - z_k^{n-N}u[n-N]] \\ &= \frac{\tilde{H}[k]}{N} z_k^n \{u[n]-u[n-N]\}. \end{aligned}$$

So

$$h[n] = \left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right)(u[n]-u[n-N]).$$

(d) Note that, since $(1-z_m^{-N}) = 0$,

$$\begin{aligned} H(z_m) &= \left.\frac{(1-z^{-N})\tilde{H}[m]/N}{1-z_m z^{-1}}\right|_{z=z_m} \\ &= \frac{\frac{d}{dz}\{(1-z^{-N})\tilde{H}[m]/N\}|_{z=z_m}}{\frac{d}{dz}\{1-z_m z^{-1}\}|_{z=z_m}} \\ &= \frac{N z_m^{-N-1}\tilde{H}[m]/N}{z_m z_m^{-2}} \\ &= \tilde{H}[m] z_m^{-N} \\ &= \tilde{H}[m]. \end{aligned}$$

(e) If $h[n]$ is real, $|H(e^{j\omega})| = |H(e^{j(2\pi-\omega)})|$, and $\angle H(e^{j\omega}) = -\angle H(e^{j(2\pi-\omega)})$. $H(e^{j2\pi k/N}) = \tilde{H}[k] = |\tilde{H}[k]|e^{j\tilde{\theta}[k]}$, so $|\tilde{H}[k]| = |\tilde{H}[N-k]|$ and $\tilde{\theta}[k] = -\tilde{\theta}[N-k]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

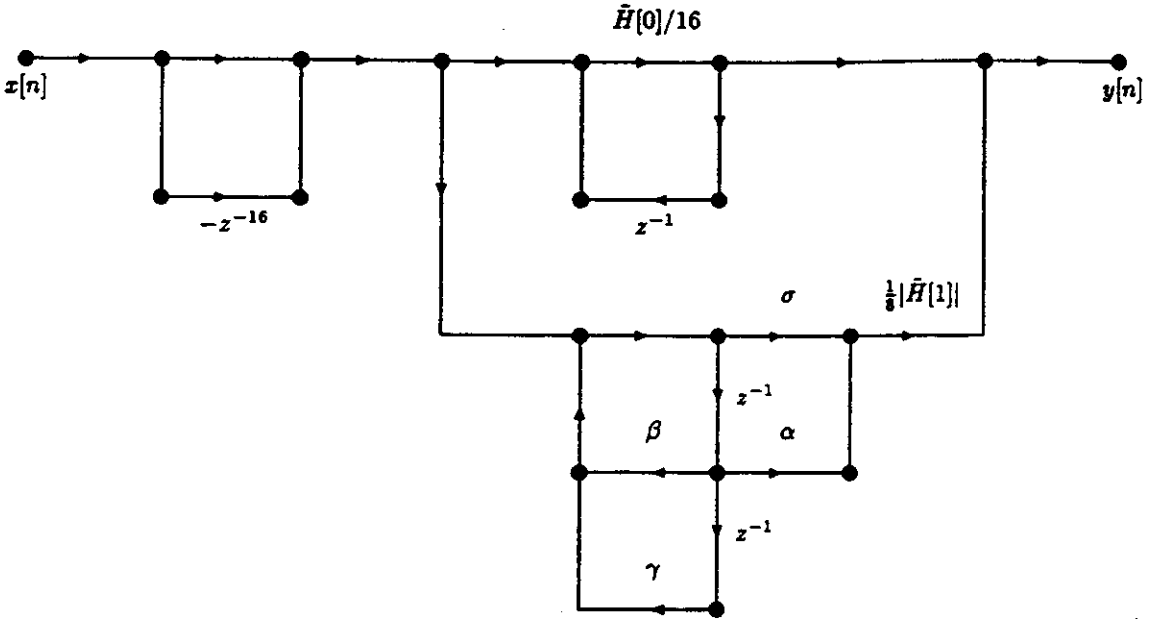
$$\begin{aligned} H(z) &= (1-z^{-N})\left[\frac{\tilde{H}[0]/N}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\tilde{H}[k]/N}{1-z_k z^{-1}} + \frac{\tilde{H}[N/2]/N}{1-z_{N/2}z^{-1}} + \sum_{\ell=\frac{N}{2}+1}^{N-1}\frac{\tilde{H}[\ell]/N}{1-z_\ell z^{-1}}\right] \\ &= (1-z^{-N})\left[\frac{\tilde{H}[0]/N}{1-z^{-1}} + \frac{\tilde{H}[N/2]/N}{1+z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\tilde{H}[k]/N}{1-z_k z^{-1}} + \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\tilde{H}[N-p]/N}{1-z_{N-p}z^{-1}}\right] \\ &= (1-z^{-N})\left[\frac{\tilde{H}[0]/N}{1-z^{-1}} + \frac{\tilde{H}[N/2]/N}{1+z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{\tilde{H}[k]/N}{1-z_k z^{-1}} + \frac{\tilde{H}[N-k]/N}{1-z_{-k}z^{-1}}\right)\right] \\ &= (1-z^{-N})\left[\frac{\tilde{H}[0]/N}{1-z^{-1}} + \frac{\tilde{H}[N/2]/N}{1+z^{-1}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{\tilde{H}[k](1-z_{-k}z^{-1}) + \tilde{H}[N-k](1-z_k z^{-1})}{(1-z_k z^{-1})(1-z_{-k}z^{-1})}\right] \\ &= (1-z^{-N})\left[\frac{\tilde{H}[0]/N}{1-z^{-1}} + \frac{\tilde{H}[N/2]/N}{1+z^{-1}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{2|\tilde{H}[k]}{N}\cdot\frac{\cos(\tilde{\theta}[k]) - z^{-1}\cos(\tilde{\theta}[k]-2\pi k/N)}{1-2\cos\frac{2\pi k}{N}z^{-1}+z^{-2}}\right] \end{aligned}$$

And since $\tilde{H}[0] = H(1)$, $\tilde{H}[N/2] = H(-1)$,

$$H(z) = (1-z^{-N})\left[\frac{H(1)/N}{1-z^{-1}} + \frac{H(-1)/N}{1+z^{-1}} + \right.$$

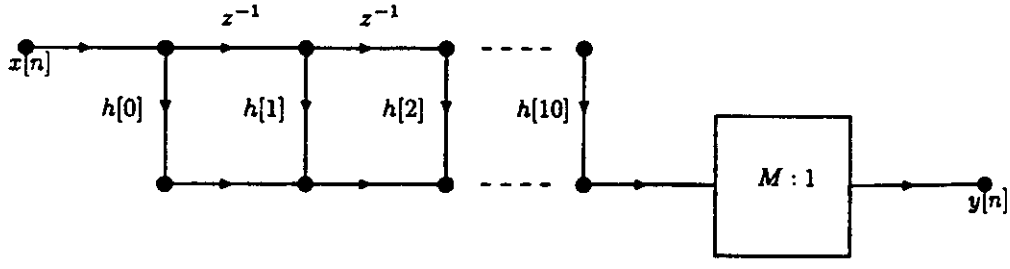
$$\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{2|H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}|}{N} \cdot \frac{\cos[\theta(2\pi k/N)] - z^{-1}\cos[\theta(2\pi k/N) - 2\pi k/N]}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}}\Bigg].$$

If $\tilde{H}[14] = 0$,then $\tilde{H}[16-14] = \tilde{H}[2] = 0$ also.



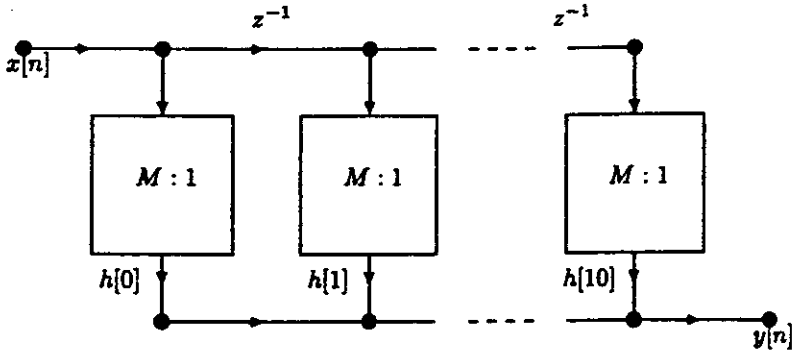
where $\sigma = \cos(\tilde{\theta}[1])$, $\alpha = -\cos(\tilde{\theta}[1] - (2\pi/16))$, $\beta = 2\cos(2\pi/16)$, and $\gamma = -1$.

6.38. (a)



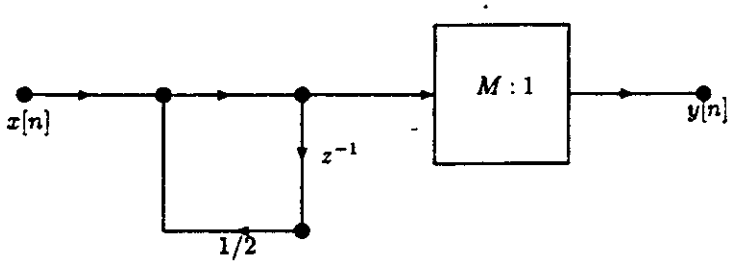
$M(N+1)$ multiplies per output sample; MN adds per output sample.

(b)



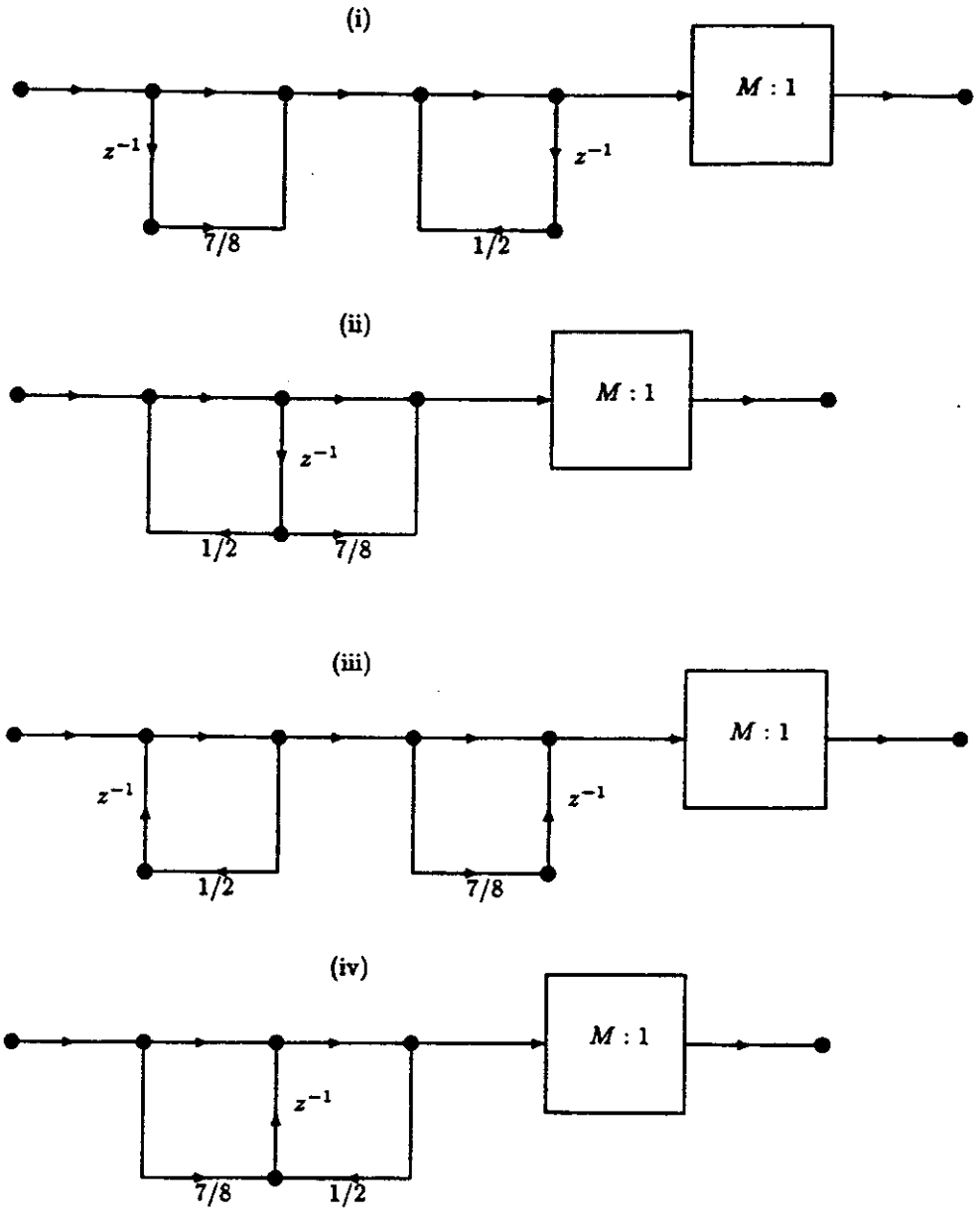
$N+1$ multiplies per output sample; N adds per output sample. The number of computations has been reduced by a factor of M in both adds and multiplies.

(c)



The total computation can not be reduced because to compute the value of any given output sample, the previous output value must be known.

(d)



Only direct form II (ii) can be implemented more efficiently by commuting operations with the downsamplers.

6.39. Since each section is 3.4cm long, it takes

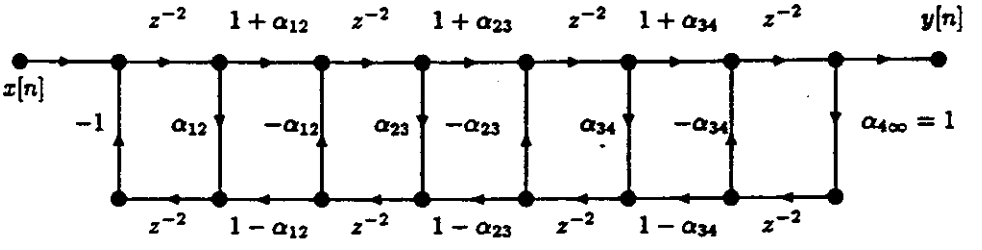
$$\frac{3.4\text{cm}}{3.4\frac{\text{cm}}{\text{sec}} \cdot 10^4} = 10^{-4}\text{sec}$$

to traverse one section. Since the sampling rate is 20kHz ($T_s = 0.5 \cdot 10^{-4}$sec), it takes two sampling intervals to traverse a section. The entire system is linear and so the forward going and backward going

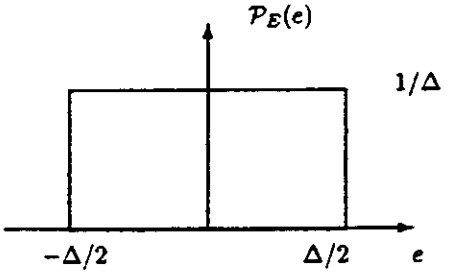
waves add at a boundary. Let

$$\alpha_{kn} = \frac{A_n - A_k}{A_n + A_k}$$

(from A_k into A_n); then $\alpha_{kn} = -\alpha_{nk}$ and we get:



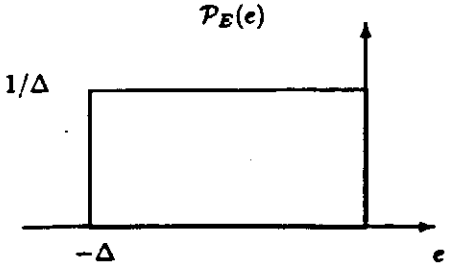
6.40. (a) For rounding:



$$m_e = \frac{1}{\Delta}\int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e\,de = \frac{1}{\Delta}\frac{e^2}{2}\Big]_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = 0$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2\,de = \frac{e^3}{3\Delta}\Big]_{\frac{-\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}.$$

(b) For truncation:



$$m_e = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta}^{0} e\,de = \frac{1}{\Delta}\,\frac{e^2}{2}\Big]_{-\Delta}^{0} = \frac{-\Delta}{2}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta}^{0} e^2\,de - \frac{\Delta^2}{4} = \frac{e^3}{3\Delta}\Big]_{-\Delta}^{0} - \frac{\Delta^2}{4} = \frac{\Delta^2}{12}.$$

6.41. Since the system is linear, $y[n]$ is the sum of the outputs due to $x_1[n]$ and $x_2[n]$. Therefore

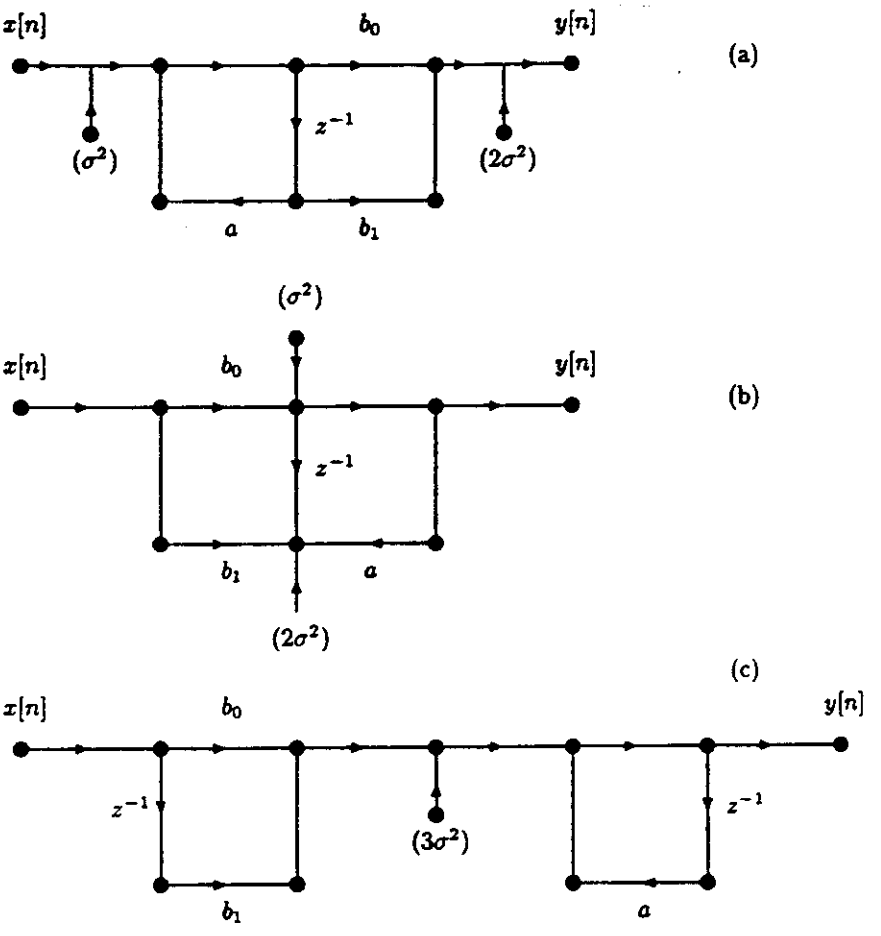
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[k]x_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]x_2[n-k] \\ &= y_1[n] + y_2[n]. \end{aligned}$$

The correlation between $y_1[n]$ and $y_2[n]$ is

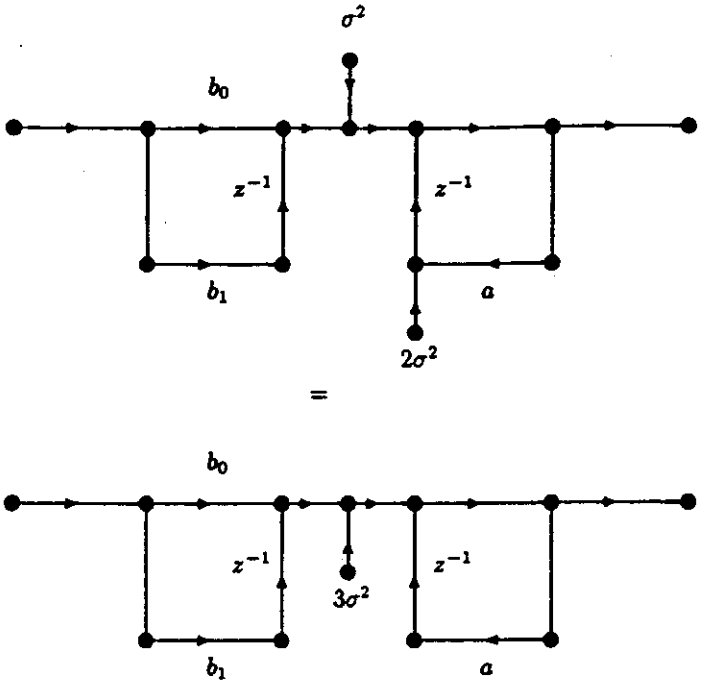
$$\begin{aligned} E\{y_1[m]y_2[n]\} &= E\left\{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_1[\ell]x_1[m-\ell]\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]x_2[n-k]\right\} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_1[\ell]h_2[k]E\{x_1[m-\ell]x_2[n-k]\} \end{aligned}$$

If $x_1[n]$ and $x_2[n]$ are uncorrelated, $E\{x_1[m-\ell]x_2[n-k]\} = 0$; hence, $E\{y_1[m]y_2[n]\} = 0$. Therefore, $y_1[n]$ and $y_2[n]$ are uncorrelated.

6.42. (a) The linear noise model for each system is drawn below.



(b) Clearly (a) and (c) are different. Thus the answer is either (a) and (b) or (b) and (c). If we take (b) apart, we get



We see that the noise all goes through the poles. Note that the $1\sigma^2$ source sees a system function $(1-az^{-1})^{-1}$ while the $2\sigma^2$ source sees $z^{-1}/(1-az^{-1})$. However, the delay (z^{-1}) does not affect the average power. Hence, the answer is (b) and (c).

(c) For network (c),

$$\sigma_f^2 = 3\sigma^2 \sum_{n=0}^{\infty} (a^n)^2 = \frac{3\sigma^2}{1-a^2},$$

or using the frequency domain formula,

$$\begin{aligned}
\sigma_f^2 &= 3\sigma^2 \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az} \frac{dz}{z} \\
&= 3\sigma^2 \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{dz}{(z-a)(1-az)} \\
&= \frac{3\sigma^2}{1-a^2}.
\end{aligned}$$

For network (a),

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$$h[n] = b_0\delta[n] + (b_0 + \frac{b_1}{a})a^n u[n]$$

- Time domain calculation:

$$\sigma_f^2 = 2\sigma^2 + \sigma^2 \sum_n h^2[n]$$

$$= 2\sigma^2 + \sigma^2 \left(b_0^2 + \left(b_0 + \frac{b_1}{a} \right)^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a^{2n}}_{\frac{a^2}{1-a^2}} \right)$$

$$= 2\sigma^2 + \sigma^2 \left(b_0^2 + \frac{(ab_0 + b_1)^2}{1 - a^2} \right).$$

- Frequency domain calculation:

$$\sum_n h^2[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

$$= \sum \left(\text{residues of } \frac{H(z)H(z^{-1})}{z} \text{inside unit circle} \right).$$

$$\frac{H(z)H(z^{-1})}{z} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1})(b_0 + b_1 z)}{(z - a)(1 - az)} \frac{z}{z}$$

$$= \frac{(b_0 z + b_1)(b_0 + b_1 z)}{z(z - a)(1 - az)}.$$

$$\text{residue } (z = 0) = \frac{-b_1 b_0}{a}$$

$$\text{residue } (z = a) = \frac{(b_0 a + b_1)(b_0 + b_1 a)}{a(1 - a^2)} = \frac{b_0^2 a + b_1^2 a + b_1 b_0 + b_1 b_0 a^2}{a(1 - a^2)}.$$

$$\oint H(z)H(z^{-1}) \frac{dz}{z} = \frac{b_0^2 a + b_1^2 a + b_1 b_0 + b_1 b_0 a^2 - b_1 b_0 + b_1 b_0 a^2}{a(1 - a^2)}$$

$$= \frac{b_0^2 + b_1^2 + 2b_0 b_1 a}{1 - a^2}$$

$$= b_0^2 + \frac{(ab_0 + b_1)^2}{1 - a^2}$$

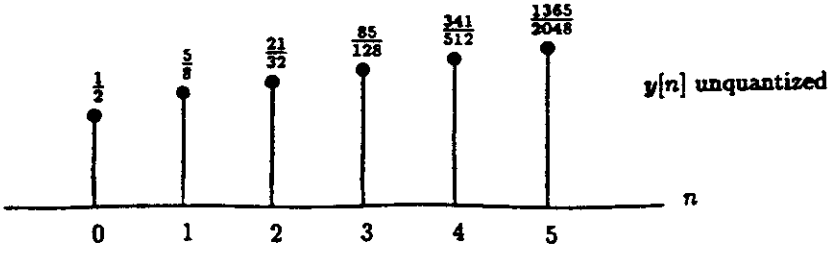
6.43. (a)

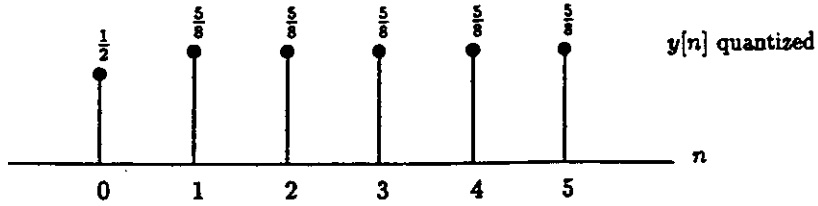
$$y[n] = \frac{1}{4} y[n-1] + \frac{1}{2}, \quad n \geq 0$$

$$y[n] = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{4} \right)^i = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}$$

For large n, $y[n] = (1/2)/(3/4) = 2/3$.

(b) Working from the difference equation and quantizating after multiplication, it is easy to see that, in the quantized case, $y[0] = 1/2$ and $y[n] = 5/8$ for $n \geq 1$. In the unquantized case, the output monotonically approaches 2/3.





(c) The system diagram is direct form II:

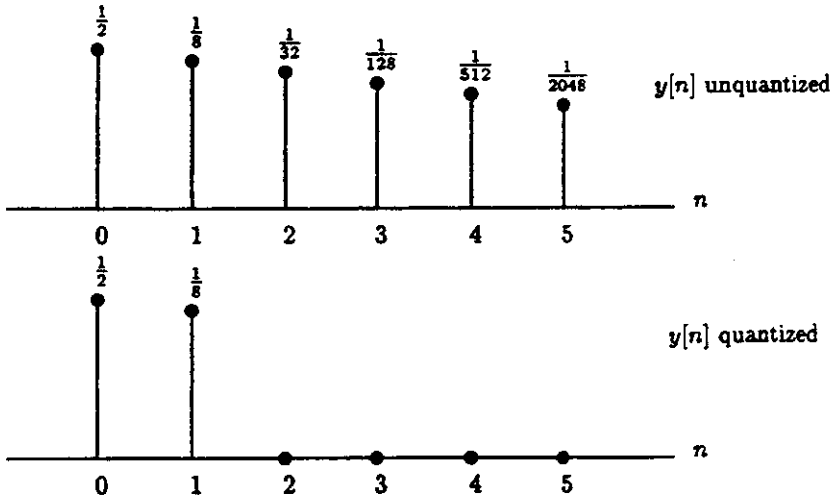
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2}}{1 + e^{-j\omega}}$$

So

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

which implies that $y[n] = (1/2)(1/4)^n$, which approaches 0 as n grows large.
To find the quantized output (working from the difference equation): $y[0] = 1/2$, $y[1] = 1/8$, and $y[n] = 0$ for $n \geq 2$.



6.44. (a) To check for stability, we look at the poles location. The poles are located at

$$z \approx 0.52 + 0.84j \text{ and } z \approx 0.52 - 0.84j.$$

Note that

$$|z|^2 \approx 0.976 < 1.$$

The poles are inside the unit circle, therefore the system function is stable.

(b) If the coefficients are rounded to the nearest tenth, we have

$$1.04 \to 1.0 \text{ and } 0.98 \to 1.0.$$

Now the poles are at

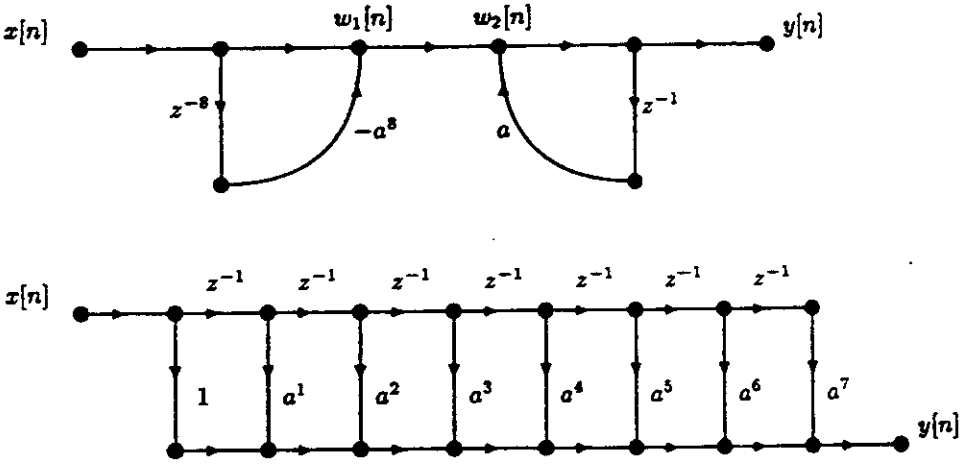
$$z = \frac{1 - j\sqrt{3}}{2} \text{ and } z = \frac{1 - j\sqrt{3}}{2}.$$

Note that now,

$$|z|^2 = 1.$$

The poles are on the unit circle, therefore the system is not stable.

6.45. The flow graphs for networks 1 and 2 respectively are:



(a) For Network 1, we have:

$$w_1[n] = x[n] - a^8 x[n-8]$$
$$w_2[n] = ay[n-1] + w_1[n]$$
$$y[n] = w_2[n]$$

Taking the $Z-$transform of the above equations and combining terms, we get:

$$Y(z)(1 - az^{-1}) = (1 - a^8 z^{-8})X(z)$$

That is:

$$H(z) = \frac{1 - a^8 z^{-8}}{1 - az^{-1}}.$$

For Network 2, we have:

$$y[n] = x[n] + ax[n-1] + a^2 x[n-2] + ... + a^7 x[n-7].$$

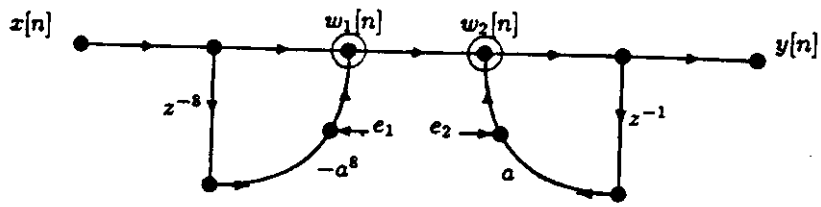
Taking the $Z-$transform, we get:

$$Y(z) = (1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + ... + a^7z^{-7})X(z).$$

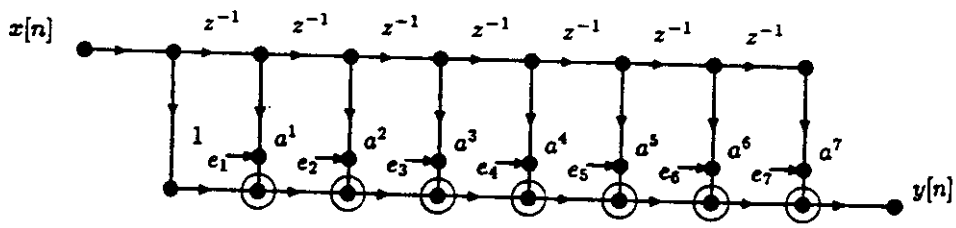
So:

$$H(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + ... + a^7z^{-7} = \frac{1 - a^8z^{-8}}{1 - az^{-1}}.$$

(b) Network 1:



Network 2:



(c) The nodes are circled on the figures in part (b).

(d) In order to avoid overflow in the system, each node in the network must be constrained to have a magnitude less than 1. That is if $w_k[n]$ denotes the value of the kth node variable and $h_k[n]$ denotes the impulse response from the input $x[n]$ to the node variable $w_k[n]$, a sufficient condition for $|w_k[n]| < 1$ is

$$x_{max} < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k[m]|}.$$

In this problem, we need to make sure overflow does not occur in each node, i.e. we need to take the tighter bound on x_{max}. For network 1, the impulse response from $w_2[n]$ to $y[n]$ is $a^n u[n]$, therefore the condition to avoid overflow from that node to the output is

$$w_{max} < 1 - |a|.$$

Where we assumed that $|a| < 1$. The transfer function from $x[n]$ to $w_1[n]$ is $1 - a^8z^{-8}$, therefore to avoid overflow at that node we need:

$$w_1[n] < x_{max}(1 - a^8) < 1 - |a|.$$

We thus conclude that to avoid overflow in network 1, we need:

$$x_{max} < \frac{1-|a|}{1-a^8}.$$

Now, for network 2, the transfer function from input to output is given by $\delta[n]+a\delta[n-1]+a^2\delta[n-2]+...+a^7\delta[n-7]$, therefore to avoid overflow, we need:

$$x_{max} < \frac{1}{1+|a|+a^2+...+|a|^7}.$$

(e) For network 1, the total noise power is $\frac{2\sigma_e^2}{1-|a|}$. For network 2, the total noise power is $7\sigma_e^2$. For network 1 to have less noise power than network 2, we need

$$\frac{2\sigma_e^2}{1-|a|} < 7\sigma_e^2.$$

That is:

$$|a| < \frac{5}{7}.$$

The largest value of $|a|$ such that the noise in network 1 is less than network 2 is therefore $\frac{5}{7}$.

Solutions – Chapter 7

Filter Design Techniques

7.1. Using the partial fraction technique, we see

$$H_c(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} = \frac{0.5}{s+a+jb} + \frac{0.5}{s+a-jb}$$

Now we can use the Laplace transform pair

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$$

to get

$$h_c(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-(a+jb)t} + e^{-(a-jb)t}\right)u(t).$$

(a) Therefore,

$$\begin{aligned} h_1[n] &= h_c(nT) = \frac{1}{2}\left[e^{-(a+jb)nT} + e^{-(a-jb)nT}\right]u[n] \\ H_1(z) &= \frac{0.5}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}} + \frac{0.5}{1-e^{-(a-jb)T}z^{-1}}, \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

(b) Since

$$s_c(t) = \int_{-\infty}^{t} h_c(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{H_c(s)}{s} = S_c(s)$$

we get

$$S_c(s) = \frac{s+a}{s(s+a+jb)(s+a-jb)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+a+jb} + \frac{A_2^*}{s+a-jb}$$

where

$$A_1 = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad A_2 = -\frac{0.5}{a+jb}$$

Though the system $h_2[n]$ is related by step invariance to $h_c(t)$, the signal $s_2[n]$ is related to $s_c(t)$ by impulse invariance. Therefore, we know the poles of the partial fraction expansion of $S_c(s)$ above must transform as $z_k = e^{s_k T}$, and we can find

$$S_2(z) = \frac{A_1}{1-z^{-1}} + \frac{A_2}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}} + \frac{A_2^*}{1-e^{-(a-jb)T}z^{-1}}$$

Now, since the relationship between the step response and the impulse response is

$$s_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h_2[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_2[k]u[n-k] = h_2[n] * u[n]$$

$$S_2(z) = \frac{H_2(z)}{1-z^{-1}}$$

We can finally solve for $H_2(z)$

$$\begin{aligned} H_2(z) &= S_2(z)(1-z^{-1}) \\ &= A_1 + A_2\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}} + A_2^*\frac{1-z^{-1}}{1-e^{-(a-jb)T}z^{-1}}, \quad |z| > e^{-aT} \end{aligned}$$

where A_1 and A_2 are as given above.

(c)

$$\begin{aligned} s_1[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n} h_1[k] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-(a+jb)kT} + e^{-(a-jb)kT}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1-e^{-(a+jb)(n+1)T}}{1-e^{-(a+jb)T}} + \frac{1-e^{-(a-jb)(n+1)T}}{1-e^{-(a-jb)T}}\right]u[n] \\ &= \left[B_1 + B_2 e^{-(a+jb)Tn} + B_2^* e^{-(a-jb)Tn}\right]u[n] \end{aligned}$$

where

$$B_1 = \frac{1-e^{-aT}\cos bT}{1-2e^{-aT}\cos bT + e^{-2aT}}, \qquad B_2 = -\frac{e^{-(a+jb)T}}{1-e^{-(a+jb)T}}$$

¿From this we can see that

$$\begin{aligned} S_1(z) &= \frac{B_1}{1-z^{-1}} + \frac{B_2}{1-e^{-(a+jb)T}z^{-1}} + \frac{B_2^*}{1-e^{-(a-jb)T}z^{-1}} \\ &\neq S_2(z) \end{aligned}$$

since the partial fraction constants are different. Therefore, $s_1[n] \neq s_2[n]$, the two step responses are not equal.

Taking the inverse z-transform of $H_2(z)$

$$\begin{aligned} h_2[n] &= A_1\delta[n] + A_2\left[e^{-(a+jb)Tn}u[n] - e^{-(a+jb)T(n-1)}u[n-1]\right] \\ &\quad + A_2^*\left[e^{-(a-jb)Tn}u[n] - e^{-(a-jb)T(n-1)}u[n-1]\right] \end{aligned}$$

where A_1 and A_2 are as defined earlier. By comparing $h_1[n]$ and $h_2[n]$ one sees that $h_1[n] \neq h_2[n]$.

The overall idea this problem illustrates is that a filter designed with impulse invariance is different from a filter designed with step invariance.

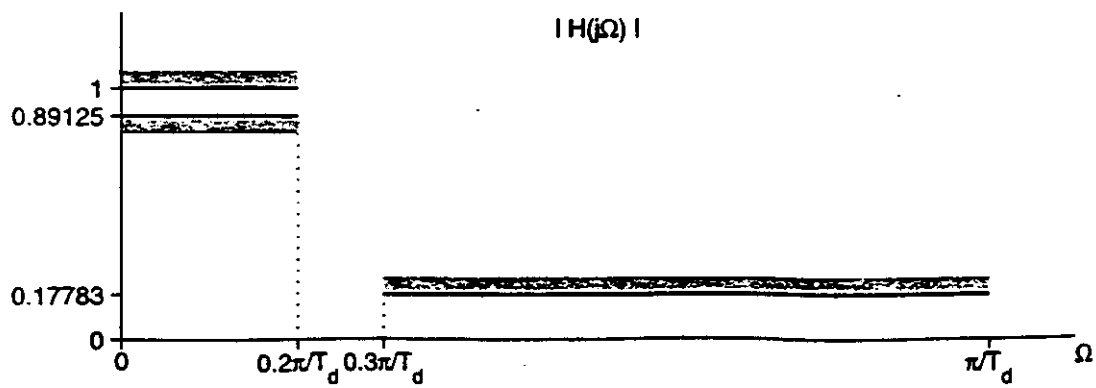
7.2. Recall that $\Omega = \omega/T_d$.

(a) Then

$$0.89125 \leq |H(j\Omega)| \leq 1, \quad 0 \leq |\Omega| \leq 0.2\pi/T_d$$

$$|H(j\Omega)| \leq 0.17783, \qquad 0.3\pi/T_d \leq |\Omega| \leq \pi/T_d$$

The plot of the tolerance scheme is



(b) As in the book's example, since the Butterworth frequency response is monotonic, we can solve

$$|H_c(j0.2\pi/T_d)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{0.2\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}} = (0.89125)^2$$

$$|H_c(j0.3\pi/T_d)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c T_d}\right)^{2N}} = (0.17783)^2$$

to get $\Omega_c T_d = 0.70474$ and $N = 5.8858$. Rounding up to $N = 6$ yields $\Omega_c T_d = 0.7032$ to meet the specifications.

(c) We see that the poles of the magnitude-squared function are again evenly distributed around a circle of radius 0.7032. Therefore, $H_c(s)$ is formed from the left half-plane poles of the magnitude-squared function, and the result is the same for any value of T_d. Correspondingly, $H(z)$ does not depend on T_d.

7.3. We are given the digital filter constraints

$$\begin{aligned} 1-\delta_1 \le |H(e^{j\omega})| \le 1+\delta_1, \quad & 0 \le |\omega| \le \omega_p \\ |H(e^{j\omega})| \le \delta_2, \quad & \omega_s \le |\omega| \le \pi \end{aligned}$$

and the analog filter constraints

$$\begin{aligned} 1-\hat{\delta}_1 \le |H_c(j\Omega)| \le 1, \quad & 0 \le |\Omega| \le \Omega_p \\ |H_c(j\Omega)| \le \hat{\delta}_2, \quad & \Omega_s \le |\Omega| \end{aligned}$$

(a) If we divide the digital frequency specifications by $(1+\delta_1)$ we get

$$\begin{aligned} 1-\hat{\delta}_1 &= \frac{1-\delta_1}{1+\delta_1} \\ \hat{\delta}_1 &= \frac{2\delta_1}{1+\delta_1} \\ \hat{\delta}_2 &= \frac{\delta_2}{1+\delta_1} \end{aligned}$$

(b) Solving the equations in Part (a) for δ_1 and δ_2, we find

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\hat{\delta}_1}{2-\hat{\delta}_1} \\ \delta_2 &= \frac{2\hat{\delta}_2}{2-\hat{\delta}_1} \end{aligned}$$

In the example, we were given

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_1 &= 1-0.89125 = 0.10875 \\ \hat{\delta}_2 &= 0.17783 \end{aligned}$$

Plugging in these values into the equations for δ_1 and δ_2, we find

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0.0575 \\ \delta_2 &= 0.1881 \end{aligned}$$

The filter $H'(z)$ satisfies the discrete-time filter specifications where $H'(z) = (1+\delta_1)H(z)$ and $H(z)$ is the filter designed in the example. Thus,

$$\begin{aligned} H'(z) &= 1.0575\left[\frac{0.2871-0.4466z^{-1}}{1-1.2971z^{-1}+0.6949z^{-2}}+\frac{-2.1428+1.1455z^{-1}}{1-1.0691z^{-1}+0.3699z^{-2}}\right. \\ &\quad \left.+\frac{1.8557-0.6303z^{-1}}{1-0.9972z^{-1}+0.2570z^{-2}}\right] \\ &= \frac{0.3036-0.4723z^{-1}}{1-1.2971z^{-1}+0.6949z^{-2}}+\frac{-2.2660+1.2114z^{-1}}{1-1.0691z^{-1}+0.3699z^{-2}} \\ &\quad +\frac{1.9624-0.6665z^{-1}}{1-0.9972z^{-1}+0.2570z^{-2}} \end{aligned}$$

(c) Following the same procedure used in part (b) we find

$$\begin{aligned} H'(z) &= 1.0575\left[\frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})}\right. \\ &\quad \left.\times\frac{1}{1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2}}\right] \\ &= \frac{0.0007802(1+z^{-1})^6}{(1-1.2686z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.0106z^{-1}+0.3583z^{-2})} \\ &\quad \times\frac{1}{1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2}} \end{aligned}$$

7.4. (a) In the impulse invariance design, the poles transform as $z_k = e^{s_k T_d}$ and we have the relationship

$$\frac{1}{s+a} \longleftrightarrow \frac{T_d}{1-e^{-aT_d}z^{-1}}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} H_c(s) &= \frac{2/T_d}{s+0.1}-\frac{1/T_d}{s+0.2} \\ &= \frac{1}{s+0.1}-\frac{0.5}{s+0.2} \end{aligned}$$

The above solution is not unique due to the periodicity of $z = e^{j\omega}$. A more general answer is

$$H_c(s) = \frac{2/T_d}{s+\left(0.1+j\frac{2\pi k}{T_d}\right)}-\frac{1/T_d}{s+\left(0.2+j\frac{2\pi l}{T_d}\right)}$$

where k and l are integers.

(b) Using the inverse relationship for the bilinear transform,

$$z = \frac{1+(T_d/2)s}{1-(T_d/2)s}$$

we get

$$\begin{aligned} H_c(s) &= \frac{2}{1-e^{-0.2}\left(\frac{1-s}{1+s}\right)}-\frac{1}{1-e^{-0.4}\left(\frac{1-s}{1+s}\right)} \\ &= \frac{2(s+1)}{s(1+e^{-0.2})+(1-e^{-0.2})}-\frac{(s+1)}{s(1+e^{-0.4})+(1-e^{-0.4})} \\ &= \left(\frac{2}{1+e^{-0.2}}\right)\left(\frac{s+1}{s+\frac{1-e^{-0.2}}{1+e^{-0.2}}}\right)-\left(\frac{1}{1+e^{-0.4}}\right)\left(\frac{s+1}{s+\frac{1-e^{-0.4}}{1+e^{-0.4}}}\right) \end{aligned}$$

Since the bilinear transform does not introduce any ambiguity, the representation is unique.

7.5. (a) We must use the minimum specifications!

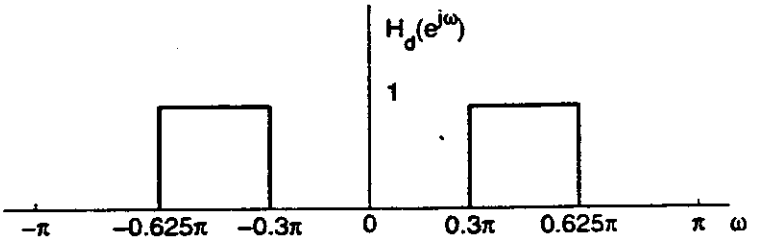
$$\begin{aligned} \delta &= 0.01 \\ \Delta\omega &= 0.05\pi \\ \mathrm{A} &= -20\log_{10}\delta = 40 \end{aligned}$$

$$M+1 = \frac{\mathrm{A}-8}{2.285\Delta\omega} + 1 = 90.2 \rightarrow 91$$

$$\beta = 0.5842(\mathrm{A}-21)^{0.4} + 0.07886(\mathrm{A}-21) = 3.395$$

(b) Since it is a linear phase filter with order 90, it has a delay of $90/2 = 45$ samples.

(c)



$$h_d[n] = \frac{\sin(.625\pi(n-45)) - \sin(.3\pi(n-45))}{\pi(n-45)}$$

7.6. (a) The Kaiser formulas say that a discontinuity of height 1 produces a peak error of δ. If a filter has a discontinuity of a different height the peak error should be scaled appropriately. This filter can be thought of as the sum of two filters. This first is a lowpass filter with a discontinuity of 1 and a peak error of δ. The second is a highpass filter with a discontinuity of 2 and a peak error of 2δ. In the region $0.3\pi \leq |\omega| \leq 0.475\pi$, the two peak errors add but must be less or equal to than 0.06.

$$\begin{aligned} \delta + 2\delta &\leq 0.06 \\ \delta_{\max} &= 0.02 \end{aligned}$$

$$A = -20\log(0.02) = 33.9794$$

$$\beta = 0.5842(33.9794-21)^{0.4} + 0.07886(33.9794-21) = 2.65$$

(b) The transition width can be

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0.3\pi - 0.2\pi \\ &= 0.1\pi \text{ rad} \end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \Delta\omega &= 0.525\pi - 0.475\pi \\ &= 0.05\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

We must choose the smallest transition width so $\Delta\omega_{\max} = 0.05\pi$ rad. The corresponding value of M is

$$M = \frac{33.9794-8}{2.285(0.05\pi)} = 72.38 \rightarrow 73$$

7.7. Using the relation $\omega = \Omega T$, the passband cutoff frequency, ω_p, and the stopband cutoff frequency, ω_s, are found to be

$$\begin{aligned} \omega_p &= 2\pi(1000)10^{-4} \\ &= 0.2\pi \text{ rad} \\ \omega_s &= 2\pi(1100)10^{-4} \\ &= 0.22\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

Therefore, the specifications for the discrete-time frequency response $H_d(e^{j\omega})$ are

$$0.99 \leq |H_d(e^{j\omega})| \leq 1.01, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.20\pi$$
$$|H_d(e^{j\omega})| \leq 0.01, \quad 0.22\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

7.8. Optimal Type I filters must have either $L+2$ or $L+3$ alternations. The filter is 9 samples long so its order is 8 and $L = M/2 = 4$. Thus, to be optimal, the filter must have either 6 or 7 alternations.

Filter 1:	6 alternations	Filter 2:	7 alternations
	Meets optimal conditions		Meets optimal conditions

7.9. Using the relation $\omega = \Omega T$, the cutoff frequency ω_c for the resulting discrete-time filter is

$$\begin{aligned} \omega_c &= \Omega_c T \\ &= [2\pi(1000)][0.0002] \\ &= 0.4\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

7.10. Using the bilinear transform frequency mapping equation,

$$\begin{aligned} \omega_c &= 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right) \\ &= 2\tan^{-1}\left(\frac{2\pi(2000)(0.4\times 10^{-3})}{2}\right) \\ &= 0.7589\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

7.11. Using the relation $\omega = \Omega T$,

$$\begin{aligned} \Omega_c &= \frac{\omega_c}{T} \\ &= \frac{\pi/4}{0.0001} \\ &= 2500\pi \\ &= 2\pi(1250)\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

7.12. Using the bilinear transform frequency mapping equation,

$$\begin{aligned} \Omega_c &= \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) \\ &= \frac{2}{0.001}\tan\left(\frac{\pi/2}{2}\right) \\ &= 2000\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ &= 2\pi(318.3)\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

7.13. Using the relation $\omega = \Omega T$,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\omega_c}{\Omega_c} \\ &= \frac{2\pi/5}{2\pi(4000)} \\ &= 50\ \mu\text{s} \end{aligned}$$

This value of T is unique. Although one can find other values of T that will alias the continuous-time frequency $\Omega_c = 2\pi(4000)$ rad/s to the discrete-time frequency $\omega_c = 2\pi/5$ rad, the resulting aliased filter will not be the ideal lowpass filter.

7.14. Using the bilinear transform frequency mapping equation,

$$\begin{aligned}\Omega_c &= \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c + 2\pi k}{2}\right), \quad \text{k an integer} \\ &= \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right)\end{aligned}$$

$$T = \frac{2}{2\pi(300)}\tan\left(\frac{3\pi/5}{2}\right) = 1.46 \text{ ms}$$

The only ambiguity in the above is the periodicity in ω. However, the periodicity of the tangent function "cancels" the ambiguity and so T is unique.

7.15. This filter requires a maximal passband error of $\delta_p = 0.05$, and a maximal stopband error of $\delta_s = 0.1$. Converting these values to dB gives

$$\delta p = -26 \text{ dB}$$
$$\delta s = -20 \text{ dB}$$

This requires a window with a peak approximation error less than -26 dB. Looking in Table 7.1, the Hanning, Hamming, and Blackman windows meet this criterion.

Next, the minimum length L required for each of these filters can be found using the "approximate width of mainlobe" column in the table since the mainlobe width is about equal to the transition width. Note that the actual length of the filter is $L = M + 1$.

Hanning:

$$\begin{aligned}0.1\pi &= \frac{8\pi}{M} \\ M &= 80\end{aligned}$$

Hamming:

$$\begin{aligned}0.1\pi &= \frac{8\pi}{M} \\ M &= 80\end{aligned}$$

Blackman:

$$\begin{aligned}0.1\pi &= \frac{12\pi}{M} \\ M &= 120\end{aligned}$$

7.16. Since filters designed by the window method inherently have $\delta_1 = \delta_2$ we must use the smaller value for δ.

$$\begin{aligned}\delta &= 0.02 \\ A &= -20\log_{10}(0.02) = 33.9794\end{aligned}$$

$$\beta = 0.5842(33.9794 - 21)^{0.4} + 0.07886(33.9794 - 21) = 2.65$$

$$M = \frac{A - 8}{2.285\Delta\omega} = \frac{33.9794 - 8}{2.285(0.65\pi - 0.63\pi)} = 180.95 \rightarrow 181$$

7.17. Using the relation $\omega = \Omega T$, the specifications which should be used to design the prototype continuous-time filter are

$$\begin{aligned}-0.02 < H(j\Omega) < 0.02, &\quad 0 \le |\Omega| \le 2\pi(20) \\ 0.95 < H(j\Omega) < 1.05, &\quad 2\pi(30) \le |\Omega| \le 2\pi(70) \\ -0.001 < H(j\Omega) < 0.001, &\quad 2\pi(75) \le |\Omega| \le 2\pi(100)\end{aligned}$$

Note: Typically, a continuous-time filter's passband tolerance is between 1 and $1-\delta_1$ since historically most continuous-time filter approximation methods were developed for passive systems which have a gain less than one. If necessary, specifications using this convention can be obtained from the above specifications by scaling the magnitude response by $\frac{1}{1.05}$.

7.18. Using the bilinear transform frequency mapping equation,

$$\begin{aligned}\Omega_s &= \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \frac{2}{2\times 10^{-3}}\tan\left(\frac{0.2\pi}{2}\right) = 2\pi(51.7126)\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\\ \Omega_p &= \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = \frac{2}{2\times 10^{-3}}\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right) = 2\pi(81.0935)\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\end{aligned}$$

Thus, the specifications which should be used to design the prototype continuous-time filter are

$$\begin{aligned}|H_c(j\Omega)| &< 0.04, \qquad |\Omega| \le 2\pi(51.7126)\\ 0.995 < |H_c(j\Omega)| &< 1.005, \qquad |\Omega| \ge 2\pi(81.0935)\end{aligned}$$

Note: Typically, a continuous-time filter's passband tolerance is between 1 and $1-\delta_1$ since historically most continuous-time filter approximation methods were developed for passive systems which have a gain less than one. If necessary, specifications using this convention can be obtained from the above specifications by scaling the magnitude response by $\frac{1}{1.005}$.

7.19. Using the relation $\omega = \Omega T$,

$$\begin{aligned}T &= \frac{\omega}{\Omega}\\ &= \frac{\pi/4}{2\pi(300)}\\ &= 417\ \mu\text{s}\end{aligned}$$

This choice of T is unique. It is possible to find other values of T that alias one of the given continuous-time band edges to its corresponding discrete-time band edge. However, this is the only value of T that maps both band edges correctly.

7.20. *True.* The bilinear transform is a frequency mapping. The value of $H(s)$ for a particular value of s gets mapped to $H(e^{j\omega})$ at a particular value of ω according to the mapping

$$s = \frac{2}{T_d}\left(\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right).$$

The continuous frequency axis gets warped onto the discrete-time frequency axis, but the magnitude values do not change. If $H(s)$ is constant for all s, then $H(e^{j\omega})$ must also be constant.

7.21. (a) Using the bilinear transform frequency mapping equation,

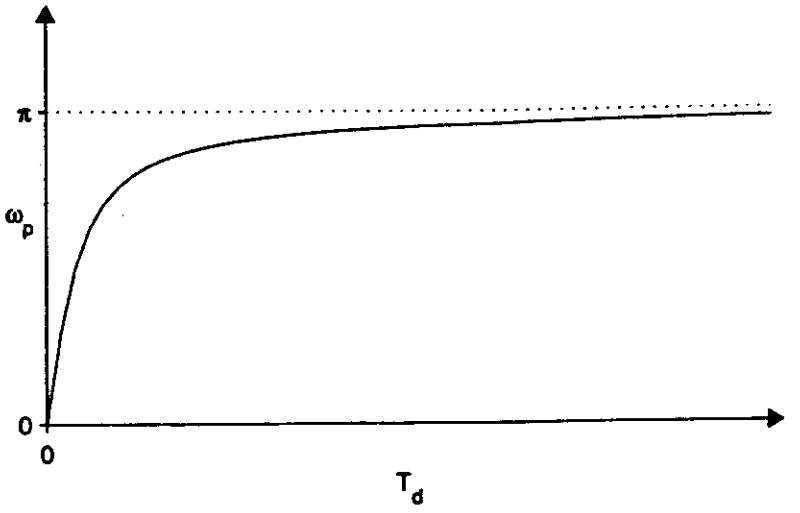
$$\Omega_p = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right)$$

we have

$$\begin{aligned}T_d &= \frac{2}{\Omega_p}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{2}{\Omega_p}\end{aligned}$$

(b)

$$\omega_p = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_p T_d}{2}\right)$$

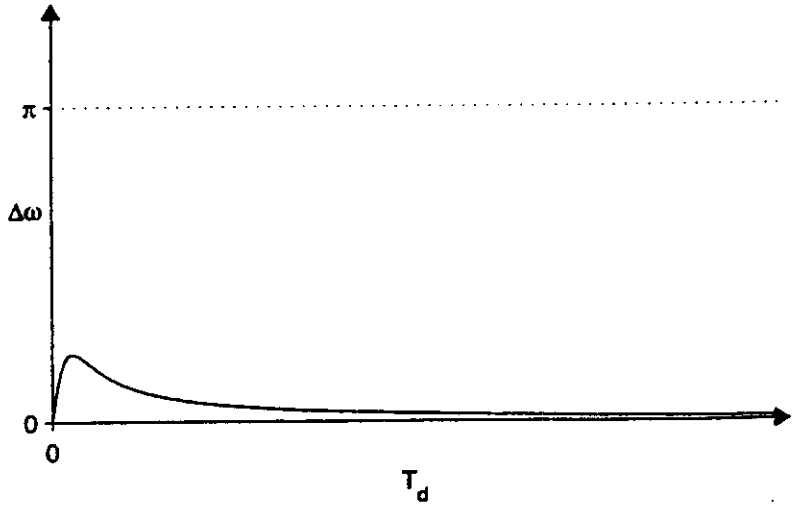


(c)

$$\omega_s = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_s T_d}{2}\right)$$

$$\omega_p = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_p T_d}{2}\right)$$

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 2\left[\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_s T_d}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\Omega_p T_d}{2}\right)\right]$$



7.22. (a) Applying the bilinear transform yields

$$\begin{aligned} H(z) &= H_c(s)\,|_{s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} \\ &= \frac{T_d}{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right), \qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

which has the impulse response

$$h[n] = \frac{T_d}{2}\left(u[n] + u[n-1]\right)$$

(b) The difference equation is

$$y[n] = \frac{T_d}{2}\left(x[n] + x[n-1]\right) + y[n-1]$$

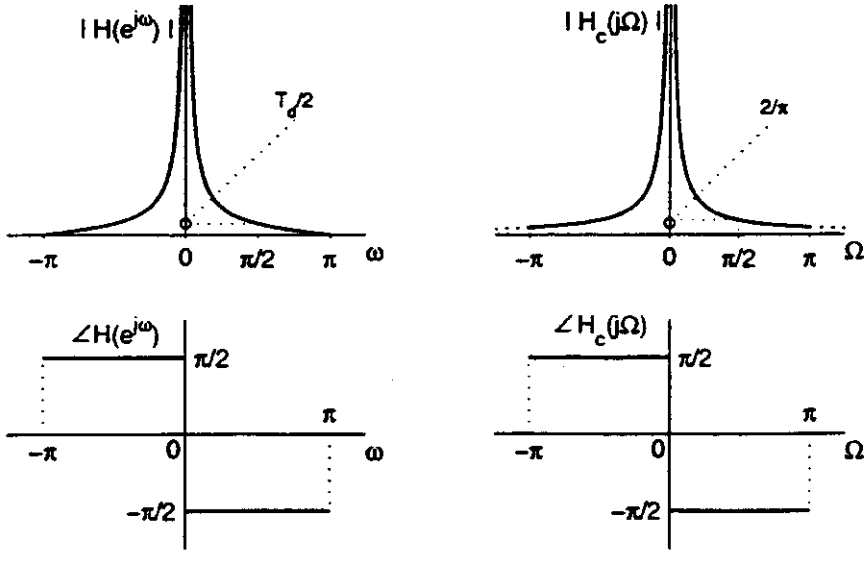
This system is not implementable since it has a pole on the unit circle and is therefore not stable.

(c) Since this system is not stable, it does not strictly have a frequency response. However, if we ignore this mathematical subtlety we get

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{T_d}{2}\left(\frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}}\right) \\ &= \frac{T_d}{2}\left(\frac{e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}\right) \\ &= \frac{T_d}{2j}\cot(\omega/2) \end{aligned}$$

and since the Laplace transform evaluated along the $j\Omega$ axis is the continous-time Fourier transform we also have

$$H_c(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega}$$



In general, we see that we will not be able to approximate the high frequencies, but we can approximate the lower frequencies if we choose $T_d = 4/\pi$.

(d) Applying the bilinear transform yields

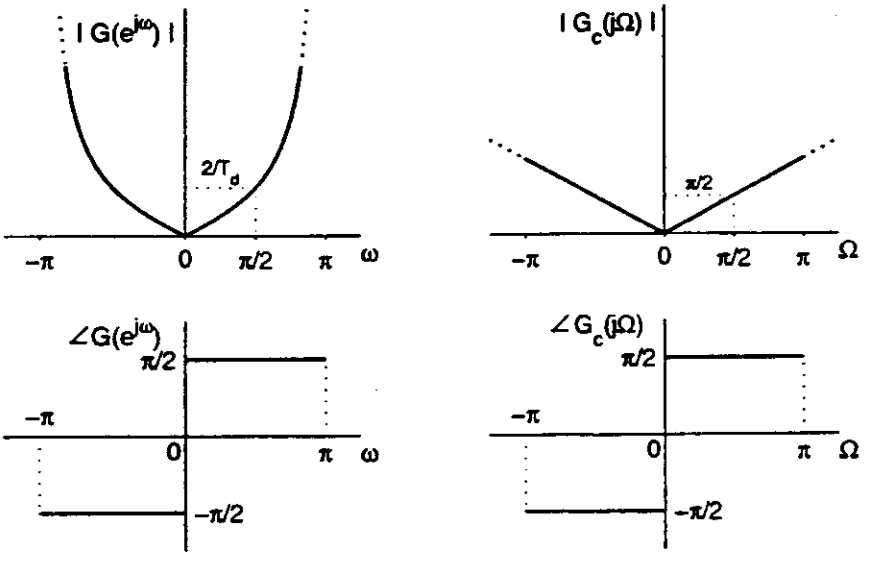
$$\begin{aligned} G(z) &= H_c(s)\,|_{s=\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} \\ &= \frac{2}{T_d}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right], \qquad |z| > 1 \end{aligned}$$

which has the impulse response

$$\begin{aligned} g[n] &= \frac{2}{T_d}\left[(-1)^n u[n] - (-1)^{n-1}u[n-1]\right] \\ &= \frac{2}{T_d}\left[2(-1)^n u[n] - \delta[n]\right] \end{aligned}$$

(e) This system does not strictly have a frequency response either, due to the pole on the unit circle. However, ignoring this fact again we get

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= \frac{2}{T_d}\left[\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right] \\ &= \frac{2}{T_d}\left(\frac{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}}\right) \\ &= \frac{2j}{T_d}\tan(\omega/2) \\ G(j\Omega) &= j\Omega \end{aligned}$$

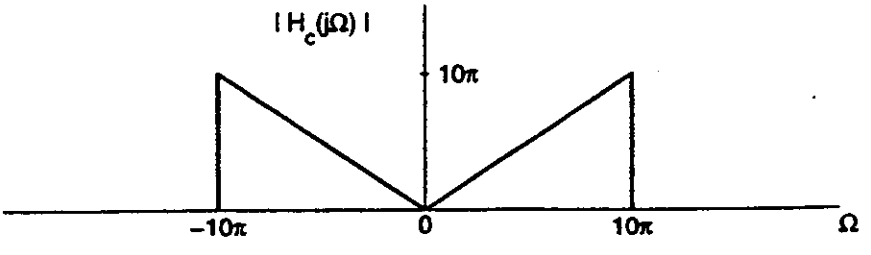


Again, we see that we will not be able to approximate the high frequencies, but we can approximate the lower frequencies if we choose $T_d = 4/\pi$.

(f) If the same value of T_d is used for each bilinear transform, then the two systems are inverses of each other, since then

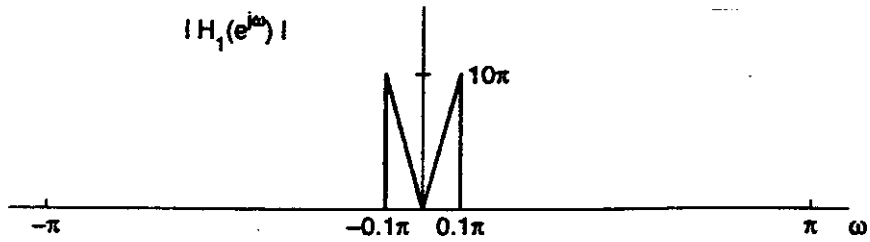
$$H(e^{j\omega})G(e^{j\omega}) = 1$$

7.23. We start with $|H_c(j\Omega)|$,



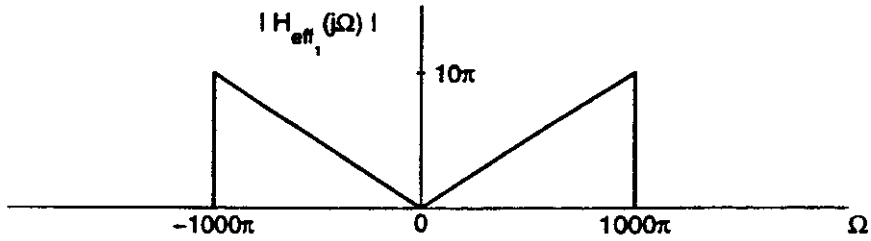
(a) By impulse invariance we scale the frequency axis by T_d to get

$$|H_1(e^{j\omega})| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{\omega}{T_d} + j\frac{2\pi k}{T_d}\right)\right|$$



Then, to get the overall system response we scale the frequency axis by T and bandlimit the result according to the equation

$$|H_{\text{eff}_1}(j\Omega)| = \begin{cases} |H_1(e^{j\omega T})|, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

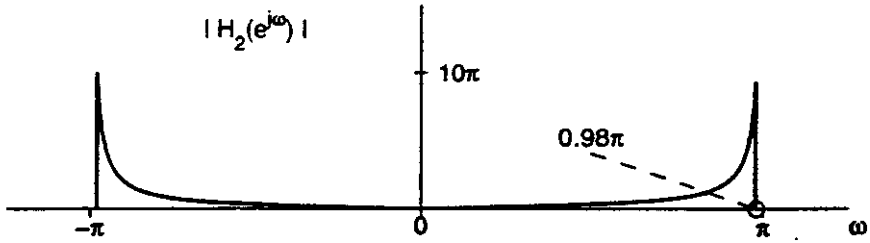


(b) Using the frequency mapping relationships of the bilinear transform,

$$\Omega = \frac{2}{T_d}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right),$$
$$\omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T_d}{2}\right),$$

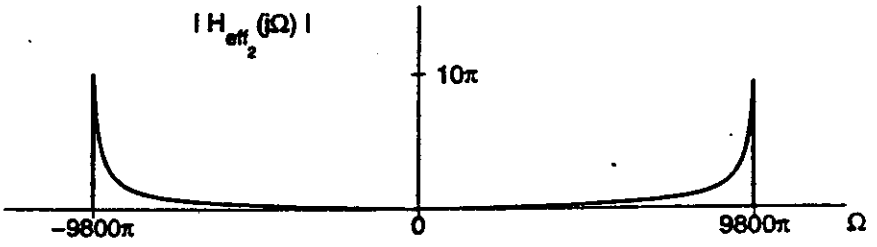
we get

$$|H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} |\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)|, & |\omega| < 2\tan^{-1}(10\pi) = 0.98\pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



Then, to get the overall system response we scale the frequency axis by T and bandlimit the result according to the equation

$$|H_{\text{eff}_2}(j\Omega)| = \begin{cases} |H_2(e^{j\omega T})|, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$



7.24. (a) Expanding the sum to see things more clearly, we get

$$\begin{aligned} H_c(s) &= \sum_{k=1}^{r} \frac{A_k}{(s-s_0)^k} + G_c(s) \\ &= \frac{A_1}{s-s_0} + \frac{A_2}{(s-s_0)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s-s_0)^r} + G_c(s) \end{aligned}$$

Now multiplying both sides by $(s-s_0)^r$ we get

$$(s-s_0)^r H_c(s) = A_1(s-s_0)^{r-1} + A_2(s-s_0)^{r-2} + \cdots + A_r + (s-s_0)^r G_c(s)$$

Evaluating both sides of the equal sign at $s = s_0$ gives us

$$A_r = (s-s_0)^r H_c(s) \mid_{s=s_0}$$

Note that $(s-s_0)^r G_c(s) = 0$ when $s = s_0$ because $G_c(s)$ has at most one pole at $s = s_0$.

Similarly, by taking the first derivative and evaluating at $s = s_0$ we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[(s-s_0)^r H_c(s)\right] &= \sum_{k=1}^{r}(r-k)A_k(s-s_0)^{(r-k-1)} + \frac{d}{ds}\left[(s-s_0)^r G_c(s)\right] \\ &= (r-1)A_1(s-s_0)^{r-2} + (r-2)A_2(s-s_0)^{r-3} + \cdots + A_{r-1} + 0 + \frac{d}{ds}\left[(s-s_0)^r G_c(s\right. \end{aligned}$$

$$A_{r-1} = \frac{d}{ds}\left[(s-s_0)^r H_c(s)\right] \mid_{s=s_0}$$

This idea can be continued. By taking the $(r-k)$-th derivative and evaluating at $s = s_0$ we get the the general form

$$A_k = \frac{1}{(r-k)!}\left(\frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}}\left[(s-s_0)^r H_c(s)\right] \mid_{s=s_0}\right)$$

(b) Using the following transform pair from a lookup table,

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\alpha t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)^k}, \quad \mathcal{R}e\{s\} > -\alpha$$

we get

$$\begin{aligned} h_c(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H_c(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{r}\frac{A_k}{(s-s_0)^k} + G_c(s)\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{r} A_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{s_0 t}u(t) + g_c(t) \end{aligned}$$

7.25. (a) **Answer:** Only the bilinear transform design will guarantee that a minimum phase discrete-time filter is created from a minimum phase continuous-time filter. For the following explanations remember that a discrete-time minimum phase system has all its poles and zeros inside the unit circle.

Impulse Invariance: Impulse invariance maps left-half s-plane poles to the interior of the z-plane unit circle. However, left-half s-plane zeros will *not necessarily* be mapped inside the z-plane unit circle. Consider:

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k} = \frac{\sum_{k=1}^{N} A_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} (s - s_j)}{\prod_{\ell=1}^{N} (s - s_\ell)}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{T_d A_k}{1 - e^{s_k T_d} z^{-1}} = \frac{\sum_{k=1}^{N} T_d A_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} (1 - e^{s_j T_d} z^{-1})}{\prod_{\ell=1}^{N} (1 - e^{s_\ell T_d} z^{-1})}$$

If we define $\text{Poly}_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} (1 - e^{s_j T_d} z^{-1})$, we can note that all the roots of $\text{Poly}_k(z)$ are inside the unit circle. Since the numerator of $H(z)$ is a sum of $A_k \text{Poly}_k(z)$ terms, we see that there are *no guarantees* that the roots of the numerator polynomial are inside the unit circle. In other words, the sum of minimum phase filters is not necessarily minimum phase. By considering the specific example of

$$H_c(s) = \frac{s + 10}{(s + 1)(s + 2)},$$

and using $T = 1$, we can show that a minimum phase filter is transformed into a non-minimum phase discrete time filter.

Bilinear Transform: The bilinear transform maps a pole or zero at $s = s_0$ to a pole or zero (respectively) at $z_0 = \frac{1 + \frac{T}{2} s_0}{1 - \frac{T}{2} s_0}$. Thus,

$$|z_0| = \left| \frac{1 + \frac{T}{2} s_0}{1 - \frac{T}{2} s_0} \right|$$

Since $H_c(s)$ is minimum phase, all the poles of $H_c(s)$ are located in the left half of the s-plane. Therefore, a pole $s_0 = \sigma + j\Omega$ must have $\sigma < 0$. Using the relation for s_0, we get

$$|z_0| = \sqrt{\frac{(1 + \frac{T}{2}\sigma)^2 + (\frac{T}{2}\Omega)^2}{(1 - \frac{T}{2}\sigma)^2 + (\frac{T}{2}\Omega)^2}} < 1$$

Thus, all poles and zeros will be inside the z-plane unit circle and the discrete-time filter will be minimum phase as well.

(b) **Answer:** Only the bilinear transform design will result in an allpass filter.

Impulse Invariance: In the impulse invariance design we have

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi k}{T_d}\right)\right)$$

The aliasing terms can destroy the allpass nature of the continuous-time filter.

Bilinear Transform: The bilinear transform only warps the frequency axis. The magnitude response is not affected. Therefore, an allpass filter will map to an allpass filter.

(c) **Answer:** Only the bilinear transform will guarantee

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

Impulse Invariance: Since impulse invariance may result in aliasing, we see that

$$H(e^{j0}) = H_c(j0)$$

if and only if

$$H(e^{j0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\frac{2\pi k}{T_d}\right) = H_c(j0)$$

or equivalently

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} H_c\left(j\frac{2\pi k}{T_d}\right) = 0$$

which is generally not the case.

Bilinear Transform: Since, under the bilinear transformation, $\Omega = 0$ maps to $\omega = 0$,

$$H(e^{j0}) = H_c(j0)$$

for all $H_c(s)$.

(d) **Answer:** Only the bilinear transform design is guaranteed to create a bandstop filter from a bandstop filter.
If $H_c(s)$ is a bandstop filter, the bilinear transform will preserve this because it just warps the frequency axis; however aliasing (in the impulse invariance technique) can fill in the stop band.

(e) **Answer:** The property holds under the bilinear transform, but not under impulse invariance.
Impulse Invariance: Impulse invariance may result in aliasing. Since the order of aliasing and multiplication are not interchangeable, the desired identity does not hold. Consider $H_{a_1}(s) = H_{a_2}(s) = e^{-sT/2}$.
Bilinear Transform: By the bilinear transform,

$$\begin{aligned} H(z) &= H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) \\ &\equiv H_{c_1}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) H_{c_2}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) \\ &= H_1(z)H_2(z) \end{aligned}$$

(f) **Answer:** The property holds for both impulse invariance and the bilinear transform.
Impulse Invariance:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi}{T_d}k\right)\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c1}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi}{T_d}k\right)\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c2}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi}{T_d}k\right)\right) \\ &= H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Bilinear Transform:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_c\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) \\ &= H_{c_1}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) + H_{c_2}\left(\frac{2}{T_d}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\right) \\ &= H_1(z) + H_2(z) \end{aligned}$$

(g) **Answer:** Only the bilinear transform will result in the desired relationship.

Impulse Invariance: By impulse invariance,

$$\begin{aligned} H_1\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c_1}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) \\ H_2\left(e^{j\omega}\right) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{c_2}\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi k}{T_d}\right)\right) \end{aligned}$$

We can clearly see that due to the aliasing, the phase relationship is not guaranteed to be maintained.

Bilinear Transform: By the bilinear transform,

$$\begin{aligned} H_1(e^{j\omega}) &= H_{c_1}\left(j\frac{2}{T_d}\tan(\omega/2)\right) \\ H_2(e^{j\omega}) &= H_{c_2}\left(j\frac{2}{T_d}\tan(\omega/2)\right) \end{aligned}$$

therefore,

$$\frac{H_1(e^{j\omega})}{H_2(e^{j\omega})} = \frac{H_{c_1}\left(j\frac{2}{T_d}\tan(\omega/2)\right)}{H_{c_2}\left(j\frac{2}{T_d}\tan(\omega/2)\right)} = \begin{cases} e^{-j\pi/2}, & 0 < \omega < \pi \\ e^{j\pi/2}, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

7.26. (a) Since

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi k}{T_d}\right)\right)$$

and we desire

$$H(e^{j\omega})\,|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)\,|_{\Omega=0},$$

we see that

$$H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi k}{T_d}\right)\right)|_{\omega=0} = H_c(j\Omega)|_{\Omega=0}$$

requires

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} H_c\left(j\frac{2\pi k}{T_d}\right) = 0.$$

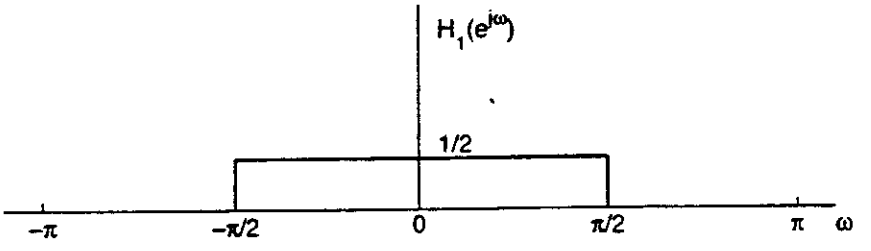
(b) Since the bilinear transform maps $\Omega = 0$ to $\omega = 0$, the condition will hold for any choice of $H_c(j\Omega)$.

7.27.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

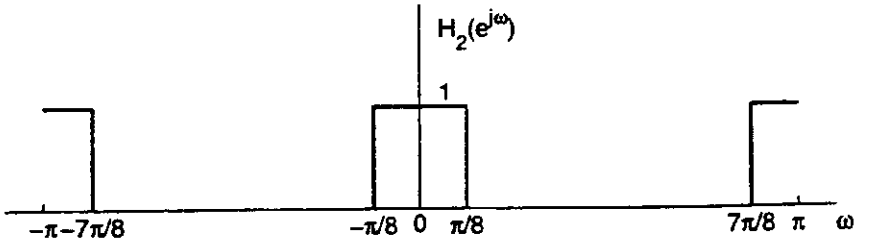
(a)

$$\begin{aligned} h_1[n] &= h[2n] \\ H_1(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[2n]e^{j\omega n} \\ &= \sum_{n \text{ even}} h[n]e^{\frac{j\omega n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[h[n] + (-1)^n h[n]\right] e^{j\frac{\omega n}{2}} \\ &= \frac{1}{2}H(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}H\left(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}\right) \end{aligned}$$



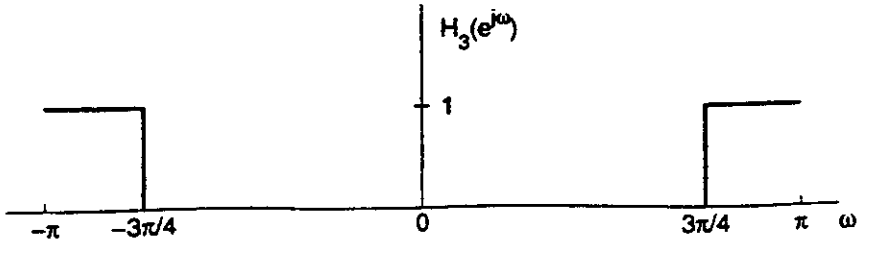
(b)

$$\begin{aligned} H_2(e^{j\omega}) &= \sum_{n \text{ even}} h[n/2]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega 2n} \\ &= H\left(e^{j2\omega}\right) \end{aligned}$$



(c)

$$H_3(e^{j\omega}) = H\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)$$



7.28. (a) We have

$$\begin{aligned} s &= \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \\ j\Omega &= \frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}} \\ \Omega &= \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_{p_1}}{2}\right) \longleftrightarrow \omega_{p_1} = 2\tan^{-1}(\Omega_p)$$

(b)

$$\begin{aligned} s &= \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \\ j\Omega &= \frac{1+e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}} \\ \Omega &= -\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \tan\left(\frac{\omega-\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_{p_2}-\pi}{2}\right) \longleftrightarrow \omega_{p_2} = \pi + 2\tan^{-1}(\Omega_p)$$

(c)

$$\tan\left(\frac{\omega_{p_2}-\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\omega_{p_1}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_{p_2} = \omega_{p_1} + \pi$$

(d)

$$H_2(z) = H_1(z)|_{z=-z}$$

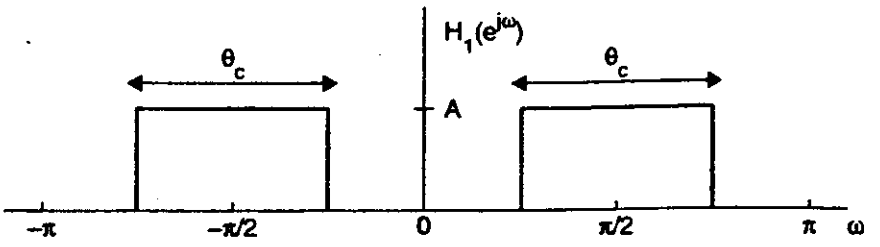
The even powers of z do not get changed by this transformation, while the coefficients of the odd powers of z change sign.
Thus, replace $A, C, 2$ with $-A, -C, -2$.

7.29. (a) Substituting $Z = e^{j\theta}$ and $z = e^{j\omega}$ we get,

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= -e^{j2\omega} \\ &= e^{j(2\omega+\pi)} \end{aligned}$$

$$\theta = 2\omega + \pi \longleftrightarrow \omega = \frac{\theta-\pi}{2}$$

(b)



(c)

$$h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\theta})$$
$$h_1[n] \longleftrightarrow H\left(e^{j(2\omega+\pi)}\right)$$

In the frequency domain, we first shift by π and then we upsample by 2. In the time domain, we can write that as

$$h_1[n] = \begin{cases} (-1)^{n/2}h[n/2], & \text{for } n \text{ even} \\ 0, & \text{for } n \text{ odd} \end{cases}$$

(d) In general, a filter

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{M-1} z^{M-1} + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{N-1} z^{N-1} + a_N z^{-N}}$$

will transform under $H_1(z) = H(-z^2)$ to

$$H_1(z) = \frac{b_0 - b_1 z^{-2} + b_2 z^{-4} + \cdots - b_{M-1} z^{2M-2} + b_M z^{-2M}}{a_0 - a_1 z^{-2} + a_2 z^{-4} + \cdots - a_{M-1} z^{2N-2} + a_N z^{-2N}}$$

where we are assuming here that M and N are even. All the delay terms increase by a factor of two, and the sign of the coefficient in front of any odd delay term is negated.
The given difference equations therefore become

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] + a_1 g[n-2] - b_1 f[n-4] \\ f[n] &= -a_2 g[n-2] - b_2 f[n-2] \\ y[n] &= c_1 f[n] + c_2 g[n-2] \end{aligned}$$

To avoid any possible confusion please note that the b_k and a_k in these difference equations are not the same b_k and a_k shown above for the general case.

7.30. We are given

$$H(z) = H_c(s)\,|_{s=\beta\left[\frac{1-z^{-\alpha}}{1+z^{-\alpha}}\right]}$$

where α is a nonzero integer and β is a real number.

(a) *It is true for $\beta > 0$.*
Proof:

$$\begin{aligned} s &= \beta\left[\frac{1-z^{-\alpha}}{1+z^{-\alpha}}\right] \\ s + sz^{-\alpha} &= \beta - \beta z^{-\alpha} \\ s - \beta &= -\beta z^{-\alpha} - sz^{-\alpha} \\ \beta - s &= z^{-\alpha}(\beta + s) \\ z^{-\alpha} &= \frac{\beta - s}{\beta + s} \\ z^{\alpha} &= \frac{\beta + s}{\beta - s} \end{aligned}$$

The poles s_k of a stable, causal, continuous-time filter satisfy the condition $\mathcal{R}e\{s\} < 0$. We want these poles to map to the points z_k in the z-plane such that $|z_k| < 1$. With $\alpha > 0$ it is also true that if $|z_k| < 1$ then $|z_k^\alpha| < 1$. Letting $s_k = \sigma + j\omega$ we see that

$$\begin{aligned} |z_k| &< 1 \\ |z_k^\alpha| &< 1 \\ |\beta + \sigma + j\Omega| &< |\beta - \sigma - j\Omega| \\ (\beta+\sigma)^2 + \Omega^2 &< (\beta-\sigma)^2 + \Omega^2 \\ 2\sigma\beta &< -2\sigma\beta \end{aligned}$$

But since the continuous-time filter is stable we have $\mathcal{R}e\{s_k\} < 0$ or $\sigma < 0$. That leads to

$$-\beta < \beta$$

This can only be true if $\beta > 0$.

(b) *It is true for* $\beta < 0$. The proof is similar to the last proof except now we have $|z^\alpha| > 1$.

(c) We have

$$\begin{aligned} z^2 &= \left.\frac{1+s}{1-s}\right|_{s=j\Omega} \\ |z^2| &= 1 \\ |z| &= 1 \end{aligned}$$

Hence, the $j\Omega$ axis of the s-plane is mapped to the unit circle of z-plane.

(d) First, find the mapping between Ω and ω.

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{1-e^{-j2\omega}}{1+e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{e^{j\omega}+e^{-j\omega}} \\ \Omega &= \tan(\omega) \\ \omega &= \tan^{-1}(\Omega) \end{aligned}$$

Therefore,

$$1-\delta_1 \le |H(e^{j\omega})| \le 1+\delta_1, \qquad \left\{|\omega| \le \frac{\pi}{4}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} < |\omega| < \pi\right\}$$

Note that the highpass region $3\pi/4 \le |w| \le \pi$ is included because $\tan(\omega)$ is periodic with period π.

7.31. (a)

$$s = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \longleftrightarrow z = \frac{s+1}{s-1}$$

Now, we evaluate the above expressions along the $j\Omega$ axis of the s-plane

$$\begin{aligned} z &= \frac{j\Omega+1}{j\Omega-1} \\ |z| &= 1 \end{aligned}$$

(b) We want to show $|z| < 1$ if $\mathcal{R}e\{s\} < 0$.

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sigma + j\Omega + 1}{\sigma + j\Omega - 1} \\ |z| &= \frac{\sqrt{(\sigma+1)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(\sigma-1)^2 + \Omega^2}} \end{aligned}$$

Therefore, if $|z| < 1$

$$\begin{aligned} (\sigma+1)^2 + \Omega^2 &< (\sigma-1)^2 + \Omega^2 \\ \sigma &< -\sigma \end{aligned}$$

it must also be true that $\sigma < 0$. We have just shown that the left-half s-plane maps to the interior of the z-plane unit circle. Thus, any pole of $H_c(s)$ inside the left-half s-plane will get mapped to a pole inside the z-plane unit circle.

(c) We have the relationship

$$\begin{aligned} j\Omega &= \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\ \Omega &= -\cot(\omega/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Omega_s| &= |\cot(\pi/6)| = \sqrt{3} \\ |\Omega_{p_1}| &= |\cot(\pi/2)| = 0 \\ |\Omega_{p_2}| &= |\cot(\pi/4)| = 1 \end{aligned}$$

Therefore, the constraints are

$$\begin{aligned} 0.95 \le |H_c(j\Omega)| \le 1.05, &\qquad 0 \le |\Omega| \le 1 \\ |H_c(j\Omega)| \le 0.01, &\qquad \sqrt{3} \le |\Omega| \end{aligned}$$

7.32. (a) By using Parseval's theorem,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2 \end{aligned}$$

where

$$e[n] = \begin{cases} h_d[n], & n < 0, \\ h_d[n] - h[n], & 0 \le n \le M, \\ h_d[n], & n > M \end{cases}$$

(b) Since we only have control over $e[n]$ for $0 \le m \le M$, we get that ϵ^2 is minimized if $h[n] = h_d[n]$ for $0 \le n \le M$.

(c)

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

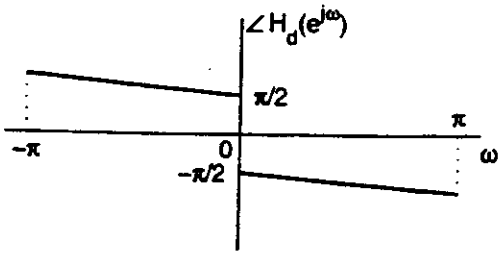
which is a rectangular window.

7.33. (a)

$$H_d(e^{j\omega}) = [1 - 2u(\omega)]e^{j(\pi/2 - \tau\omega)} \quad \text{for } -\pi < \omega < \pi$$

$$|H_d(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall\omega$$

$$\angle H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tau\omega, & -\pi < \omega < 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \tau\omega, & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$



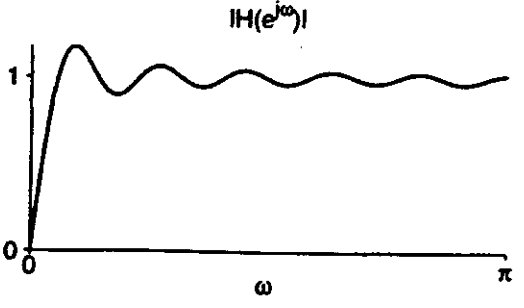
(b) A Hilbert transformer of this nature requires the filter to have a zero at $z = 0$ which introduces the 180^o phase difference at that point. A zero at $z = 0$ means that the sum of the filter coefficients equals zero. Thus, only Types III and IV fulfill the requirements.

(c)

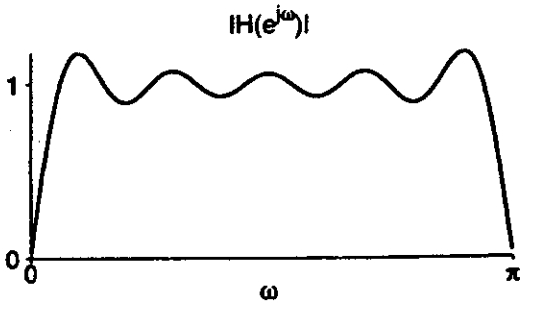
$$\begin{aligned} H_d(e^{j\omega}) &= [1 - 2u(\omega)]e^{j(\pi/2 - \omega\tau)} \\ h_d[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j(\pi/2-\omega\tau)}e^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{j(\pi/2-\omega\tau)}e^{j\omega n}d\omega \\ &= \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega - \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{1-\cos[\pi(n-\tau)]}{\pi(n-\tau)}, & n \neq \tau \\ 0, & n = \tau \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2[\pi(n-\tau)/2]}{(n-\tau)}, & n \neq \tau \\ 0, & n = \tau \end{cases} \end{aligned}$$

For the windowed FIR system to be linear phase it must be antisymmetric about $\frac{M}{2}$. Since the ideal Hilbert transformer $h_d[n]$ is symmetric about $n = \tau$ we should choose $\tau = \frac{M}{2}$.

(d) The delay is $M/2 = 21/2 = 10.5$ samples. It is therefore a Type IV system. Notice the mandatory zero at $\omega = 0$.



(e) The delay is $M/2 = 20/2 = 10$ samples. It is therefore a Type III system. Notice the mandatory zeros at $\omega = 0$ and π.



7.34. (a) It is well known that convolving two rectangular windows results in a triangular window. Specifically, to get the $(M+1)$ point Bartlett window for M even, we can convolve the following rectangular windows.

$$r_1[n] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{M}}, & n = 0, \ldots, \frac{M}{2} - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$r_2[n] = r_1[n-1]$$

Using the known transform of a rectangular window we have

$$W_{R_1}(e^{j\omega}) = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{M}{4} - \frac{1}{2})}$$

$$W_{R_2}(e^{j\omega}) = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{M}{4} + \frac{1}{2})}$$

$$W_B(e^{j\omega}) = W_{R_1}(e^{j\omega}) W_{R_2}(e^{j\omega})$$

$$= \frac{2}{M} \left(\frac{\sin(\omega M/4)}{\sin(\omega/2)} \right)^2 e^{-j\omega M/2}$$

Note: The Bartlett window as defined in the text is zero at $n = 0$ and $n = M$. These points are included in the $M + 1$ points.

For M odd, the Bartlett window is the convolution of

$$r_3[n] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{M}}, & n = 0, \ldots, \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$r_4[n] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{M}}, & n = 1, \ldots, \frac{M-1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

In the frequency domain we have

$$W_{R_3}(e^{j\omega}) = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{\sin(\omega(M+1)/4)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{M-1}{4})}$$

$$W_{R_4}(e^{j\omega}) = \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{\sin(\omega(M-1)/4)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(\frac{M-3}{4} + 1)}$$

$$W_B(e^{j\omega}) = W_{R_3}(e^{j\omega}) W_{R_4}(e^{j\omega})$$

$$= \frac{2}{M} \left(\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \right) \left(\frac{\sin[\omega(M-1)/2]}{\sin(\omega/2)} \right) e^{-j\omega M/2}$$

(b)

$$w[n] = \left[A + B\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + C\cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right)\right] w_R[n]$$

$$\begin{aligned} W(e^{j\omega}) &= \left\{2\pi A\delta(\omega) + B\pi\left[\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)\right] + C\pi\left[\delta\left(\omega + \frac{4\pi}{M}\right) + \delta\left(\omega - \frac{4\pi}{M}\right)\right]\right\} \\ &\quad \frac{\otimes}{2\pi}\left\{\frac{\sin(\omega(M+1)/2))}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}\right\} \end{aligned}$$

where $\otimes$ denotes periodic convolution.

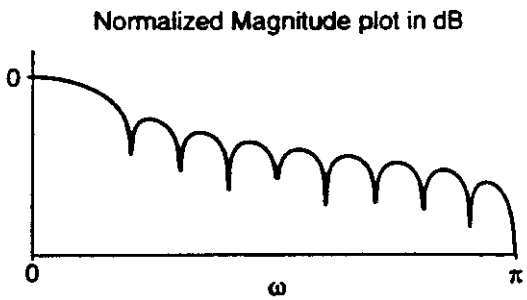
(c) For the Hanning window $A = 0.5$, $B = -0.5$, and $C = 0$.

$$\begin{aligned} w_{\text{Hanning}}[n] &= \left[0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right] w_r[n] \\ W_{\text{Hanning}}(e^{j\omega}) &= 0.5W_R(e^{j\omega}) - 0.25W_R(e^{j\omega}) \otimes \left[\delta\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right) + \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)\right] \\ &= 0.5W_R(e^{j\omega}) - 0.25\left[W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{M})}) + W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{M})})\right] \end{aligned}$$

where

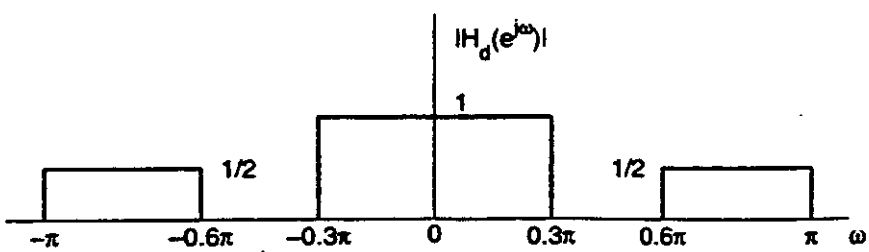
$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega(M+1)/2))}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$$

Below is a normalized sketch of the magnitude response in dB.



7.35. (a) The delay is $\frac{M}{2} = 24$.

(b)



This can be viewed as the sum of two lowpass filters, one of which has been shifted in frequency (modulation in time-domain) to $\omega = \pi$. The linear phase factor adds a delay.

$$h_d[n] = \frac{\sin(0.3\pi(n-24))}{\pi(n-24)} + \frac{1}{2}(-1)^{(n-24)}\frac{\sin(0.4\pi(n-24))}{\pi(n-24)}$$

(c) To find the ripple values, which are all the same in this case since it is a Kaiser window design, we first need to determine A. Since we know β and A are related by

$$\beta = 3.68 = \begin{cases} 0.1102(A-8.7), & A > 50 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 \le A \le 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

we can solve for A in the following manner:

1. We know $\beta = 3.68$. Therefore, from the formulas above, we see that $A \ge 21$.
2. If we assume $A > 50$ we find,

$$\begin{aligned} 3.68 &= 0.1102(A-8.7) \\ A &= 42.1 \end{aligned}$$

But, this contradicts our assumption that $A > 50$. Thus, $21 \le A \le 50$.

3. With $21 \le A \le 50$ we find,

$$\begin{aligned} 3.68 &= 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) \\ A &= 42.4256 \end{aligned}$$

With A, we can now calculate δ.

$$\begin{aligned} \delta &= 10^{-A/20} \\ &= 10^{-42.4256/20} \\ &= 0.0076 \end{aligned}$$

The discontinuity of 1 in the first passband creates a ripple of δ. The discontinuity of $1/2$ in the second passband creates a ripple of $\delta/2$. The total ripple is $3\delta/2 = 0.0114$ and we therefore have

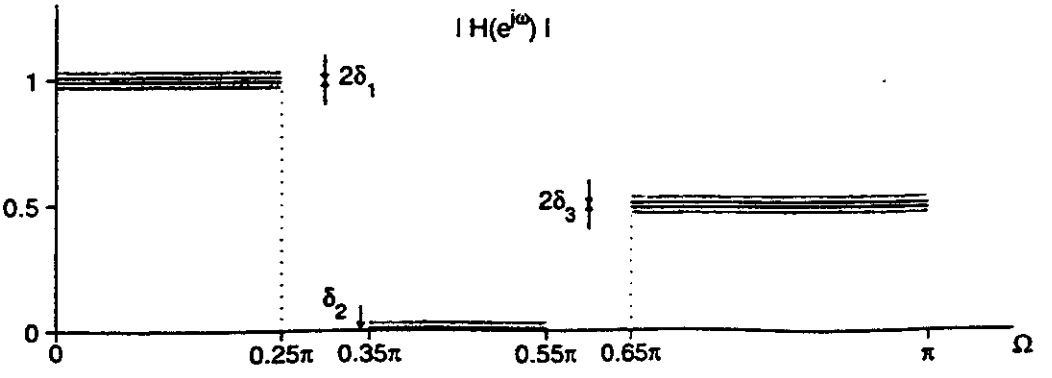
$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.0114$$

Now using the relationship between M, A, and $\Delta\omega$

$$\begin{aligned} M &= \frac{A-8}{2.285\Delta\omega} \\ \Delta\omega &= \frac{42.4256-8}{2.285(48)} = 0.3139 \approx 0.1\pi \end{aligned}$$

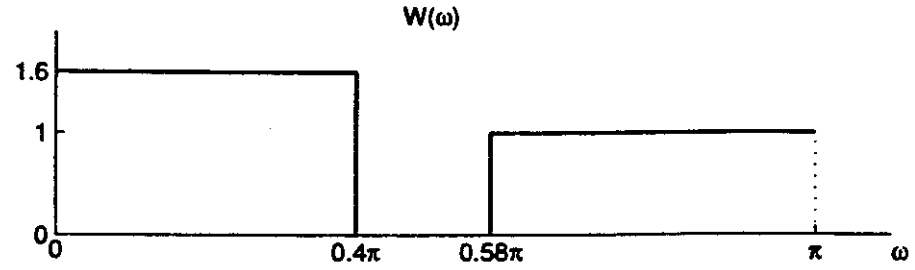
Putting it all together with the information about $H_d(e^{j\omega})$ we arrive at our final answer.

$$\begin{aligned} 0.9886 \le |H(e^{j\omega})| \le 1.0114, &\quad 0 \le \omega \le 0.25\pi \\ |H(e^{j\omega})| \le 0.0114, &\quad 0.35\pi \le \omega \le 0.55\pi \\ 0.4886 \le |H(e^{j\omega})| \le 0.5114, &\quad 0.65\pi \le \omega \le \pi \end{aligned}$$

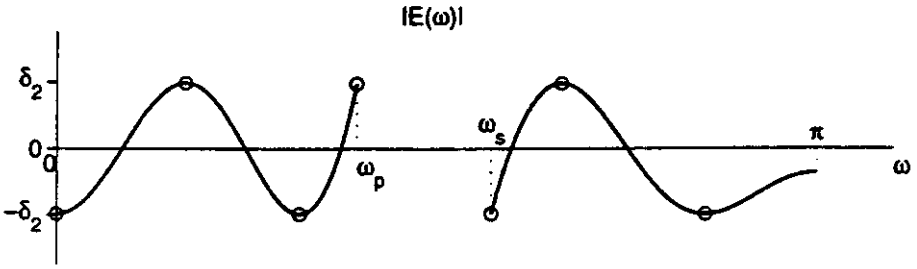


7.36. (a) Since $H(e^{j0}) \neq 0$ and $H(e^{j\pi}) \neq 0$, this must be a Type I filter.

(b) With the weighting in the stopband equal to 1, the weighting in the passband is $\frac{\delta_2}{\delta_1}$.



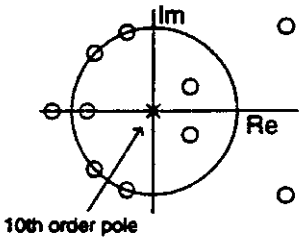
(c)



(d) An optimal (in the Parks-McClellan sense) Type I lowpass filter can have either $L+2$ or $L+3$ alternations. The second case is true only when an alternation occurs at all band edges. Since this filter does not have an alternation at $\omega = \pi$ it should only have $L+2$ alternations. From the figure, we see that there are 7 alternations so $L = 5$. Thus, the filter length is $2L + 1 = 11$ samples long.

(e) Since the filter is 11 samples long, it has a delay of 5 samples.

(f) Note the zeroes off the unit circle are implied by the dips in the frequency response at the indicated frequencies.



7.37. (a) The most straightforward way to find $h_d[n]$ is to recognize that $H_d(e^{j\omega})$ is simply the (periodic) convolution of two ideal lowpass filters with cutoff frequency $\omega_c = \pi/4$. That is,

$$H_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{lpf}(e^{j\theta})H_{lpf}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

where

$$H_{lpf}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Therefore, in the time domain, $h_d[n]$ is $(h_{lpf}[n])^2$, or

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \left(\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2(\pi n/4)}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

(b) $h[n]$ must have even symmetry around $(N-1)/2$. $h[n]$ is a type-I FIR generalized linear phase system, since N is an odd integer, and $H(e^{j\omega}) \neq 0$ for $\omega = 0$. Type-I FIR generalized linear phase systems have even symmetry around $(N-1)/2$.

(c) Shifting the filter $h_d[n]$ by $(N-1)/2$ and applying a rectangular window will result in a causal $h[n]$ that minimizes the integral squared error ϵ. Consequently,

$$h[n] = \frac{\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(n - \frac{N-1}{2})\right]}{\pi^2(n - \frac{N-1}{2})^2} w[n]$$

where

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(d) The integral squared error ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|A(e^{j\omega}) - H_d(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

can be reformulated, using Parseval's theorem, to

$$\epsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} |a[n] - h_d[n]|^2$$

Since

$$a[n] = \begin{cases} h_d[n], & -\frac{N-1}{2} \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{-\infty}^{-(N-1)/2-1} |a[n] - h_d[n]|^2 + \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} |a[n] - h_d[n]|^2 + \sum_{(N-1)/2+1}^{\infty} |a[n] - h_d[n]|^2 \\ &= \sum_{-\infty}^{-(N-1)/2-1} |h_d[n]|^2 + 0 + \sum_{(N-1)/2+1}^{\infty} |h_d[n]|^2 \end{aligned}$$

By symmetry,

$$\epsilon = 2\sum_{(N-1)/2+1}^{\infty} |h_d[n]|^2$$

7.38. (a) A Type-I lowpass filter that is optimal in the Parks-McClellan can have either $L+2$ or $L+3$ alternations. The second case is true only when an alternation occurs at all band edges. Since this filter does not have an alternation at $\omega = 0$ it only has $L+2$ alternations. From the figure we see there are 9 alternations so $L = 7$. Thus, $M = 2L = 2(7) = 14$.

(b) We have

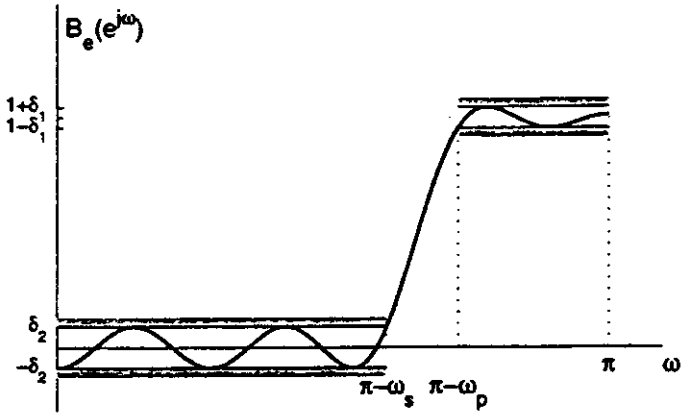
$$\begin{aligned} h_{HP}[n] &= -e^{j\pi n}h_{LP}[n] \\ H_{HP}(e^{j\omega}) &= -H_{LP}(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &= -A_e(e^{j(\omega-\pi)})e^{-j(\omega-\pi)\frac{M}{2}} \\ &= A_e(e^{j(\omega-\pi)})e^{-j\omega\frac{M}{2}} \\ &= B_e(e^{j\omega})e^{-j\omega\frac{M}{2}} \end{aligned}$$

where

$$B_e(e^{j\omega}) = A_e(e^{j(\omega-\pi)})$$

The fact that $M = 14$ is used to simplify the exponential term in the third line above.

(c)



(d) *The assertion is correct.* The original amplitude function was optimal in the Parks-McClellan sense. The method used to create the new filter did not change the filter length, transition width, or relative ripple sizes. All it did was slide the frequency response along the frequency axis creating a new error function $E'(\omega) = E(\omega - \pi)$. Since translation does not change the Chebyshev error ($\max|E(\omega)|$) the new filter is still optimal.

7.39. For this filter, $N = 3$, so the polynomial order L is

$$L = \frac{N-1}{2} = 1$$

Note that $h[n]$ must be a type-I FIR generalized linear phase filter, since it consists of three samples, and $H(e^{j\omega}) \neq 0$ for $\omega = 0$. $h[n]$ can therefore be written in the form

$$h[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1] + a\delta[n-2]$$

Taking the DTFT of both sides gives

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= a + be^{-j\omega} + ae^{-j2\omega} \\ &= e^{-j\omega}(ae^{j\omega} + b + ae^{-j\omega}) \\ &= e^{-j\omega}(b + 2a\cos w) \\ A(e^{j\omega}) &= b + 2a\cos w \end{aligned}$$

The filter must have at least $L+2=3$ alternations, but no more than $L+3=4$ alternations to satisfy the alternation theorem, and therefore be optimal in the minimax sense. Four alternations can be obtained if all four band edges are alternation frequencies such that the frequency response overshoots at $\omega=0$, undershoots at $\omega=\frac{\pi}{3}$, overshoots at $\omega=\frac{\pi}{2}$, and undershoots at $\omega=\pi$.

Let the error in the passband and the stopband be δ_p and δ_s. Then,

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega})\,|_{\omega=0} &= 1+\delta_p \\ A(e^{j\omega})\,|_{\omega=\pi/3} &= 1-\delta_p \\ A(e^{j\omega})\,|_{\omega=\pi/2} &= \delta_s \\ A(e^{j\omega})\,|_{\omega=\pi} &= -\delta_s \end{aligned}$$

Using $A(e^{j\omega})=b+2a\cos w$,

$$\begin{aligned} A(e^{j\omega})\,|_{\omega=0} &= b+2a \\ A(e^{j\omega})\,|_{\omega=\pi/3} &= b+a \\ A(e^{j\omega})\,|_{\omega=\pi/2} &= b \\ A(e^{j\omega})\,|_{\omega=\pi} &= b-2a \end{aligned}$$

Solving these systems of equations for a and b gives

$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{5} \\ b &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Thus, the optimal (in the minimax sense) causal 3-point lowpass filter with the desired passband and stopband edge frequencies is

$$h[n]=\frac{2}{5}\delta[n]+\frac{2}{5}\delta[n-1]+\frac{2}{5}\delta[n-2]$$

7.40. *True.* Since filter C is a stable IIR filter it has poles in the left half plane. The bilinear transform maps the left half plane to the inside of the unit circle. Thus, the discrete filter B has to have poles and is therefore an IIR filter.

7.41. *No.* The resulting discrete-time filter would not have a constant group delay. The bilinear transformation maps the entire $j\Omega$ axis in the s-plane to one revolution of the unit circle in the z-plane. Consequently, the linear phase of the continuous-time filter will get nonlinearly warped via the bilinar transform, resulting in a nonlinear phase for the discrete-time filter. Thus, the group delay of the discrete-time filter will not be a constant.

7.42. (a) Using the fact that $H_c(s)=\frac{Y_c(s)}{X_c(s)}$ and cross multiplying we get

$$\begin{aligned} H_c(s)=\frac{Y_c(s)}{X_c(s)} &= \frac{A}{s+c} \\ (s+c)Y_c(s) &= AX_c(s) \\ \frac{dy_c(t)}{dt}+cy_c(t) &= Ax_c(t) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy_c(t)}{dt}\right|_{t=nT} &= [Ax_c(t)-cy_c(t)]\,|_{t=nT} \\ &= Ax_c(nT)-cy_c(nT) \\ \frac{y_c(nT)-y_c(nT-T)}{T} &\approx Ax_c(nT)-cy_c(nT) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{y[n]-y[n-1]}{T} &= Ax[n]-cy[n] \\
Ax[n] &= \left(c+\frac{1}{T}\right)y[n]-\frac{1}{T}y[n-1] \\
AX(z) &= \left(c+\frac{1}{T}\right)Y(z)-\frac{1}{T}Y(z)z^{-1} \\
H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{A}{c+\frac{1}{T}-\frac{1}{T}z^{-1}}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
H_c(s)\,|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} &= \left.\frac{A}{s+c}\right|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} \\
&= \frac{A}{\frac{1-z^{-1}}{T}+c} \\
&= H(z)
\end{aligned}$$

(e) First solve for z

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1-z^{-1}}{T} \\
z &= \frac{1}{1-sT}
\end{aligned}$$

and then substitute $s=\sigma+j\Omega$ to get

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{1-(\sigma+j\Omega)T} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma)^2+(\Omega T)^2}}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{1-\sigma}\right)}
\end{aligned}$$

If we let $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{1-\sigma}\right)$ we see that

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{(1-\sigma)^2+(\Omega T)^2}} &= \frac{\cos(\theta)}{1-\sigma} \\
&= \frac{1}{2(1-\sigma)}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)
\end{aligned}$$

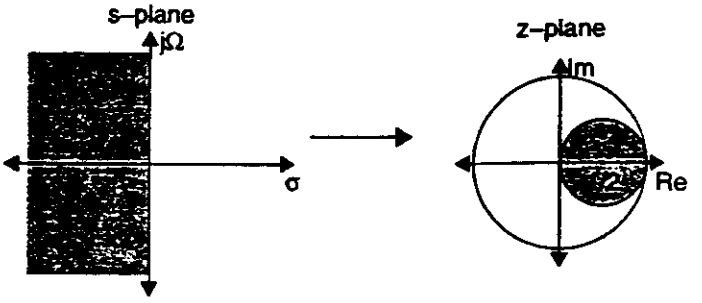
and thus the s-plane maps to the z-plane in the following manner

$$\begin{aligned}
z &= \left[\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)\right]e^{j\theta} \\
&= \frac{1}{2(1-\sigma)}+\frac{1}{2(1-\sigma)}e^{j2\theta} \\
&= \frac{1}{2(1-\sigma)}+\frac{1}{2(1-\sigma)}e^{j2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{1-\sigma}\right)}
\end{aligned}$$

To find where the $j\Omega$ axis of the s-plane maps, we let $s=j\Omega$, i.e., $\sigma=0$ and find

$$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{j2\tan^{-1}(\Omega T)}$$

Therefore, the $j\Omega$-axis maps to a circle of radius 1/2 that is centered at 1/2 in the z-plane. We also see that the region $\sigma < 0$, i.e., the left half of the s-plane, maps to the interior of this circle.



If the continuous-time system is stable, its poles are in the left half s-plane. As shown above, these poles map to the interior of the unit circle and so the discrete-time system will also be stable. The stability is independent of T.

Since the $j\Omega$-axis does not map to the unit circle, the discrete-time frequency response will not be a faithful reproduction of the continuous-time frequency response. As T gets smaller, i.e., as we oversample more, a larger portion of the $j\Omega$-axis gets mapped to the region close to the unit circle at $\omega = 0$. Although the frequency range becomes more compressed the shape of the two responses will look more similar. Thus, as T decreases we improve our approximation.

(f) Substituting for the first derivative in the differential equation obtained in part (a) we get

$$\begin{aligned} \frac{y_c(nT+T) - y_c(nT)}{T} + cy_c(nT) &= Ax_c(nT) \\ \frac{y[n+1] - y[n]}{T} + cy[n] &= Ax[n] \end{aligned}$$

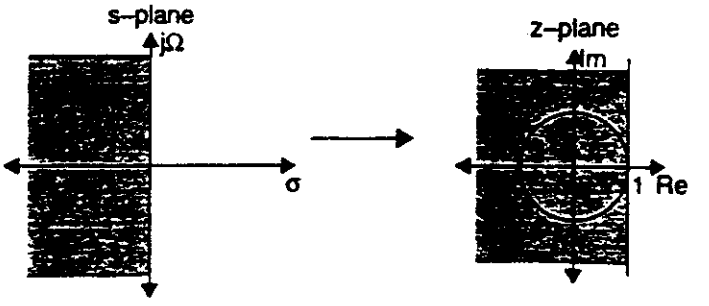
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A}{\frac{z-1}{T} + c} = H_c(s)\,|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{z-1}{T} \\ z &= 1 + sT \\ &= 1 + \sigma + j\Omega T \end{aligned}$$

To find where the $j\Omega$ axis of the s-plane maps, we let $s = j\Omega$, i.e., $\sigma = 0$ and find

$$z = 1 + j\Omega T$$

Therefore, the $j\Omega$-axis lies on the line $\mathcal{R}e\{z\} = 1$. We also see that the region $\sigma < 0$, i.e., the left half of the s=plane, maps to the left of this line.



If the continuous-time system is stable, its poles are in the left half s-plane. As shown above, these poles can map to a point outside the unit circle and so the discrete-time system will not necessarily be stable. There are cases where varying T can turn an unstable system into a stable system, but it is not true for the general case.

Since the $j\Omega$-axis does not map to the unit circle, the discrete-time frequency response will not be a faithful reproduction of the continuous-time frequency response. However, as T gets smaller our approximation gets better for the same reasons outlined for the first backward difference.

7.43. (a) Just doing the integration reveals

$$\int_{nT-T}^{nT} \dot{y}_c(\tau)d\tau + y_c(nT-T) = y_c(\tau)|_{nT-T}^{nT} + y_c(nT-T) = y_c(nT)$$

Using the area in the trapezoidal region to replace the integral above, we get

$$\begin{aligned} y_c(nT) &= \int_{nT-T}^{nT} \dot{y}_c(\tau)d\tau + y_c(nT-T) \\ &\approx \left[\dot{y}_c(nT) + \dot{y}_c(nT-T)\right]\frac{T}{2} + y_c(nT-T) \end{aligned}$$

(b) Solving for $\dot{y}_c(nT)$ in the differential equation we get

$$\dot{y}_c(nT) = Ax_c(nT) - cy_c(nT)$$

Substituting this into the answer from part (a) yields

$$y_c(nT) = [Ax_c(nT) - cy_c(nT) + Ax_c(nT-T) - cy_c(nT-T)]\frac{T}{2} + y_c(nT-T)$$

(c) The difference equation is

$$y[n] = (Ax[n] - cy[n] + Ax[n-1] - cy[n-1])\frac{T}{2} + y[n-1]$$

$$y[n]\left(1 + c\frac{T}{2}\right) - y[n-1]\left(1 - c\frac{T}{2}\right) = A\frac{T}{2}(x[n] + x[n-1])$$

Therefore,

$$Y(z)\left[1 + c\frac{T}{2}\right] - Y(z)z^{-1}\left[1 - c\frac{T}{2}\right] = A\frac{T}{2}X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{A\frac{T}{2}(1+z^{-1})}{1 + c\frac{T}{2} - z^{-1} + z^{-1}c\frac{T}{2}}$$

(d)

$$\begin{aligned} H_c(s)\,|_{s=\frac{2}{T}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]} &= \left.\frac{A}{s+c}\right|_{s=\frac{2}{T}\left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right]} \\ &= \frac{\frac{T}{2}A(1+z^{-1})}{1 - z^{-1} + c\frac{T}{2}(1+z^{-1})} \\ &= H(z) \end{aligned}$$

7.44.

$$\begin{aligned} \Phi_c(j\Omega) &= H_c(j\Omega)H_c(-j\Omega) \\ \Phi(z) &= H(z)H(z^{-1}) \end{aligned}$$

(a) (i) Since $H_c(s)$ has poles at s_k, $H_c(-s)$ has poles at $-s_k$.

(ii) The material in this chapter shows that under impulse invariance

$$\frac{A_k}{s-s_k} \longleftrightarrow \frac{T_d A_k}{1-e^{s_k T_d} z^{-1}}.$$

Thus, going from step 1 to step 2 means that the autocorrelation of the discrete-time system is a sampled version of the autocorrelation of the continuous-time system.

(iii) Since $\Phi(z) = H(z)H(z^{-1})$ we can choose the poles and zeros of $H(z)$ to be all the poles inside the unit circle, and that choice leaves all the poles and zeros outside the unit circle for $H(z^{-1})$.

Consider the following example using $h_c(t) = e^{-\alpha t}u(t)$.

$$H_c(s) = \frac{1}{s+\alpha} \quad \text{and} \quad H_c(-s) = \frac{1}{-s+\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_c(s) &= H_c(s)H_c(-s) \\
&= \left[\frac{1}{s+\alpha}\right]\left[\frac{1}{-s+\alpha}\right] \\
&= \frac{1/2\alpha}{s+\alpha} - \frac{1/2\alpha}{s-\alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{T_d/2\alpha}{1-e^{-\alpha T_d}z^{-1}} - \frac{T_d/2\alpha}{1-e^{\alpha T_d}z^{-1}} \\
&= \frac{T_d}{2\alpha}\frac{\left[1-e^{\alpha T_d}z^{-1}-1+e^{-\alpha T_d}z^{-1}\right]}{(1-e^{-\alpha T_d}z^{-1})(1-e^{\alpha T_d}z^{-1})} \\
&= \frac{T_d}{2\alpha}\frac{\left(e^{-\alpha T_d}-e^{\alpha T_d}\right)z^{-1}}{(1-e^{-\alpha T_d}z^{-1})(1-e^{\alpha T_d}z^{-1})} \\
&= \frac{T_d}{2\alpha}\frac{\left(e^{\alpha T_d}-e^{-\alpha T_d}\right)z^{-1}}{(1-e^{-\alpha T_d}z^{-1})(1-e^{-\alpha T_d}z)e^{\alpha T_d}z^{-1}} \\
&= \frac{T_d}{2\alpha}\frac{(1-e^{-2\alpha T_d})}{(1-e^{-\alpha T_d}z^{-1})(1-e^{-\alpha T_d}z)} \\
&= \left[\sqrt{\frac{T_d}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha T_d})}\frac{1}{(1-e^{-\alpha T_d}z^{-1})}\right]\left[\sqrt{\frac{T_d}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha T_d})}\frac{1}{(1-e^{-\alpha T_d}z)}\right]
\end{aligned}$$

if $\alpha > 0$, then

$$h[n] = \sqrt{\frac{T_d}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha T_d})}\left(e^{-\alpha T_d}\right)^n u[n]$$

(b) Since $|H_c(j\Omega)|^2 = \Phi_c(j\Omega)$ and $\Phi(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$, we see that since $\phi[m] = T_d\phi_c(mT_d)$,

$$\Phi(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} + \frac{2\pi k}{T_d}\right)\right).$$

Therefore, if $\Phi_c(j\Omega) \simeq 0$ for $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T_d}$, then $\Phi(e^{j\omega}) \simeq \Phi_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right)$ and $|H(e^{j\omega})|^2 \simeq \left|H_c\left(j\frac{\omega}{T_d}\right)\right|^2$.

(c) *No.* We could always cascade $H(z)$ with an allpass filter. The new filter is different, but has the same autocorrelation.

7.45. (a) Since the two flow diagrams are equivalent we have

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{1-\alpha z}{z-\alpha}$$

$$Z = \frac{z-\alpha}{1-\alpha z}$$

$$H(z) = H_{lp}(Z)|_{Z=\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}} = H_{lp}\left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}\right)$$

(b) Let $Z = e^{j\theta}$ and $z = e^{j\omega}$. Then

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \\ e^{-j\theta} &= \frac{e^{-j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}} \\ e^{-j\theta} - \alpha e^{-j\theta}e^{-j\omega} &= e^{-j\omega} - \alpha \\ e^{-j\omega}(1+\alpha e^{-j\theta}) &= e^{-j\theta} + \alpha \\ e^{-j\omega} &= \frac{e^{-j\theta}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\theta}} \\ &= \frac{e^{-j\theta}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\theta}} \cdot \frac{1+\alpha e^{j\theta}}{1+\alpha e^{j\theta}} \\ &= \frac{e^{-j\theta}+2\alpha+\alpha^2 e^{j\theta}}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \end{aligned}$$

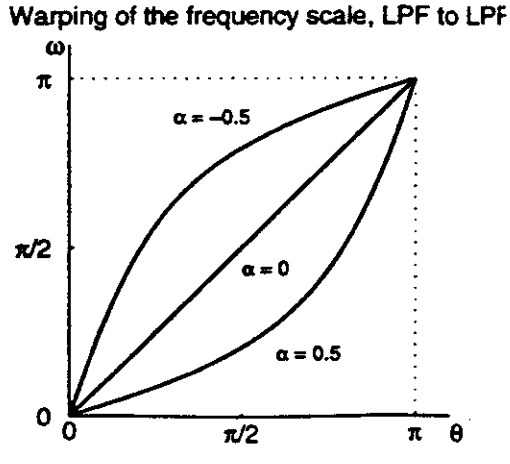
Using Euler's formula,

$$\begin{aligned} e^{-j\omega} &= \frac{\cos\theta - j\sin\theta + 2\alpha + \alpha^2\cos\theta + j\alpha^2\sin\theta}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha + (1+\alpha^2)\cos\theta + j[(\alpha^2-1)\sin\theta]}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \end{aligned}$$

Noting that $-\omega = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{\cdot\}}{Re\{\cdot\}}\right]$,

$$\begin{aligned} -\omega &= \tan^{-1}\left[\frac{(\alpha^2-1)\sin\theta}{2\alpha+(1+\alpha^2)\cos\theta}\right] \\ \omega &= \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha^2)\sin\theta}{2\alpha+(1+\alpha^2)\cos\theta}\right] \end{aligned}$$

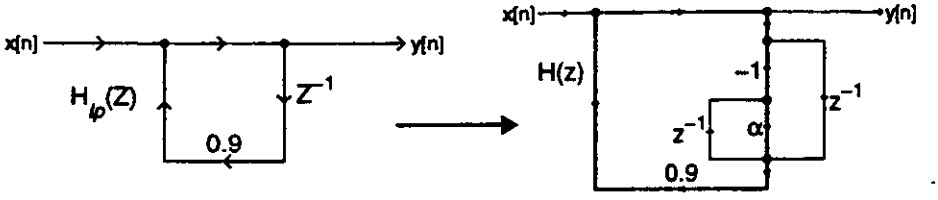
This relationship is plotted in the figure below for $\alpha = 0, \pm 0.5$.



Although a warping of the frequency scale is evident in the figure, (except when $\alpha = 0$, which corresponds to $Z^{-1} = z^{-1}$), if the original system has a piecewise-constant lowpass frequency response with cutoff frequency θ_p, then the transformed system will likewise have a similar lowpass response with cutoff frequency ω_p determined by the choice of α.

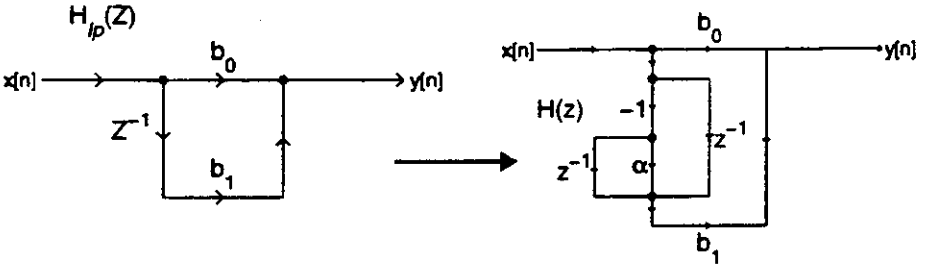
$$\omega_p = \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha^2)\sin(\theta_p)}{2\alpha + (1+\alpha^2)\cos(\theta_p)}\right]$$

(c)



Looking at the flow graph for $H(z)$ we see a feedback loop with no delay. This effectively makes the current output, $y[n]$, a function of itself. Hence, there is no computable difference equation.

(d) *Yes*, the flow graph manipulation would lead to a computable difference equation. The flowgraph of an FIR filter has a path without delays leading from input to output, but this does not present any problems in terms of computation. Below is an example.



The transformation would destroy the linear phase of the FIR filter since the mapping between θ and ω is nonlinear. The only exception is the special case when $\alpha = 0$, i.e., when $\theta = \omega$.
Since there are feedback terms in the transformed filter, it must be an IIR filter. It therefore has an infinitely long impulse response.

(e) Since the two flow diagrams are equivalent we have

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= z^{-1}\frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} = z^{-1}\frac{1-\alpha z}{z-\alpha} \\ Z &= z\frac{z-\alpha}{1-\alpha z} \end{aligned}$$

$$H(z) = H_{lp}(Z)|_{Z=z\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}} = H_{lp}\left(z\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}\right)$$

Letting $Z = e^{j\theta}$ and $z = e^{j\omega}$ we have,

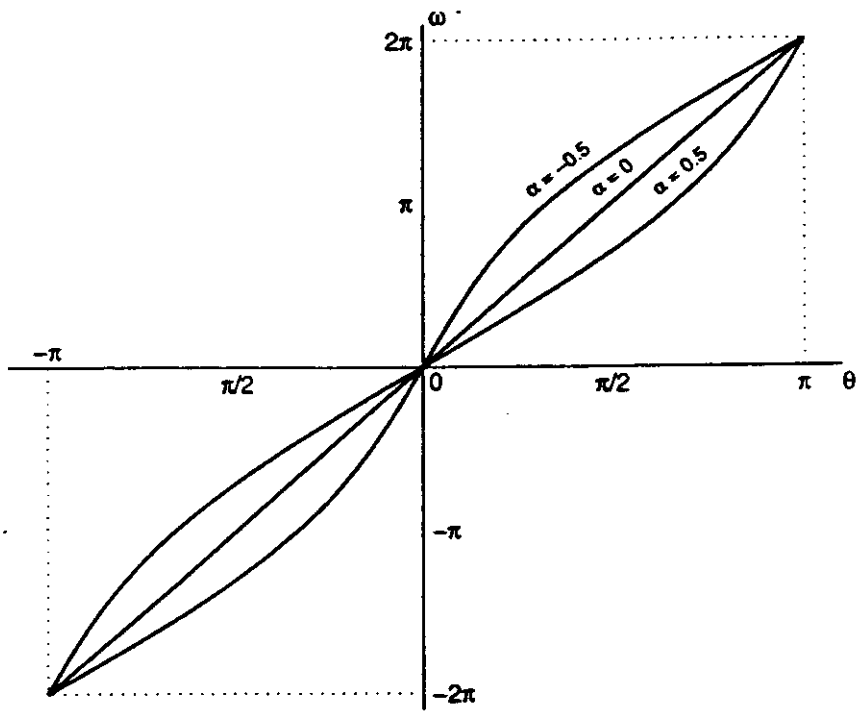
$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= e^{j\omega}\frac{e^{j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{j\omega}} \\ &= e^{j\omega}\frac{e^{j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{j\omega}}\cdot\frac{1-\alpha e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}} \\ &= e^{j\omega}\frac{e^{j\omega}-2\alpha+\alpha^2 e^{-j\omega}}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2} \end{aligned}$$

Using Euler's formula,

$$e^{j\theta} = e^{j\omega}\frac{(1+\alpha^2)\cos\omega - 2\alpha + j(1-\alpha^2)\sin\omega}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}$$

Noting that $\theta = \omega + \tan^{-1}\left[\frac{Im\{\cdot\}}{Re\{\cdot\}}\right]$,

$$\theta = \omega + \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha^2)\sin\omega}{(1+\alpha^2)\cos\omega - 2\alpha}\right]$$



We see from the plot of ω versus θ that a lowpass filter will not always transform into a lowpass filter. Take, for example, the case when the original lowpass filter has a cutoff of $\theta = \pi/2$. With $\alpha = 0$ it would transform into an allpass filter.

7.46. (a) Since

$$\begin{aligned} y[n] &= (2x[n] - h[n] * x[n]) * h[n] \\ &= (2h[n] - h[n] * h[n]) * x[n] \end{aligned}$$

the new transfer function is

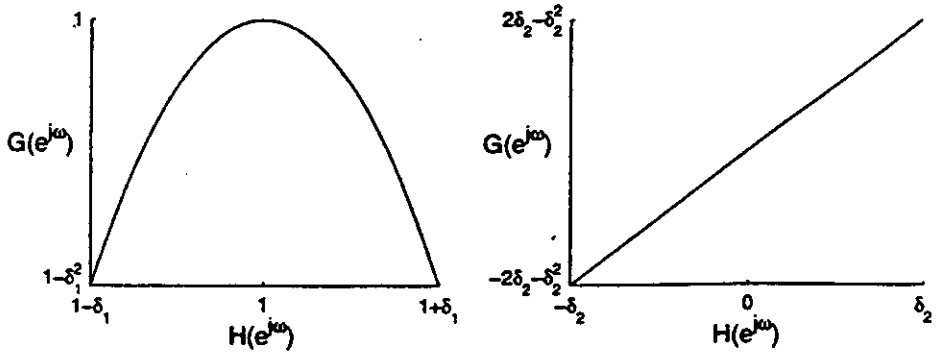
$$g[n] = 2h[n] - h[n] * h[n]$$

(i) It is FIR since the convolution of two finite length sequences results in a finite length sequence.

(ii) Note that the term $h[n] * h[n]$ is symmetric since it is the convolution of two symmetric sequences. Therefore, g[n] must be symmetric since it is the difference of two symmetric sequences.

(b) The frequency response for $G(e^{j\omega})$ is

$$G(e^{j\omega}) = 2H(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$



As shown above, if the passband of $H(e^{j\omega})$ is the region $[1-\delta_1, 1+\delta_1]$, then the passband of $G(e^{j\omega})$ is in the region $[1-\delta_1^2, 1]$ which is a smaller band. However, the stop band gets bigger since it maps to $[-2\delta_2 - \delta_2^2, 2\delta_2 - \delta_2^2]$.
Thus,

$$\begin{aligned} A &= (1-\delta_1^2) \\ B &= 1 \\ C &= -2\delta_2 - \delta_2^2 \\ D &= 2\delta_2 - \delta_2^2 \end{aligned}$$

If $\delta_1 \ll 1$ and $\delta_2 \ll 1$ then,

$$\begin{aligned} \text{Maximum passband approximation error} &\approx 0 \\ \text{Maximum stopband approximation error} &\approx 2\delta_2 \end{aligned}$$

(c) Since

$$\begin{aligned} y[n] &= (3x[n] - 2x[n] * h[n]) * h[n] * h[n] \\ &= (3h[n] * h[n] - 2h[n] * h[n] * h[n]) * x[n] \end{aligned}$$

the new transfer function is

$$h_{\text{sharp}}[n] = 3h[n] * h[n] - 2h[n] * h[n] * h[n]$$

and so

$$H_{\text{sharp}}(e^{j\omega}) = 3H(e^{j\omega})^2 - 2H(e^{j\omega})^3$$

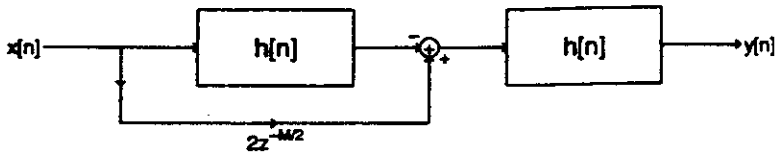
The new tolerance specifications can be found in a similar manner to the last section. We get,

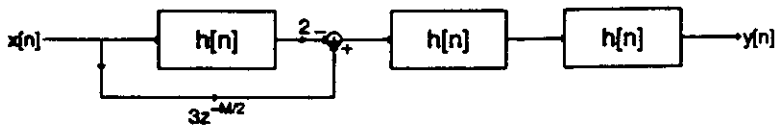
$$\begin{aligned} A &= 1 - 3\delta_1^2 - 2\delta_1^3 \\ B &= 1 \\ C &= 0 \\ D &= 3\delta_2^2 + 2\delta_2^3 \end{aligned}$$

If $\delta_1 \ll 1$ and $\delta_2 \ll 1$ then,

$$\begin{aligned} \text{Maximum passband approximation error} &\approx 0 \\ \text{Maximum stopband approximation error} &\approx 0 \end{aligned}$$

(d) The order of the impulse response $h[n]$ is M. Since it is linear phase it must therefore have a delay of $\frac{M}{2}$ samples. To convert the two systems we must add a delay in the lower leg of each network to match the delay that was added by the first filter.





The restrictions on the filter that carry over from part (a) are that it have

(i) Even symmetry

(ii) Odd Length

Hence, Type I FIR filters can be used.

The length of $h[n]$ is $2L+1$. Since the term that is longest in the twicing system's impulse response is the $h[n] * h[n]$ term, the length of $g[n]$ is $4L+1$. Since the term that is longest in the sharpening system's impulse response is the $h[n] * h[n] * h[n]$ term, the length of $h_{\text{sharp}}[n]$ is $6L+1$.

7.47. We know that *any* system whose frequency response is of the form

$$A_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{L} a_k(\cos(\omega))^k$$

can have at most $L-1$ local maxima and minima in the open interval $0 < \omega < \pi$ since it is in the form of a polynomial of degree L.

If we include all endpoints of the approximation region

$$\{0 \le |\omega| \le \omega_p\} \bigcup \{\omega_s \le |\omega| \le \pi\}$$

then we see we can have at most $L+3$ alternation frequencies.

If the transition band has two of the local minima or maxima of $A_e(e^{j\omega})$, then only $L-3$ can be in the approximation bands. Even with all four endpoints of the approximation region as alternation points, we can only have a maximum of $L+1$ alternation points. This does not satisfy the optimality condition of the Alternation Theorem which requires at least $L+2$ alternation points. It follows that the transition band cannot have more than two local minima or maxima of $A_e(e^{j\omega})$ either.

If the transition band only has one of the local minima or maxima of $A_e(e^{j\omega})$, then the error will not alternate between ω_p and ω_s and they cannot both be alternation frequencies. In this case, only $L-2$ of the local minima or maxima of $A_e(e^{j\omega})$ are in the approximation bands. If we add the maximum of three band edges to the total count of alternation frequencies we get $L+1$, which is again too low.

Therefore, the transition band cannot have any local minima or maxima and must be monotonic.

7.48. (a) $A_e(e^{j\omega})$ has 7 alternations of the error. If the approximation bands are of equal length and the weighting function is unity in both bands, why would the stopband have 1 extra alternation than the passband? The answer is that, if it were an optimal filter, it would not. The optimal filter for this set of specifications should have the *same* number of alternations in each band and therefore requires an *even* number of alternations. Since the optimal approximation is unique, the one shown in the figure cannot be optimal.

(b) A polynomial of degree L can have at most $L-1$ local minima or maxima in an open interval. Since $A_e(e^{j\omega})$ has three local extrema in the interval from $0 < \omega < \pi$, we know $L \geq 4$.

Note that the *optimal* filter is half wave anti-symmetric if you lower its frequency response by one half, i.e.,

$$A_{hw}(e^{j\omega}) = -A_{hw}\left(e^{j(\pi-\omega)}\right)$$

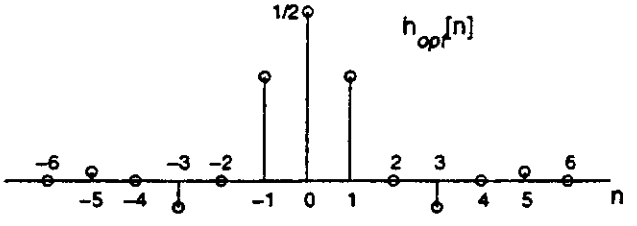
where $A_{hw}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega}) - 1/2$. Another way of saying this is to say that the optimal filter is anti-symmetric around $\omega = \pi/2$ after lowering the response by $1/2$. This property holds because the optimal filter has symmetric bands with the same number of alternations. Plugging in $A_{hw}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega}) - 1/2$ into the above expression gives

$$\begin{aligned} H_{opt}(e^{j\omega}) - 1/2 &= -\left[H_{opt}\left(e^{j(\pi-\omega)}\right) - 1/2\right] \\ H_{opt}(e^{j\omega}) &= -H_{opt}\left(e^{j(\pi-\omega)}\right) + 1 \\ h_{opt}[n] &= -(-1)^n h_{opt}[-n] + \delta[n] \end{aligned}$$

This condition implies that

$$h_{opt}[n] = \begin{cases} h_{opt}[-n], & n \text{ odd} \\ 0, & n \text{ even, } n \neq 0 \\ 0.5, & n = 0 \end{cases}$$

A sample plot of $h_{opt}[n]$ appears below, for $L = 6$.



Note that because $h_{opt}[n] = 0$ for n even, $n \neq 0$, a plot of $h_{opt}[n]$ for $L = 5$ would have the same nonzero samples, and therefore be equivalent. So the optimal filter with $L = 6$ is really the same filter as the case of $L = 5$, just as the optimal filter with $L = 4$ is the same filter as the case with $L = 3$.

We know the filter non-optimal filter has 7 alternations. The optimal filter should be able to meet the same specifications, but with a lower order. From part (a), we know the number of alternations must be even. Thus, the optimal filter for these specifications will have 6 alternations.

An optimal lowpass filter has either $L + 2$ or $L + 3$ alternations which means $L = 4$ or $L = 3$. However, we showed above that these are really the same filter. Since the optimal filter has $L = 4$, the filter shown in the problem cannot have $L = 4$.

Putting it all together we find $L > 4$ for the filter shown in the figure.

7.49. (a)

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}(j\Omega) &= \frac{1}{T} H(e^{j\Omega T}) H_0(j\Omega) H_r(j\Omega) \\ &= \begin{cases} \dfrac{2\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}{\Omega T} H\left(e^{j\Omega T}\right) e^{-j\frac{\Omega T}{2}}, & |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) The delay of the linear phase system is $51/2 = 25.5$ samples since it is a linear phase system of order 51. Therefore, the total delay is

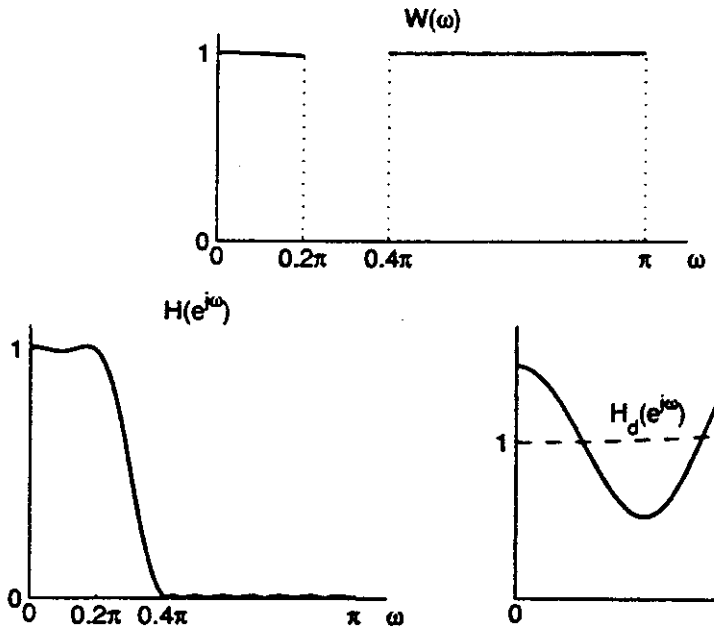
$$\begin{aligned} \text{Delay} &= \overbrace{25.5T}^{H(e^{j\Omega T})} + \overbrace{0.5T}^{H_0(j\Omega)} \\ &= 26T \\ &= 2.6 \text{ ms} \end{aligned}$$

(c) $H(e^{j\Omega T})$ should cancel the effects of $H_0(j\Omega)$. However, to cancel the effects of the delay introduced by $H_0(j\Omega)$ would require a noncausal filter which is not practical in this situation. Using the relation $\omega = \Omega T$,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\omega}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}, & |\omega| \le 0.2\pi \\ 0, & 0.4\pi \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

To obtain equiripple behavior in $H_{\text{eff}}(j\Omega)$, we need to weight the error so that the ripples grow with $H_d(e^{j\omega})$. Then when we multiply by $H_0(j\Omega)$ the ripples will be decreased to an equal size. Therefore, we need

$$W(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}, & |\omega| \le 0.2\pi \\ 1, & 0.4\pi \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$



(d) If $H_r(j\Omega)$ is also sloping across the band, $|\Omega| < \pi/T$, we would combine its effects with those of $H_0(j\Omega)$ and compensate as in part (c), i.e.,

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} \dfrac{\frac{\omega}{2}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \dfrac{1}{\left|H_r\left(j\frac{\omega}{T}\right)\right|}, & |\omega| < 0.2\pi \\ 0, & 0.4\pi \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

This would take care of the distortion due to $|H_r(j\Omega)|$ but not of any phase distortion. The weighting function will change in a similar manner.

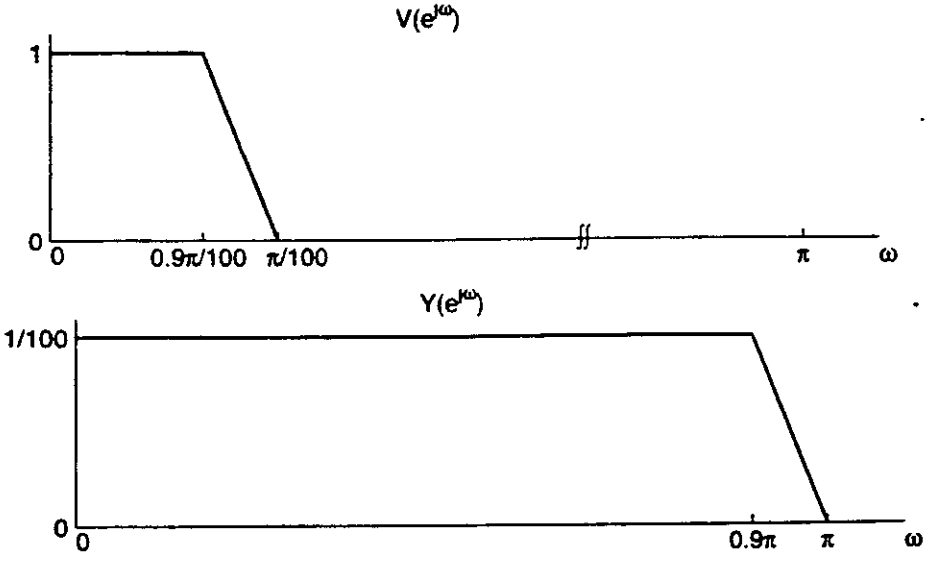
7.50. (a) To avoid aliasing, we require

$$\begin{aligned} M\omega_s &\leq \pi \\ M &\leq \frac{\pi}{\omega_s} \end{aligned}$$

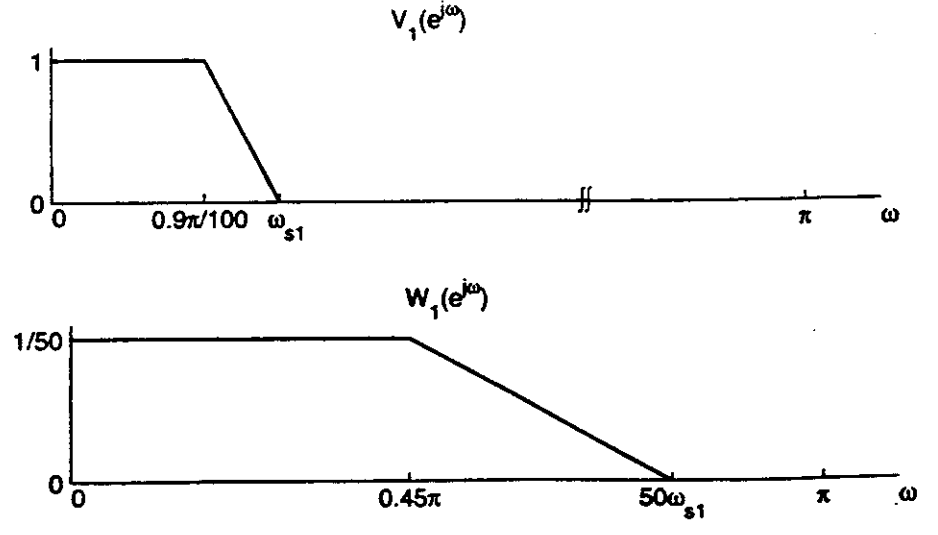
So the maximum allowable decimation factor is

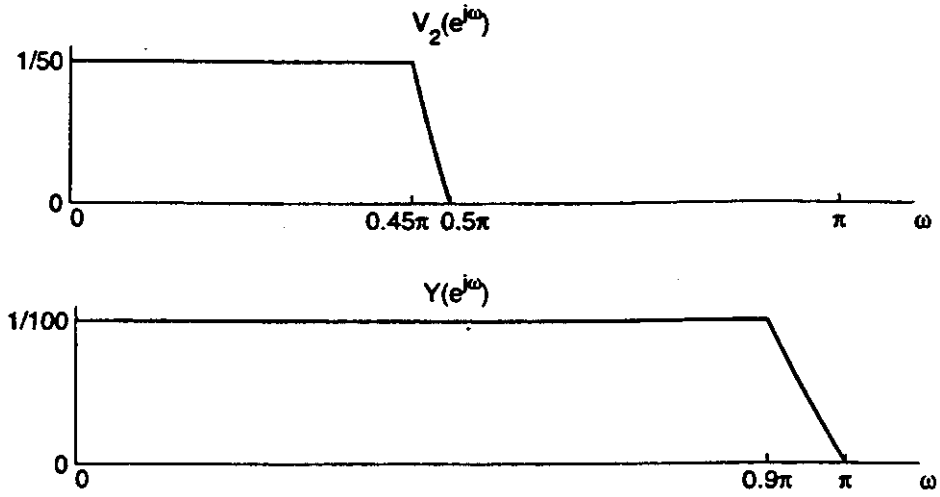
$$M_{\max} = \frac{\pi}{\omega_s}$$

(b)

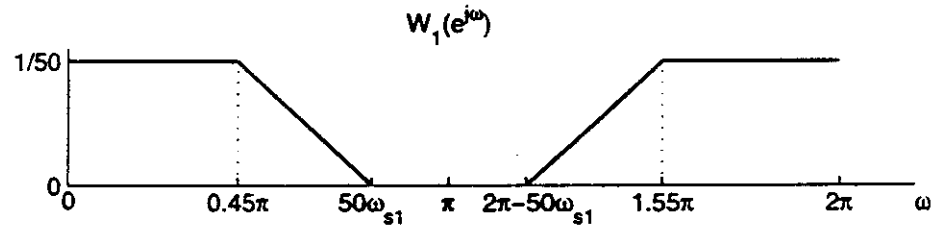


(c)





(d) After the first decimation by 50 is performed, $W_1(e^{j\omega})$ should look like the following:



Since we allow aliasing to occur in the transition bands, we have

$$\begin{aligned} 50\omega_{s_1} &\leq 1.55\pi \\ \omega_{s_1} &\leq 0.031\pi \end{aligned}$$

(e) Using $\delta_p = 0.01$, $\delta_s = 0.001$, $\Delta\omega = 0.001\pi$ we get

$$\begin{aligned} N &= \frac{-10\log_{10}(0.01 \times 0.001) - 13}{2.324(0.001\pi)} + 1 \\ &\simeq 5069 \end{aligned}$$

In general, the number of multiplies required to compute a single output sample is just N. For a linear phase filter, however, the symmetry in the coefficients allow us to cut the number of multiplies (roughly) in half if implementing the filter with a difference equation. The following is an example of how this is accomplished using the simple Type I linear phase filter $h[n] = 0.25\delta[n] + \delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$.

$$\begin{aligned} y[n] &= 0.25x[n] + x[n-1] + 0.25x[n-2] \quad \text{(2 multiplies)} \\ &= x[n-1] + 0.25(x[n] + x[n-2]) \quad \text{(1 multiply)} \end{aligned}$$

The procedure is similar for the other types of linear phase filters.

Thus, we need 2535 multiplies to compute each sample of the output.

(f) We have

$$N_1 = \frac{-10\log_{10}(0.01 \times 0.001) - 13}{2.324(0.031\pi - 0.009\pi)} + 1$$

$$\simeq 232$$

$$N_2 = \frac{-10\log_{10}(0.01 \times 0.001) - 13}{2.324(0.5\pi - 0.45\pi)} + 1$$

$$\simeq 103$$

If we again use linear phase filters we find

116	multiplies to get each sample of $v_1[n]$
0	multiplies to get each sample of $w_1[n]$ from $v_1[n]$
52	multiplies to get each sample of $v_2[n]$ from $w_1[n]$
0	multiplies to get each sample of $y[n]$ from $v_2[n]$

The total number of multiplies is 168.

(g) We have

$$N_1 = \frac{-10\log_{10}(0.005 \times 0.001) - 13}{2.324(0.022\pi)} + 1$$

$$\simeq 251$$

$$N_2 = \frac{-10\log_{10}(0.005 \times 0.001) - 13}{2.324(0.05\pi)} + 1$$

$$\simeq 111$$

Therefore, we have a total of $126 + 56 = 182$ multiplies per output point.

(h) *No.* Since $\delta_s \ll 1$ we have $\delta_s^2 < \delta_s$ which means the stopband ripple is getting smaller. Thus, we could actually increase the specifications.

(i) Performing a similar analysis on the other possibilities yields

M_1	M_2	Multiplies per output
50	2	182
25	4	156
20	5	172
10	10	291
5	20	557
4	25	693
2	50	1375

Thus, the choice $M_1 = 25$ and $M_2 = 4$ yields the minimum number of multiplications for this example.

7.51. (a)

$$h_1[n] = h[n] + \delta_2\delta[n - n_0]$$

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + \delta_2 e^{-j\omega n_0}$$

$$= A_e(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} + \delta_2 e^{-j\omega n_0}$$

$$= \underbrace{\left[A_e(e^{j\omega}) + \delta_2\right]}_{H_3(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0}$$

$H_3(e^{j\omega})$ is real since $A_e(e^{j\omega})$ is real and δ_2 is real. It is nonnegative since $A_e(e^{j\omega}) \geq -\delta_2$. Note that $H_3(e^{j\omega})$ is an even function of ω and is a zero-phase filter.

(b) $H_3(e^{j\omega})$ is a zero-phase filter with real coefficients. Thus, a zero at z_k implies there must also be zeros at z_k^*, $1/z_k$, and $1/z_k^*$. In addition, a zero on the unit circle must be a double zero because

both its value and its derivative is zero. Note that this last property is true for $H_3(e^{j\omega})$ but not for $A_e(e^{j\omega})$. We can write $H_3(z)$ as

$$H_3(z) = H_2(z)H_2(1/z)$$

where $H_2(z)$ contains all the complex conjugate zero pairs inside the unit circle and $H_2(1/z)$ contains the corresponding complex conjugate zero pairs outside the unit circle. We factor one of the double zeros on the unit circle and its complex conjugate zero into $H_2(z)$. The other pair on the unit circle goes into $H_2(1/z)$.

Since $H_2(z)$ has its zeros on or inside the unit circle it is minimum phase (we allow minimum phase systems to have zeros on the unit circle in this problem). Since the zeros occur in complex conjugate pairs, $h_2[n]$ is real.

(c)

$$\begin{aligned} |H_{min}(e^{j\omega})|^2 &= \frac{H_2(e^{j\omega})H_2^*(e^{j\omega})}{a^2} \\ &= \frac{A_e(e^{j\omega}) + \delta_2}{a^2} \end{aligned}$$

where $a = \frac{\sqrt{1+\delta_1+\delta_2}+\sqrt{1-\delta_1+\delta_2}}{2}$. Since $1 - \delta_1 \leq A_e(e^{j\omega}) \leq 1 + \delta_1$ in the passband and $-\delta_2 \leq A_e(e^{j\omega}) \leq \delta_2$ in the stopband, we have

$$\frac{\sqrt{1-\delta_1+\delta_2}}{a} \leq |H_{min}(e^{j\omega})| \leq \frac{\sqrt{1+\delta_1+\delta_2}}{a}, \qquad \omega \in \text{passband}$$

$$0 \leq |H_{min}(e^{j\omega})| \leq \sqrt{\frac{2\delta_2}{1+\delta_2}}, \qquad \omega \in \text{stopband}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} \delta_1' &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1+\delta_1+\delta_2}}{a} - \frac{\sqrt{1-\delta_1+\delta_2}}{a}\right] \\ &= \frac{1-b}{1+b}, \quad b = \sqrt{\frac{1-\delta_1+\delta_2}{1+\delta_1+\delta_2}} \\ \delta_2' &= \sqrt{\frac{2\delta_2}{1+\delta_2}} \end{aligned}$$

The original filter $h[n]$ has order M. Therefore, $h_1[n]$ also has order M, but $h_2[n]$ has order $M/2$ due to the spectral factorization. Since $h_{min}[n]$ has the same order as $h_2[n]$ we find that the length of $h_{min}[n]$ is $M/2 + 1$.

(d) *No.* If we remove the linear phase constraint, then the zeros of $H_3(z)$ are not distributed in conjugate reciprocal quads. It then becomes impossible to express

$$H_3(z) = H_2(z)H_2(z^{-1})$$

where $H_2(z)$ is a minimum phase filter.

No. It will not work with a Type II linear phase filter. In this case $n_0 = M/2$ is not an integer.

7.52. (a)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[M-m]e^{-j\omega M}e^{j\omega m} \\
&= e^{-j\omega M/2}\left[\sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{j\omega(M/2-n)} + \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega(M/2-n)}\right] \\
&= e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{(M-1)/2} 2h[n]\cos\omega(M/2-n) \\
&= e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{(M+1)/2} 2h[\tfrac{M+1}{2}-n]\cos\omega(n-\tfrac{1}{2})
\end{aligned}
$$

Then

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{(M+1)/2} b[n]\cos\omega(n-1/2)$$

where $b[n] = 2h[(M+1)/2-n]$ for $n = 1,\ldots,(M+1)/2$.

(b) Using the trigonometric identity

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

we get

$$
\begin{aligned}
\cos(\omega/2)\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{b}[n]\cos\omega n &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{b}[n]\cos\omega(n+\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{b}[n]\cos\omega(n-\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} \tilde{b}[n-1]\cos\omega(n-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} \tilde{b}[n]\cos\omega(n-\tfrac{1}{2}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\tilde{b}[0]\cos\omega/2 - \frac{1}{2}\tilde{b}[\tfrac{M+1}{2}]\cos\omega M/2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} \Big(\tilde{b}[n] + \tilde{b}[n-1]\Big)\cos\omega(n-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}\tilde{b}[0]\cos\omega/2 - \tfrac{1}{2}\tilde{b}[\tfrac{M+1}{2}]\cos\omega M/
\end{aligned}
$$

Since this last expression must equal

$$\sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} b[n]\cos\omega(n-\tfrac{1}{2})$$

we can just match up the multipliers in front of the cosine terms of the two expressions. We get

$$b[n] = \begin{cases} \dfrac{\tilde{b}[1]+2\tilde{b}[0]}{2}, & n=1 \\ \dfrac{\tilde{b}[n]+\tilde{b}[n-1]}{2}, & 2\le n\le \frac{M-1}{2} \\ \dfrac{\tilde{b}[\frac{M-1}{2}]}{2}, & n=\frac{M+1}{2} \end{cases}$$

(c) Consider

$$\begin{aligned} W(\omega)\left[H_d(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega})\right] &= W(\omega)\left[H_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=1}^{\frac{M+1}{2}} b[n]\cos\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= W(\omega)\left[H_d(e^{j\omega}) - \cos(\omega/2)\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}} \tilde{b}[n]\cos\omega n\right] \\ &= \bar{W}(\omega)\left[\tilde{H}_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^{\bar{L}} \tilde{b}[n]\cos\omega n\right] \end{aligned}$$

where we have defined

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{M-1}{2} \\ \tilde{H}_d(e^{j\omega}) &= \frac{H_d(e^{j\omega})}{\cos(\omega/2)} \\ \bar{W}(\omega) &= W(\omega)\cos(\omega/2) \end{aligned}$$

We also see that

$$\min_{\tilde{b}[n]}\left\{\max_{\omega\in\bar{F}}\{\cdot\}\right\} \Longleftrightarrow \min_{b[n]}\left\{\max_{\omega\in F}\{\cdot\}\right\}$$

(d) **Type III filters:**

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{M/2-1} h[n]e^{-j\omega n} + 0 + \sum_{n=M/2+1}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{M/2-1} h[n]e^{-j\omega n} - \sum_{m=0}^{M/2-1} h[m]e^{-j\omega(M-m)} \\ &= e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{M/2-1} h[n]\left(e^{-j\omega(n-M/2)} - e^{j\omega(n-M/2)}\right) \\ &= e^{-j\omega M/2}\sum_{n=0}^{M/2-1} (-2j)h[n]\sin\omega(n-M/2) \\ &= e^{-j\omega M/2}\sum_{m=1}^{M/2} 2jh[M/2-m]\sin\omega m \end{aligned}$$

Then

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2}\sum_{n=1}^{M/2} c[n]\sin\omega n$$

where $c[n] = 2jh[M/2-n]$ for $n = 1,\ldots,M/2$.
If we follow a similar analysis as the one in part (b) we get

$$\sin\omega\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}\bar{c}[n]\cos\omega n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}\bar{c}[n]\sin\omega(n+1) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1}\bar{c}[n]\sin\omega(n-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} \tilde{c}[n-1]\sin\omega n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} \tilde{c}[n]\sin\omega n \\
&\quad + \frac{1}{2}\tilde{c}[0]\sin\omega + \frac{1}{2}\tilde{c}[\tfrac{M}{2}]\sin\omega M/2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\frac{M}{2}} (\tilde{c}[n-1] - \tilde{c}[n])\sin\omega n + \frac{1}{2}\tilde{c}[0]\sin\omega + \frac{1}{2}\tilde{c}[\tfrac{M}{2}]\sin\omega M/2
\end{aligned}
$$

Matching terms we get

$$
c[n] = \begin{cases} \dfrac{2\tilde{c}[0] - \tilde{c}[1]}{2}, & n = 1 \\ \dfrac{\tilde{c}[n-1] - \tilde{c}[n]}{2}, & 2 \le n \le \frac{M}{2} - 1 \\ \dfrac{\tilde{c}[\frac{M}{2} - 1]}{2}, & n = \frac{M}{2} \end{cases}
$$

In a manner similar to that of part (c) we can find

$$
\begin{aligned}
\tilde{L} &= \frac{M}{2} - 1 \\
\tilde{H}_d(e^{j\omega}) &= \frac{H_d(e^{j\omega})}{\sin\omega} \\
\tilde{W}(\omega) &= W(\omega)\sin\omega \\
\tilde{F} &= F
\end{aligned}
$$

Type IV filters:

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=(M+1)/2}^{M} h[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]e^{-j\omega n} - \sum_{m=0}^{(M-1)/2} h[m]e^{-j\omega(M-m)} \\
&= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} h[n]\left(e^{-j\omega(n-M/2)} - e^{j\omega(n-M/2)}\right) \\
&= e^{-j\omega M/2} \sum_{n=0}^{(M-1)/2} (-2j)h[n]\sin\omega(n - M/2) \\
&= e^{-j\omega M/2} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} 2jh[(M+1)/2 - m]\sin\omega(m - 1/2)
\end{aligned}
$$

Then

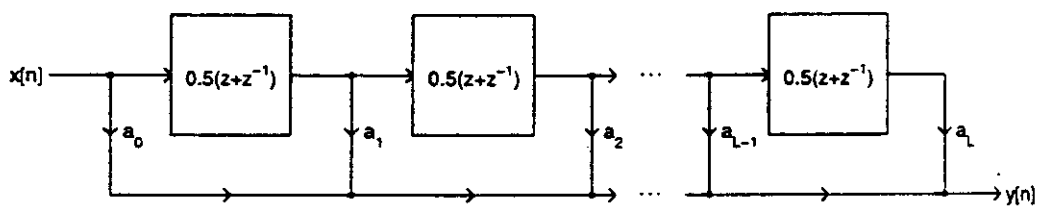
$$
H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \sum_{n=1}^{(M+1)/2} d[n]\sin\omega(n - 1/2)
$$

where $d[n] = 2jh[(M+1)/2 - n]$ for $n = 1, \ldots, (M+1)/2$. We can find

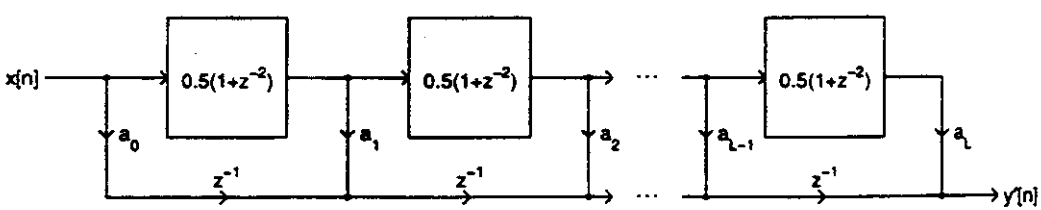
$$d[n] = \begin{cases} \dfrac{2\tilde{d}[0] - \tilde{d}[1]}{2}, & n = 1 \\ \dfrac{\tilde{d}[n-1] - \tilde{d}[n]}{2}, & 2 \le n \le \frac{M-1}{2} \\ \dfrac{\tilde{d}[\frac{M-1}{2}]}{2}, & n = \frac{M+1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{M-1}{2} \\ \tilde{H}_d(e^{j\omega}) &= \frac{H_d(e^{j\omega})}{\sin \omega/2} \\ \tilde{W}(\omega) &= W(\omega) \sin \omega/2 \\ \tilde{F} &= F \end{aligned}$$

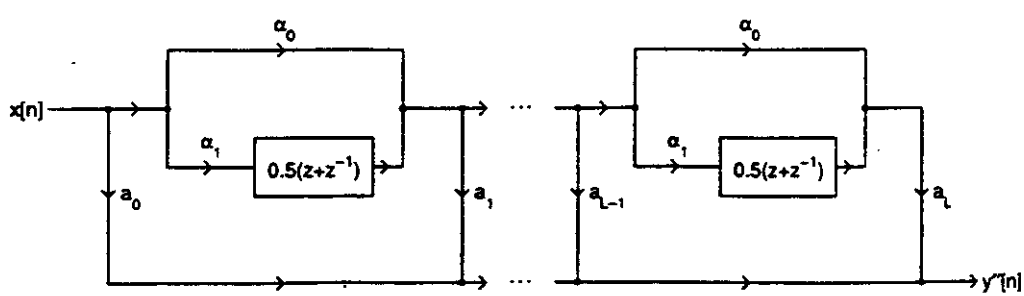
7.53. (a) The flow graph for $A_e(z)$ looks like



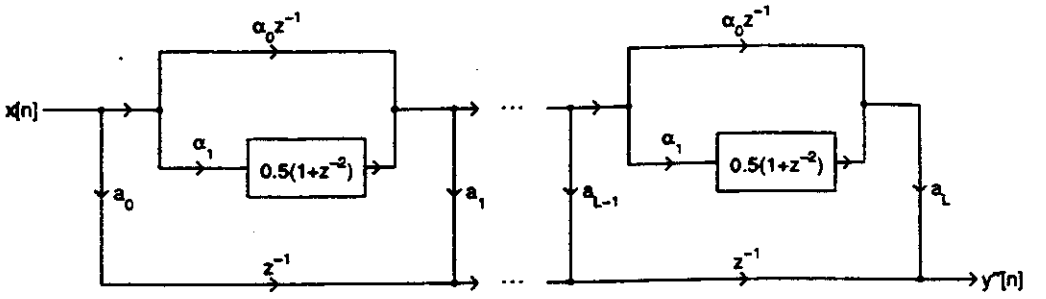
(b) The filter length is $2L + 1$. The causal version of the flow graph looks like



(c) The flow graph for $B_e(z)$ looks like



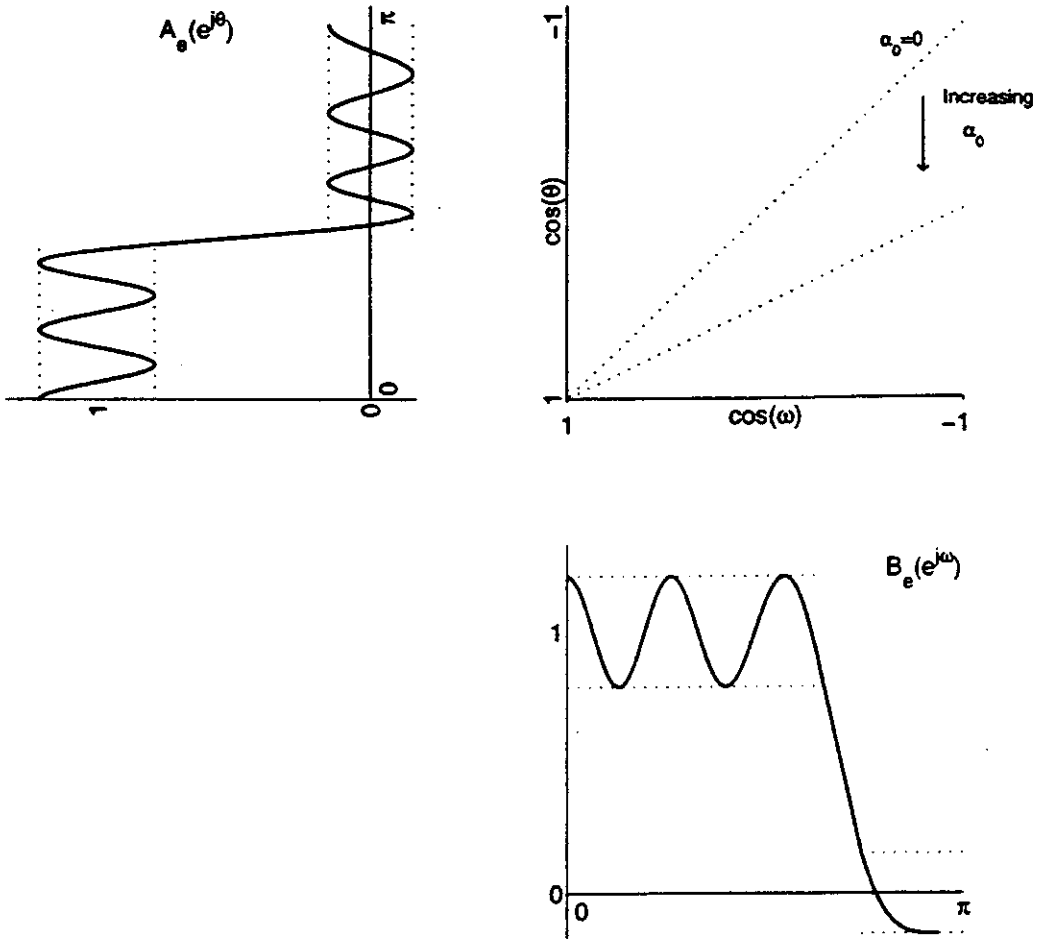
The filter length is still $2L + 1$. The modified flow graph looks like



(d) Because $Z = e^{j\theta}$ and $z = e^{j\omega}$ we have

$$\begin{aligned}
\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} &= \alpha_0 + \alpha_1 \left[\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}\right] \\
\cos\theta &= \alpha_0 + \alpha_1 \cos\omega \\
\cos\omega &= \frac{\cos\theta - \alpha_0}{\alpha_1} \\
\omega &= \cos^{-1}\left(\frac{\cos\theta - \alpha_0}{\alpha_1}\right), \quad \text{for } \left|\frac{\cos\theta - \alpha_0}{\alpha_1}\right| \leq 1
\end{aligned}$$

(e)



The picture above shows the mapping for α_0 somewhere between 0 and 1. The top right plot is the mapping of

$$\cos\theta = \alpha_0 + (1-\alpha_0)\cos\omega$$

We see that as α_0 increases, the transformation pushes the new passband further towards π. The new filter is not generally an optimal filter since we lose ripples or alternations while keeping L fixed. (Note that some of the original filter does not map anywhere in the new filter).

(f) In a similar manner, this choice of α_0 will cause the new passband to decrease with decreasing α_0.

7.54. (a) Let $D_k(z)$ be the z-transform of $\Delta^{(k)}\{x[n]\}$. Then

$$\begin{aligned}
D_0(z) &= \mathcal{Z}\left\{\Delta^0\{x[n]\}\right\} = X(z) \\
D_1(z) &= \mathcal{Z}\left\{\Delta^1\{x[n]\}\right\} = (z-z^{-1})X(z) \\
D_2(z) &= \mathcal{Z}\left\{\Delta^2\{x[n]\}\right\} = (z-z^{-1})^2X(z) \\
&\vdots \\
D_k(z) &= \mathcal{Z}\left\{\Delta^k\{x[n]\}\right\} = (z-z^{-1})^kX(z)
\end{aligned}$$

(b) By taking the transform of both sides of the continuous-time differential equation one gets (assuming initial rest conditions)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{r=0}^{M} b_r s^r X(s)$$

Solving for $H_c(s)$

$$H_c(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r s^r}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Similarly,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (z - z^{-1})^k Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r (z - z^{-1})^r X(z)$$

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r (z - z^{-1})^r}{\sum_{k=0}^{N} a_k (z - z^{-1})^k} \\ &= H_c(s)|_{s=z-z^{-1}} \\ &\Rightarrow m(z) = z - z^{-1} \end{aligned}$$

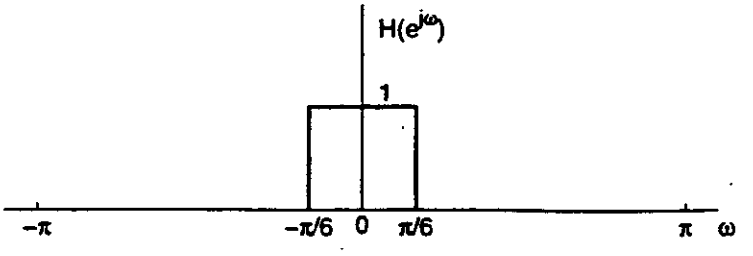
(c) First, map the continuous-time cutoff frequency into discrete-time and then make the sketch.

$$s = z - z^{-1}$$

$$j\Omega = e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

$$\Omega = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j} = 2\sin(\omega) = 1$$

$$\omega = \frac{\pi}{6}$$



7.55. (a) Using DTFT properties,

$$\begin{aligned} h_1[n] &= h[-n] \\ H_1(e^{j\omega}) &= H(e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

Since $H(e^{j\omega})$ is symmetric about $\omega = 0$, $H(e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega})$. Thus, $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega})$. $H(e^{j\omega})$ is optimal in the minimax sense, so $H_1(e^{j\omega})$ is optimal in minimax sense as well.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega \le \omega_p \\ 0, & \omega_s \le \omega \le \pi \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & 0 \le \omega \le \omega_p \\ 1, & \omega_s \le \omega \le \pi \end{cases}$$

(b) Using DTFT properties,

$$\begin{aligned} h_2[n] &= (-1)^n h[n] \\ &= (e^{-j\pi})^n h[n] \\ H_2(e^{j\omega}) &= H(e^{j(\omega+\pi)}) \end{aligned}$$

$H_2(e^{j\omega})$ is a high pass filter obtained by shifting $H(e^{j\omega})$ by π along the frequency axis. $H_2(e^{j\omega})$ satisfies the alternation thereom, and is therefore optimal in the minimax sense.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega \le \pi - \omega_s \\ 1, & \pi - \omega_p \le \omega \le \pi \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega \le \pi - \omega_s \\ \delta_2/\delta_1, & \pi - \omega_p \le \omega \le \pi \end{cases}$$

(c) Using DTFT properties,

$$\begin{aligned} h_3[n] &= h[n] * h[n] \\ H_3(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

In the passband, $H_3(e^{j\omega})$ alternates about $1 + \delta_1^2$ with a maximal error of $2\delta_1^2$. In the stopband, $H_3(e^{j\omega})$ alternates about $\delta_2^2/2$ with a maximal error of $\delta_2^2/2$. At first glance, it may appear that $H_3(e^{j\omega})$ is optimal. However, this is not the case. Counting alternations, we find that the original filter $H(e^{j\omega})$ has 8 alternations.

We know that since $H(e^{j\omega})$ is optimal, it must have at least $L + 2$ alternations. It is also possible that $H(e^{j\omega})$ has $L + 3$ alternations, if it corresponds to the extraripple case. So L is either 5 or 6 for this filter. Consequently, the filter length of $h[n]$, denoted as N, is either 11 or 13.

The filter $h_3[n]$ is the convolution of two length N sequences. Therefore, the length of $h_3[n]$, denoted as N', is $2N - 1$. Since N is either 11 or 13, N' must be either 21 or 25. It follows that the polynomial order for $h_3[n]$, denoted as L', is either 10 or 12. For $h_3[n]$ to be optimal in the minimax sense, it must have at least $L' + 2$ alternations. Thus, $h_3[n]$ must exhibit at least 12 alternations, for the non-extraripple case, or at least 14 alternations in the extraripple case to be optimal.

A simple counting of the alternations in $H_3(e^{j\omega})$ reveals that there are 11 alternations, consisting of the 8 alternations that were in $H(e^{j\omega})$ plus 3 where $H(e^{j\omega}) = 0$. These are too few to satisfy either the non-extraripple case or the extraripple case. As a result, this filter is not optimal in the minimax sense.

(d)

$$\begin{aligned} h_4[n] &= h[n] - K\delta[n] \\ H_4(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) - K \end{aligned}$$

This filter is simply $H(e^{j\omega})$ shifted down by K along the $H_4(e^{j\omega})$ axis. Consequently, this filter satisfies the alternation theorem, and is optimal in the minimax sense.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1-K, & 0 \le \omega \le \omega_p \\ -K, & \omega_s \le \omega \le \pi \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & 0 \le \omega \le \omega_p \\ 1, & \omega_s \le \omega \le \pi \end{cases}$$

(e) $h_5[n]$ is $h[n]$ upsampled by a factor of 2. In the frequency domain, upsampling by a factor of 2 will cause the frequency axis to get scaled by a factor of 1/2. Consequently, $H_5(e^{j\omega})$ will be a bandstop filter that satisfies the alternation theorem, with twice as many alternations as $H(e^{j\omega})$. This filter is optimal in the minimax sense.

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le \omega \le \omega_p/2 \\ 0, & \omega_s/2 \le \omega \le \pi - \omega_s/2 \\ 1, & \pi - \omega_p/2 \le \omega \le \pi \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & 0 \le \omega \le \omega_p/2 \\ 1, & \omega_s/2 \le \omega \le \pi - \omega_s/2 \\ \delta_2/\delta_1, & \pi - \omega_p/2 \le \omega \le \pi \end{cases}$$

7.56. We have an odd length causal linear phase filter with values from $n = 0, \ldots, 24$. It must therefore be either a Type I or Type III filter.

(a) *True.* We know either

Type I		Type III
$h[m] = h[24-m]$	*or*	$h[m] = -h[24-m]$

for $-\infty < m < \infty$ since the filter has linear phase. Substituting $m = n + 12$ we get

$$h[n+12] = h[12-n] \quad \textit{or} \quad h[n+12] = -h[12-n]$$

(b) *False.* Since the filter is linear phase it either has zeros both inside and outside the unit circle or it has zeros only on the unit circle.
If the filter has zeros both inside and outside the unit circle, its inverse has poles both inside and outside the unit circle. The only region of convergence that would correspond to a stable inverse would be the ring that includes the unit circle. The inverse would therefore be two-sided and not causal.
If the filter only has zeros on the unit circle, its inverse has poles on the unit circle and is therefore unstable.

(c) *Insufficient Information.* If it is a Type III filter it would have a zero at $z = -1$ but if it is a Type I filter this is not necessarily true.

(d) *True.* To minimize the maximum weighted approximation error is the goal of the Parks-McClellan algorithm.

(e) *True.* The filter is FIR so there are no feedback paths in the signal flow graph.

(f) *True.* The filter has linear phase and

$$\arg\left[H(e^{j\omega})\right] = \beta - 12\omega$$

where $\beta = 0, \pi$ for a Type I filter or $\beta = \pi/2, 3\pi/2$ for a Type III filter. The group delay is

$$\begin{aligned} \text{grd}\left[H(e^{j\omega})\right] &= -\frac{d}{d\omega}\left\{\arg\left[H(e^{j\omega})\right]\right\} \\ &= 12 \\ &> 0 \end{aligned}$$

7.57. (a) The desired tolerance scheme is

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 \le |\omega| \le \omega_1 \\ 1, & \omega_2 \le |\omega| \le \omega_3 \\ 0, & \omega_4 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

(b)

$$W(\omega) = \begin{cases} 1 & \left(\text{or } \frac{\delta_2}{\delta_1}\right) & \left(\text{or } \frac{\delta_3}{\delta_1}\right) & 0 \le |\omega| \le \omega_1 \\ \frac{\delta_1}{\delta_2} & (\text{or } 1) & \left(\text{or } \frac{\delta_3}{\delta_2}\right) & \omega_2 \le |\omega| \le \omega_3 \\ \frac{\delta_1}{\delta_3} & \left(\text{or } \frac{\delta_2}{\delta_3}\right) & (\text{or } 1) & \omega_4 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

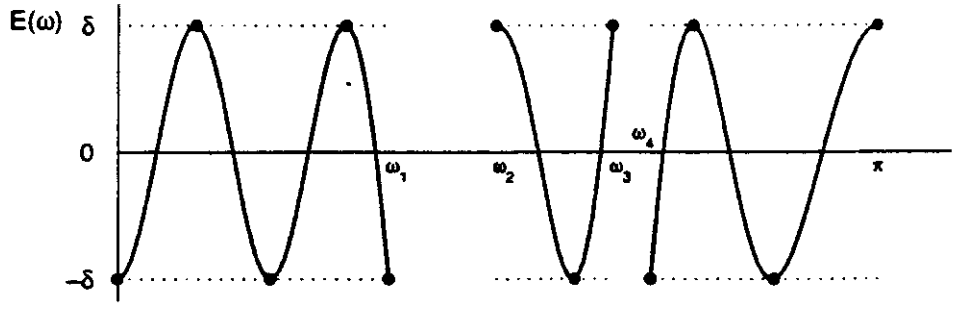
(c) From the Alternation Theorem, the minimum number of alternations is $L + 2$.

(d) The trigonometric polynomial (of degree L) can have at most $L - 1$ points of local minima or maxima in the open interval between 0 and π. If these are all alternation points and, in addition, all the band edges are alternation points, we find the maximum number of alternations is

$$L - 1 + 6 = L + 5$$

(e) If $M = 14$, then $L = M/2 = 7$. The maximum number of alternations is therefore $7 + 5 = 12$.

Typical $E(\omega)$ looks like :



(f) As will be shown in part (g), the 3 band case can have maxima and minima in the transition regions. It follows that we do not have to have an extremal frequency at ω_4. Therefore, if we started with an optimal maximal ripple filter and just slid ω_4 over we may move a local minimum or maximum into the transition region, but there will still be enough alternations left to satisfy the alternation theorem. Thus, the maximum approximation error does not have to decrease.

(g) (i) If a point in the transition region has a local minimum or maximum then there is the possibility that the surrounding points of maximum error do not alternate. Thus, we might lower the number of alternations by two. However, if we started with $L + 5$ alternations this reduction does not drop the number of alternations below the lower limit of $L + 2$ set by the Alternation Theorem. Therefore, local maxima and minima of $A_e(e^{j\omega})$ can occur in the transition regions. Note that this is not true in the 2 band case.

(ii) If a point in the approximation bands is a local minimum or maximum, the surrounding points of maximum error do not alternate. Thus, a local minimum or maximum in the approximation bands implies that the total number of alternations is reduced by two. However, if we started with $L + 5$ alternations this reduction does not drop the number of alternations below the lower limit of $L + 2$ set by the Alternation Theorem. Therefore, we can have a local maximum or minimum in the approximation bands. Note that in the 2-band case we drop from $L + 3$ to $L + 1$ which violates the Alternation Theorem.

7.58. (a) In order for condition 3 to hold, $G(z^{-1})$ must be an allpass system, since

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= G(z^{-1}) \\ e^{-j\theta} &= G(e^{-j\omega}) \\ &= \left|G(e^{-j\omega})\right| e^{j\angle G(e^{-j\omega})} \end{aligned}$$

Clearly, $\left|G(e^{-j\omega})\right|$ must equal unity to map the unit circle of the Z-plane onto the unit circle of the z-plane.

(b) Consider one allpass term in the product, and note that α_k is real.

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}$$

The inside of the unit circle of the Z-plane is

$$0 \leq |Z| < 1$$

Or equivalently,

$$1 < \left|Z^{-1}\right| < \infty$$

Substituting the allpass term for Z^{-1} gives

$$\begin{aligned} 1 &< \left|\frac{z^{-1} - \alpha_k}{1 - \alpha_k z^{-1}}\right| \\ (1 - \alpha_k z^{-1})(1 - \alpha_k z^{*-1}) &< (z^{-1} - \alpha_k)(z^{*-1} - \alpha_k) \\ 1 - \alpha_k z^{-1} - \alpha_k z^{*-1} + \alpha_k^2 z^{-1} z^{*-1} &< z^{-1} z^{*-1} - \alpha_k z^{*-1} - \alpha_k z^{-1} + \alpha_k^2 \\ (1 - \alpha_k^2) &< z^{-1} z^{*-1}(1 - \alpha_k^2) \end{aligned}$$

If $(1 - \alpha_k^2) < 0$, then

$$\begin{aligned} 1 &> z^{-1} z^{*-1} \\ 1 &> \frac{1}{|z|^2} \\ |z| &> 1 \end{aligned}$$

The inside of the unit circle of the Z-plane maps to the *outside* of the unit circle of the z-plane. This is not the desired result. However, if $(1 - \alpha_k^2) > 0$, then

$$\begin{aligned} 1 &< z^{-1} z^{*-1} \\ 1 &< \frac{1}{|z|^2} \\ |z| &< 1 \end{aligned}$$

The inside of the unit circle of the Z-plane maps to the *inside* of the unit circle of the z-plane. This is the desired result. Thus, for condition 2 to be satisfied,

$$\begin{aligned} 1 - \alpha_k^2 &> 0 \\ |\alpha_k|^2 &< 1 \\ |\alpha_k| &< 1 \end{aligned}$$

This condition holds for the general case as well since the general case is just a product of the simpler allpass terms.

(c) First, it is shown that $G(z^{-1})$ produces the desired mapping for some value of α. Starting with $G(z^{-1})$,

$$\begin{aligned} Z^{-1} &= \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \\ e^{-j\theta} &= \frac{e^{-j\omega}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}} \\ e^{-j\theta}-\alpha e^{-j\theta}e^{-j\omega} &= e^{-j\omega}-\alpha \\ e^{-j\omega}(1+\alpha e^{-j\theta}) &= e^{-j\theta}+\alpha \\ e^{-j\omega} &= \frac{e^{-j\theta}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\theta}} \\ &= \frac{e^{-j\theta}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\theta}} \cdot \frac{1+\alpha e^{j\theta}}{1+\alpha e^{j\theta}} \\ &= \frac{e^{-j\theta}+2\alpha+\alpha^2 e^{j\theta}}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \end{aligned}$$

Using Euler's formula,

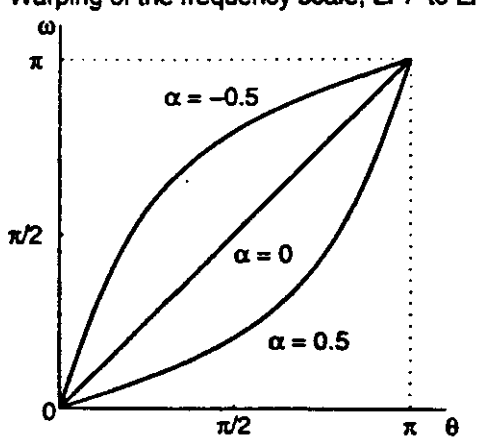
$$\begin{aligned} e^{-j\omega} &= \frac{\cos\theta - j\sin\theta + 2\alpha + \alpha^2\cos\theta + j\alpha^2\sin\theta}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha + (1+\alpha^2)\cos\theta + j[(\alpha^2-1)\sin\theta]}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \end{aligned}$$

Noting that $-\omega = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{\cdot\}}{Re\{\cdot\}}\right]$,

$$\begin{aligned} -\omega &= \tan^{-1}\left[\frac{(\alpha^2-1)\sin\theta}{2\alpha+(1+\alpha^2)\cos\theta}\right] \\ \omega &= \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha^2)\sin\theta}{2\alpha+(1+\alpha^2)\cos\theta}\right] \end{aligned}$$

This relationship is plotted in the figure below for different values of α. Although a warping of the frequency scale is evident in the figure, (except when $\alpha = 0$, which corresponds to $Z^{-1} = z^{-1}$), if the original system has a piecewise-constant lowpass frequency response with cutoff frequency θ_p, then the transformed system will likewise have a similar lowpass response with cutoff frequency ω_p determined by the choice of α.

Warping of the frequency scale, LPF to LPF



Next, an equation for α is found in terms of θ_p and ω_p. Starting with $G(z^{-1})$,

$$\begin{aligned}
Z^{-1} &= \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} \\
e^{-j\theta_p} &= \frac{e^{-j\omega_p}-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega_p}} \\
e^{-j\theta_p}-\alpha e^{-j\theta_p}e^{-j\omega_p} &= e^{-j\omega_p}-\alpha \\
e^{-j\theta_p}-e^{-j\omega_p} &= \alpha(e^{-j(\theta_p+\omega_p)}-1) \\
\alpha &= \frac{e^{-j\theta_p}-e^{-j\omega_p}}{e^{-j(\theta_p+\omega_p)}-1} \\
&= \frac{e^{-j(\theta_p+\omega_p)/2}(e^{-j(\theta_p-\omega_p)/2}-e^{j(\theta_p-\omega_p)/2})}{e^{-j(\theta_p+\omega_p)/2}(e^{-j(\theta_p+\omega_p)/2}-e^{j(\theta_p+\omega_p)/2})} \\
&= \frac{-2j\sin[(\theta_p-\omega_p)/2]}{-2j\sin[(\theta_p+\omega_p)/2]} \\
&= \frac{\sin[(\theta_p-\omega_p)/2]}{\sin[(\theta_p+\omega_p)/2]}
\end{aligned}$$

(d) Using the equation for ω found in part c, with $\theta_p = \pi/2$,

$$\omega_p = \tan^{-1}\left[\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\right]$$

(i)

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \tan^{-1}\left[\frac{1-(-0.2679)^2}{2(-0.2679)}\right] \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{0.9282}{-0.5358}\right) \\
&= 2\pi/3
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \tan^{-1}\left[\frac{1-(0)^2}{2(0)}\right] \\
&= \tan^{-1}(\infty) \\
&= \pi/2
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\omega_p &= \tan^{-1}\left[\frac{1-(0.4142)^2}{2(0.4142)}\right] \\
&= \tan^{-1}(1) \\
&= \pi/4
\end{aligned}$$

(e) The first-order allpass system

$$G(z^{-1}) = -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$$

satisfies the criteria that the unit circle in the Z-plane maps to the unit circle in the z-plane, and that $\theta = 0$ maps to $\omega = \pi$. Next, α is found in terms of θ_p and ω_p.

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
e^{-j\theta_p} &= -\frac{e^{-j\omega_p}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\omega_p}} \\
-e^{-j\theta_p}-\alpha e^{-j(\omega_p+\theta)} &= e^{-j\omega_p}+\alpha \\
\alpha(1+e^{-j(\omega_p+\theta_p)}) &= -e^{-j\theta_p}-e^{-j\omega_p} \\
\alpha &= -\frac{e^{-j\theta_p}+e^{-j\omega_p}}{1+e^{-j(\omega_p+\theta_p)}} \\
&= -\frac{e^{-j(\omega_p+\theta_p)/2}(e^{-j(-\omega_p+\theta_p)/2}+e^{-j(\omega_p-\theta_p)/2})}{e^{-j(\omega_p+\theta_p)/2}(e^{j(\omega_p+\theta_p)/2}+e^{-j(\omega_p+\theta_p)/2})} \\
&= -\frac{\cos[(\omega_p-\theta_p)/2]}{\cos[(\omega_p+\theta_p)/2]}
\end{aligned}
$$

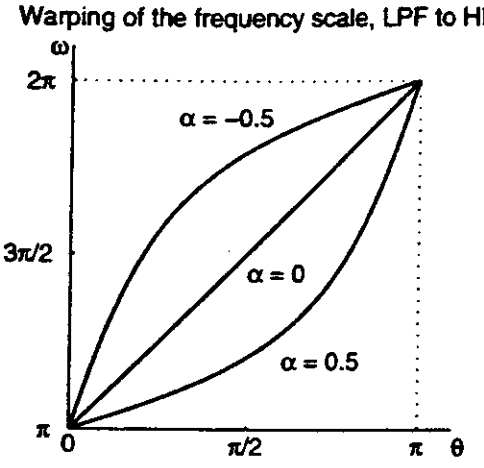
(f) First, an equation for ω is found in terms of θ and α.

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}} \\
e^{-j\theta} &= -\frac{e^{-j\omega}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\omega}} \\
-e^{-j\theta}-\alpha e^{-j(\omega+\theta)} &= e^{-j\omega}+\alpha \\
e^{-j\omega}(1+\alpha e^{-j\theta}) &= -e^{-j\theta}-\alpha \\
-e^{-j\omega} &= \frac{e^{-j\theta}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\theta}} \\
e^{-j(\omega-\pi)} &= \frac{e^{-j\theta}+\alpha}{1+\alpha e^{-j\theta}}\cdot\frac{1+\alpha e^{j\theta}}{1+\alpha e^{j\theta}} \\
&= \frac{e^{-j\theta}+2\alpha+\alpha^2 e^{j\theta}}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \\
&= \frac{\cos\theta-j\sin\theta+2\alpha+\alpha^2\cos\theta+j\alpha^2\sin\theta}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2} \\
&= \frac{\cos\theta+2\alpha+\alpha^2\cos\theta+j(-\sin\theta+\alpha^2\sin\theta)}{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2}
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\begin{aligned}
-\omega+\pi &= \tan^{-1}\left[\frac{(\alpha^2-1)\sin\theta}{2\alpha+(1+\alpha^2)\cos\theta}\right] \\
\omega &= \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha^2)\sin\theta}{2\alpha+(1+\alpha^2)\cos\theta}\right]+\pi
\end{aligned}
$$

Note that this lowpass to highpass expression is the similar to the lowpass to lowpass expression for ω found in part (c). The only difference is the additive π term, which shifts the lowpass filter into a highpass filter. The frequency warping is plotted below.



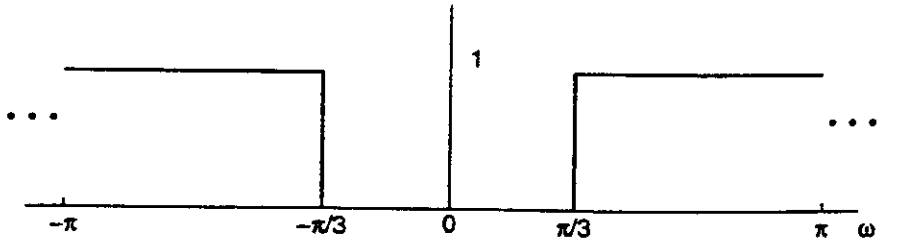
For $\theta_p = \pi/2$, this becomes

$$\omega = \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha^2)}{2\alpha}\right] + \pi$$

(i)

$$\begin{aligned}\omega_p &= \tan^{-1}\left[\frac{1-(-0.2679)^2}{2(-0.2679)}\right] + \pi \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{0.9282}{-0.5358}\right) + \pi \\ &= 2\pi/3 + \pi \\ &= 5\pi/3\end{aligned}$$

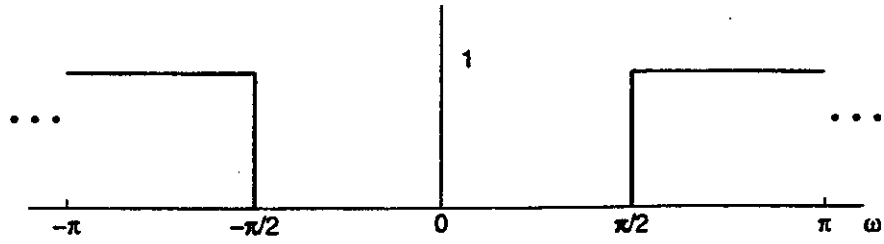
The right edge of the low pass filter gets warped to $5\pi/3$, which is equivalent to $-\pi/3$. The frequency response of this filter appears below.



(ii)

$$\begin{aligned}\omega_p &= \tan^{-1}\left[\frac{1-(0)^2}{2(0)}\right] + \pi \\ &= \tan^{-1}(\infty) + \pi \\ &= \pi/2 + \pi \\ &= 3\pi/2\end{aligned}$$

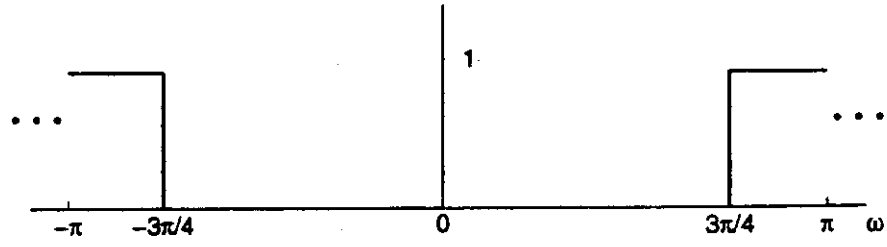
The right edge of the low pass filter gets warped to $3\pi/2$, which is equivalent to $-\pi/2$. The frequency response of this filter appears below.



(iii)

$$\begin{aligned}\omega_p &= \tan^{-1}\left[\frac{1-(0.4142)^2}{2(0.4142)}\right]+\pi \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{0.8284}{0.8284}\right)+\pi \\ &= \pi/4+\pi \\ &= 5\pi/4\end{aligned}$$

The right edge of the low pass filter gets warped to $5\pi/4$, which is equivalent to $-3\pi/4$. The frequency response of this filter appears below.



Solutions – Chapter 8

The Discrete-Time Fourier Transform

8.1. We sample a periodic continuous-time signal with a sampling rate:

$$F_s = \frac{\Omega s}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{6}{10^{-3}}\text{Hz}$$

(a) The sampled signal is given by:

$$x[n] = x_c(nT)$$

Expressed as a Discrete Fourier Series:

$$x[n] = \sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j\frac{2\pi}{6}kn}$$

We note that, in accordance with the discussion of Section 8.1, the sampled signal is represented by the summation of harmonically-related complex exponentials. The fundamental frequency of this set of exponentials is $2\pi/N$, where $N = 6$.

Therefore, the sequence $x[n]$ is periodic with period 6.

(b) For any bandlimited continuous-time signal, the Nyquist Criterion may be stated from Eq. (4.14b) as:

$$F_s \geq 2F_N,$$

where F_s is the sampling rate (Hz), and F_N corresponds to the highest frequency component in the signal (also Hz).

As evident by the finite Fourier series representation of $x_c(t)$, this continuous-time signal is, indeed, bandlimited with a maximum frequency of $F_n = \frac{9}{10^{-3}}$ Hz.

Therfore, by sampling at a rate of $F_s = \frac{6}{10^{-3}}$ Hz, the Nyquist Criterion is violated, and aliasing results.

(c) We use the analysis equation of Eq. (8.11):

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

From part (a), $\tilde{x}[n]$ is periodic with $N = 6$.

Substitution yields:

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{5}\left(\sum_{m=-9}^{9} a_m e^{j\frac{2\pi}{6}mn}\right)e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{5}\sum_{m=-9}^{9} a_m e^{j(2\pi/6)(m-k)n}\end{aligned}$$

We reverse the order of the summations, and use the orthogonality relationship from Example 8.1:

$$\tilde{X}[k] = 6\sum_{m=-9}^{9} a_m \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[m-k+rN]$$

Taking the infinite summation to the outside, we recognize the convolution between a_m and shifted impulses (Recall $a_m = 0$ for $|m| > 9$). Thus,

$$\tilde{X}[k] = 6\sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{k-6r}$$

Note that from $\tilde{X}[k]$, the aliasing is apparent.

8.2. (a) Using the analysis equation of Eq. (8.11)

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

Since $\tilde{x}[n]$ is also periodic with period $3N$,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_3[k] &= \sum_{n=0}^{3N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn} + \sum_{n=2N}^{3N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn}\end{aligned}$$

Performing a change of variables in the second and third summations of $\tilde{X}_3[k]$,

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn} + W_{3N}^{kN} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n+N] W_{3N}^{kn} + W_{3N}^{2kN} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n+2N] W_{3N}^{kn}$$

Since $\tilde{x}[n]$ is periodic with period N, and $W_{3N}^{kn} = W_N^{(\frac{k}{3})n}$,

$$\begin{aligned}\tilde{X}_3[k] &= \left(1 + e^{-j2\pi(\frac{k}{3})} + e^{-j2\pi(\frac{2k}{3})}\right) \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{(\frac{k}{3}n)} \\ &= \left(1 + e^{-j2\pi(\frac{k}{3})} + e^{-j2\pi(\frac{2k}{3})}\right) \tilde{X}[k] \\ &= \begin{cases} 3\tilde{X}[k/3], & k = 3\ell \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}$$

(b) Using $N = 2$ and $\tilde{x}[n]$ as in Fig P8.2-1:

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{2}kn} \\ &= \tilde{x}[0] + \tilde{x}[1] e^{-j\pi k} \\ &= 1 + 2(-1)^k \\ &= \begin{cases} 3, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Observe, from Fig. P8.2-1, that $\tilde{x}[n]$ is also periodic with period $3N = 6$:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_3[k] &= \sum_{n=0}^{3N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{5} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{\pi}{3}kn} \\ &= (1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}k})(1 + 2(-1)^{\frac{k}{3}}) \\ &= (1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}k})\tilde{X}[k/3] \\ &= \begin{cases} 9, & k = 0 \\ -3, & k = 3 \\ 0, & k = 1, 2, 4, 5. \end{cases}\end{aligned}$$

8.3. (a) The DFS coefficients will be real if $\tilde{x}[n]$ is even. Only signal B can be even (i.e., $\tilde{x}_B[n] = \tilde{x}_B[-n]$; if the origin is selected as the midpoint of either the nonzero block, or the zero block).

(b) The DFS coefficients will be imaginary if $\tilde{x}[n]$ is even. None of the sequences in Fig P8.3-1 can be odd.

(c) We use the analysis equation, Eq. (8.11) and the closed form expression for a geometric series. Assuming unit amplitudes and discarding DFS points which are zero:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_A[k] &= \sum_{n=0}^{3} e^{j\frac{2\pi}{8}kn} \\
&= \frac{1-e^{j\frac{\pi}{4}4k}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}} \\
&= \frac{1-(-1)^k}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}} = 0, k = \pm 2, \pm 4, \ldots \\
\tilde{X}_B[k] &= \sum_{n=0}^{2} e^{j\frac{2\pi}{8}kn} \\
&= \frac{1-e^{j\frac{\pi}{4}3k}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}} \\
\tilde{X}_C[k] &= \sum_{n=0}^{3} e^{j\frac{2\pi}{8}kn} - \sum_{n=4} 7e^{j\frac{2\pi}{8}kn} \\
&= \sum_{n=0}^{3} \left(e^{j\frac{\pi}{4}kn} - e^{j\frac{\pi}{4}k(n+4)} \right) \\
&= \left(1-e^{j\pi k}\right) \frac{1-e^{j\pi k}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}} \\
&= 0, \quad k = \pm 2, \pm 4, \ldots
\end{aligned}$$

8.4. A periodic sequence is constructed from the sequence:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \ , \ |\alpha| < 1$$

as follows:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN] \ , \ |\alpha| < 1$$

(a) The Fourier transform of $x[n]$:

$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}, \quad |\alpha| < 1
\end{aligned}$$

(b) The DFS of $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rN] W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \alpha^{n+rN} u[n+rN] W_N^{kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^{n+rN} W_N^{kn}$$

Rearranging the summations gives:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^{rN} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n W_N^{kn}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^{rN} \left(\frac{1 - \alpha^N e^{-j2\pi k}}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \right), \quad |\alpha| < 1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha^N} \left(\frac{1 - \alpha^N e^{-j2\pi k}}{1 - \alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \right), \quad |\alpha| < 1$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j(2\pi k/N)}}, \quad |\alpha| < 1$$

(c) Comparing the results of part (a) and part (b):

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega = 2\pi k/N}.$$

8.5. (a)

$$x[n] = \delta[n]$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

$$= 1$$

(b)

$$x[n] = \delta[n - n_0], \quad 0 \le n_0 \le (N-1)$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0] W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

$$= W_N^{kn_0}$$

(c)

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ even} \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{2kn}$$

$$= \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j(\pi k/N)}}$$

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0, N/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(d)

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le ((N/2)-1) \\ 0, & N/2 \le n \le (N-1) \end{cases}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{kn}$$

$$= \frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j(2\pi k)/N}}$$

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0 \\ \dfrac{2}{1-e^{-j(2\pi k/N)}}, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even}, \ 0 \le k \le (N-1) \end{cases}$$

(e)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le (N-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

$$= \frac{1-a^N e^{-j2\pi k}}{1-ae^{-j(2\pi k)/N}}$$

$$X[k] = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j(2\pi k)/N}}$$

8.6. Consider the finite-length sequence

$$x[n] = \begin{cases} e^{j\omega_0 n}, & 0 \le n \le (N-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) The Fourier transform of $x[n]$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-j(\omega-\omega_0)N}}{1-e^{-j(\omega-\omega_0)}}$$

$$= \frac{e^{-j(\omega-\omega_0)(N/2)}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}} \left(\frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]} \right)$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega-\omega_0)((N-1)/2)} \left(\frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]} \right)$$

(b) N-point DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} W_N^{kn} \\
&= \frac{1 - e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)N}}{1 - e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)}} \\
&= e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0\right)/2\right]}
\end{aligned}
$$

Note that $X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi k)/N}$

(c) Suppose $\omega_0 = (2\pi k_0)/N$, where k_0 is an integer:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \frac{1 - e^{-j(k-k_0)2\pi}}{1 - e^{-j(k-k_0)(2\pi)/N}} \\
&= e^{-j(2\pi/N)(k-k_0)((N-1)/2)} \frac{\sin \pi(k-k_0)}{\sin(\pi(k-k_0)/N)}
\end{aligned}
$$

8.7. We have a six-point uniform sequence, $x[n]$, which is nonzero for $0 \le n \le 5$. We sample the Z-transform of $x[n]$ at four equally-spaced points on the unit circle.

$$X[k] = X(z)|_{z=e^{(2\pi k/4)}}$$

We seek the sequence $x_1[n]$ which is the inverse DFT of $X[k]$. Recall the definition of the Z-transform:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Since $x[n]$ is zero for all n outside $0 \le n \le 5$, we may replace the infinite summation with a finite summation. Furthermore, after substituting $z = e^{j(2\pi k/4)}$, we obtain

$$X[k] = \sum_{n=0}^{5} x[n] W_4^{kn}, \quad 0 \le k \le 4$$

Note that we have taken a 4-point DFT, as specified by the sampling of the Z-transform; however, the original sequence was of length 6. As a result, we can expect some aliasing when we return to the time domain via the inverse DFT.

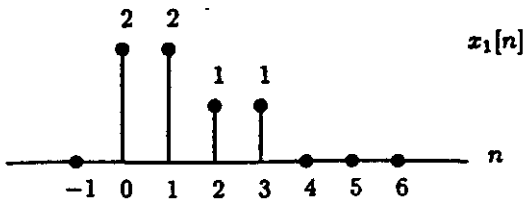
Performing the DFT,

$$X[k] = W_4^{0k} + W_4^{k} + W_4^{2k} + W_4^{3k} + W_4^{4k} + W_4^{5k}, \quad 0 \le k \le 4$$

Taking the inverse DFT by inspection, we note that there are six impulses (one for each value of n above). However,

$$W_4^{4k} = W_4^{0k} \text{ and } W_4^{5k} = W_4^{k},$$

so two points are aliased. The resulting time-domain signal is



8.8. Fourier transform of $x[n] = (1/2)^n u[n]$:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Now, sample the frequency spectra of $x[n]$:

$$Y[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/10}, \quad 0 \le k \le 9$$

We have the 10-pt DFT:

$$\begin{aligned} Y[k] &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j(2\pi k/10)}}, \quad 0 \le k \le 9 \\ &= \sum_{n=0}^{9} y[n]W_{10}^{kn} \end{aligned}$$

Recall:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[\text{N-pt}]{\text{DFT}} \frac{1-(\frac{1}{2})^N}{1-\frac{1}{2}e^{-j(2\pi k/N)}}$$

So, we may infer:

$$y[n] = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-(\frac{1}{2})^{10}}, \quad 0 \le n \le 9$$

8.9. Given a 20-pt finite-duration sequence $x[n]$:

(a) We wish to obtain $X(e^{j\omega})|_{\omega=4\pi/5}$ using the smallest DFT possible. A possible size of the DFT is evident by the periodicity of $e^{j\omega}|_{\omega=4\pi/5}$. Suppose we choose the size of the DFT to be $M = 5$. The data sequence is 20 points long, so we use the time-aliasing technique derived in the previous problem. Specifically, we alias $x[n]$ as:

$$x_1[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+5r]$$

This aliased version of $x[n]$ is periodic with period 5 now. The 5-pt DFT is computed. The desired value occurs at a frequency corresponding to:

$$\frac{2\pi k}{N} = \frac{4\pi}{5}$$

For $N = 5$, $k = 2$, so the desired value may be obtained as $X[k]|_{k=2}$.

(b) Next, we wish to obtain $X(e^{j\omega})|_{\omega=10\pi/27}$.
The smallest DFT is of size $L = 27$. Since the DFT is larger than the data block size, we pad $x[n]$ with 7 zeros as follows:

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le 19 \\ 0, & 20 \le n \le 26 \end{cases}$$

We take the 27-pt DFT, and the desired value corresponds to $X[k]$ evaluated at $k = 5$.

8.10. From Fig P8.10-1, the two 8-pt sequences are related through a circular shift. Specifically,

$$x_2[n] = x_1[((n-4))_8]$$

From property 5 in Table 8.2,

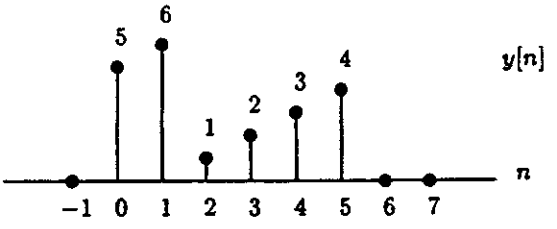
$$\text{DFT}\{x_1[((n-4))_8]\} = W_8^{4k} X_1[k]$$

Thus,

$$\begin{aligned} X_2[k] &= W_8^{4k} X_1[k] \\ &= e^{-j\pi k} X_1[k] \\ X_2[k] &= (-1)^k X_1[k] \end{aligned}$$

8.11. We wish to perform the circular convolution between two 6-pt sequences. Since $x_2[n]$ is just a shifted impulse, the circular-convolution coincides with a circular shift of $x_1[n]$ by two points.

$$\begin{aligned} y[n] &= x_1[n] \textcircled{6} x_2[n] \\ &= x_1[n] \textcircled{6} \delta[n-2] \\ &= x_1[((n-2))_6] \end{aligned}$$



8.12. (a)

$$x[n] = \cos(\frac{\pi n}{2}), \quad 0 \le n \le 3$$

transforms to

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} \cos(\frac{\pi n}{2}) W_4^{kn}, \quad 0 \le k \le 3$$

The cosine term contributes only two non-zero values to the summation, giving:

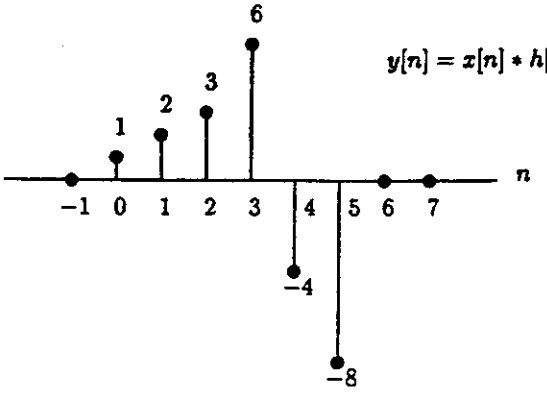
$$\begin{aligned} X[k] &= 1 - e^{-j\pi k}, \quad 0 \le k \le 3 \\ &= 1 - W_4^{2k} \end{aligned}$$

(b)

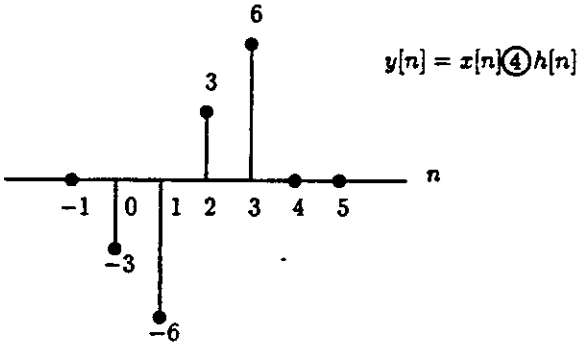
$$h[n] = 2^n, \quad 0 \le n \le 3$$

$$\begin{aligned} H[k] &= \sum_{n=0}^{3} 2^n W_4^{kn}, \quad 0 \le k \le 3 \\ &= 1 + 2W_4^k + 4W_4^{2k} + 8W_4^{3k} \end{aligned}$$

(c) Remember, circular convolution equals linear convolution plus aliasing. We need $N \geq 3+4-1=6$ to avoid aliasing. Since $N=4$,we expect to get aliasing here. First, find $y[n]=x[n]*h[n]$:



For this problem, aliasing means the last three points ($n=4,5,6$) will wrap-around on top of the first three points, giving $y[n]=x[n]\textcircled{4}h[n]$:



(d) Using the DFT values we calculated in parts (a) and (b):

$$\begin{aligned} Y[k] &= X[k]H[k] \\ &= 1+2W_4^k+4W_4^{2k}+8W_4^{3k}-W_4^{2k}-2W_4^{3k}-4W_4^{4k}-8W_4^{5k} \end{aligned}$$

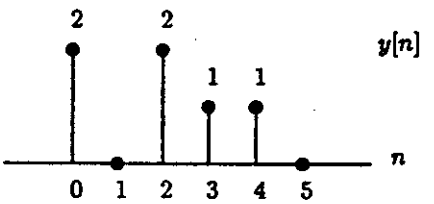
Since $W_4^{4k}=W_4^{0k}$ and $W_4^{5k}=W_4^k$

$$Y[k] = -3-6W_4^k+3W_4^{2k}+6W_4^{3k}, \quad 0 \leq k \leq 3$$

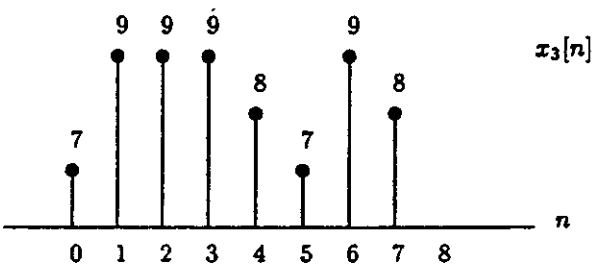
Taking the inverse DFT:

$$y[n]=-3\delta[n]-6\delta[n-1]+3\delta[n-2]+6\delta[n-3], \quad 0 \leq n \leq 3$$

8.13. Using the properties of the DFT, we get $y[n] = x[((n-2))_5]$, that is $y[n]$ is equal to $x[n]$ circularly shifted by 2. We get:

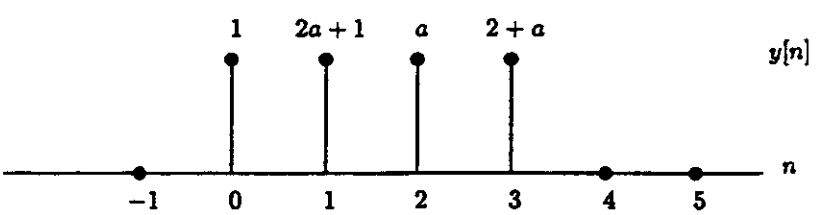


8.14. $x_3[n]$ is the linear convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$ time-aliased to $N = 8$. Carrying out the 8-point circular convolution, we get:



We thus conclude $x_3[2] = 9$.

8.15. $y[n]$ is the linear convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$ time-aliased to $N = 4$. Carrying out the 4-point circular convolution, we get:



Matching the above sequence to the one given, we get $a = -1$, which is unique.

8.16. $X_1[k]$ is the 4-point DFT of $x[n]$ and $x_1[n]$ is the 4-point inverse DFT of $X_1[k]$, therefore $x_1[n]$ is $x[n]$ time aliased to $N = 4$. In other words, $x_1[n]$ is one period of $\bar{x}[n] = x[((n))_4]$. We thus have:

$$4 = b + 1.$$

Therefore, $b = 3$. This is clearly unique.

8.17. Looking at the sequences, we see that $x_1[n] * x_2[n]$ is non-zero for $1 \leq n \leq 8$. The smallest N such that $x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$ is therefore $N = 9$.

8.18. Taking the inverse DFT of $X_1[k]$ and using the properties of the DFT, we get:

$$x_1[n] = x[((n+3))_5].$$

Therefore:

$$x_1[0] = x[3] = c.$$

We thus conclude that $c = 2$.

8.19. $x_1[n]$ and $x[n]$ are related by a circular shift as can be seen from the plots. Using the properties of the DFT and the relationship between $X_1[k]$ and $X[k]$, we have:

$$x_1[n] = x[((n-m))_6].$$

$m = 2$ works, clearly this choice is not unique, any $m = 2 + 6l$, where l is an integer, would work.

8.20.

$$X_1[k] = X[k]e^{+j(2\pi k2/N)}.$$

Using the properties of the DFT, we get:

$$x_1[n] = x[((n+2))_N].$$

From the figures, we conclude that:

$$N = 5.$$

This choice of N is unique.

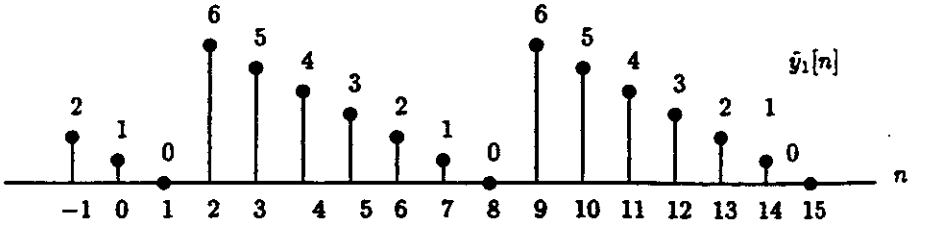
8.21. (a) We seek a sequence $\tilde{y}_1[n]$ such that

$$\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

From the discussion of Section 8.2.5, $\tilde{y}[n]$ is the result of the periodic convolution between $\tilde{x}_1[n]$ and $\tilde{x}_2[n]$.

$$\tilde{y}_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$$

Since $\tilde{x}_2[n]$ is a periodic impulse, shifted by two, the resultant sequence will be a shifted (by two) replica of $\tilde{x}_1[n]$.



Using the analysis equation of Eq. (8.11), we may rigorously derive $\tilde{y}_1[n]$:

$$\tilde{X}_1[k] = \sum_{n=0}^{6} \tilde{x}_1[n]W_7^{kn}$$

$$= 6 + 5W_7^k + 4W_7^{2k} + 3W_7^{3k} + 2W_7^{4k} + W_7^{5k}$$

$$\tilde{X}_2[k] = \sum_{n=0}^{6} \tilde{x}_2[n]W_7^{kn}$$

$$= W_7^{2k}$$

$$\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$$

$$= 6W_7^{2k} + 5W_7^{3k} + 4W_7^{4k} + 3W_7^{5k} + 2W_7^{6k} + W_7^{7k}$$

Noting that $W_7^{7k} = e^{j\frac{2\pi}{7}(7k)} = 1 = W_7^{0k}$, we use the synthesis equation of Eq. (8.12) to construct $\tilde{y}_1[n]$. The result is identical to the sequence depicted above.

(b) The DFS of the signal illustrated in Fig. P8.21-2.is given by:

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{6} \tilde{x}_3[n]W_7^{kn}$$

$$= 1 + W_7^{4k}$$

Therefore:

$$\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_3[k]$$

$$= \tilde{X}_1[k] + W_7^{4k}\tilde{X}_1[k]$$

Since the DFS is linear, the inverse DFS of $\tilde{Y}_2[k]$ is given by:

$$\tilde{y}_2[n] = \tilde{x}_1[n] + \tilde{x}_1[n-4].$$

8.22. For a finite-length sequence $x[n]$, with length equal to N, the periodic repetition of $x[-n]$ is represented by

$$x[((-n))_N] = x[((-n + \ell N))_N], \quad \ell\text{: integer}$$

where the right side is justified since $x[n]$ (and $x[-n]$) is periodic with period N.

The above statement holds true for any choice of ℓ. Therefore, for $\ell = 1$:

$$x[((-n))_n] = x[((-n + N))_N]$$

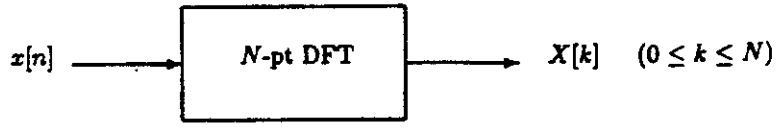
8.23. We have $x[n]$ for $0 \leq n \leq P$.

We desire to compute $X(z)|_{z=e^{-j(2\pi k/N)}}$ using one N-pt DFT.

(a) Suppose $N > P$ (the DFT size is larger than the data segment). The technique used in this case is often referred to as zero-padding. By appending zeros to a small data block, a larger DFT may be used. Thus the frequency spectra may be more finely sampled. It is a common misconception to believe that zero-padding enhances spectral resolution. The addition of a larger block of data to a larger DFT would enhance this quality.

So, we append $N_z = N - P$ zeros to the end of the sequence as follows:

$$x'[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq (P-1) \\ 0, & P \leq n \leq N \end{cases}$$



(b) Suppose $N > P$, consider taking a DFT which is smaller than the data block. Of course, some aliasing is expected. Perhaps we could introduce time aliasing to offset the effects.
Consider the N-pt inverse DFT of $X[k]$,

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}, \quad 0 \le n \le (N-1)$$

Suppose $X[k]$ was obtained as the result of an infinite summation of complex exponents:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]e^{-j(2\pi k/N)m}\right)W_N^{-kn}$$

Rearrange to get:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)(m-n)k}\right)$$

Using the orthogonality relationship of Example 8.1:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[m-n+rN] \\ x[n] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN] \end{aligned}$$

So, we should alias $x[n]$ as above. Then we take the N-pt DFT to get $X[k]$.

8.24. No. Recall that the DFT merely samples the frequency spectra. Therefore, the fact the $Im\{X[k]\} = 0$ for $0 \le k \le (N-1)$ does not guarantee that the imaginary part of the continuous frequency spectra is also zero.

For example, consider a signal which consists of an impulse centered at $n = 1$.

$$x[n] = \delta[n-1], \quad 0 \le n \le 1$$

The Fourier transform is:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega} \\ Re\{X(e^{j\omega})\} &= \cos(\omega) \\ Im\{X(e^{j\omega})\} &= -\sin(\omega) \end{aligned}$$

Note that neither is zero for all $0 \le \omega \le 2$. Now, suppose we take the 2-pt DFT:

$$\begin{aligned} X[k] &= W_2^k, \quad 0 \le k \le 1 \\ &= \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

So, $Im\{X[k]\} = 0, \quad \forall k$. However, $Im\{X(e^{j\omega})\} \neq 0$.

Note also that the size of the DFT plays a large role. For instance, consider taking the 3-pt DFT of

$$\begin{aligned} x[n] &= \delta[n-1], \quad 0 \le n \le 2 \\ X[k] &= W_3^k, \quad 0 \le k \le 2 \\ &= \begin{cases} 1, & k = 0 \\ e^{-j(2\pi/3)}, & k = 1 \\ e^{-j(4\pi/3)}, & k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Now, $Im\{X[k]\} \neq 0$, for $k = 1$ or $k = 2$.

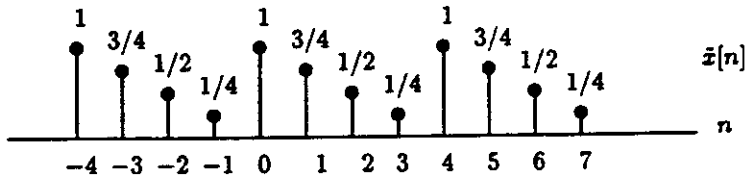
8.25. Both sequences $x[n]$ and $y[n]$ are of finite-length ($N = 4$).

Hence, no aliasing takes place. From Section 8.6.2, multiplication of the DFT of a sequence by a complex exponential corresponds to a circular shift of the time-domain sequence.

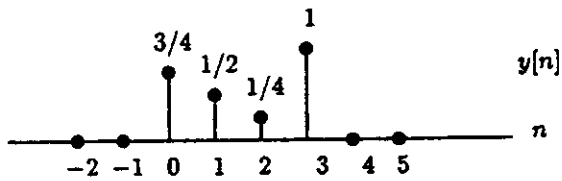
Given $Y[k] = W_4^{3k} X[k]$, we have

$$y[n] = x[((n-3))_4]$$

We use the technique suggested in problem 8.28. That is, we temporarily extend the sequence such that a periodic sequence with period 4 is formed.



Now, we shift by three (to the right), and set all values outside $0 \leq n \leq 3$ to zero.



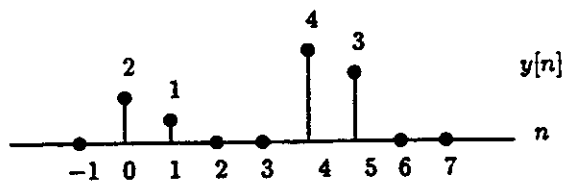
8.26. (a) When multiplying the DFT of a sequence by a complex exponential, the time-domain signal undergoes a circular shift.

For this case,

$$Y[k] = W_6^{4k} X[k], \quad 0 \leq k \leq 5$$

Therefore,

$$y[n] = x[((n-4))_6], \quad 0 \leq n \leq 5$$



(b) There are two ways to approach this problem. First, we attempt a solution by brute force.

$$\begin{aligned} X[k] &= 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k}, \quad W_6^k = e^{-j(2\pi k/6)} \text{ and } 0 \leq k \leq 5 \\ W[k] &= \mathcal{R}e\{X[k]\} \\ &= \frac{1}{2}(X[k] + X^*[k]) \\ &= \frac{1}{2}(4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k} + 4 + 3W_6^{-k} + 2W_6^{-2k} + W_6^{-3k}) \end{aligned}$$

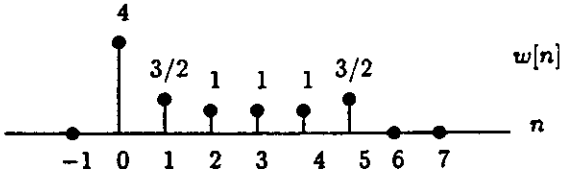
Notice that

$$\begin{aligned} W_N^k &= e^{-j(2\pi k/N)} \\ W_N^{-k} &= e^{j(2\pi k/N)} = e^{-j(2\pi/N)(N-k)} = W_N^{N-k} \\ W[k] &= 4 + \frac{3}{2}\left[W_6^k + W_6^{6-k}\right] + \left[W_6^{2k} + W_6^{6-2k}\right] + \frac{1}{2}\left[W_6^{3k} + W_6^{6-3k}\right], \quad 0 \le k \le 5 \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} w[n] &= 4\delta[n] + \frac{3}{2}\Big(\delta[n-1] + \delta[n-5]\Big) + \delta[n-2] + \delta[n-4] \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\delta[n-3] + \delta[n-3]\Big) \\ w[n] &= 4\delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \frac{3}{2}\delta[n-5], \quad 0 \le n \le 5 \end{aligned}$$

Sketching $w[n]$:

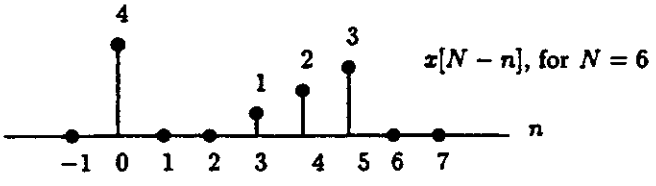


As an alternate approach, suppose we use the properties of the DFT as listed in Table 8.2.

$$\begin{aligned} W[k] &= \mathcal{R}e\{X[k]\} \\ &= \frac{X[k] + X^*[k]}{2} \\ w[n] &= \frac{1}{2}\,\text{IDFT}\{X[k]\} + \frac{1}{2}\,\text{IDFT}\{X^*[k]\} \\ &= \frac{1}{2}\Big(x[n] + x^*[((-n))_N]\Big) \end{aligned}$$

For $0 \le n \le N-1$ and $x[n]$ real:

$$w[n] = \frac{1}{2}\Big(x[n] + x[N-n]\Big)$$



So, we observe that $w[n]$ results as above.

(c) The DFT is decimated by two. By taking alternate points of the DFT output, we have half as many points. The influence of this action in the time domain is, as expected, the appearance of aliasing. For the case of decimation by two, we shall find that an additional replica of x[n] surfaces, since the sequence is now periodic with period 3.

From part (b):

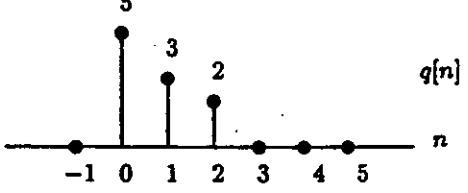
$$X[k] = 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k}, \quad 0 \le k \le 5$$

Let $Q[k] = X[2k]$,

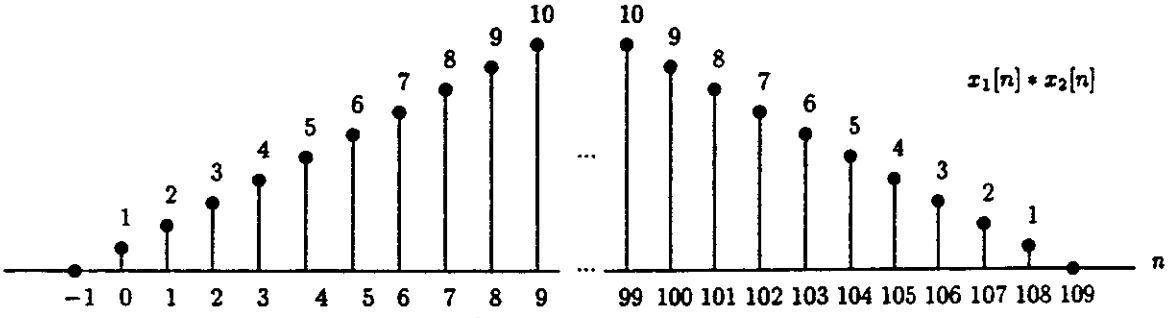
$$Q[k] = 4 + 3W_3^k + 2W_3^{2k} + W_3^{3k}, \quad 0 \le k \le 2$$

Noting that $W_3^{3k} = W_3^{0k}$

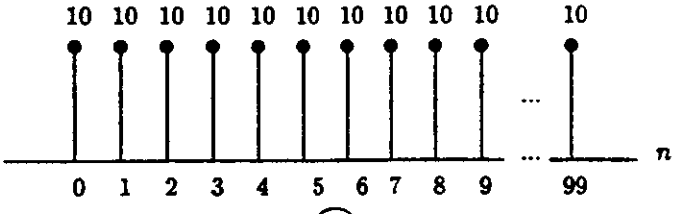
$$q[n] = 5\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2], \quad 0 \le n \le 2$$



8.27. (a) The linear convolution, $x_1[n] * x_2[n]$ is a sequence of length $100 + 10 - 1 = 109$.

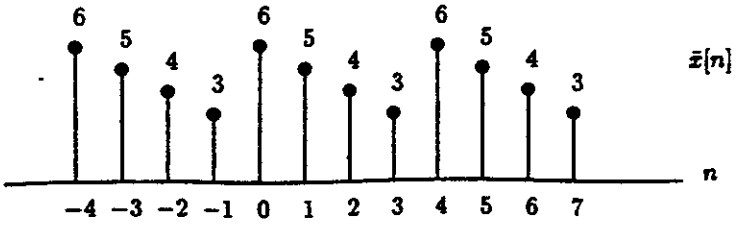


(b) The circular convolution, $x_1[n] \textcircled{100} x_2[n]$, can be obtained by aliasing the first 9 points of the linear convolution above:

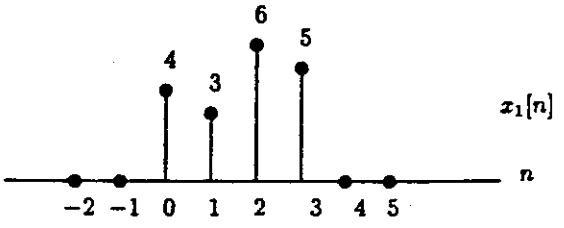


(c) Since $N \ge 109$, the circular convolution $x_1[n] \textcircled{110} x_2[n]$ will be equivalent to the linear convolution of part (a).

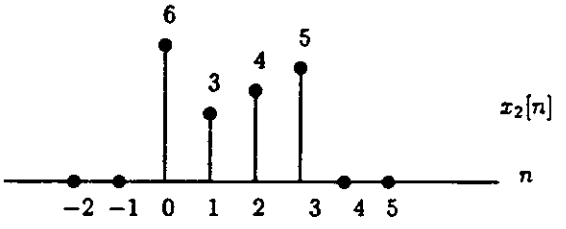
8.28. We may approach this problem in two ways. First, the notion of modulo arithmetic may be simplified if we utilize the implied periodic extension. That is, we redraw the original signal as if it were periodic with period $N = 4$. A few periods are sufficient:



To obtain $x_1[n] = x[((n-2))_4]$, we shift by two (to the right) and only keep those points which lie in the original domain of the signal (i.e. $0 \leq n \leq 3$):



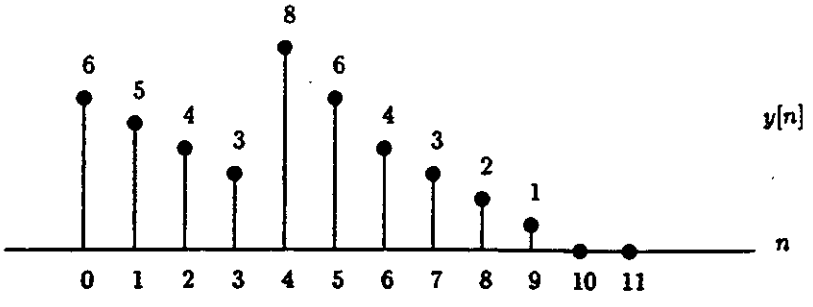
To obtain $x_2[n] = x[((-n))_4]$, we fold the pseudo-periodic version of $x[n]$ over the origin (time-reversal), and again we set all points outside $0 \leq n \leq 3$ equal to zero. Hence,



Note that $x[((0))_4] = x[0]$, etc.

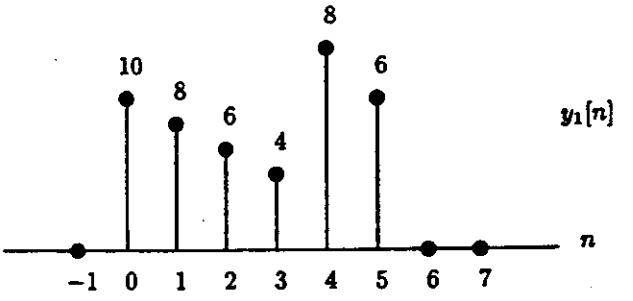
In the second approach, we work with the given signal. The signal is confined to $0 \leq n \leq 3$; therefore, the circular nature must be maintained by picturing the signal on the circumference of a cylinder.

8.29. Circular convolution equals linear convolution plus aliasing. First, we find $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$:



Note that $y[n]$ is a ten point sequence ($N = 6 + 5 - 1$).

(a) For $N = 6$, the last four non-zero point ($6 \leq n \leq 9$) will alias to the first four points, giving us $y_1[n] = x_1[n] \textcircled{6} x_2[n]$



(b) For $N = 10, N \geq 6 + 5 - 1$, so no aliasing occurs, and circular convolution is identical to linear convolution.

8.30. We have a finite length sequence, whose 64-pt DFT contains only one nonzero point (for $k = 32$).

(a) Using the synthesis equation Eq. (8.68):

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \quad 0 \leq n \leq (N-1)$$

Substitution yields:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{64} X[32] W_{64}^{-32n} \\ &= \frac{1}{64} e^{j\frac{2\pi}{64}(32)n} \\ &= \frac{1}{64} e^{j\pi n} \\ x[n] &= \frac{1}{64}(-1)^n, \quad 0 \leq n \leq (N-1) \end{aligned}$$

The answer is unique because we have taken the 64-pt DFT of a 64-pt sequence.

(b) The sequence length is now $N = 192$.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{192} \sum_{k=0}^{191} X[k] W_{192}^{-kn}, \; 0 \leq n \leq 191 \\ x[n] &= \begin{cases} \frac{1}{64}(-1)^n & 0 \leq n \leq 63 \\ 0 & 64 \leq n \leq 191 \end{cases} \end{aligned}$$

This solution is not unique. By taking only 64 spectral samples, $x[n]$ will be aliased in time. As an alternate sequence, consider

$$x'[n] = \frac{1}{64} \left(\frac{1}{3}\right) (-1)^n, \quad 0 \leq n \leq 191$$

8.31. We have a 10-point sequence, $x[n]$. We want a modified sequence, $x_1[n]$, such that the 10-pt. DFT of $x_1[n]$ corresponds to

$$X_1[k] = X(z)|_{z=\frac{1}{2}e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}$$

Recall the definition of the Z-transform of $x[n]$:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Since $x[n]$ is of finite duration ($N = 10$), we assume:

$$x[n] = \begin{cases} \text{nonzero}, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Therefore,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{9} x[n] z^{-n}$$

Substituting in $z = \frac{1}{2} e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}$:

$$X(z)|_{z=\frac{1}{2}e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}} = \sum_{n=0}^{9} x[n] \left(\frac{1}{2} e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]} \right)^{-n}$$

We seek the signal $x_1[n]$, whose 10-pt. DFT is equivalent to the above expression. Recall the analysis equation for the DFT:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{9} x_1[n] W_{10}^{kn}, \quad 0 \le k \le 9$$

Since $W_{10}^{kn} = e^{-j(2\pi/10)kn}$, by comparison

$$x_1[n] = x[n] \left(\frac{1}{2} e^{j(\pi/10)} \right)^{-n}$$

8.32. We have a finite-length sequence, $x[n]$ with $N = 8$. Suppose we interpolate by a factor of two. That is, we wish to double the size of $x[n]$ by inserting zeros at all odd values of n for $0 \le n \le 15$.

Mathematically,

$$y[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ even}, \quad 0 \le n \le 15 \\ 0, & n \text{ odd}, \end{cases}$$

The 16-pt. DFT of $y[n]$:

$$\begin{aligned} Y[k] &= \sum_{n=0}^{15} y[n] W_{16}^{kn}, \quad 0 \le k \le 15 \\ &= \sum_{n=0}^{7} x[n] W_{16}^{2kn} \end{aligned}$$

Recall, $W_{16}^{2kn} = e^{j(2\pi/16)(2k)n} = e^{-j(2\pi/8)kn} = W_8^{kn}$,

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n] W_8^{kn}, \quad 0 \le k \le 15$$

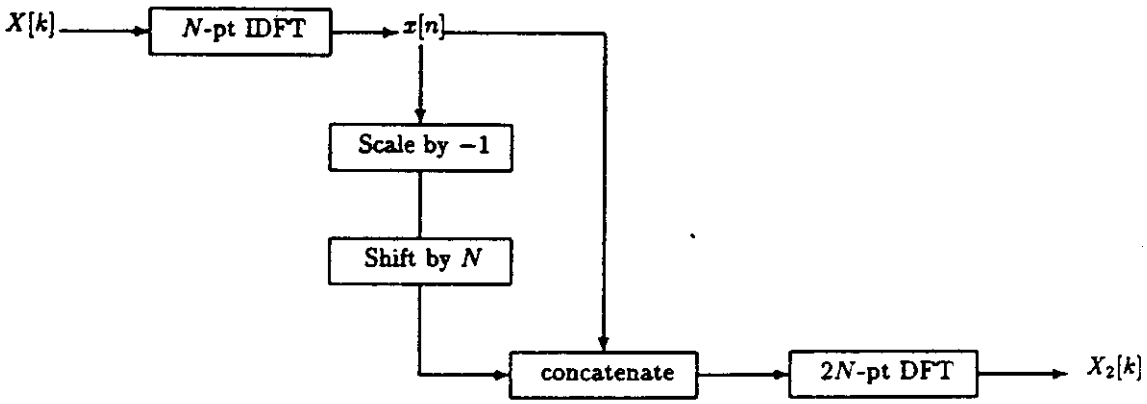
Therefore, the 16-pt. DFT of the interpolated signal contains two copies of the 8-pt. DFT of $x[n]$. This is expected since $Y[k]$ is now periodic with period 8 (see problem 8.1). Therefore, the correct choice is C.

As a quick check, $Y[0] = X[0]$.

8.33. (a) Since

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le N-1 \\ -x[n-N], & N \le n \le 2N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

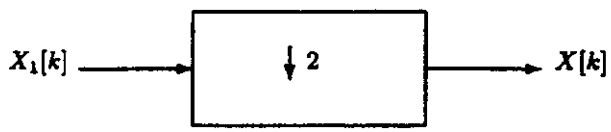
If $X[k]$ is known, $x_2[n]$ can be constructed by :



(b) To obtain $X[k]$ from $X_1[k]$, we might try to take the inverse DFT (2N-pt) of $X_1[k]$, then take the N-pt DFT of $x_1[n]$ to get $X[k]$.
However, the above approach is highly inefficient. A more reasonable approach may be achieved if we examine the DFT analysis equations involved. First,

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x_1[n] W_{2N}^{kn}, \qquad 0 \le k \le (2N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(k/2)n}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ X_1[k] &= X[k/2], \quad 0 \le k \le (N-1) \end{aligned}$$

Thus, an easier way to obtain $X[k]$ from $X_1[k]$ is simply to decimate $X_1[k]$ by two.



8.34. (a) The DFT of the even part of a real sequence:

If $x[n]$ is of length N, then $x_e[n]$ is of length $2N-1$:

$$x_e[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]+x[-n]}{2}, & (-N+1) \le n \le (N-1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_e[k] = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(\frac{x[n]+x[-n]}{2}\right) W_{2N-1}^{kn}, \quad (-N+1) \le k \le (N-1)$$

$$= \sum_{n=-N+1}^{0} \frac{x[-n]}{2} W_{2N-1}^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{2} W_{2N-1}^{kn}$$

Let $m = -n$,

$$X_e[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{2} W_{2N-1}^{-kn} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{2} W_{2N-1}^{kn}$$

$$X_e[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-1}\right)$$

Recall

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

and

$$Re\{X[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

So: $\text{DFT}\{x_e[n]\} \neq Re\{X[k]\}$

(b)

$$Re\{X[k]\} = \frac{X[k]+X^*[k]}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} (x[n]+x[N-n]) W_N^{kn}$$

So,

$$Re\{X[k]\} = \text{DFT}\left\{\frac{1}{2}(x[n]+x[N-n])\right\}$$

8.35. From condition 1, we can determine that the sequence is of finite length ($N=5$). Given:

$$X(e^{j\omega}) = 1 + A_1 \cos\omega + A_2 \cos 2\omega$$

$$= 1 + \frac{A_1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \frac{A_2}{2}(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$$

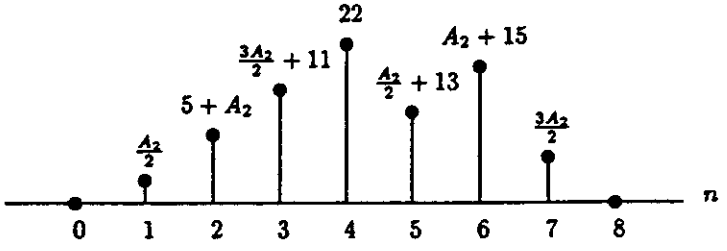
From the Fourier analysis equation, we can see by matching terms that:

$$x[n] = \delta[n] + \frac{A_1}{2}(\delta[n-1] + \delta[n+1]) + \frac{A_2}{2}(\delta[n-2] + \delta[n+2])$$

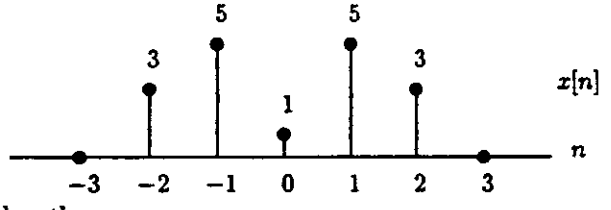
Condition 2 yields one of the values for the amplitude constants of condition 1. Since $x[n] * \delta[n-3] = x[n-3] = 5$ for $n = 2$, we know $x[-1] = 5$, and also that $x[1] = x[-1] = 5$. Knowing both these values tells us that $A_1 = 10$.

For condition 3, we perform a circular convolution between $x[((n-3))_8]$ and $w[n]$, a three-point sequence. For this case, linear convolution is the same as circular convolution since $N = 8 \geq 6 + 3 - 1$.

We know $x[((n-3))_8] = x[n-3]$, and convolving this with $w[n]$ from Fig P8.35-1 gives:



For $n = 2, w[n] * x[n-3] = 11$ so $A_2 = 6$. Thus, $x[2] = x[-2] = 3$, and we have fully specified $x[n]$:



8.36. We have the finite-length sequence:

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-3]$$

(i) Suppose we perform the 5-pt DFT:

$$X[k] = 2 + W_5^k + W_5^{3k}, \quad 0 \leq k \leq 5$$

where $W_5^k = e^{-j(\frac{2\pi}{5})k}$.

(ii) Now, we square the DFT of $x[n]$:

$$\begin{aligned} Y[k] &= X^2[k] \\ &= 2 + 2W_5^k + 2W_5^{3k} \\ &\quad + 2W_5^k + W_5^{2k} + W_5^{5k} \\ &\quad + 2W_5^{3k} + W_5^{4k} + W_5^{6k}, \quad 0 \leq k \leq 5 \end{aligned}$$

Using the fact $W_5^{5k} = W_5^0 = 1$ and $W_5^{6k} = W_5^k$

$$Y[k] = 3 + 5W_5^k + W_5^{2k} + 4W_5^{3k} + W_5^{4k}, \quad 0 \leq k \leq 5$$

(a) By inspection,

$$y[n] = 3\delta[n] + 5\delta[n-1] + \delta[n-2] + 4\delta[n-3] + \delta[n-4], \quad 0 \le n \le 5$$

(b) This procedure performs the autocorrelation of a real sequence. Using the properties of the DFT, an alternative method may be achieved with convolution:

$$y[n] = \text{IDFT}\{X^2[k]\} = x[n] * x[n]$$

The IDFT and DFT suggest that the convolution is circular. Hence, to ensure there is no aliasing, the size of the DFT must be $N \ge 2M - 1$ where M is the length of $x[n]$. Since $M = 3, N \ge 5$.

8.37. (a)

$$g_1[n] = x[N-1-n], \quad 0 \le n \le (N-1)$$

$$G_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1)$$

Let $m = N-1-n$,

$$\begin{aligned} G_1[k] &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{k(N-1-m)} \\ &= W_N^{k(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{-km} \end{aligned}$$

Using $W_N^k = e^{-j(2\pi k/N)}, W_N^{k(N-1)} = W_N^{-k} = e^{j(2\pi k/N)}$

$$\begin{aligned} G_1[k] &= e^{j(2\pi k/N)} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{j(2\pi km/N)} \\ &= e^{j(2\pi k/N}X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi k/N)} \\ G_1[k] &= H_7[k] \end{aligned}$$

(b)

$$g_2[n] = (-1)^n x[n], \quad 0 \le n \le (N-1)$$

$$\begin{aligned} G_2[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(\frac{N}{2})n}W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(k+\frac{N}{2})n} \\ &= X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi(k+\frac{N}{2})/N} \\ G_2[k] &= H_8[k] \end{aligned}$$

(c)

$$g_3[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le (N-1) \\ x[n-N], & N \le n \le (2N-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_3[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] W_{2N}^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n-N] W_{2N}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_{2N}^{kn} + \sum_{m=0}^{N-1} x[m] W_{2N}^{k(m+N)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(1 + W_{2N}^{kN}\right) W_{2N}^{kn} \\ &= \left(1 + W_N^{(kN/2)}\right) \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(kn/2)} \\ &= \left(1 + (-1)^k\right) X(e^{j\omega})|_{\omega=(\pi k/N)} \\ G_3[k] &= H_3[k] \end{aligned}$$

(d)

$$g_4[n] = \begin{cases} x[n] + x[n+N/2], & 0 \le n \le (N/2-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_4[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(x[n] + x[n + \frac{N}{2}]\right) W_{N/2}^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{kn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_{N/2}^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_{N/2}^{kn} + \sum_{m=N/2}^{N-1} x[m] W_{N/2}^{k(m-N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{2kn} \\ &= X(e^{j\omega})|_{\omega=(4\pi k/N)} \\ G_4[k] &= H_6[k] \end{aligned}$$

(e)

$$g_5[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le (N-1) \\ 0, & N \le n \le (2N-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_5[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x[n]W_{2N}^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{2N}^{kn} \\ &= X(e^{j\omega})|_{\omega=(\pi k/N)} \\ G_5[k] &= H_2[k] \end{aligned}$$

(f)

$$g_6[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ even}, \quad 0 \le n \le (2N-1) \\ 0, & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} G_6[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x[n/2]W_{2N}^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \\ &= X(e^{j\omega})|_{\omega=(2\pi k/N)} \\ G_6[k] &= H_1[k] \end{aligned}$$

(g)

$$g_7[n] = x[2n], \quad 0 \le n \le (N/2-1)$$

$$\begin{aligned} G_7[k] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n]W_{N/2}^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\frac{1+W_N^{(N/2)n}}{2}\right)W_N^{kn} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(W_N^{nk} + W_N^{n(k+N/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[X(e^{j(2\pi/N)}) + X(e^{j(2\pi/N)(k+N/2)})\right] \\ G_7[k] &= H_5[k] \end{aligned}$$

8.38. From Table 8.2, the N-pt DFT of an N-pt sequence will be real-valued if

$$x[n] = x[((-n))_N].$$

For $0 \le n \le (N-1)$, this may be stated as,

$$x[n] = x[N-n], \quad 0 \le n \le (N-1)$$

For this case, N = 10, and

$$\begin{aligned} x[1] &= x[9] \\ x[2] &= x[8] \\ &\vdots \end{aligned}$$

The Fourier transform of $x[n]$ displays generalized linear phase (see Section 5.7.2). This implies that for $x[n] \neq 0$, $0 \leq n \leq (N-1)$:

$$x[n] = x[N-1-n]$$

For $N = 10$,

$$\begin{aligned} x[0] &= x[9] \\ x[1] &= x[8] \\ x[2] &= x[7] \\ &\vdots \end{aligned}$$

To satify both conditions, $x[n]$ must be a constant for $0 \leq n \leq 9$.

8.39. We have two 100-pt sequences which are nonzero for the interval $0 \leq n \leq 99$.

If $x_1[n]$ is nonzero for $10 \leq n \leq 39$ only, the linear convolution

$$x_1[n] * x_2[n]$$

is a sequence of length $40 + 100 - 1 = 139$, which is nonzero for the range $10 \leq n \leq 139$.

A 100-pt circular convolution is equivalent to the linear convolution with the first 40 points aliased by the values in the range $100 \leq n \leq 139$.

Therefore, the 100-pt circular convolution will be equivalent to the linear convolution only in the range $40 \leq n \leq 99$.

8.40. (a) Since $x[n]$ is 50 points long, and $h[n]$ is 10 points long, the linear convolution $y[n] = x[n] * h[n]$ must be $50 + 10 - 1 = 59$ pts long.

(b) Circular convolution = linear convolutin + aliasing.
If we let $y[n] = x[n] * h[n]$, a more mathematical statement of the above is given by

$$x[n] \textcircled{N} h[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n + rN], \quad 0 \leq n \leq (N-1)$$

For $N = 50$,

$$x[n] \textcircled{50} h[n] = y[n] + y[n+50], \quad 0 \leq n \leq 49$$

We are given: $x[n] \textcircled{50} h[n] = 10$
Hence,

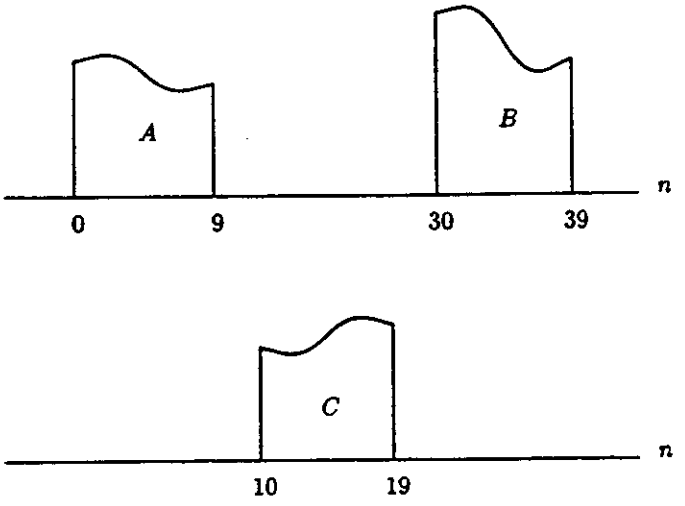
$$y[n] + y[n+50] = 10, \quad 0 \leq n \leq 49$$

Also, $y[n] = 5, \quad 0 \leq n \leq 4$.
Using the above information:

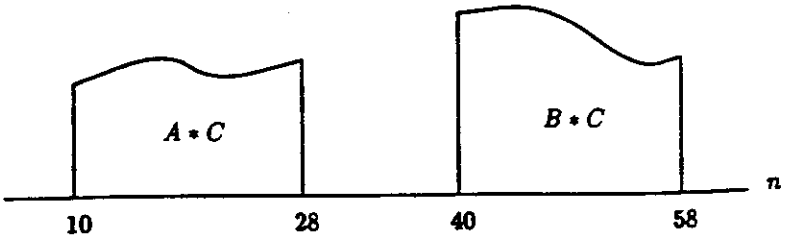
$$
\begin{array}{lll}
n=0 & y[0]+y[50] = 10 \\
\vdots & \quad y[50] = 5 \\
n=4 & y[4]+y[54] = 10 \\
 & \quad y[54] = 5 \\
n=5 & y[5]+y[55] = 10 \\
\vdots & \quad y[55] = ? \\
n=8 & y[8]+y[58] = 10 \\
 & \quad y[58] = ? \\
n=9 & y[9] = 10 \\
\vdots & \\
n=49 & \quad y[49] = 10
\end{array}
$$

To conclude, we can determine $y[n]$ for $9 \leq n \leq 55$ only. (Note that $y[n]$ for $0 \leq n \leq 4$ is given.)

8.41. We have



(a) The linear convolution $x[n] * y[n]$ is a $40 + 20 - 1 = 59$ point sequence:



Thus, $x[n] * y[n] = w[n]$ is nonzero for $10 \leq n \leq 28$ and $40 \leq n \leq 58$.

(b) The 40-pt circluar convolution can be obtained by aliasing the linear convolution. Specifically, we alias the points in the range $40 \le n \le 58$ to the range $0 \le n \le 18$.
Since $w[n] = x[n] * y[n]$ is zero for $0 \le n \le 9$, the circular convolution $g[n] = x[n] \textcircled{40} y[n]$ consists of only the (aliased) values:

$$w[n] = x[n] * y[n], \quad 40 \le n \le 49$$

Also, the points of $g[n]$ for $18 \le n \le 39$ will be equivalent to the points of $w[n]$ in this range.
To conclude,

$$\begin{aligned} w[n] &= g[n], \quad 18 \le n \le 39 \\ w[n+40] &= g[n], \quad 0 \le n \le 9 \end{aligned}$$

8.42. (a) The two sequences are related by the circular shift:

$$h_2[n] = h_1[((n+4))_8]$$

Thus,

$$H_2[k] = W_8^{-4k} H_1[k]$$

and

$$|H_2[k]| = |W_8^{-4k} H_1[k]| = |H_1[k]|$$

So, yes the magnitudes of the 8-pt DFTs are equal.

(b) $h_1[n]$ is nearly like $(\sin x)/x$.
Since $H_2[k] = e^{j\pi k} H_1[k]$, $h_1[n]$ is a better lowpass filter.

8.43. (a) Overlap add:
If we divide the input into sections of length L, each section will have an output length:

$$L + 100 - 1 = L + 99$$

Thus, the required length is

$$L = 256 - 99 = 157$$

If we had 63 sections, $63 \times 157 = 9891$, there will be a remainder of 109 points. Hence, we must pad the remaining data to 256 and use another DFT.
Therefore, we require 64 DFTs and 64 IDFTs. Since $h[n]$ also requires a DFT, the total:

65 DFTs and 64 IDFTs

(b) Overlap save:
We require 99 zeros to be padded in from of the sequence. The first 99 points of the output of each section will be discarded. Thus the length after padding is 10099 points. The length of each section overlap is $256 - 99 = 157 = L$.
We require $65 \times 157 = 10205$ to get all 10099 points. Because $h[n]$ also requires a DFT:

66 DFTs and 65 IDFTs

(c) Ignoring the transients at the beginning and end of the direct convolution, each output point requires 100 multiplies and 99 adds.
overlap add:

$$\begin{aligned} \#\text{ mult} &= 129(1024) = 132096 \\ \#\text{ add} &= 129(2048) = 264192 \end{aligned}$$

overlap save:

$$\begin{aligned} \#\text{ mult} &= 131(1024) = 134144 \\ \#\text{ add} &= 131(2048) = 268288 \end{aligned}$$

direct convolution:

$$\begin{aligned} \#\text{ mult} &= 100(10000) = 1000000 \\ \#\text{ add} &= 99(10000) = 990000 \end{aligned}$$

8.44. First we need to compute the values $Q[0]$ and $Q[3]$:

$$\begin{aligned} Q[0] &= X_1(1) = X_1(e^{jw})|_{w=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_1[n] = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \\ Q[3] &= X_1(-1) = X_1(e^{jw})|_{w=\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x_1[n](-1)^n \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

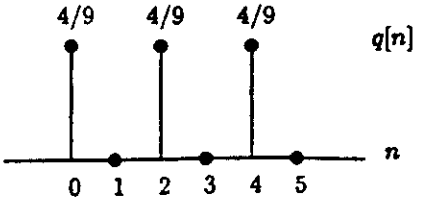
One possibility for $Q[k]$, the six-point DFT, is:

$$Q[k] = \frac{4}{3}\delta[k] + \frac{4}{3}\delta[k-3].$$

We then find $q[n]$, for $0 \le n < 6$:

$$\begin{aligned} q[n] &= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} Q[k]e^{\frac{2\pi}{6}kn} \\ &= \frac{1}{6}(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}(-1)^n) \\ &= \frac{2}{9}(1+(-1)^n) \end{aligned}$$

otherwise it's 0. Here's a sketch of q[n]:



8.45. We have:

$$DFT_7\{x_2[n]\} = X_2[k] = \sum_0^4 x_2[n]e^{-j\frac{2\pi}{7}kn}.$$

Then:

$$\begin{aligned} x_2[0] &= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} X_2[k] \\ &= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}(Re\{X_2[k]\} + jIm\{X_2[k]\}) \\ &= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} Re\{X_2[k]\} \text{ , since } x_2[0] \text{ is real.} \\ &= g[0]. \end{aligned}$$

To determine the relationship between $x_2[1]$ and g[1], we first note that since $x_2[n]$ is real:

$$X(e^{jw}) = X^*(e^{-jw}).$$

Therefore:

$$X[k] = X^*[N-k] \text{ , } k = 0, ..., 6.$$

We thus have:

$$\begin{aligned} g[1] &= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} Re\{X_2[k]\}W_7^{-k} \\ &= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} \frac{X_2[k] + X_2^*[k]}{2} W_7^{-k} \\ &= \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} \frac{X_2[k]}{2} W_7^{-k} + \frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6} \frac{X_2[N-k]}{2} W_7^{-k} \\ &= \frac{1}{2}x_2[1] + \frac{1}{14}\sum_{k=0}^{6} X_2[k]W_7^{k} \\ &= \frac{1}{2}x_2[1] + \frac{1}{14}\sum_{k=0}^{6} X_2[k]W_7^{-6k} \\ &= \frac{1}{2}(x_2[1] + x_2[6]) \\ &= \frac{1}{2}(x_2[1] + 0) \\ &= \frac{1}{2}x_2[1]. \end{aligned}$$

8.46. (i) This corresponds to $x_i[n] = x_i^*[((-n))_N]$, where $N = 5$. Note that this is only true for $x_2[n]$.

(ii) $X_i(e^{jw})$ has linear phase corresponds to $x_i[n]$ having some internal symmetry, this is only true for $x_1[n]$.

(iii) The DFT has linear phase corresponds to $\tilde{x}_i[n]$ (the periodic sequence obtained from $x_i[n]$) being symmetric, this is true for $x_1[n]$ and $x_2[n]$ only.

8.47. (a)

$$\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j\frac{2\pi}{8}k9} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j\frac{2\pi}{8}k} = x[1].$$

(b)

$$\begin{aligned} V[k] &= X(z)|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k+\pi}{8})}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x[n]z^{-n}|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k+\pi}{8})}} \\ &= \sum_{n=0}^{n=8} x[n]z^{-n}|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k+\pi}{8})}} \\ &= \sum_{n=0}^{n=8} x[n](2e^{j\frac{\pi}{8}})^{-n}e^{-j\frac{2\pi k}{8}n} \\ &= \sum_{n=0}^{n=8} v[n]e^{-j\frac{2\pi k}{8}n}. \end{aligned}$$

We thus conclude that

$$v[n] = x[n](2e^{j\frac{\pi}{8}})^{-n}.$$

(c)

$$\begin{aligned} w[n] &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} W[k]W_4^{-kn} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(X[k]+X[k+4])e^{+j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]e^{+j\frac{2\pi}{4}kn} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k+4]e^{+j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]e^{+j\frac{2\pi}{4}kn} + \frac{1}{4}\sum_{k=4}^{7} X[k]e^{+j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{+j\frac{2\pi}{8}k2n} \\ &= 2x[2n]. \end{aligned}$$

We thus conclude that

$$w[n] = 2x[2n].$$

(d) Note that $Y[k]$ can be written as:

$$\begin{aligned} Y[k] &= X[k] + (-1)^k X[k] \\ &= X[k] + W_8^{4k} X[k]. \end{aligned}$$

Using the DFT properties, we thus conclude that

$$y[n] = x[n] + x[((n-4))_8].$$

8.48. (a) No. x[n] only has N degrees of freedom and we have $M \geq N$ constraints which can only be satisfied if $x[n] = 0$. Specifically, we want

$$X(e^{j\frac{2\pi k}{M}}) = DFT_M\{x[n]\} = 0.$$

Since $M \geq N$, there is no aliasing and x[n] can be expressed as:

$$x[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X[k]W_M^{kn}\ ,\ n = 0, ..., M-1.$$

Where $X[k]$ is the M-point DFT of $x[n]$, since $X[k] = 0$, we thus conclude that $x[n] = 0$, and therefore the answer is NO.

(b) Here, we only need to make sure that when time-aliased to M samples, $x[n]$ is all zeros. For example, let

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

then,

$$X(e^{jw}) = 1 - e^{-2jw}.$$

Let $M = 2$, then we have

$$\begin{aligned} X(e^{j\frac{2\pi}{2}0}) &= 1 - 1 = 0 \\ X(e^{j\frac{2\pi}{2}1}) &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

8.49. $x_2[n]$ is $x_1[n]$ time aliased to have only N samples. Since

$$x_1[n] = (\frac{1}{3})^n u[n],$$

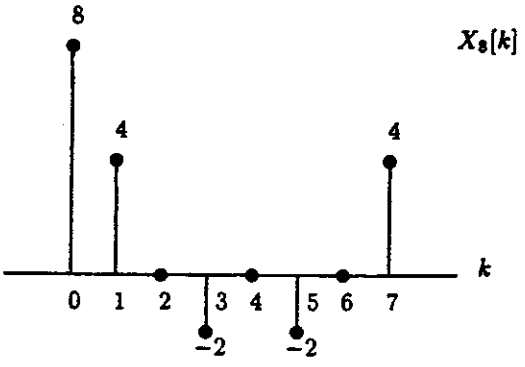
We get:

$$x_2[n] = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{3})^n}{1-(\frac{1}{3})^N} & ,\ n = 0, ..., N-1 \\ 0 & ,\ \text{otherwise} \end{cases}$$

8.50. (a) Let $n = 0, ..., 7$, we can write $x[n]$ as:

$$\begin{aligned} x[n] &= 1 + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}) - \frac{1}{4}(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}n7} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{8}n3} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{8}n5} \\ &= \frac{1}{8}(8 + 4e^{j\frac{2\pi}{8}n} + 4e^{j\frac{2\pi}{8}n7} - 2e^{j\frac{2\pi}{8}n3} - 2e^{j\frac{2\pi}{8}n5}) \\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X_8[k]e^{j\frac{2\pi k}{8}n} \end{aligned}$$

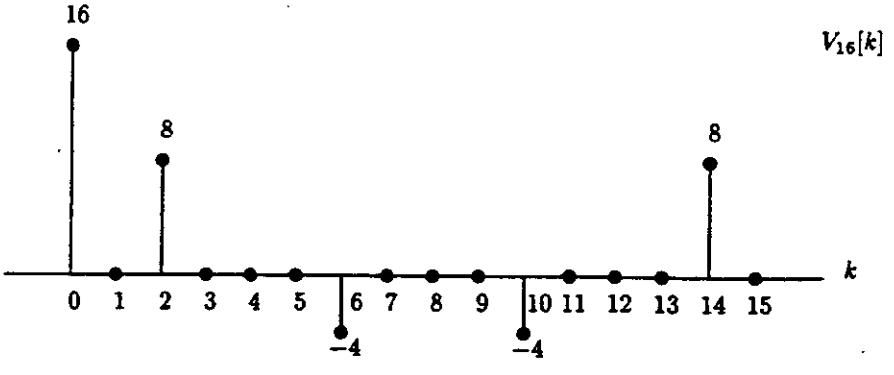
We thus get the following plot for $X_8[k]$:



(b) Now let $n = 0, ..., 15$, we can write $v[n]$ as:

$$\begin{aligned} v[n] &= 1 + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}) - \frac{1}{4}(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{16}n2} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{16}n14} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{16}n6} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{16}n10} \\ &= \frac{1}{16}(16 + 8e^{j\frac{2\pi}{16}n2} + 8e^{j\frac{2\pi}{16}n14} - 4e^{j\frac{2\pi}{16}n6} - 4e^{j\frac{2\pi}{16}n10}) \\ &= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15} V_{16}[k]e^{j\frac{2\pi k}{16}n} \end{aligned}$$

We thus get the following plot for $V_{16}[k]$:



(c)

$$|X_{16}[k]| = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k} \qquad 0 \le k \le 15$$

where $X(e^{j\omega})$ is the Fourier transform of $x[n]$.
Note that $x[n]$ can be expressed as:

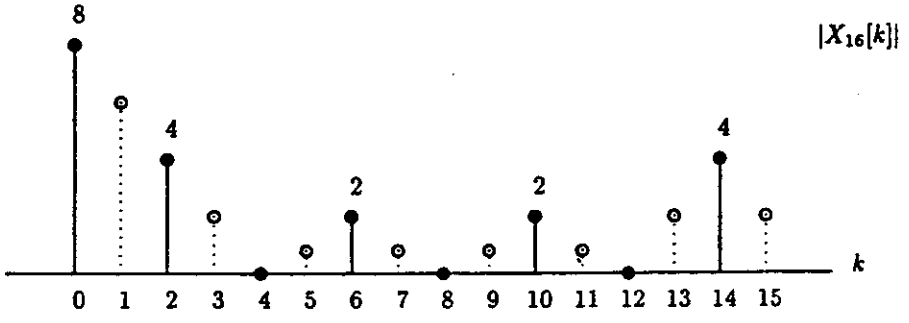
$$x[n] = y[n]w[n]$$

where:

$$y[n] = 1 + \cos(\frac{\pi n}{4}) - \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi n}{4})$$

and $w[n]$ is an eight-point rectangular window.
$|X_{16}[k]|$ will therefore have as its even points the sequence $|X_8[k]|$.The odd points will correspond to the bandlimited interpolation between the even-point samples. The values that we can find exactly by inspection are thus:

$$|X_{16}[k]| = |X_8[k/2]| \qquad k = 0, 2, 4, ..., 14.$$



8.51. We wish to verify the identity of Eq. (8.7):

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k-r = mN,\ m:\ \text{integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(a) For $k - r = mN$,

$$\begin{aligned} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} &= e^{j\frac{2\pi}{N}(mN)n} \\ & e^{j2\pi mn} \\ & (1)^{mn} \end{aligned}$$

Since m and n are integers;

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = 1 \text{ , for } k - r = mN$$

So,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1 \\ &= 1 \text{ , for } k - r = mN \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}ln} = \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}lN}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}l}}$$

This closed form solution is indeterminate for $l = mN$ only.
For the case when $l = mN$, we use L'Hôpital's Rule to find:

$$\begin{aligned} \lim_{l\to mN} \frac{1 - e^{j2\pi l}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}l}} &= \left[\frac{-j2\pi e^{j2\pi l}}{-j\frac{2\pi}{N}e^{j\frac{2\pi}{N}l}}\right]_{l=mN} \\ &= N \end{aligned}$$

(c) For the case when $k - r \neq mN$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} &= \frac{1-e^{j2\pi(k-r)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Note that the denominator is nonzero, while the numerator will always be zero for $k - r \neq mN$.

8.52. (a) We know from Eq. (8.11) that if $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m]$, we have:

$$\tilde{X}_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n-m]W_N^{kn}$$

If we substitute $r = n - m$ into this equation, we get:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1[k] &= \sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r]W_N^{k(r+m)} \\ &= W_N^{km}\sum_{r=-m}^{N-1-m} \tilde{x}[r]W_N^{kr}\end{aligned}$$

(b) We can decompose the summation from part (a) into

$$\tilde{X}_1[k] = W_N^{km}\left[\sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r]W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{N-1-m} \tilde{x}[r]W_N^{kr}\right]$$

Using the fact that $\tilde{x}[r]$ and W_N^{kr} are periodic with period N:

$$\sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r]W_N^{kr} = \sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r+N]W_N^{k(r+N)}$$

Substituting $\ell = r + N$

$$\sum_{r=-m}^{-1} \tilde{x}[r]W_N^{kr} = \sum_{\ell=N-m}^{N-1} \tilde{x}[\ell]W_N^{k\ell}$$

(c) Using the result from part (b):

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1[k] &= W_N^{km}\left[\sum_{r=N-m}^{N-1} \tilde{x}[r]W_N^{kr} + \sum_{r=0}^{N-m-1} \tilde{x}[r]W_N^{kr}\right] \\ &= W_N^{km}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}[r]W_N^{kr} \\ &= W_N^{km}\tilde{X}[k]\end{aligned}$$

Hence, if $\tilde{x}_1[n] = \tilde{x}[n-m]$, then $\tilde{X}_1[k] = W_N^{km}\tilde{X}[k]$.

8.53. (a) 1. The DFS of $\tilde{x}^*[n]$ is given by:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*[n]W_N^{kn} &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]W_N^{-kn}\right)^* \\ &= \tilde{X}^*[-k]\end{aligned}$$

2. The DFS of $\tilde{x}^*[-n]$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}^*[-n]W_N^{kn} &= \left(\sum_{l=-N+1}^{0} \tilde{x}[l]W_N^{kl}\right)^* \\ &= X^*[k]\end{aligned}$$

3. The DFS of $Re\{\tilde{x}[n]\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}[n]+\tilde{x}^*[n]}{2} W_N^{kn} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{X}[k]+\tilde{X}^*[-k]\right) \\ &= \tilde{X}_e[k]\end{aligned}$$

4. The DFS of $jIm\{\tilde{x}[n]\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}[n]-\tilde{x}^*[n]}{2} W_N^{kn} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{X}[k]-\tilde{X}^*[-k]\right) \\ &= \tilde{X}_o[k]\end{aligned}$$

(b) Consider $\tilde{x}[n]$ real:

1.

$$Re\{\tilde{X}[k]\} = \frac{\tilde{X}[k]+\tilde{X}^*[k]}{2}$$

From part (a), if $\tilde{x}[n]$ is real,

$$\begin{aligned}\text{DFS}\ \{\tilde{x}[n]\} &= \text{DFS}\ \{\tilde{x}^*[n]\} \\ \text{DFS}\ \{\tilde{x}[-n]\} &= \text{DFS}\ \{\tilde{x}^*[-n]\}\end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= \tilde{X}^*[-k] \\ \tilde{X}[-k] &= \tilde{X}^*[k] \\ Re\{\tilde{X}[k]\} &= \frac{X^*[k]+X[-k]}{2} \\ &= Re\{\tilde{X}[-k]\}\end{aligned}$$

(i.e. the real part of $\tilde{X}[k]$ is even.)

2.

$$\begin{aligned}Im\{\tilde{X}[k]\} &= \frac{\tilde{X}[k]-\tilde{X}^*[k]}{2} \\ &= \frac{\tilde{X}^*[-k]-\tilde{X}[-k]}{2} \\ &= Im\{\tilde{X}[-k]\}\end{aligned}$$

(i.e., the imaginary part of $\tilde{X}[k]$ is odd.)

3.

$$\begin{aligned}|\tilde{X}[k]| &= \sqrt{\tilde{X}[k]\tilde{X}^*[k]} \\ &= \sqrt{\tilde{X}^*[-k]\tilde{X}[-k]} \\ &= |\tilde{X}[-k]|\end{aligned}$$

(i.e., the magnitude of $\tilde{X}[k]$ is even)

4.

$$\begin{aligned}\angle\tilde{X}[k] &= \arctan\left(\frac{\mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\}}{\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}}\right)\\ &= \arctan\left(\frac{\mathcal{I}m\{\tilde{X}[-k]\}}{\mathcal{R}e\{\tilde{X}[-k]\}}\right)\\ &= -\angle\tilde{X}[-k]\end{aligned}$$

(i.e., the angle of $\tilde{X}[k]$ is odd.)

8.54. 1. Let $x[n]$ $(0 \le n \le N-1)$ be one period of the periodic sequence $\tilde{x}[n]$. The Fourier transform of this periodic sequence can be expressed as:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n]e^{-j\omega n}$$

Recall the synthesis equation, Eq. (8.12):

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]W_N^{-kn}$$

Substitution yields:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]W_N^{-kn}\right)e^{-j\omega n}$$

Rearranging the summations and combining terms:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\left(\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega\right)n}\right)$$

The infinite summation is recognized as an impulse at $\omega = (2\pi k/N)$:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

2. Since $x[n]$ corresponds to one period of $\tilde{x}[n]$, we must apply a rectangular window (unit amplitude and length N) to the periodic sequence. Thus, to extract one period from $\tilde{x}[n]$:

$$x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$$

where,

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le (N-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

The window has a Fourier transform:

$$\begin{aligned}W(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]e^{-j\omega n}\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}\\ &= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} \qquad = \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{j\frac{\omega N}{2}}-e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}\\ &\qquad\qquad = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}\frac{\sin\left(\omega\frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\end{aligned}$$

3. Since $x[n] = \tilde{x}[n]w[n]$, the Fourier transform of $x[n]$ can be represented by the periodic convolution (see Eq. (8.28)).

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\delta\left(\theta - \frac{2\pi k}{N}\right)\frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\omega-\theta)\right]}{\sin\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\omega-\theta)}$$

Integration over $-\pi \le \theta \le \pi$ reduces to the summation (note the impulse train):

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\frac{\sin\left[(N\omega - 2\pi k)/2\right]}{\sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)/2\right]}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)}$$

Hence, the Fourier transform is obtained from the DFS via an interpolation formula.

8.55. The N-point DFT of the N-pt sequence, $x[n]$ is given by

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ X[0] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \end{aligned}$$

(a) Suppose $x[n] = -x[N-1-n]$. For N even, all elements of $x[n]$ will cancel with an antisymmetric component. For N odd, all elements have a counterpart with opposite sign. However, $x[(N-1)/2]$ must also be zero.

Therefore, for $x[n] = -x[N-1-n]$, $X[0] = 0$.

(b) Suppose $x[n] = x[N-1-n]$ and N even.

$$\begin{aligned} X[N/2] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(N/2)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n](-1)^n \\ &= x[0] - x[1] + x[2] - x[3] + \cdots + x[N-2] - x[N-1] \end{aligned}$$

Since $x[n] = x[N-1-n]$, then

$$\begin{aligned} x[0] &= x[N-1] \\ x[1] &= x[N-2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Therefore, $X[N/2] = 0$.

8.56. (a) The conjugate-symmetric part of a sequence:

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*[-n]\right)$$

The periodic conjugate-symmetric part:

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\left(x[((n))_N] + x^*[((-n))_N]\right), \quad 0 \le n \le (N-1)$$

Note that:

$$\begin{aligned} x[((n))_N] &= x[n], \quad 0 \le n \le (N-1) \\ x^*[((-n))_N] &= x^*[-n+N] + x^*[0]\delta[n] - x^*[0]\delta[n-N] \end{aligned}$$

Substituting into $x_{ep}[n]$:

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x^*[-n+N] + x^*[0]\delta[n] - x^*[0]\delta[n-N]\right], \quad 0 \le n \le (N-1)$$

Since,

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{1}{2}\Big(x[n] + x^*[-n]\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x[n] + x^*[0]\delta[n]\Big), \quad 0 \le n \le (N-1) \\ \text{and } x_e[n-N] &= \frac{1}{2}\Big(x[n-N] + x^*[N-n]\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(-x^*[0]\delta[n-N] + x^*[N-n]\Big) \quad 0 \le n \le (N-1) \end{aligned}$$

We can combine to get:

$$x_{ep}[n] = x_e[n] + x_e[n-N] \quad 0 \le n \le (N-1)$$

The periodic conjugate-antisymmetric part is given as

$$x_{op}[n] = (x_o[n] + x_o[n-N]), \quad 0 \le n \le (N-1)$$

Recall that the odd part can be expressed as

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\Big(x[n] - x^*[-n]\Big)$$

So,

$$x_o[n-N] = \frac{1}{2}\Big(x[n-N] - x^*[N-n]\Big)$$

For $0 \le n \le (N-1)$:

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \frac{1}{2}\Big(x[n] - x^*[0]\delta[n]\Big), \quad 0 \le n \le N-1 \\ x_o[n-N] &= \frac{1}{2}\Big(x[0]\delta[n-N] - x^*[N-n]\Big) \end{aligned}$$

From the definition of $x_{op}[n]$:

$$\begin{aligned} x_{op}[n] &= \frac{1}{2}\Big(x[((n))_N] - x^*[((-n))_N]\Big), \quad 0 \le n \le (N-1) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x[n] - x^*[0]\delta[n] + x^*[0]\delta[n-N] - x^*[N-n]\Big), \quad 0 \le n \le (N-1) \end{aligned}$$

Recognizing the expressions for $x_o[n]$ and $x_o[n-N]$ in $x_{op}[n]$, we have

$$x_{op}[n] = x_o[n] + x_o[n-N], \quad 0 \le n \le (N-1)$$

(b) $x[n]$ is a sequence of length N; however,

$$x[n] = \begin{cases} x_1[n], & 0 \le n \le N/2 \\ 0, & N/2 \le n \le N-1 \end{cases}$$

The even part: (assume N is even)

$$x_e[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]}{2} + \dfrac{x^*[0]\delta[n]}{2}, & 0 \le n \le N/2 \\ \dfrac{x^*[-n]}{2}, & -N/2 \le n \le -1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

From part (a):

$$x_{ep}[n] = x_e[n] + x_e[n-N], \quad 0 \le n \le (N-1)$$

Because $x[n] = 0$ for $|n| \ge N/2$,

$$x_{ep}[n] = x_e[n], \quad 0 \le n \le (N/2-1)$$

Also, since $x_e[n] = x_e^*[-n]$,

$$x_e[n] = x_{ep}^*[-n], \quad -N/2 < n \le -1$$

To conclude:

$$x_e[n] = \begin{cases} x_{ep}[n], & 0 \le n \le N/2 \\ \dfrac{x_{ep}[n]}{2}, & n = N/2 \\ x_{ep}^*[-n], & -N/2 < n \le -1 \\ \dfrac{x_{ep}^*[-n]}{2}, & n = -N/2 \end{cases}$$

8.57.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x^*[n]$$

From the synthesis equation:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn}$$

Hence,

$$x^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]W_N^{kn}$$

substituting:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]W_N^{kn}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]X[k]$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X[k]|^2$$

8.58. (a) This statement is TRUE:

$$X[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}$$

$$= B\left(\frac{2\pi k}{N}\right)e^{j(2\pi/N)k\alpha}$$

$$A[k] = B\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\gamma = \frac{2\pi\alpha}{N}$$

(b) This statement is FALSE:
Suppose $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$,

$$X[k] = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(-1)^k$$

Expressed in the form

$$X[k] = A[k]e^{j\gamma k},$$

$$A[k] = 1 + \frac{1}{2}(-1)^k$$

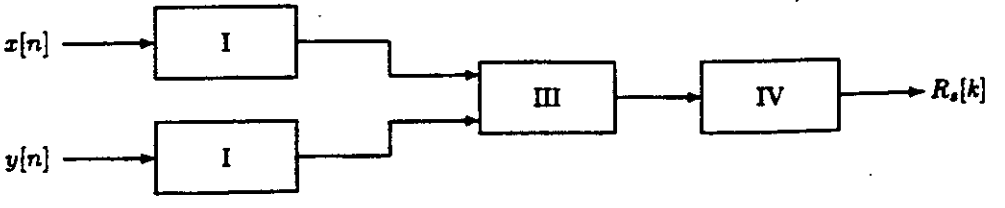
$$\text{and } \gamma = 0$$

The Fourier transform of $x[n]$ is $X(e^{j\omega}) = 1 + \frac{1}{2}e^{j\omega}$, which cannot be expressed in the form $X(e^{-j\omega}) = B(\omega)e^{j\alpha\omega}$.

8.59. We desire 128 samples of $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$.

Since $x[n]$ and $y[n]$ are 256 points long, the linear convolution, $x[n] * y[n]$, will be 512 points long.

We are given a 128-pt DFT only. Therefore, we must time-alias to get 128 samples. The most efficient impiementation is:



Total cost = 110.

8.60. Ideally, the inverse system would be:

$$H_i(z) = z - bz^{-1}$$

Hence,

$$X(z) = (z - bz^{-1})Y(z)$$

and

$$x[n] = y[n+1] - by[n-1], \quad -\infty \le n \le \infty$$

If we use an N-pt block of $y[n]$:

$$y[n]: \quad 0 \le n \le N,$$

then

$$V[k] = (W_N^{-k} - bW_N^k)Y[k]$$

and

$$v[n] = y[((n+1))_N] - by[((n-1))_N]$$

Because the shift is circular, the points at $n = 0$ and $n = (N-1)$ will not be correct. Therefore, only the points in the range $1 \le n \le (N-2)$ are valid.

8.61. (a)

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ X_M[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi k/N + \pi/N)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j(2\pi/N)kn} \end{aligned}$$

So, $x_M[n] = x[n]e^{-j(\pi n/N)}$.

(b)

$$\begin{aligned} X_M[N-k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j(2\pi/N)(N-k)n}, \quad 0 \le k \le (N-1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{j(2\pi/N)k} \\ X_M[N-(k+1)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j(2\pi/N)(N-k-1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j(2\pi/N)(N-1)n}e^{j(2\pi/N)kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j(\pi n/N)}e^{j(2\pi/N)kn} \\ &= X_M^*[k] \end{aligned}$$

So,

$$X_M[k] = X_M^*[N-(k+1)] \text{ , for } 0 \le k \le (N-1) \text{ and } x[n] \text{ real.}$$

(c) (i) $N-k-1$ is odd when k is even. If $R[k] = X_M[2k]$, we may obtain $X_M[k]$ from $R[k]$ as follows:

$$G[k] = \begin{cases} R[k/2], & \text{k even} \\ R^*[(N-(k+1))/2], & \text{k odd} \end{cases}$$

where we note that

$$R^*[(N-(k+1))/2] = X_M^*[N-(k+1)]$$

for k odd.

(ii)

$$\begin{aligned} R[k] &= X_M[2k] \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]e^{-j(4\pi k/N+\pi/N)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j\left(\frac{2\pi kn}{N/2}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j\left(\frac{2\pi kn}{N/2}\right)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j\left(\frac{2\pi kn}{N/2}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left(x[n]e^{-j(\pi n/N)} + x[n+N/2]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j(\pi/2)}\right)e^{-j\left(\frac{2\pi kn}{N/2}\right)} \end{aligned}$$

So,

$$r[n] = (x[n] - jx[n+N/2])e^{-j(\pi n/N)}, \quad 0 \le n \le \left(\frac{N}{2}-1\right)$$

(d)

$$\begin{aligned} X_{3M}[k] &= X_{1M}[k]X_{2M}[k] \\ X_{3M}[n] &= \sum_{r=0}^{N-1} x_{1M}[r]x_{2M}[((n-r))_N] \end{aligned}$$

From part (a):

$$\begin{aligned} x_{1M}[n] &= x_1[n]e^{-j(\pi n/N)} \\ x_{2M}[n] &= x_2[n]e^{-j(\pi n/N)} \\ x_{3M}[n] &= x_3[n]e^{-j(\pi n/N)} \end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned} x_3[n] &= e^{j(\pi n/N)} \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[((n-r))_N]e^{-j(\pi/N)[((n-r))_N+r]} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[((n-r))_N]e^{-j(\pi/N)[((n-r))_N-(n-r)]} \end{aligned}$$

Since,

$$((n-r))_N = \begin{cases} n-r, & n \ge r \\ N+n-r, & n < r \end{cases}$$

$$((n-r))_N - (n-r) = \begin{cases} 0, & n \ge r \\ N, & n < r \end{cases}$$

then

$$e^{-j(\pi/N)[((n-r))_N-(n-r)]} = \text{sgn}\,[n-r] = \begin{cases} 1, & n \geq r \\ -1, & n < r \end{cases}$$

and

$$x_3 = \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[((n-r))_N]\text{sgn}\,[n-r]$$

(e) Suppose, that for $n \geq N/2$:

$$\begin{aligned} x_{1M}[n] &= x_1[n]e^{-j(\pi n/N)} = 0 \\ x_{2M}[n] &= x_2[n]e^{-j(\pi n/N)} = 0 \end{aligned}$$

then the modified circular convolution is equivalent to the modified linear convolution:

$$x_{1M}[n] \textcircled{N} x_{2M}[n] = x_{1M}[n] * x_{2M}[n]$$

(i.e. no aliasing occurs.)

$$\begin{aligned} x_{3M}[n] &= x_{1M}[n] * x_{2M}[n] \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_{1M}[r]x_{2M}[n-r] \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} x_3[n] &= e^{j(\pi n/N)} \sum_{r=0}^{N-1} x_1[n]x_2[n-r]e^{-j(\pi n/N)}e^{-j(\pi n/N)(n-r)} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[n-r]e^{-j(\pi/N)(n-r)} \end{aligned}$$

So,

$$x_3[n] = \sum_{r=0}^{N-1} x_1[r]x_2[n-r]e^{-j(\pi/N)(n-r)} = x_1[n] * x_2[n]$$

8.62. (a) We wish to compute $x[n]\textcircled{63}h[n]$:

$$\begin{aligned} \text{let } x_1[n] &= x[n], & 0 \leq n \leq 31 \\ x_2[n] &= x[n+32], & 0 \leq n \leq 30 \\ h_1[n] &= h[n], & 0 \leq n \leq 31 \\ h_2[n] &= h[n+32], & 0 \leq n \leq 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] * h[n] = {} & x_1[n] * h_1[n] + x_1[n] * h_2[n] * \delta[n-32] + x_2[n] * h_1[n] * \delta[n-32] \\ & + x_2[n] * h_2[n] * \delta[n-32] * \delta[n-32] \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] * h_1[n] &= x_1[n]\textcircled{64}h_1[n] \\ y_2[n] &= x_1[n] * h_2[n] &= x_1[n]\textcircled{64}h_2[h] \\ y_3[n] &= x_2[n] * h_1[n] &= x_2[n]\textcircled{64}h_1[n] \\ y_4[n] &= x_2[n] * h_2[n] &= x_2[n]\textcircled{64}h_2[n] \end{aligned}$$

We can compute each of the above circular convolutions with two 64-pt DFTs and one 64-pt inverse DFT.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= y_1[n] + y_2[n-32] + y_3[n-32] + y_4[n-64] \end{aligned}$$

So

$$x[n] \textcircled{63} h[n] = y[n] + y[n+63], \quad 0 \le n \le 62$$

The total computational cost is 12 DFTs of size $N = 64$.

(b) Using two 128-pt DFTs and one 128-pt inverse DFT:

$$y[n] = x[n] \textcircled{128} h[n] = x[n] * h[n]$$

The 63-pt circular convolution:

$$x[n] \textcircled{63} h[n] = y[n] + y[n+63], \quad 0 \le n \le 62$$

(c) Using the 64-pt DFT method of part (a):

$$\#\text{mult} = 4(12)(64\log_2(64)) = 18432$$

Using 128-pt DFTs:

$$\#\text{mult} = 4(3)(128\log_2(128)) = 10752$$

Direct convolution:

$$\#\text{mult} = 2\sum_{n=1}^{63} n - 63 = 3969$$

8.63. From each circular convolution, the first 49 points will be incorrect. Therefore, we get 51 good points and the input must be overlapped by $100 - 51 = 49$ points.

(a) $V = 49$

(b) $M = 51$

(c) The points extracted correspond to the range $49 \le n \le 99$.

Distorting filter: $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n - n_0]$

8.64. (a) The Z-transform of $h[n]$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \\ H(z) &= 1 - \frac{1}{2}z^{-n_0} \end{aligned}$$

The N-pt DFT of $h[n]$: $(N = 4n_0)$

$$\begin{aligned} H[k] &= \sum_{n=0}^{4n_0-1} h[n]W_{4n}^{kn_0}, \quad 0 \le k \le (4n_0 - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{2}W_{4n_0}^{kn_0} \\ H[k] &= 1 - \frac{1}{2}e^{-j(\pi/2)k} \end{aligned}$$

(b)

$$H_i(z) = \frac{1}{1+1/2z^{-n_0}}, \quad |z| > \left(\frac{1}{2}\right)^{-n_0} \text{ for causality}$$

$$h_i[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/n_0} \delta[n-kn_0]$$

The filter is IIR.

(c)

$$G[k] = \frac{1}{H[k]} = \frac{1}{1-e^{-j(\pi/2)k}}, \quad 0 \le k \le (4n_0-1)$$

The impulse response, $g[n]$, is just $h_i[n]$ time-aliased by $4n_0$ points:

$$\begin{aligned} g[n] &= \left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\cdots\right)\delta[n] + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{1}{512}+\cdots\right)\delta[n-n_0] \\ &+ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}+\cdots\right)\delta[n-2n_0] + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{128}+\frac{1}{2048}+\cdots\right)\delta[n-3n_0] \\ g[n] &= \frac{16}{15}\delta[n] + \frac{8}{15}\delta[n-n_0] + \frac{4}{15}\delta[n-2n_0] + \frac{2}{15}\delta[n-3n_0] \end{aligned}$$

(d) Indeed,

$$G[k]H[k] = 1, \quad 0 \le k \le (4n_0-1)$$

However, this relationship is only true at $4n_0$ distinct frequencies. This fact does not imply that for all ω:

$$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = 1$$

(e)

$$\begin{aligned} y[n] &= g[n] * h[n] \\ &= \frac{16}{15}\delta[n] + \frac{8}{15}\delta[n-n_0] + \frac{4}{15}\delta[n-2n_0] + \frac{2}{15}\delta[n-3n_0] - \frac{8}{15}\delta[n-n_0] \\ &\quad -\frac{4}{15}\delta[n-2n_9] - \frac{2}{15}\delta[n-3n_0] - \frac{1}{15}\delta[n-4n_0] \\ y[n] &= \frac{16}{15}\delta[n] - \frac{1}{15}\delta[n-4n_0] \end{aligned}$$

8.65. (a) We start by computing $\tilde{X}_H[k+N]$:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_H[k+N] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]H_N[n(k+N)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n](\cos(\frac{2\pi(nk+nN)}{N}) + \sin(\frac{2\pi(nk+nN)}{N}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n](\cos(\frac{2\pi nk}{N}) + \sin(\frac{2\pi nk}{N})) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]H_N[nk] \\ &= \tilde{X}_H[k]. \end{aligned}$$

We thus conclude that the DHS coefficients form a sequence that is also periodic with period N.

(b) We have:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_H[k]H_N[nk] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}[m]H_N[mk])H_N[nk] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}[m]\sum_{k=0}^{N-1}H_N[mk]H_N[nk] \\ &= \frac{1}{N}\tilde{x}[n]N \\ &= \tilde{x}[n].\end{aligned}$$

Where we have used the fact that $\sum_{k=0}^{N-1} H_N[mk]H_N[nk] = N$ only if $((m))_N = ((n))_N$, otherwise it's 0.

This completes the derivation of the DHS synthesis formula.

(c) We have:

$$\begin{aligned}H_N[a+N] &= \cos(\frac{2\pi(a+N)}{N}) + \sin(\frac{2\pi(a+N)}{N}) \\ &= \cos(\frac{2\pi a}{N} + 2\pi) + \sin(\frac{2\pi a}{N} + 2\pi) \\ &= \cos(\frac{2\pi a}{N}) + \sin(\frac{2\pi a}{N}) \\ &= H_N[a].\end{aligned}$$

And:

$$\begin{aligned}H_N[a+b] &= \cos(\frac{2\pi(a+b)}{N}) + \sin(\frac{2\pi(a+b)}{N}) \\ &= (C_N[a]C_N[b] - S_N[a]S_N[b]) + (S_N[a]C_N[b] + C_N[a]S_N[b]) \\ &= C_N[b](C_N[a] + S_N[a]) + S_N[b](-S_N[a] + C_N[a]) \\ &= C_N[b](C_N[a] + S_N[a]) + S_N[b](S_N[-a] + C_N[-a]) \\ &= C_N[b]H_N[a] + S_N[b]H_N[-a] \\ &= C_N[a]H_N[b] + S_N[a]H_N[-b] \text{ (since } H_N[a+b] = H_N[b+a] \text{)}\end{aligned}$$

Where we have used trigonometric properties.

(d) We have:

$$\begin{aligned}DHS(\tilde{x}[n-n_0]) &= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n-n_0]H_N[nk] \\ &= \sum_{n=-n_0}^{N-1-n_0}\tilde{x}[n]H_N[(n+n_0)k]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[n](H_N[nk]C_N[n_0k] + H_N[-nk]S_N[n_0k]) \\
&= C_N[n_0k]\sum_{n=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[n]H_N[nk] + S_N[n_0k]\sum_{n=-n_0}^{N-1-n_0} \tilde{x}[n]H_N[-nk] \\
&= C_N[n_0k]\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]H_N[nk] + S_N[n_0k]\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]H_N[-nk] \\
&= C_N[n_0k]\tilde{X}_H[k] + S_N[n_0k]\tilde{X}_H[-k]
\end{aligned}
$$

Where we have used the periodicity of $H_N[nk]$ and $\tilde{x}[n]$.

(e) We have:

$$
\begin{aligned}
DHT\{\tilde{x}_3[n]\} &= DHT\{\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]\} \\
X_{H3}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1}(\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N])H_N[nk] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]\sum_{n=0}^{N-1} x_2[((n-m))_N]H_N[nk] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]DHT\{x_2[((n-m))_N]\} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m](X_{H2}[k]C_N[mk] + X_{H2}[((-k))_N]S_N[mk]) \text{ (using P8.65-7)} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]X_{H2}[k]C_N[mk] + \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]X_{H2}[((-k))_N]S_N[mk] \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]X_{H2}[k](\frac{H_N[mk] + H_N[-mk]}{2}) \\
&\quad + \sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]X_{H2}[((-k))_N](\frac{H_N[mk] - H_N[-mk]}{2}) \\
&= \frac{1}{2}X_{H2}[k](X_{H1}[k] + X_{H1}[((-k))_N]) + \frac{1}{2}X_{H2}[((-k))_N](X_{H1}[k] - X_{H1}[((-k))_N]) \\
&= \frac{1}{2}X_{H1}[k](X_{H2}[k] + X_{H2}[((-k))_N]) + \frac{1}{2}X_{H1}[((-k))_N](X_{H2}[k] - X_{H2}[((-k))_N])
\end{aligned}
$$

This is the desired convolution property.

(f) Since the DFT of $x[n]$ is given by:

$$
\begin{aligned}
X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x[n](\cos(-\frac{2\pi kn}{N}) + j\sin(-\frac{2\pi kn}{N}))
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n](\cos(\frac{2\pi kn}{N}) - j\sin(\frac{2\pi kn}{N}))$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n](C_N[kn] - jS_N[kn])$$

then:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]C_N[kn] = \frac{1}{2}(X[k] + X[((-k))_N])$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]S_N[kn] = -\frac{1}{2j}(X[k] - X[((-k))_N])$$

We thus get:

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n](C_N[kn] + S_N[kn])$$
$$= \frac{1}{2}(X[k] + X[((-k))_N]) - \frac{1}{2j}(X[k] - X[((-k))_N])$$
$$= (\frac{1}{2} - \frac{1}{2j})X[k] + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2j})X[((-k))_N]$$

This allows us to obtain $X_H[k]$ from $X[k]$.

(g) We have:

$$X_H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n](C_N[kn] + S_N[kn])$$

Therefore:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]C_N[kn] = \frac{1}{2}(X_H[k] + X_H[((-k))_N])$$
$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]S_N[kn] = \frac{1}{2}(X_H[k] - X_H[((-k))_N])$$

We thus get:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n](C_N[kn] - jS_N[kn])$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(X_H[k] + X_H[((-k))_N]) - j\frac{1}{2}(X_H[k] - X_H[((-k))_N]) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{j}{2})X_H[k] + (\frac{1}{2} + \frac{j}{2})X_H[((-k))_N] \end{aligned}$$

This allows us to obtain $X[k]$ from $X_H[k]$.

8.66. (a) The DTFT is given by:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(e^{jw}) &= X(e^{jw}) + X(e^{jw})e^{-jwN} \\ &= X(e^{jw})(1 + e^{-jwN}) \end{aligned}$$

The DFT is just samples of the DTFT:

$$\begin{aligned} \tilde{X}[k] &= \tilde{X}(e^{jw})|_{w=\frac{2\pi k}{2N}} \\ &= X(e^{j2\pi k2N})(1 + (-1)^k) \end{aligned}$$

Therefore:

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 2X[\frac{k}{2}] & , \ k \text{ even} \\ 0 & , \ k \text{ odd} \end{cases}$$

(b) The original system computes the following:

$$\tilde{X}[k]H[k] = \begin{cases} 2X[\frac{k}{2}]H[k] & , \ k \text{ even} \\ 0 & , \ k \text{ odd} \end{cases}$$

We thus want:

$$\begin{aligned} X[k]G[k] &= 2X[k]H[2k] && k = 0, ..., N-1 \\ G[k] &= 2H[2k] \\ &= 2\sum_{n=0}^{2N-1} h[n]e^{-j\frac{2\pi 2kn}{2N}} && k = 0, ..., N-1 \\ g[n] &= 2(h[n] + h[n+N]) \end{aligned}$$

System A time aliases and multiplies by 2.

For system B, we need:

$$Y[k] = \begin{cases} W[\frac{k}{2}] & , \ k \text{ even} \\ 0 & , \ k \text{ odd} \end{cases}$$

Thus:

$$y[n] = \begin{cases} w[n] & , \ 0 \le n \le N-1 \\ w[n-N] & , \ N \le n \le 2N-1 \\ 0 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$

System B regenerates the $2N-$point sequence by repeating w[n].

8.67. (a) We have:

$$|H(e^{jw})| = \begin{cases} 1 & , \ |w| \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$

Since $h[n]$ is FIR, we assume it is non-zero over $0 \le n \le N$. The phase of $H(e^{jw})$ should be set such that $h[n]$ is symmetric about the center of its range, i.e. $\frac{N}{2}$. Therefore, the phase of $H(e^{jw})$ should be $e^{j\frac{\pi}{2}\frac{N}{2}}$. So one possible $H[k]$ may be:

$$H[k] = \begin{cases} e^{j\frac{2\pi}{4N}\frac{N}{2}k} & , \ 0 \le k \le \frac{1}{8}4N \\ 0 & , \ \text{otherwise} \\ e^{j\frac{2\pi}{4N}\frac{N}{2}k} & , \ 4N - \frac{N}{2} \le k \le 4N \end{cases}$$

that is:

$$H[k] = \begin{cases} e^{j\frac{\pi}{4}k} & , \ 0 \le k \le \frac{N}{2} \\ 0 & , \ \text{otherwise} \\ e^{j\frac{\pi}{4}k} & , \ 4N - \frac{N}{2} \le k \le 4N \end{cases}$$

(b) System A needs to perform the following operations:

$$Y_2[k] = \begin{cases} X[k]H'[k] & , \ 0 \le k \le \frac{N}{2} \\ 0 & , \ \text{otherwise} \\ X[k-3N]H'[k-3N] & , \ 4N - \frac{N}{2} \le k \le 4N \end{cases}$$

Where $H'[k]$ is the $N-$point DFT of $h[n]$.

(c) It is cheaper to implement $N-$point DFTs than $4N-$point DFTs, therefore the implementation in Figure P8.67-2 is usually preferable to the one in Figure P8.67-1.

8.68. Substituting the expression for $X_1[k]$ from equation (8.164) into equation (8.165), we get:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \frac{1}{2N-2}\sum_{k=0}^{2N-3} X_1[k]e^{j2\pi kn/(2N-2)} \\ &= \frac{1}{2N-2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^{c1}[k]e^{j2\pi kn/(2N-2)} + \sum_{k=N}^{2N-3} X^{c1}[2N-2-k]e^{j2\pi kn/(2N-2)}\right) \end{aligned}$$

Note that:

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{2N-3} X^{c1}[2N-2-k]e^{j2\pi kn/(2N-2)} &= \sum_{r=1}^{N-2} X^{c1}[r]e^{j2\pi(2N-2-r)n/(2N-2)} \\ &= \sum_{k=1}^{N-2} X^{c1}[k]e^{-j2\pi kn/(2N-2)}\end{aligned}$$

therefore:

$$\begin{aligned}x_1[n] &= \frac{1}{2N-2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X^{c1}[k]e^{j2\pi kn/(2N-2)} + \sum_{k=1}^{N-2} X^{c1}[k]e^{-j2\pi kn/(2N-2)}\right) \\ &= \frac{1}{2N-2}\left(X^{c1}[0] + X^{c1}[N-1]e^{j2\pi n} + \sum_{k=1}^{N-2} X^{c1}[k]\left(e^{j2\pi kn/(2N-2)} + e^{-j2\pi kn/(2N-2)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2N-2}\left(X^{c1}[0] + X^{c1}[N-1]e^{j\pi n} + \sum_{k=1}^{N-2} X^{c1}[k]2\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right)\right)\end{aligned}$$

and:

$$\begin{aligned}x[n] &= x_1[n] && \text{for } n = 0, 1, ..., N-1 \\ &= \frac{1}{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} \alpha[k]X^{c1}[k]\cos\left(\frac{\pi kn}{N-1}\right)\right) && 0 \le n \le N-1\end{aligned}$$

where $\alpha[k]$ is given by:

$$\alpha[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k = 0 \text{ and } N-1 \\ 1 & , \quad 1 \le k \le N-2. \end{cases}$$

This completes the derivation.

8.69.

$$v[n] = x_2[2n]$$

therefore, for $k = 0, 1, ..., N-1$:

$$V[k] = \frac{1}{2}(X_2[k] + X_2[k+N]).$$

Using equation (8.168), we have:

$$\begin{aligned}V[k] &= \frac{1}{2}(X_2[k] + X_2[k+N]) \\ &= e^{j\frac{\pi k}{2N}} Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} + e^{j\frac{\pi(k+N)}{2N}} Re\{X[k+N]e^{-j\frac{\pi(k+N)}{2N}}\} \\ &= e^{j\frac{\pi k}{2N}} Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} + e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi k}{2N}} Re\{X[k+N]e^{-j\frac{\pi k}{2N}} e^{-j\frac{\pi}{2}}\} \\ &= e^{j\frac{\pi k}{2N}} Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} + je^{j\frac{\pi k}{2N}} Re\{-jX[k+N]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} \\ &= e^{j\frac{\pi k}{2N}} (Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} + jIm\{X[k+N]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\}.\end{aligned}$$

Using the above expression, we get:

$$\begin{aligned} 2Re\{e^{-j\frac{2\pi k}{4N}}V[k]\} &= 2Re\{e^{-j\frac{\pi k}{2N}}e^{j\frac{\pi k}{2N}}(Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\}+jIm\{X[k+N]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\})\} \\ &= 2Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} \\ &= X^{c2}[k] \qquad \text{where we used equation (8.170).} \end{aligned}$$

Furthermore, we have:

$$\begin{aligned} 2Re\{e^{-j\frac{2\pi k}{4N}}V[k]\} &= 2Re\{e^{-j\frac{2\pi k}{4N}}\sum_{n=0}^{N-1}v[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}\} \\ &= 2Re\{\sum_{n=0}^{N-1}v[n]e^{-j(\frac{2\pi k}{N}(n+\frac{1}{4}))}\} \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}Re\{v[n]e^{-j(\frac{2\pi k}{N}(n+\frac{1}{4}))}\} \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}v[n]\cos(\frac{2\pi k}{N}(n+\frac{1}{4})) \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}v[n]\cos(\frac{\pi k(4n+1)}{2N}). \end{aligned}$$

and:

$$\begin{aligned} 2Re\{e^{-j\frac{2\pi k}{4N}}V[k]\} &= 2Re\{X[k]e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} \\ &= 2Re\{\sum_{n=0}^{2N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{2N}}e^{-j\frac{\pi k}{2N}}\} \\ &= 2Re\{\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{\pi k}{2N}(2n+1)}\} \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}Re\{x[n]e^{-j\frac{\pi k}{2N}(2n+1)}\} \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}). \end{aligned}$$

From the results above, we conclude, for $k = 0, 1, ..., N-1$:

$$\begin{aligned} X^{c2}[k] &= 2Re\{e^{-j\frac{2\pi k}{4N}}V[k]\} \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}v[n]\cos(\frac{\pi k(4n+1)}{2N}) \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\cos(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}). \end{aligned}$$

8.70. Substituting the expression for $X_2[k]$ from equation (8.174) into equation (8.175), we get:

$$
\begin{aligned}
x_2[n] &= \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} X_2[k]e^{j2\pi kn/(2N)} \\
&= \frac{1}{2N}(X^{c2}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]e^{j\pi k/(2N)}e^{j2\pi kn/(2N)} - \sum_{k=N+1}^{2N-1} X^{c2}[2N-k]e^{j\pi k/(2N)}e^{j2\pi kn/(2N)}) \\
&= \frac{1}{2N}(X^{c2}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]e^{j\pi k(2n+1)/(2N)} - \sum_{k=N+1}^{2N-1} X^{c2}[2N-k]e^{j\pi k(2n+1)/(2N)}) \\
&= \frac{1}{2N}(X^{c2}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]e^{j\pi k(2n+1)/(2N)} - \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]e^{j\pi(2N-k)(2n+1)/(2N)}) \\
&= \frac{1}{2N}(X^{c2}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]e^{j\pi k(2n+1)/(2N)} + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]e^{-j\pi k(2n+1)/(2N)}) \\
&= \frac{1}{2N}(X^{c2}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k](e^{j\pi k(2n+1)/(2N)} + e^{-j\pi k(2n+1)/(2N)})) \\
&= \frac{1}{2N}(X^{c2}[0] + \sum_{k=1}^{N-1} X^{c2}[k]\cos(\frac{\pi k(2n+1)}{2N})).
\end{aligned}
$$

Furthermore:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= x_2[n] && \text{for } n = 0, 1, ..., N-1 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \beta[k]X^{c2}[k]\cos(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}) && 0 \le n \le N-1
\end{aligned}
$$

where $\beta[k]$ is given by:

$$
\beta[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad k = 0 \\ 1 & , \quad 1 \le k \le N-1. \end{cases}
$$

This completes the derivation.

8.71. First we derive Parseval's theorem for the DFT.
Let $x[n]$ be an N point sequence and define $y[n]$ as follows:

$$y[n] = x[n] \textcircled{N} x^*[((-n))_N].$$

Using the properties of the DFT, we have:

$$Y[k] = X[k]X^*[k] = |X[k]|^2.$$

Note that:

$$y[0] = \sum_n |x[n]|^2$$

and using the DFT synthesis equation, we get:

$$y[0] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y[k].$$

Parseval's Theorem for the DFT is therefore:

$$\sum_n |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2.$$

(a) Note that:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |X^{c1}[k]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X_1[k]|^2$$

and, using equation (8.164):

$$\sum_{n=0}^{2N-3} |X_1[k]|^2 = 2\sum_{n=0}^{N-1} |X^{c1}[k]|^2 - |X^{c1}[0]|^2 - |X^{c1}[N-1]|^2.$$

Using the DFT properties:

$$\sum_n |x_1[n]|^2 = \frac{1}{2N-2}\sum_{k=0}^{2N-3} |X_1[k]|^2$$

and, using equation (8.161):

$$\sum_{n=0}^{2N-3} |x_1[n]|^2 = 2\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 - |x[0]|^2 - |x[N-1]|^2.$$

We thus conclude:

$$\frac{1}{2N-2}(2\sum_{n=0}^{N-1} |X^{c1}[k]|^2 - |X^{c1}[0]|^2 - |X^{c1}[N-1]|^2) = 2\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 - |x[0]|^2 - |x[N-1]|^2.$$

(b) Using equation (8.171),

$$\sum_{n=0}^{N-1} |X^{c2}[k]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X_2[k]|^2.$$

Note that, using equation (8.167):

$$\sum_{k=0}^{2N-1} |X_2[k]|^2 = 2\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 - |X[0]|^2,$$

and, using equation (8.166):

$$\sum_{n=0}^{2N-1} |x_2[n]|^2 = 2\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2.$$

Using the DFT properties:

$$\sum_{n=0}^{2N-1} |x_2[n]|^2 = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} |X_2[k]|^2.$$

We thus conclude:

$$\frac{1}{2N}(2\sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 - |X[0]|^2) = 2\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2.$$

Solutions – Chapter 9

Computation of the Discrete-Time Fourier Transform

9.1. There are several possible approaches to this problem. Two are presented below.

Solution #1: Use the program to compute the DFT of $X[k]$, yielding the sequence $g[n]$.

$$g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{-j2\pi kn/N}$$

Then, compute

$$x[n] = \frac{1}{N} g[((N-n))_N]$$

for $n = 0, \ldots, N-1$. We demonstrate that this solution produces the inverse DFT below.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} g[((N-n))_N] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{-j2\pi k(N-n)/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

Solution #2: Take the complex conjugate of $X[k]$, and then compute its DFT using the program, yielding the sequence $f[n]$.

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X^*[k]e^{-j2\pi kn/N}$$

Then, compute

$$x[n] = \frac{1}{N} f^*[n]$$

We demonstrate that this solution produces the inverse DFT below.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{N} f^*[n] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N} \end{aligned}$$

9.2. (a) The "gain" along the emphasized path is $-W_N^2$.

(b) In general, there is only one path between each input sample and each output sample.

(c) $x[0]$ to $X[2]$: The gain is 1.
$x[1]$ to $X[2]$: The gain is W_N^2.
$x[2]$ to $X[2]$: The gain is $-W_N^0 = -1$.
$x[3]$ to $X[2]$: The gain is $-W_N^0 W_N^2 = -W_N^2$.
$x[4]$ to $X[2]$: The gain is $W_N^0 = 1$.
$x[5]$ to $X[2]$: The gain is $W_N^0 W_N^2 = W_N^2$.
$x[6]$ to $X[2]$: The gain is $-W_N^0 W_N^0 = -1$.
$x[7]$ to $X[2]$: The gain is $-W_N^0 W_N^0 W_N^2 = -W_N^2$, as in Part (a).
Now

$$\begin{aligned} X[2] &= \sum_{n=0}^{7} x[n]W_8^{2n} \\ &= x[0] + x[1]W_8^2 + x[2]W_8^4 + x[3]W_8^6 + x[4]W_8^8 + x[5]W_8^{10} + x[6]W_8^{12} \\ &\quad + x[7]W_8^{14} \\ &= x[0] + x[1]W_8^2 + x[2](-1) + x[3](-W_8^2) + x[4](1) + x[5]W_8^2 \\ &\quad + x[6](-1) + x[7](-W_8^2) \end{aligned}$$

Each input sample contributes the proper amount to the output DFT sample.

9.3. (a) The input should be placed into A[r] in bit-reversed order.

$$\begin{aligned} A[0] &= x[0] \\ A[1] &= x[4] \\ A[2] &= x[2] \\ A[3] &= x[6] \\ A[4] &= x[1] \\ A[5] &= x[5] \\ A[6] &= x[3] \\ A[7] &= x[7] \end{aligned}$$

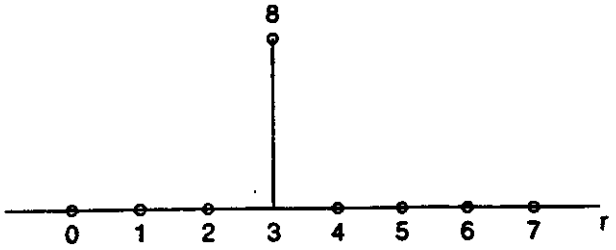
The output should then be extracted from D[r] in sequential order.

$$X[k] = D[k], \quad k = 0, \ldots, 7$$

(b) First, we find the DFT of $(-W_N)^n$ for $N = 8$.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{7} (-W_8)^n W_8^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{7} (-1)^n W_8^n W_8^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{7} (W_8^{-4})^n W_8^n W_8^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{7} W_8^{n(k-3)} \\ &= \frac{1 - W^{k-3}}{1 - W_8^{k-3}} \\ &= 8\delta[k-3] \end{aligned}$$

A sketch of D[r] wis provided below.



(c) First, the array $D[r]$ is expressed in terms of $C[r]$.

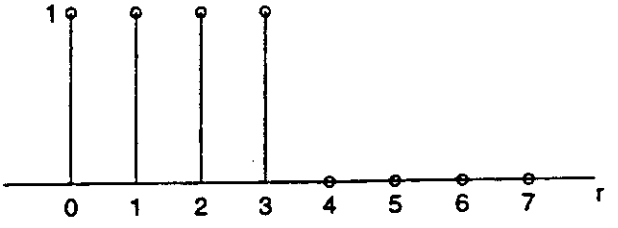
$$\begin{aligned} D[0] &= C[0] + C[4] \\ D[1] &= C[1] + C[5]W_8^1 \\ D[2] &= C[2] + C[6]W_8^2 \\ D[3] &= C[3] + C[7]W_8^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[4] &= C[0] - C[4] \\ D[5] &= C[1] - C[5]W_8^1 \\ D[6] &= C[2] - C[6]W_8^2 \\ D[7] &= C[3] - C[7]W_8^3 \end{aligned}$$

Solving this system of equations for $C[r]$ gives

$$\begin{aligned} C[0] &= (D[0] + D[4])/2 \\ C[1] &= (D[1] + D[5])/2 \\ C[2] &= (D[2] + D[6])/2 \\ C[3] &= (D[3] + D[7])/2 \\ C[4] &= (D[0] - D[4])/2 \\ C[5] &= (D[1] - D[5])W_8^{-1}/2 \\ C[6] &= (D[2] - D[6])W_8^{-2}/2 \\ C[7] &= (D[3] - D[7])W_8^{-3}/2 \end{aligned}$$

for $r = 0, 1, ..., 7$. A sketch of C[r] is provided below.



9.4. (a) In any stage, $N/2$ butterflies must be computed. In the mth stage, there are 2^{m-1} different coefficients.

(b) Looking at figure 9.10, we notice that the coefficients are

1st stage:	W_8^0
2nd stage:	W_8^0, W_8^2
3rd stage:	$W_8^0, W_8^1, W_8^2, W_8^3$

Here we have listed the *different* coefficients only. The values above correspond to the impulse response

$$h[n] = W_{2^m}^n u[n]$$

which can be generated by the recursion

$$y[n] = W_{2^m} y[n-1] + x[n]$$

Using this recursion, we only generate a sequence of length $L = 2^{m-1}$, which consists of the different coefficients. Then, the remaining $\frac{N}{2} - L$ coefficients are found by repeating these L coefficients.

(c) The difference equation from Part (b) is periodic, since

$$\begin{aligned} h[n] &= W_{2^m}^n u[n] \\ &= e^{-j2\pi n/2^m} u[n] \end{aligned}$$

has a period $R = 2^m$. Thus, the frequency of this oscillator is

$$\omega = \frac{2\pi}{2^m}$$

9.5. Multiplying out the terms, we find that

$$(A-B)D+(C-D)A = AD-BD+AC-AD = AC-BD = X$$

$$(A-B)D+(C+D)B = AD-BD+BC+BD = AD+BC = Y$$

Thus, the algorithm is verified.

9.6. *Answer 3*

Decimation in Time: The figure is the basic butterfly with $r = 2$.

Decimation in Frequency: The figure is the end of one butterfly and the start of a second with $r = 2$.

9.7. The figure corresponds to the flow graph of a second-order recursive system implementing Goertzel's algorithm. This system finds $X[k]$ for $k = 7$, which corresponds to a frequency of

$$\omega_k = \frac{14\pi}{32} = \frac{7\pi}{16}$$

9.8. This is an application of the causal version of the chirp transform with

$$\begin{aligned} N &= 20 && \text{The length of } x[n] \\ M &= 10 && \text{The number of desired samples} \\ \omega_0 &= \tfrac{2\pi}{7} && \text{The starting frequency} \\ \Delta\omega &= \tfrac{2\pi}{21} && \text{The frequency spacing between samples} \end{aligned}$$

We therefore have

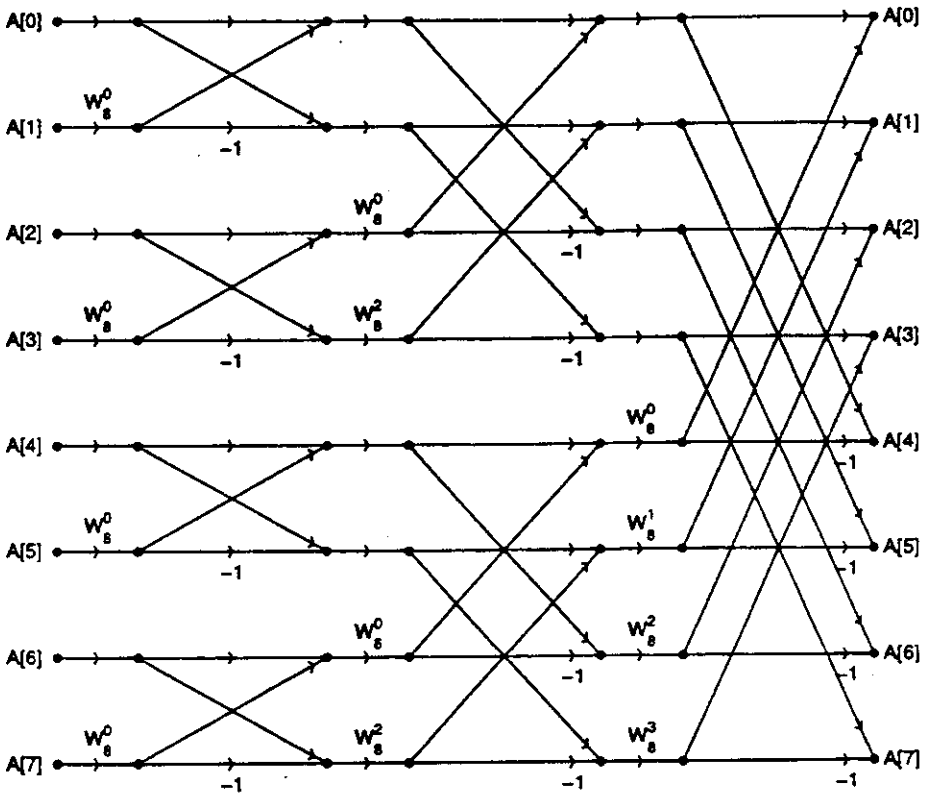
$$y[n+19] = X(e^{j\omega_n}), \quad n = 0,\ldots,9$$

for $\omega_n = \omega_0 + n\Delta\omega$ or

$$y[n] = X(e^{j\omega_n}), \quad n = 19,\ldots,28$$

for $\omega_n = \omega_0 + (n-19)\Delta\omega$.

9.9. In this problem, we are using butterfly flow graphs to compute a DFT. These computations are done in place, in an array of registers. An example flow graph for a $N = 8$, (or $v = \log_2 8 = 3$), decimation-in-time DFT is provided below.



(a) The difference between ℓ_1 and ℓ_0 can be found by using the figure above. For example, in the first stage, the array elements $A[4]$ and $A[5]$ comprise a butterfly. Thus, $\ell_1 - \ell_0 = 5 - 4 = 1$. This difference of 1 holds for all the other butterflies in the first stage. Looking at the other stages, we find

$$\begin{aligned} \textbf{stage m} = 1: &\quad \ell_1 - \ell_0 = 1 \\ \textbf{stage m} = 2: &\quad \ell_1 - \ell_0 = 2 \\ \textbf{stage m} = 3: &\quad \ell_1 - \ell_0 = 4 \end{aligned}$$

From this we find that the difference, in general, is

$$\ell_1 - \ell_0 = 2^{m-1}, \qquad \text{for } m = 1, \ldots, v$$

(b) Again looking at the figure, we notice that for stage 1, there are 4 butterflies with the same twiddle factor. The ℓ_0 for these butterflies are 0, 2, 4, and 6, which we see differ by 2. For stage 2, there are two butterflies with the same twiddle factor. Consider the butterflies with the W_8^0 twiddle factor. The ℓ_0 for these two butterflies are 0 and 4, which differ by 4. Note that in the last stage, there are no butterflies with the same twiddle factor, as the four twiddle factors are unique. Thus, we found

$$\begin{aligned} \textbf{stage m} = 1: &\quad \Delta\ell_0 = 2 \\ \textbf{stage m} = 2: &\quad \Delta\ell_0 = 4 \\ \textbf{stage m} = 3: &\quad \textbf{n/a} \end{aligned}$$

From this, we can generalize the result

$$\Delta\ell_0 = 2^m, \qquad \text{for } m = 1, \ldots, v-1$$

9.10. This is an application of the causal version of the chirp transform with

$$\begin{aligned} N &= 12 && \text{The length of } x[n] \\ M &= 5 && \text{The number of desired samples} \\ \omega_0 &= \tfrac{2\pi}{19} && \text{The starting frequency} \\ \Delta\omega &= \tfrac{2\pi}{10} && \text{The distance in frequency between samples} \end{aligned}$$

Letting $W = e^{-j\Delta\omega}$ we must have

$$r[n] = e^{-j\omega_0 n} W^{n^2/2} = e^{-j\frac{2\pi}{19}n} e^{-j\frac{2\pi}{10}n^2/2}$$

9.11. Reversing the bits (denoted by $\rightarrow$) gives

$$\begin{array}{rcccccc} 0 &=& 0000 &\rightarrow& 0000 &=& 0 \\ 1 &=& 0001 &\rightarrow& 1000 &=& 8 \\ 2 &=& 0010 &\rightarrow& 0100 &=& 4 \\ 3 &=& 0011 &\rightarrow& 1100 &=& 12 \\ 4 &=& 0100 &\rightarrow& 0010 &=& 2 \\ 5 &=& 0101 &\rightarrow& 1010 &=& 10 \\ 6 &=& 0110 &\rightarrow& 0110 &=& 6 \\ 7 &=& 0111 &\rightarrow& 1110 &=& 14 \\ 8 &=& 1000 &\rightarrow& 0001 &=& 1 \\ 9 &=& 1001 &\rightarrow& 1001 &=& 9 \\ 10 &=& 1010 &\rightarrow& 0101 &=& 5 \\ 11 &=& 1011 &\rightarrow& 1101 &=& 13 \\ 12 &=& 1100 &\rightarrow& 0011 &=& 3 \\ 13 &=& 1101 &\rightarrow& 1011 &=& 11 \\ 14 &=& 1110 &\rightarrow& 0111 &=& 7 \\ 15 &=& 1111 &\rightarrow& 1111 &=& 15 \end{array}$$

The new sample order is 0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15.

9.12. *False.* It is possible by rearranging the order in which the nodes appear in the signal flow graph. However, the computation cannot be carried out in-place.

9.13. Only the $m = 1$ stage will have this form. No other stage of a $N = 16$ radix-2 decimation-in-frequency FFT will have a W_{16} term raised to an odd power.

9.14. The possible values of r for each of the four stages are

$$\begin{aligned} m &= 1, && r = 0 \\ m &= 2, && r = 0, 4 \\ m &= 3, && r = 0, 2, 4, 6 \\ m &= 4, && r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

9.15. Plugging in some values of N for the two programs, we find

N	Program A	Program B
2	4	20
4	16	80
8	64	240
16	256	640
32	1024	1600
64	4096	3840

Thus, we see that a sequence with length $N = 64$ is the shortest sequence for which Program B runs faster than Program A.

9.16. The possible values for r for each of the four stages are

$$\begin{aligned} m &= 1, \quad r = 0 \\ m &= 2, \quad r = 0, 4 \\ m &= 3, \quad r = 0, 2, 4, 6 \\ m &= 4, \quad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

where W_N^r is the twiddle factor for each stage. Since the particular butterfly shown has $r = 2$, the stages which have this butterfly are

$$m = 3, 4$$

9.17. The FFT is a decimation-in-time algorithm, since the decimation-in-frequency algorithm has only W_{32}^0 terms in the last stage.

9.18. If the $N_1 = 1021$ point DFT was calculated using the convolution sum directly it would take N_1^2 multiplications. If the $N_2 = 1024$ point DFT was calculated using the FFT it would take $N_2 \log_2 N_2$ multiplications. Assuming that the number of multiplications is proportional to the calculation time the ratio of the two times is

$$\frac{N_1^2}{N_2 \log_2 N_2} = \frac{1021^2}{1024 \log_2 1024} = 101.8 \approx 100$$

which would explain the results.

9.19. $X(e^{j6\pi/8})$ corresponds to the $k = 3$ index of a length $N = 8$ DFT. Using the flow graph of the second-order recursive system for Goertzel's algorithm,

$$\begin{aligned} a &= 2\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{2\pi(3)}{8}\right) \\ &= -\sqrt{2} \\ b &= -W_N^k \\ &= -e^{-j6\pi/8} \\ &= \frac{1+j}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

9.20. First, we derive a relationship between the $X_1(e^{j\omega})$ and $X(e^{j\omega})$ using the shift and time reversal properties of the DTFT.

$$\begin{aligned} x_1[n] &= x[32-n] \\ X_1(e^{j\omega}) &= X(e^{-j\omega})e^{-j32\omega} \end{aligned}$$

Looking at the figure we see that calculating $y[32]$ is just an application of the Goertzel algorithm with $k=7$ and $N=32$. Therefore,

$$\begin{aligned} y[32] &= X_1[7] \\ &= X_1(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi 7}{32}} \\ &= X(e^{-j\omega})e^{-j\omega 32}\big|_{\omega=\frac{7\pi}{16}} \\ &= X(e^{-j\frac{7\pi}{16}})e^{-j(\frac{7\pi}{16})32} \\ &= X(e^{-j\frac{7\pi}{16}}) \end{aligned}$$

Note that if we put $x[n]$ through the system directly, we would be evaluating $X(z)$ at the conjugate location on the unit circle, i.e., at $\omega = +7\pi/16$.

9.21. (a) Assume $x[n]=0$, for $n<0$ and $n>N-1$. From the figure, we see that

$$y_k[n] = x[n] + W_N^k y_k[n-1]$$

Starting with $n=0$, and iterating this recursive equation, we find

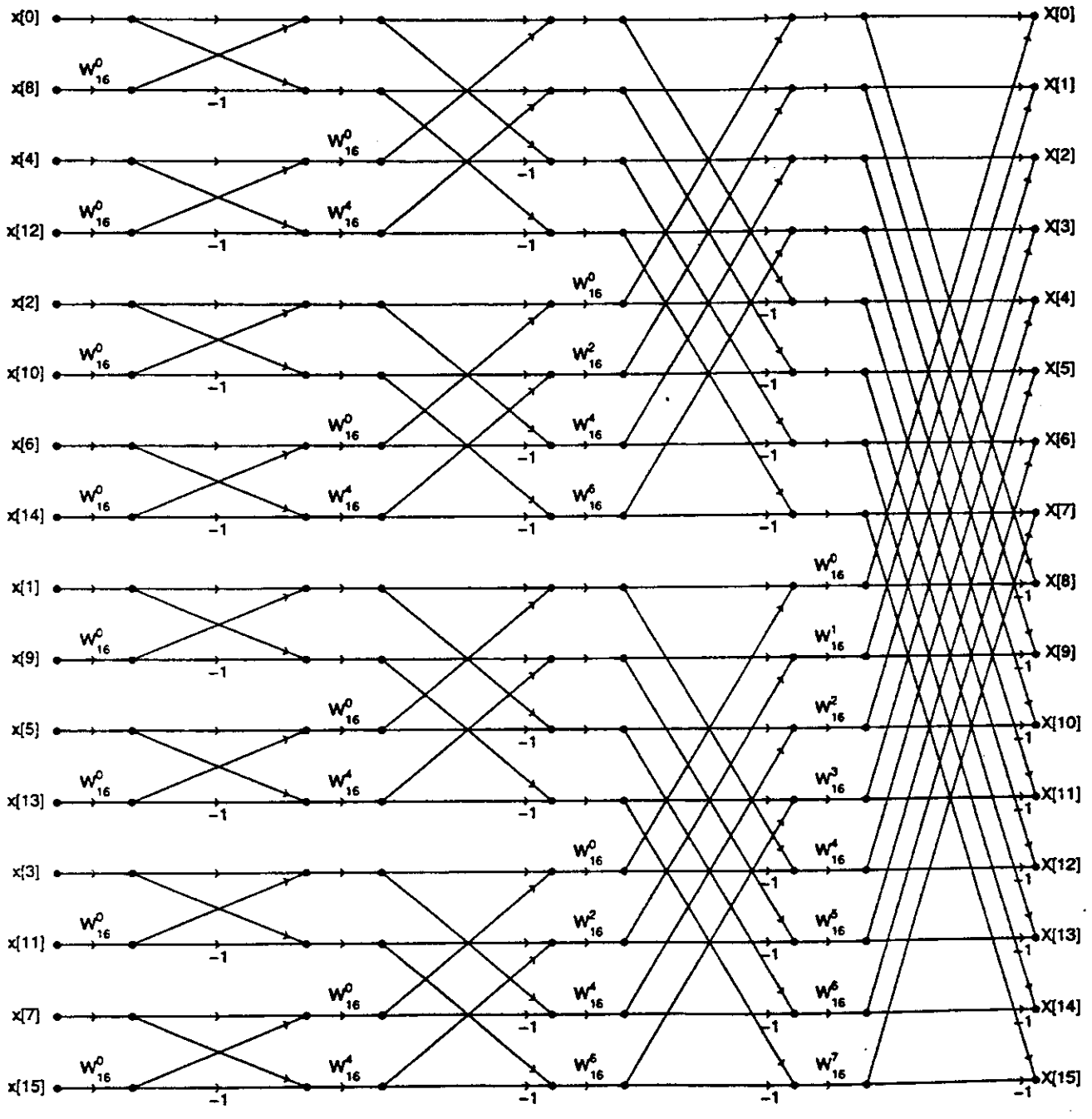
$$\begin{aligned} y_k[0] &= x[0] \\ y_k[1] &= x[1] + W_N^k x[0] \\ y_k[2] &= x[2] + W_N^k x[1] + W_N^{2k} x[0] \\ &\vdots \\ y_k[N] &= x[N] + W_N^k x[N-1] + \cdots + W_N^{k(N-1)} x[1] + W_N^{kN} x[0] \\ &= 0 + \sum_{\ell=0}^{N-1} W_N^{k(N-\ell)} x[\ell] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} W_N^{-k\ell} x[\ell] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] W_N^{(N-k)\ell} \\ &= X[N-k] \end{aligned}$$

(b) Using the figure, we find the system function $Y_k(z)$.

$$\begin{aligned} Y_k(z) &= X(z)\frac{1-W_N^{-k}z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\frac{2\pi k}{N})+z^{-2}} \\ &= X(z)\frac{1-W_N^{-k}z^{-1}}{(1-W_N^{-k}z^{-1})(1-W_N^{k}z^{-1})} \\ &= \frac{X(z)}{1-W_N^k z^{-1}} \end{aligned}$$

Therefore, $y_k[n] = x[n] + W_N^k y_k[n-1]$. This is the same difference equation as in part (a).

9.22. The flow graph for 16 point radix-2 decimation-in-time FFT algorithm is shown below.



To determine the number of real multiplications and additions required to implement the flow graph,

consider the number of real multiplications and additions introduced by each of the coefficients W_N^k:

W_{16}^0 :	0 real multiplications + 0 real additions	$(W_{16}^0 = 1)$
W_{16}^4 :	0 real multiplications + 0 real additions	$(W_{16}^4(a+jb) = b - aj)$
W_{16}^2 :	2 real multiplications + 2 real additions	$(W_{16}^2(a+jb) = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) + j\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a))$
W_{16}^6 :	2 real multiplications + 2 real additions	similarly
W_{16}^1 :	4 real multiplications + 2 real additions	
W_{16}^3 :	4 real multiplications + 2 real additions	
W_{16}^5 :	4 real multiplications + 2 real additions	
W_{16}^7 :	4 real multiplications + 2 real additions	

The contribution of all the W_N^k's on the flow graph is 28 real multiplications and 20 real additions. The butterflies contribute 0 real multiplications and 32 real additions per stage. Since there are four stages, the butterflies contribute 0 real multiplications and 128 real additions. In total, 28 real multiplications and 148 real additions are required to implement the flow graph.

9.23. (a) Setting up the butterfly's system of equations in matrix form gives

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ W_N^r & -W_N^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{m-1}[p] \\ X_{m-1}[q] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_m[p] \\ X_m[q] \end{bmatrix}$$

Solving for

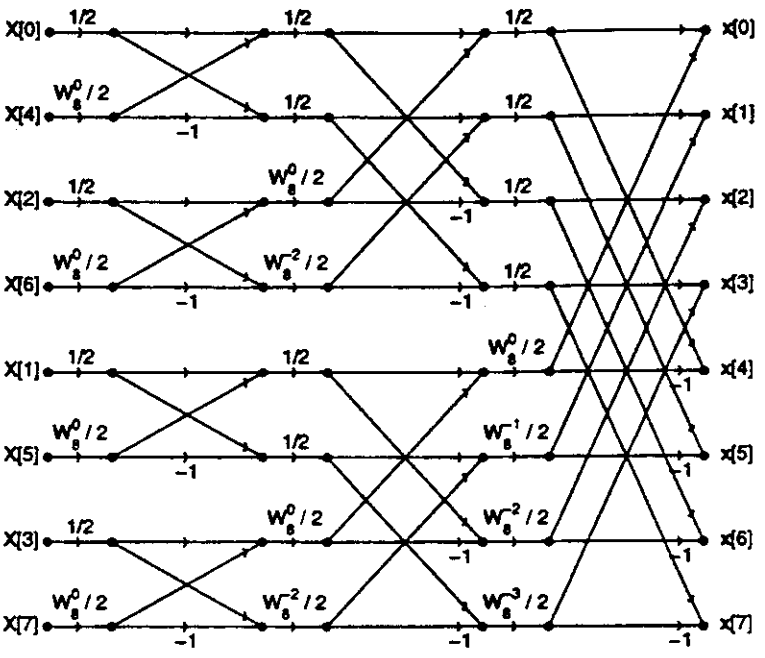
$$\begin{bmatrix} X_{m-1}[p] \\ X_{m-1}[q] \end{bmatrix}$$

gives

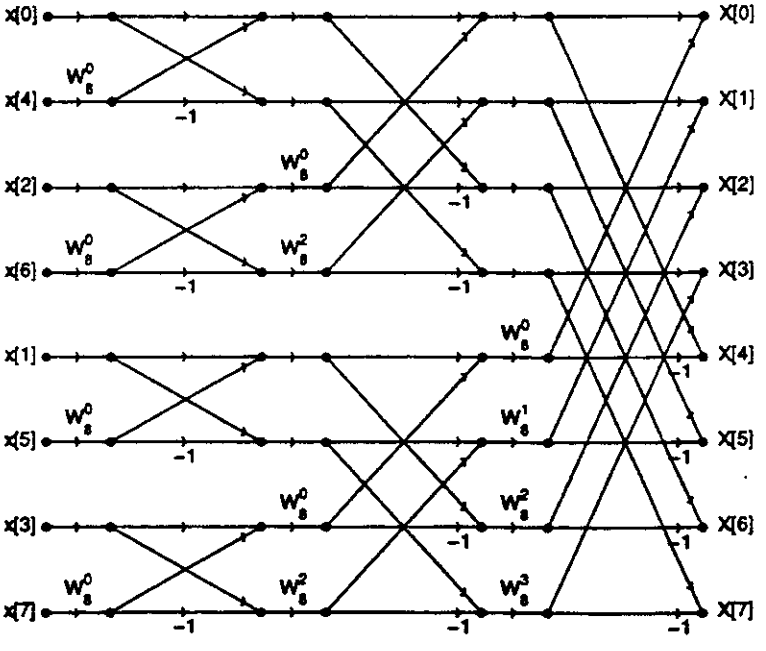
$$\begin{bmatrix} X_{m-1}[p] \\ X_{m-1}[q] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}W_N^{-r} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}W_N^{-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m[p] \\ X_m[q] \end{bmatrix}$$

which is consistent with Figure P9.6-2.

(b) The flow graph appears below.



(c) The modification is made by removing all factors of $1/2$, changing all W_N^{-r} to W_N^r, and relabeling the input and the output, as shown in the flow graph below.



(d) *Yes.* In general, for each decimation-in-time FFT algorithm there exists a decimation-in-frequency FFT algorithm that corresponds to interchanging the input and output and reversing the direction of all the arrows in the flow graph.

9.24. (a) Using the figure, it is observed that each output $Y[k]$ is a scaled version of $X[k]$. The scaling factor is $W[k]$, which is found to be

$$\begin{array}{lccccccccc} k & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ W[k] & = & 1 & G & G & G^2 & G & G^2 & G^2 & G^3 \end{array}$$

Using this $W[k]$, $Y[k] = W[k]X[k]$.

(b) $W[k] = G^{p[k]}$, where $p[k]$ = the number of ones in the binary representation of index k.

(c) A procedure for finding $\hat{x}[n]$ is as follows.

step 1: Form $W'[k] = 1/W[k]$.

step 2: Take the inverse DFT of $W'[k]$, yielding $w'[n]$.

step 3: Let $\hat{x}[n]$ be the circular convolution of $x[n]$ and $w'[n]$.

If $\hat{x}[n]$ is input to the modified FFT algorithm, then the output will be $X[k]$, as shown below.

$$\begin{aligned} Y[k] &= W[k]\hat{X}[k] \\ &= W[k]X[k]W'[k] \\ &= X[k] \end{aligned}$$

9.25. Let z_k be the z-plane locations of the 25 points uniformly spaced on an arc of a circle of radius 0.5 from $-\pi/6$ to $2\pi/3$. Then

$$z_k = 0.5e^{j(\omega_0 + k\Delta\omega)}, \quad k = 0, 1, \ldots, 24$$

where

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\frac{\pi}{6} \\ \Delta\omega &= \left(\frac{5\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{24}\right) \\ &= \frac{5\pi}{144} \end{aligned}$$

From the definition of the z-transform,

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z_k^{-n}$$

Plugging in z_k, and setting $W = e^{-j\Delta\omega}$,

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n](0.5)^{-n} e^{-j\omega_0 n} W^{nk}$$

This is similar to the expression for $X(e^{j\omega})$ using the chirp transform algorithm. The only difference is the $(0.5)^{-n}$ term. Setting

$$g[n] = x[n](0.5)^{-n} e^{-j\omega_0 n} W^{n^2/2}$$

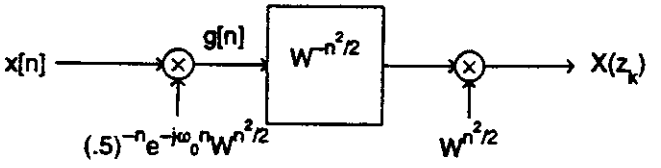
we get

$$X(z_k) = W^{k^2/2} \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W^{-(k-n)^2/2}$$

using the result of the chirp transform algorithm. A procedure for computing $X(z)$ at the points z_k is then

- Multiply the sequence x[n] by the sequence $(0.5)^{-n}e^{-j\omega_0 n}W^{n^2/2}$ to form $g[n]$.
- Convolve $g[n]$ with the sequence $W^{-n^2/2}$.
- Multiply this result by the sequence $W^{n^2/2}$ to form $X(z_k)$.

A block diagram of this system appears below.



9.26.

$$\begin{aligned}
Y[k] &= \sum_{n=0}^{2N-1} y[n]e^{-j(\frac{2\pi}{2N})kn} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)n^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)n} + \sum_{n=N}^{2N-1} e^{-j(\pi/N)n^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)n^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)n} + \sum_{l=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)(l+N)^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)(l+N)} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)n^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)n} + e^{-j\pi k}\sum_{l=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)(l^2+2Nl+N^2)}e^{-j(2\pi/N)(k/2)l} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)n^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)n} + (-1)^k\sum_{l=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)l^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)l} \\
&= (1+(-1)^k)\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\pi/N)n^2}e^{-j(2\pi/N)(k/2)n} \\
&= \begin{cases} 2X[k/2], & k \text{ even} \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases}
\end{aligned}$$

Thus,

$$Y[k] = \begin{cases} 2\sqrt{N}e^{-j\pi/4}e^{j(\pi/N)k^2/4}, & k \text{ even} \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases}$$

9.27. Let

$$y[n] = e^{-j2\pi n/627}x[n]$$

Then

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{627})})$$

Let $y'[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n+256m]$, $0 \le n \le 255$, and let $Y'[k]$ be the 256 point DFT of $y'[n]$. Then

$$Y'[k] = X\left(e^{j(\frac{2\pi k}{256}+\frac{2\pi}{627})}\right)$$

See problem 9.30 for a more in-depth analysis of this technique.

9.28. (a) The problem states that the effective frequency spacing, Δf, should be 50 Hz or less. This constrains N such that

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{NT} \leq 50 \\ \mathrm{N} &\geq \frac{1}{50T} \\ &\geq 200 \end{aligned}$$

Since the sequence length L is 500, and N must be a power of 2, we might conclude that the minimum value for N is 512 for computing the desired samples of the z-transform.

However, we can compute the samples with N equal to 256 by using time aliasing. In this technique, we would zero pad $x[n]$ to a length of 512, then form the 256 point sequence

$$y[n] = \begin{cases} x[n] + x[n+256], & 0 \leq n \leq 255 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

We could then compute 256 samples of the z-transform of $y[n]$. The effective frequency spacing of these samples would be $1/(NT) \approx 39$ Hz which is lower than the 50 Hz specification.

Note that these samples also correspond to the *even*-indexed samples of a length 512 sampled z-transform of $x[n]$. Problem 9.30 discusses this technique of time aliasing in more detail.

(b) Let

$$y[n] = (1.25)^n x[n]$$

Then, using the modulation property of the z-transform, $Y(z) = X(0.8z)$ and so $Y[k] = X(0.8e^{j2\pi k/N})$.

9.29. (a) We offer two solutions to this problem.

Solution #1: Looking at the DFT of the sequence, we find

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[r+(N/2)] e^{-j2\pi k[r+(N/2)]/N} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n][1-(-1)^k] e^{-j2\pi kn/N} \\ &= 0, \quad k \text{ even} \end{aligned}$$

Solution #2: Alternatively, we can use the circular shift property of the DFT to find

$$\begin{aligned} X[k] &= -X[k] e^{-j(\frac{2\pi}{N})k(\frac{N}{2})} \\ &= -(-1)^k X[k] \\ &= (-1)^{k+1} X[k] \end{aligned}$$

When k is even, we have $X[k] = -X[k]$ which can only be true if $X[k] = 0$.

(b) Evaluating the DFT at the odd-indexed samples gives us

$$\begin{aligned}
X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)(2k+1)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]e^{-j2\pi n/N}e^{-j2\pi kn/(N/2)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n/N}e^{-j2\pi kn/(N/2)} \\
&= \mathrm{DFT}_{N/2}\left\{x[n]e^{-j(2\pi/N)n}\right\} + \sum_{l=0}^{N/2-1} x[l+(N/2)]e^{-j2\pi[l+(N/2)]/N}e^{-j2\pi k[l+(N/2)]/(N/2)} \\
&= \mathrm{DFT}_{N/2}\left\{x[n]e^{-j(2\pi/N)n}\right\} + (-1)(-1)\sum_{l=0}^{N/2-1} x[l]e^{-j2\pi l/N}e^{-j2\pi kl/(N/2)} \\
&= \mathrm{DFT}_{N/2}\left\{2x[n]e^{-j(2\pi/N)n}\right\}
\end{aligned}$$

for $k = 0, \ldots, N/2-1$. Thus, we can compute the odd-indexed DFT values using one $N/2$ point DFT plus a small amount of extra computation.

9.30. (a) Note that we can write the even-indexed values of $X[k]$ as $X[2k]$ for $k = 0, \ldots, (N/2)-1$. From the definition of the DFT, we find

$$\begin{aligned}
X[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi(2k)n/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}kn} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+(N/2)]e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}kn}e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}(N/2)k} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n]+x[n+(N/2)])e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}kn} \\
&= Y[k]
\end{aligned}$$

Thus, the algorithm produces the desired results.

(b) Taking the M-point DFT $Y[k]$, we find

$$\begin{aligned}
Y[k] &= \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+rM]e^{-j2\pi kn/M} \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{M-1} x[n+rM]e^{-j2\pi k(n+rM)/M}e^{j2\pi(rM)k/M}
\end{aligned}$$

Let $l = n + rM$. This gives

$$\begin{aligned}
Y[k] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]e^{-j2\pi kl/M} \\
&= X(e^{j2\pi k/M})
\end{aligned}$$

Thus, the result from Part (a) is a special case of this result if we let $M = N/2$. In Part (a), there are only two r terms for which $y[n]$ is nonzero in the range $n = 0, \ldots, (N/2)-1$.

(c) We can write the odd-indexed values of $X[k]$ as $X[2k+1]$ for $k = 0, \ldots, (N/2)-1$. From the definition of the DFT, we find

$$\begin{aligned} X[2k+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(2k+1)n/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n/N} e^{-j2\pi(2k)n/N} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n] e^{-j2\pi n/N} e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}kn} + \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n+(N/2)] e^{-j2\pi[n+(N/2)]/N} e^{-j\frac{2\pi}{N/2}k[n+(N/2)]} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[(x[n] - x[n+(N/2)]) e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \right] e^{-j\frac{2\pi}{(N/2)}kn} \end{aligned}$$

Let

$$y[n] = \begin{cases} (x[n] - x[n+(N/2)]) e^{-j(2\pi/N)n}, & 0 \le n \le (N/2)-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then $Y[k] = X[2k+1]$. Thus, The algorithm for computing the odd-indexed DFT values is as follows.

step 1: Form the sequence

$$y[n] = \begin{cases} (x[n] - x[n+(N/2)]) e^{-j(2\pi/N)n}, & 0 \le n \le (N/2)-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

step 2: Compute the $N/2$ point DFT of $y[n]$, yielding the sequence $Y[k]$.

step 3: The odd-indexed values of $X[k]$ are then $X[k] = Y[(k-1)/2]$, $k = 1, 3, \ldots, N-1$.

9.31. (a) Since $x[n]$ is real, $x[n] = x^*[n]$, and $X[k]$ is conjugate symmetric.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}Nn} \right)^* \\ &= X^*[N-k] \end{aligned}$$

Hence, $X_R[k] = X_R[N-k]$ and $X_I[k] = -X_I[N-k]$.

(b) In Part (a) it was shown that the DFT of a real sequence $x[n]$ consists of a real part that has even symmetry, and an imaginary part that has odd symmetry. We use this fact in the DFT of the sequence $g[n]$ below.

$$\begin{aligned} G[k] &= X_1[k] + jX_2[k] \\ &= (X_{1ER}[k] + jX_{1OI}[k]) + j(X_{2ER}[k] + jX_{2OI}[k]) \\ &= \underbrace{X_{1ER}[k] - X_{2OI}[k]}_{\text{real part}} + j \underbrace{(X_{1OI}[k] + X_{2ER}[k])}_{\text{imaginary part}} \end{aligned}$$

In these expressions, the subscripts "E" and "O" denote even and odd symmetry, respectively, and the subscripts "R" and "I" denote real and imaginary parts, respectively.

Therefore, the even and real part of $G[k]$ is

$$G_{ER}[k] = X_{1ER}[k]$$

the odd and real part of $G[k]$ is

$$G_{OR}[k] = -X_{2OI}[k]$$

the even and imaginary part of $G[k]$ is

$$G_{EI}[k] = X_{2ER}[k]$$

and the odd and imaginary part of $G[k]$ is

$$G_{OI}[k] = X_{1OI}[k]$$

Having established these relationships, it is easy to come up with expressions for $X_1[k]$ and $X_2[k]$.

$$\begin{aligned} X_1[k] &= X_{1ER}[k] + jX_{1OI}[k] \\ &= G_{ER}[k] + jG_{OI}[k] \\ X_2[k] &= X_{2ER}[k] + jX_{2OI}[k] \\ &= G_{EI}[k] - jG_{OR}[k] \end{aligned}$$

(c) An $N = 2^\nu$ point FFT requires $(N/2)\log_2 N$ complex multiplications and $N\log_2 N$ complex additions. This is equivalent to $2N\log_2 N$ real multiplications and $3N\log_2 N$ real additions.

(i) The two N-point FFTs, $X_1[k]$ and $X_2[k]$, require a total of $4N\log_2 N$ real multiplications and $6N\log_2 N$ real additions.

(ii) Computing the N-point FFT, $G[k]$, requires $2N\log_2 N$ real multiplications and $3N\log_2 N$ real additions. Then, the computation of $G_{ER}[k]$, $G_{EI}[k]$, $G_{OI}[k]$, and $G_{OR}[k]$ from $G[k]$ requires approximately $4N$ real multiplications and $4N$ real additions. Then, the formation of $X_1[k]$ and $X_2[k]$ from $G_{ER}[k]$, $G_{EI}[k]$, $G_{OI}[k]$, and $G_{OR}[k]$ requires no real additions or multiplications. So this technique requires a total of approximately $2N\log_2 N + 4N$ real multiplications and $3N\log_2 N + 4N$ real additions.

(d) Starting with

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

and separating $x[n]$ into its even and odd numbered parts, we get

$$X[k] = \sum_{n \text{ even}} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n \text{ odd}} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$$

Substituting $n = 2\ell$ for n even, and $n = 2\ell + 1$ for n odd, gives

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} x[2\ell]e^{-j2\pi k\ell/(N/2)} + \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} x[2\ell+1]e^{-j2\pi k(2\ell+1)/N} \\ &= \sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} x[2\ell]e^{-j2\pi k\ell/(N/2)} + e^{-j2\pi k/N}\sum_{\ell=0}^{(N/2)-1} x[2\ell+1]e^{-j2\pi k\ell/(N/2)} \\ &= \begin{cases} X_1[k] + e^{-j2\pi k/N}X_2[k], & 0 \le k < \frac{N}{2} \\ X_1[k-(N/2)] - e^{-j2\pi k/N}X_2[k-(N/2)], & \frac{N}{2} \le k < N \end{cases} \end{aligned}$$

(e) The algorithm is then

step 1: Form the sequence $g[n] = x[2n] + jx[2n+1]$, which has length $N/2$.

step 2: Compute $G[k]$, the $N/2$ point DFT of $g[n]$.

step 3: Separate $G[k]$ into the four parts, for $k = 1, \ldots, (N/2) - 1$

$$\begin{aligned} G_{OR}[k] &= \frac{1}{2}(G_R[k] - G_R[(N/2) - k]) \\ G_{ER}[k] &= \frac{1}{2}(G_R[k] + G_R[(N/2) - k]) \\ G_{OI}[k] &= \frac{1}{2}(G_I[k] - G_I[(N/2) - k]) \\ G_{EI}[k] &= \frac{1}{2}(G_I[k] + G_I[(N/2) - k]) \end{aligned}$$

which each have length $N/2$.

step 4: Form

$$\begin{aligned} X_1[k] &= G_{ER}[k] + jG_{OI}[k] \\ X_2'[k] &= e^{-j2\pi k/N}(G_{EI}[k] - jG_{OR}[k]) \end{aligned}$$

which each have length $N/2$.

step 5: Then, form

$$X[k] = X_1[k] + X_2'[k], \qquad 0 \le k < \frac{N}{2}$$

step 6: Finally, form

$$X[k] = X^*[N-k], \qquad \frac{N}{2} \le k < N$$

Adding up the computational requirements for each step of the algorithm gives (approximately)

step 1: 0 real multiplications and 0 real additions.

step 2: $2\frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2}$ real multiplications and $3\frac{N}{2}\log_2\frac{N}{2}$ real additions.

step 3: $2N$ real multiplications and $2N$ real additions.

step 4: $2N$ real multiplications and N real additions.

step 5: 0 real multiplications and N real additions.

step 6: 0 real multiplications and 0 real additions.

In total, approximately $N\log_2\frac{N}{2} + 4N$ real multiplications and $\frac{3}{2}N\log_2\frac{N}{2} + 4N$ real additions are required by this technique.

The number of real multiplications and real additions required if $X[k]$ is computed using one N-point FFT computation with the imaginary part set to zero is $2N\log_2 N$ real multiplications and $3N\log_2 N$ real additions.

9.32. (a) The length of the sequence is $L + P - 1$.

(b) In evaluating $y[n]$ using the convolution sum, each nonzero value of $h[n]$ is multiplied once with every nonzero value of $x[n]$. This can be seen graphically using the flip and slide view of convolution. The total number of real multiplies is therefore LP.

(c) To compute $y[n] = h[n] * x[n]$ using the DFT, we use the procedure described below.

step 1: Compute N point DFTs of $x[n]$ and $h[n]$.

step 2: Multiply them together to get $Y[k] = H[k]X[k]$.

step 3: Compute the inverse DFT to get $y[n]$.

Since $y[n]$ has length $L + P - 1$, N must be greater than or equal to $L + P - 1$ so the circular convolution implied by step 2 is equivalent to linear convolution.

(d) For these signals, N is large enough so that circular convolution of $x[n]$ and $h[n]$ and the linear convolution of $x[n]$ and $h[n]$ produce the same result. Counting the number of complex multiplications for the procedure in part (b) we get

DFT of $x[n]$	$(N/2)\log_2 N$
DFT of $h[n]$	$(N/2)\log_2 N$
$Y[k] = X[k]H[k]$	N
Inverse DFT of $Y[k]$	$(N/2)\log_2 N$
	$(3N/2)\log_2 N + N$

Since there are 4 real multiplications for every complex multiplication we see that the procedure takes $6N\log_2 N + 4N$ real multiplications. Using the answer from part (a), we see that the direct method requires $(N/2)(N/2) = N^2/4$ real multiplications.

The following table shows that the smallest $N = 2^\nu$ for which the FFT method requires fewer multiplications than the direct method is 256.

N	Direct Method	FFT method
2	1	20
4	4	64
8	16	176
16	64	448
32	256	1088
64	1024	2560
128	4096	5888
256	16384	13312

9.33. (a) For each L point section, $P-1$ samples are discarded, leaving $L-P+1$ output samples. The complex multiplications are:

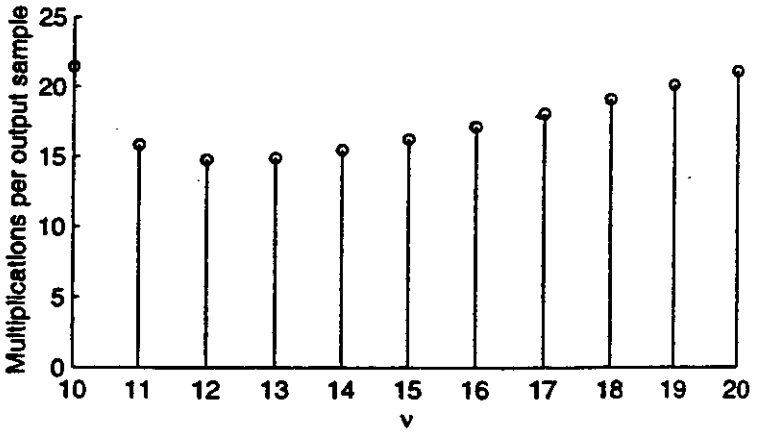
L point FFT of input:	$(L/2)\log_2 L = \nu 2^\nu/2$
Multiplication of filter and section DFT:	$L = 2^\nu$
L point inverse FFT:	$(L/2)\log_2 L = \nu 2^\nu/2$
Total per section:	$2^\nu(\nu+1)$

Therefore,

$$\frac{\text{Complex Multiplications}}{\text{Output Sample}} = \frac{2^\nu(\nu+1)}{2^\nu - P + 1}$$

Note we assume here that $H[k]$ has been precalculated.

(b) The figure below plots the number of complex multiplications per sample versus ν. For $\nu = 12$, the number of multiplies per sample reaches a minimum of 14.8. In comparison, direct evaluation of the convolution sum would require 500 complex multiplications per output sample.



Although $\nu = 9$ is the first valid choice for overlap-save method, it is not plotted since the value is so large (in the hundreds) it would obscure the graph.

(c)

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{2^\nu(\nu+1)}{2^\nu - P + 1} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\nu+1}{1+\frac{-P+1}{2^\nu}} = \nu$$

Thus, for $P = 500$ the direct method will be more efficient for $\nu > 500$.

(d) We want

$$\frac{2^\nu(\nu+1)}{2^\nu - P + 1} \leq P.$$

Plugging in $P = L/2 = 2^{\nu-1}$ gives

$$\frac{2^\nu(\nu+1)}{2^\nu - 2^{\nu-1} + 1} \leq 2^{\nu-1}.$$

As seen in the table below, the FFT will require fewer complex multiplications than the direct method when $\nu = 5$ or $P = 2^4 = 16$.

	Overlap/Save	Direct
ν	$\frac{2^\nu(\nu+1)}{2^\nu - 2^{\nu-1}+1}$	$2^{\nu-1}$
1	2	1
2	4	2
3	6.4	4
4	8.9	8
5	11.3	16

9.34. This problem asks that we find eight equally spaced *inverse* DFT coefficients using the chirp transform algorithm. The book derives the algorithm for the forward DFT. However, with some minor tweaking, it is easy to formulate an inverse DFT. First, we start with the inverse DFT relation

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi nk/N}$$

$$x[n_\ell] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi n_\ell k/N}$$

Next, we define

$$\begin{aligned}\Delta n &= 1\\ n_\ell &= n_0 + \ell\Delta n\end{aligned}$$

where $\ell = 0, \ldots, 7$. Substituting this into the equation above gives

$$x[n_\ell] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi n_0 k/N}e^{j2\pi\ell\Delta nk/N}$$

Defining

$$W = e^{-j2\pi\Delta n/N}$$

we find

$$x[n_\ell] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi n_0 k/N}W^{-\ell k}$$

Using the relation

$$\ell k = \frac{1}{2}[\ell^2 + k^2 - (k-\ell)^2]$$

we get

$$x[n_\ell] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi n_0 k/N}W^{-\ell^2/2}W^{-k^2/2}W^{(k-\ell)^2/2}$$

Let

$$G[k] = X[k]e^{j2\pi n_0 k/N}W^{-k^2/2}$$

Then,

$$x[n_\ell] = \frac{1}{N}W^{-\ell^2/2}\left(\sum_{k=0}^{N-1} G[k]W^{(k-\ell)^2/2}\right)$$

From this equation, it is clear that the inverse DFT can be computed using the chirp transform algorithm. All we need to do is replace n by k, change the sign of each of the exponential terms, and divide by a factor of N. Therefore,

$$\begin{aligned}m_1[k] &= e^{j2\pi kn_0/N}W^{-k^2/2}\\ m_2[k] &= W^{-k^2/2}\\ h[k] &= \frac{1}{N}W^{k^2/2}\end{aligned}$$

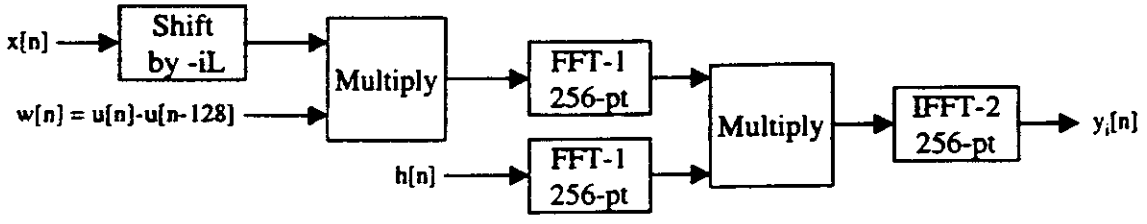
Using this system with $n_0 = 1020$, and $\ell = 0, \ldots, 7$ will result in a sequence $y[n]$ which will contain the desired samples, where

$$\begin{aligned}y[0] &= x[1020]\\ y[1] &= x[1021]\\ y[2] &= x[1022]\\ y[3] &= x[1023]\\ y[4] &= x[0]\\ y[5] &= x[1]\\ y[6] &= x[2]\\ y[7] &= x[3]\end{aligned}$$

9.35. First note that

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL \le n \le iL + 127, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x[n + iL], & 0 \le n \le 127, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Using the above we can implement the system with the following block diagram.

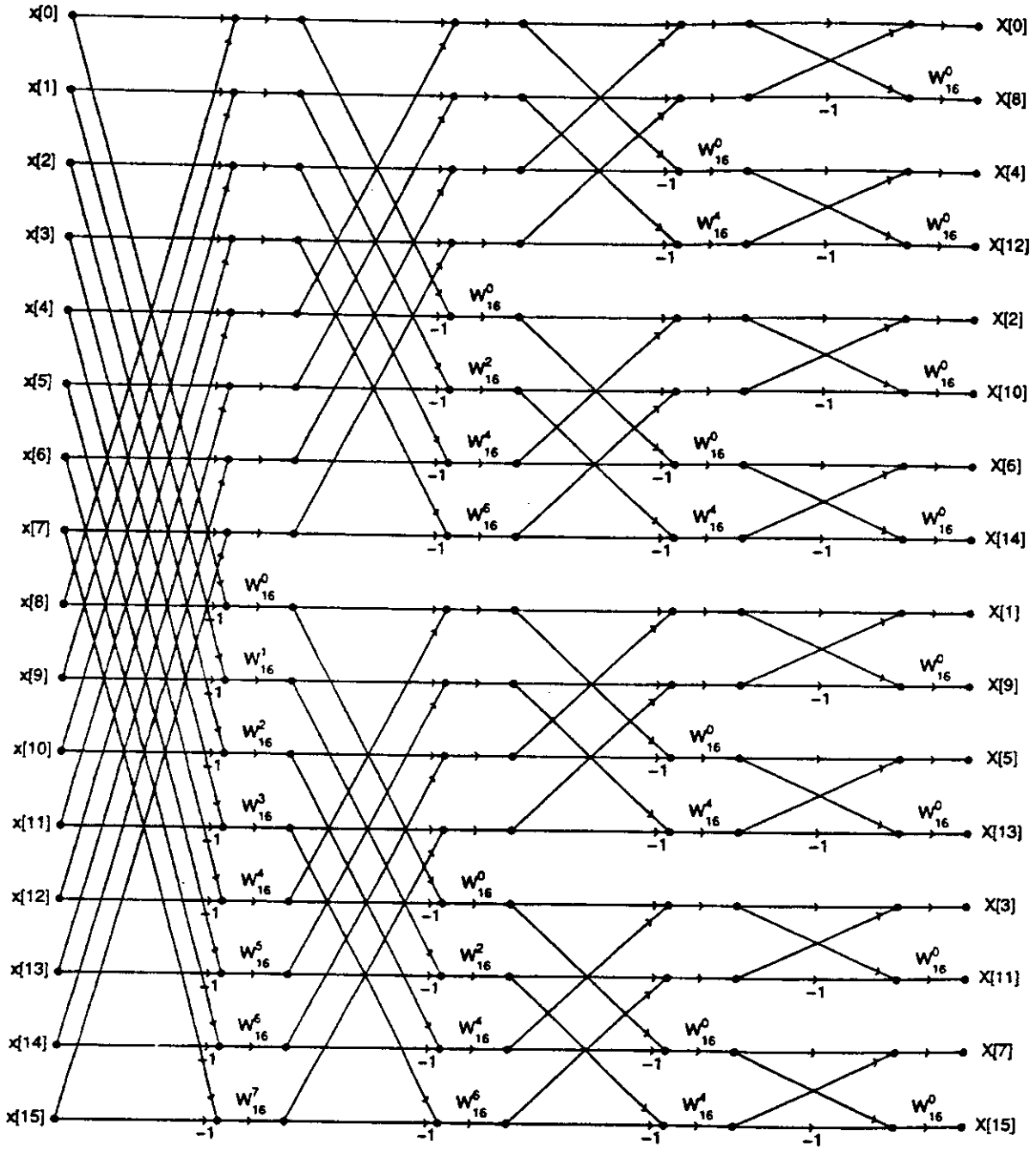


The FFT size was chosen as the next power of 2 higher than the length of the linear convolution. This insures the circular convolution implied by multiplying DFTs corresponds to linear convolution as well.

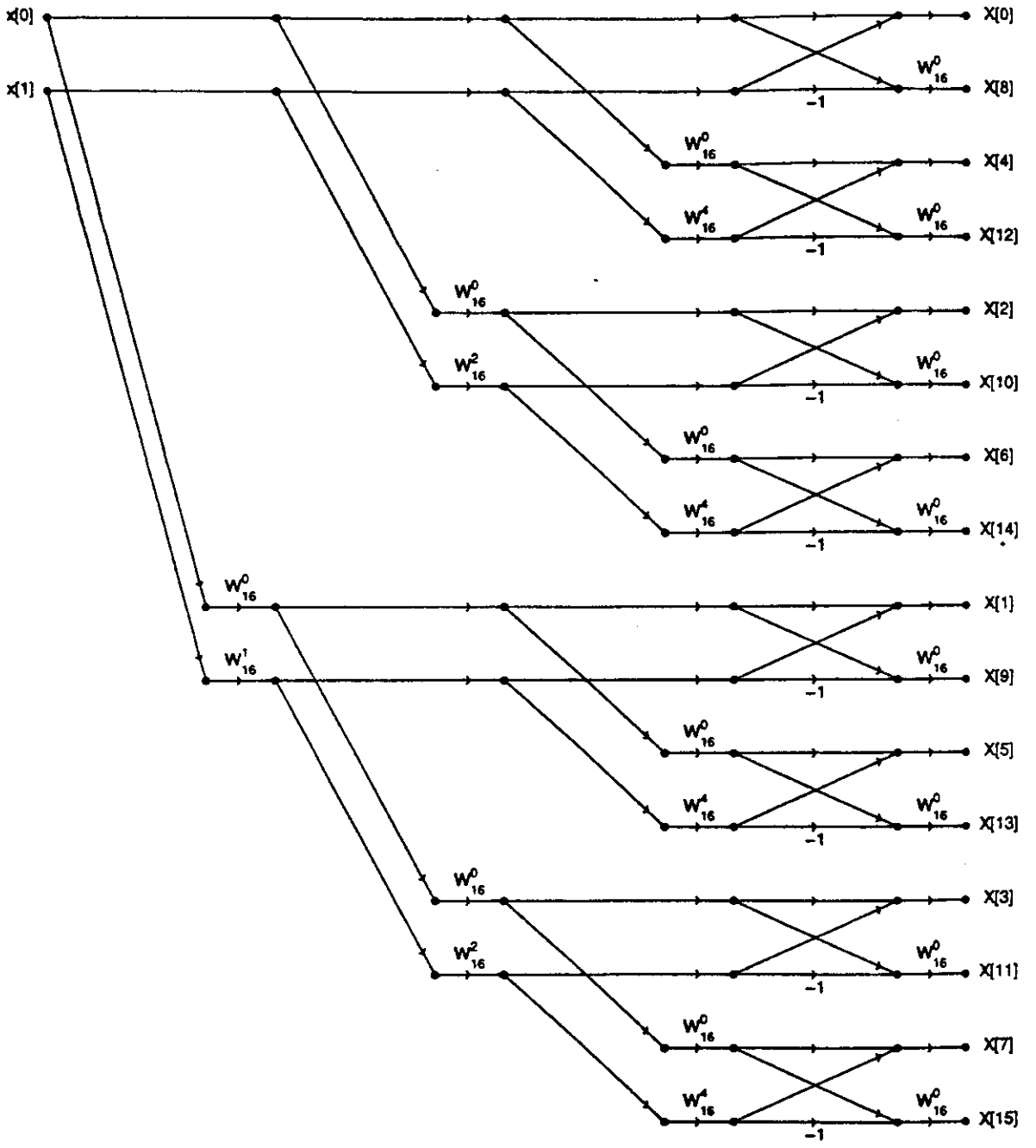
$$N_{\text{Conv}} = N_{x_i} + N_h - 1$$
$$= 128 + 64 - 1$$
$$= 191$$

$$N_{\text{FFT}} = 256$$

9.36. (a) The flow graph of a decimation-in-frequency radix-2 FFT algorithm for N = 16 is shown below.



(b) The pruned flow graph is shown below.



(c) The pruned butterflies can be used in $(\nu - \mu)$ stages. For simplicity, assume that $N/2$ complex multiplies are required in each unpruned stage. Counting all W_N^k terms gives

$$\begin{aligned} \text{Number of multiplications} &= \text{(Unpruned multiplications) + (Pruned multiplications)} \\ &= \mu \cdot \frac{N}{2} + \sum_{k=1}^{\nu-\mu} 2^k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu \cdot \frac{2^\nu}{2} + \sum_{k=0}^{\nu-\mu} 2^k - 1 \\
&= \mu \cdot 2^{\nu-1} + \frac{1-2^{\nu-\mu+1}}{1-2} - 1 \\
&= \mu \cdot 2^{\nu-1} + 2^{\nu-\mu+1} - 2
\end{aligned}
$$

9.37. (a) Starting with the equation

$$f[n] = x[2n+1] - x[2n-1] + Q, \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1,$$

where

$$Q = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1],$$

we note that $x[2n+1] = h[n]$, and $x[2n-1] = h[n-1]$ for $n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1$. We then get

$$f[n] = h[n] - h[n-1] + Q, \quad n = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2} - 1.$$

Taking the $N/2$ point DFT of both sides gives

$$
\begin{aligned}
F[k] &= H[k] - W_{N/2}^k H[k] + Q \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} W_{N/2}^{kn} \\
&= H[k](1 - W_N^{2k}) + \frac{N}{2} Q \delta[k]
\end{aligned}
$$

So

$$
\begin{aligned}
F[0] &= \frac{N}{2} Q \\
&= \frac{N}{2} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] \\
&= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2n+1] \\
&= H[0]
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\begin{aligned}
X[k] &= G[k] + W_N^k H[k] \\
X[0] &= G[0] + H[0] = G[0] + F[0] \\
X[N/2] &= G[N/2] + W_N^{N/2} H[N/2] \\
&= G[0] + W_N^{N/2} H[0] \\
&= G[0] - H[0] = G[0] - F[0]
\end{aligned}
$$

(b) The equation,

$$F[k] = H[k](1 - W_N^{2k}) + \frac{N}{2} Q \delta[k]$$

for $k \neq 0$ becomes

$$
\begin{aligned}
F[k] &= H[k](1 - W_N^{2k}) \\
&= H[k] W_N^k (W_N^{-k} - W_N^k)
\end{aligned}
$$

So

$$H[k] = \frac{F[k]}{W_N^k(W_N^{-k} - W_N^k)}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} X[k] &= G[k] + W_N^k H[k] \\ &= G[k] + \frac{F[k]}{W_N^{-k} - W_N^k} \\ &= G[k] - \frac{j}{2}\frac{F[k]}{\sin(2\pi k/N)} \end{aligned}$$

Clearly, we need to compute $X[0]$ and $X[N/2]$ with a separate formula since the $\sin(2\pi k/N) = 0$ for $k = 0$ and $k = N/2$.

(c) For each stage of the FFT, the equations

$$\begin{aligned} X[0] &= G[0] + F[0] \\ X[N/2] &= G[0] - F[0] \end{aligned}$$

require 2 real additions each, since the values $G[0]$ and $F[0]$ may be complex. We therefore require a total of 4 real additions to implement these two equations per stage.

For a single stage, the equation

$$X[k] = G[k] - \frac{1}{2}j\frac{F[k]}{\sin(2\pi k/N)} \quad k \neq 0, N/2$$

requires $(N-2)/2$ multiplications of the purely imaginary "twiddle factor" terms by the complex coefficents of $F[k]$ for $k \neq 0, N/2$. The number of multiplications were halved using the symmetry $\sin(2\pi(k + N/2)/N) = -\sin(2\pi k/N)$ and the fact that $F[k]$ is periodic with period $N/2$. Since multiplying a complex number by a purely imaginary number takes 2 real multiplies, we see that the equation requires a total of $(N-2)$ real multiplies per stage.

We also need $(N-2)$ complex additions to add the $G[k]$ and modified $F[k]$ terms for $k \neq 0, N/2$. Since a complex addition requires two real additions, we see that the equation takes a total of $2(N-2)$ real additions per stage.
Putting this all together with the fact that there are $\log_2 N$ stages gives us the totals

$$\begin{aligned} \text{Real Multiplications} &= (N-2)\log_2 N \\ \text{Real Additions} &= 2N\log_2 N \end{aligned}$$

Note that this is approximately half the computation of that of the standard FFT.

(d) The division by $\sin(2\pi k/N)$ for k near 0 and $N/2$ can cause $X[k]$ to get quite large at these values of k. Imagine a signal $x_1[n]$, and signal $x_2[n]$ formed from $x_1[n]$ by adding a small amount of white noise. Using this FFT algorithm, the two FFTs $X_1[k]$ and $X_2[k]$ can vary greatly at such values of k.

9.38. (a)

$$\begin{aligned} X[2k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{2kn} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left(x[n]W_N^{2kn} + x[n + (N/2)]W_N^{2k(n+(N/2))}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left(x[n] + x[n + (N/2)]\right) W_N^{2kn} \end{aligned}$$

In the derivation above, we used the fact that $W_N^{kN} = 1$. Since $W_N^{2kn} = W_{N/2}^{kn}$, $X[2k]$ has been expressed as an $N/2$ point DFT of the sequence $x[n] + x[n + (N/2)]$, $n = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1$.

(b)

$$\begin{aligned} X[4k+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{(4k+1)n} \\ &= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \Big(x[n] W_N^n W_N^{4kn} + x[n + (N/4)] W_N^{n+(N/4)} W_N^{4k(n+(N/4))} \\ &\quad + x[n + (N/2)] W_N^{n+(N/2)} W_N^{4k(n+(N/2))} + x[n + (3N/4)] W_N^{n+(3N/4)} W_N^{4k(n+(3N/4))} \Big) \\ &= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + (N/2)]) - j(x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)])\} W_N^n W_N^{4kn} \end{aligned}$$

In the derivation above, we used the fact that $W_N^{N/4} = -j$, $W_N^{3N/4} = j$, $W_N^{N/2} = -1$, and $W_N^{kN} = 1$. Since $W_N^{4kn} = W_{N/4}^{kn}$, $X[4k + 1]$ has been expressed as a $N/4$ point DFT. But we need to multiply the sequence $(x[n] - x[n + (N/2)]) - j(x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)])$ by the twiddle factor W_N^n, $0 \le n \le (N/4) - 1$ *before* we compute the $N/4$ point DFT.

The other odd-indexed terms can be shown in the same way to be

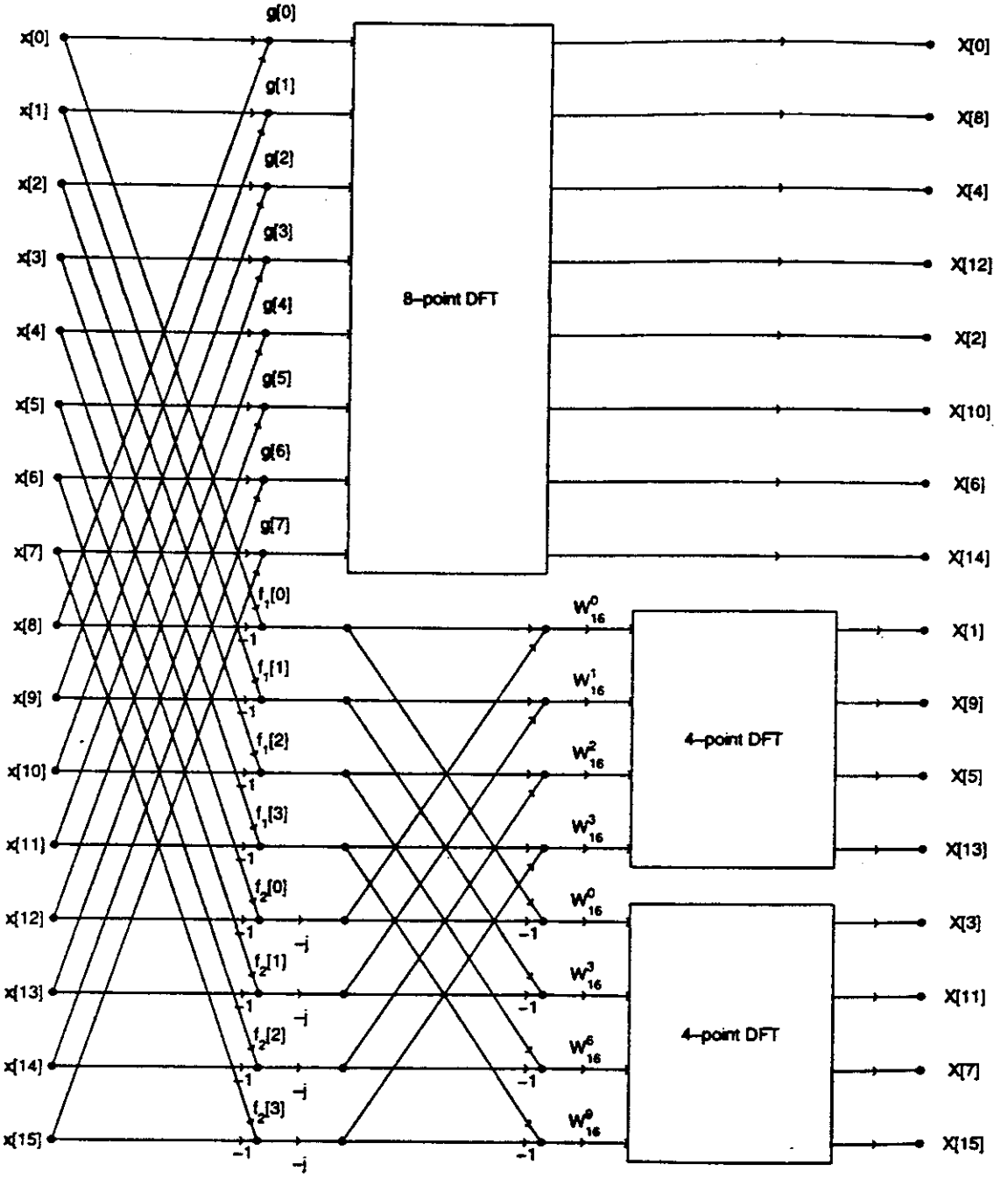
$$\begin{aligned} X[4k+3] &= \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + (N/2)]) \\ &\quad + j(x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)])\} W_N^{3n} W_N^{4kn}, \quad k = 0, 1, \ldots, (N/4) - 1. \end{aligned}$$

Parts (a) and (b) show that we can replace the computation of an N point DFT with the computation of one $N/2$ point DFT, two $N/4$ point DFTs, and some extra complex arithmetic.

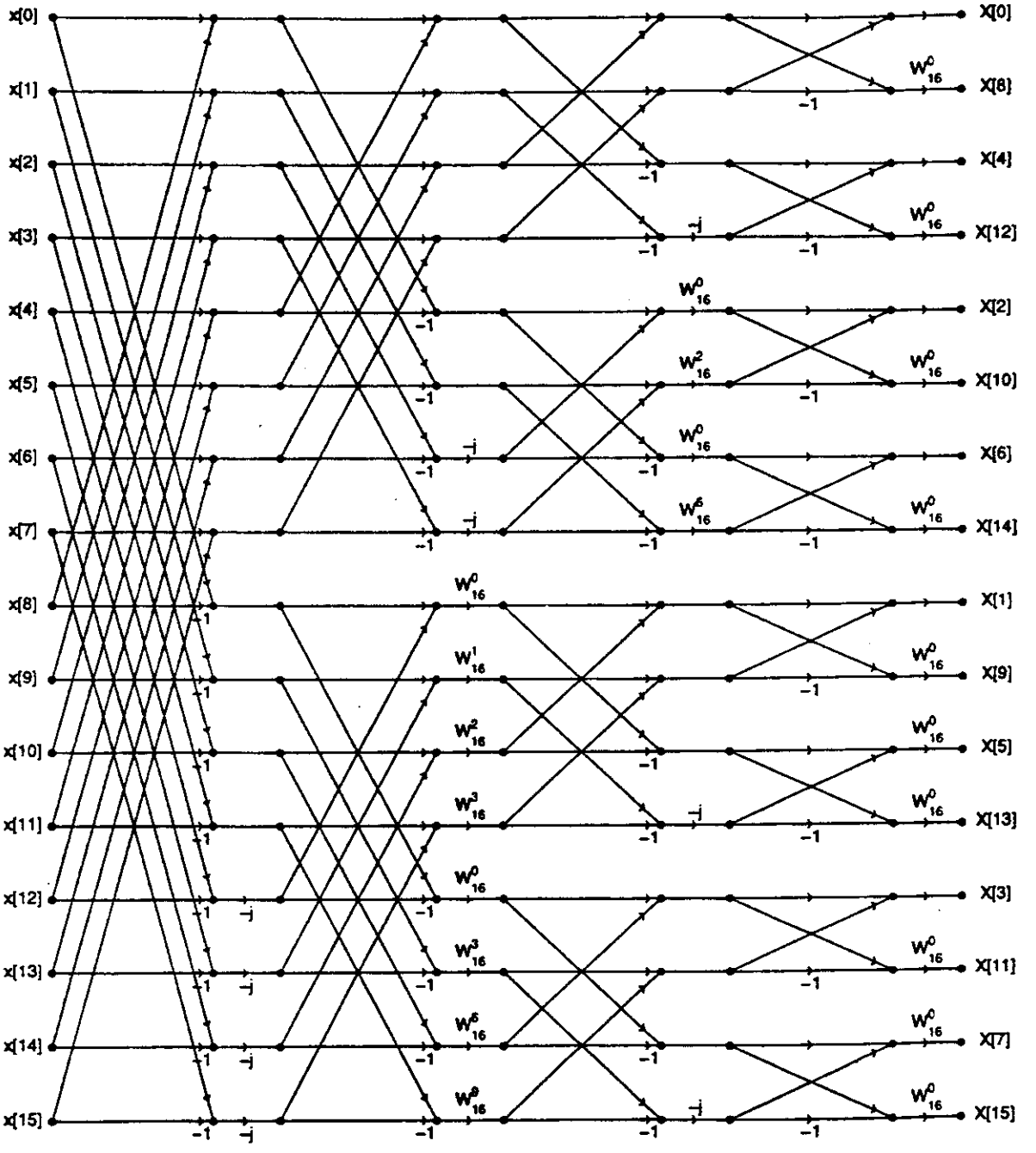
(c) Assume $N = 16$ and define

$$\begin{aligned} g[n] &= x[n] + x[n + (N/2)], \quad n = 0, 1, \ldots, (N/2) - 1 \\ f_1[n] &= x[n] - x[n + (N/2)], \quad n = 0, 1, \ldots, (N/4) - 1 \\ f_2[n] &= x[n + (N/4)] - x[n + (3N/4)], \quad n = 0, 1, \ldots, (N/4) - 1 \end{aligned}$$

A diagram for computing the values of $X[k]$ looks like:



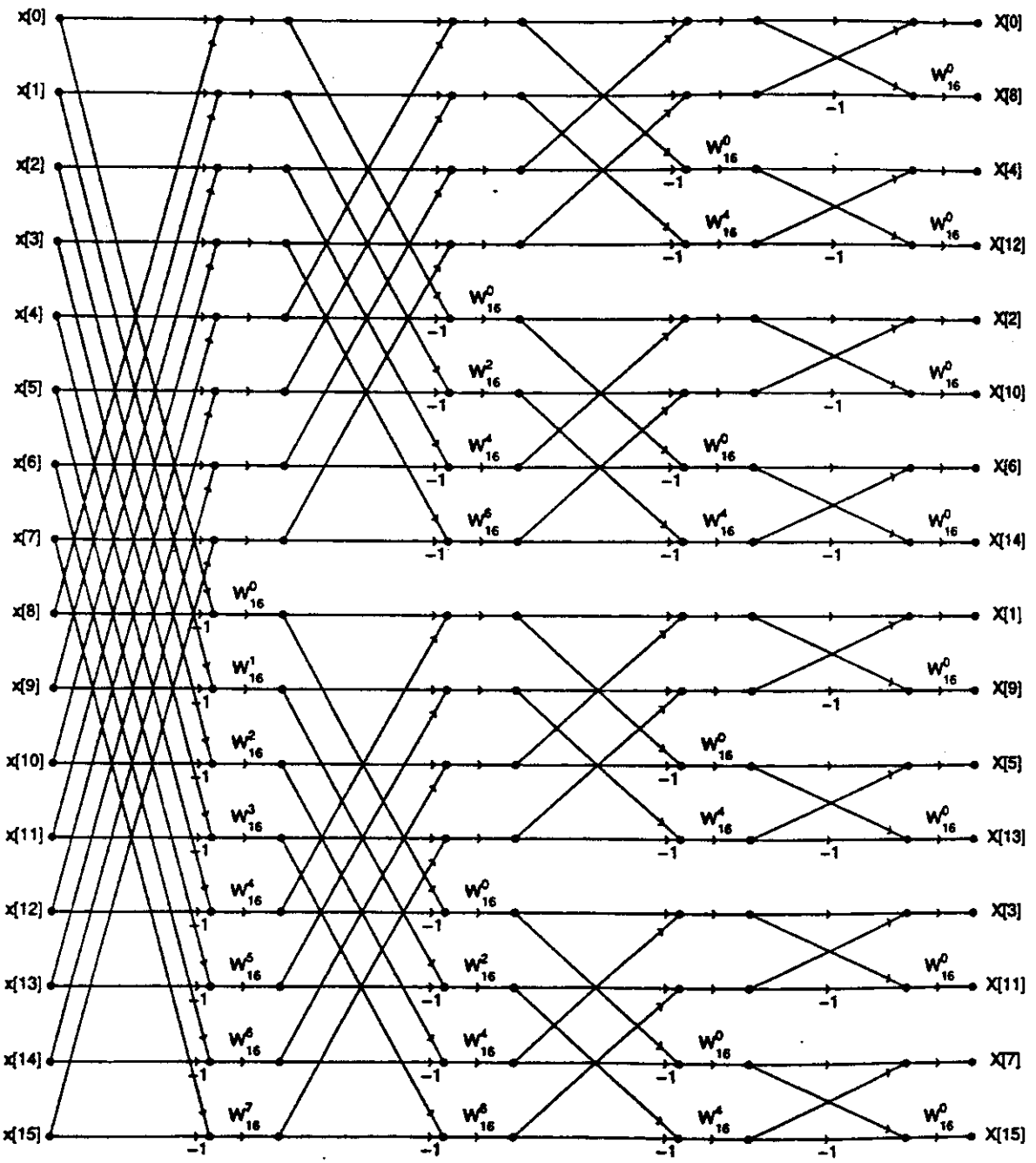
If we carry on applying the split-radix principle, we get the next diagram:



(d) The flow diagram for the regular radix-2 decimation-in-frequency algorithm is shown in the next figure for $N = 16$. Not counting trivial multiplications by W_N^0, we find that there are 17 complex multiplications total. Of these 17 complex multiplications, 7 are multiplications by $W_{16}^4 = -j$. Since a multiplication by $-j$ can be done with zero real multiplications, and a complex multiplication requires 4 real multiplications, we find that the total number of real multiplications for the decimation-in-frequency algorithm to be $(10)(4) = 40$.

Taking a look at the split-radix algorithm, we find again that there are 17 complex multiplications.

In this case, however, 9 of these are by $W_{16}^4 = -j$. Thus, it takes a total of (8)(4) = 32 real multiplications to implement this flow graph.



9.39. (a) Noting that

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$\theta_i = \arctan(2^{-i}) \quad = \quad 2^{-i} - \frac{2^{-3i}}{3} + \frac{2^{-5i}}{5} - \frac{2^{-7i}}{7} + \ldots$$

we notice that, to first order, the θ_i and θ_{i+1} differ by a factor of 2. (Note that these formulae are in radians). This approximate factor of 2 for sucessive θ_i is confirmed by looking at some values of θ_i: $\theta_0 = 45°$, $\theta_1 = 26.6°$, $\theta_2 = 14.0°$, $\theta_3 = 7.1°$. So we have a set of angles whose values are decreasing by about a factor of 2.

You can add and subtract these θ_i angles to form any angle $0 < \theta < \pi/2$. The error is bound by $\theta_M = \arctan(2^{-M})$, the angle that would be included next in the sum. If the error were greater than θ_M, then one of the α_i terms must have been incorrect. The inclusion of the Mth term must bring the sum closer to θ.

(b) An algorithm to compute θ_i is described below.

$\alpha_0 = +1$
$\hat{\theta} = \alpha_0\theta_0$
for $i = 1$ to $M-1$
 if $(\hat{\theta} > \theta)$
 $\alpha_i = -1$
 else
 $\alpha_i = +1$
 endif
 $\hat{\theta} = \alpha_i\theta_i + \hat{\theta}$
end for

Using this algorithm, the sequence α_i is found to be

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	1	−1	1	1	−1	−1	1	1	−1	−1	−1

(c) Note that $(X + jY)(1 + j\alpha_i 2^{-i}) = (X - \alpha_i Y 2^{-i}) + j(Y + \alpha_i X 2^{-i})$. Hence, the recursion is simply multiplying by M complex numbers of the form $(1 + j\alpha_i 2^{-i})$. These can be represented in polar form:

$$\begin{aligned}(1 + j\alpha_i 2^{-i}) &= \sqrt{1 + 2^{-2i}}\, e^{j\alpha_i \arctan(2^{-i})} \\ &= G_i e^{j\alpha_i\theta_i}\end{aligned}$$

Multiplication of polar numbers produces a sum of the phases, $\alpha_i\theta_i$.

$$\hat{\theta} = \sum_{i=0}^{M-1} \alpha_i\theta_i$$

(d) Multiplication of polar numbers produces a product of the magnitudes, G_i.

$$G_M = \prod_{i=0}^{M-1} \sqrt{1 + 2^{-2i}}$$

9.40. (a) Starting with the definition of the DFT,

$$X[k] \quad = \quad \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}$$

$$\begin{aligned} X[3k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{3nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{3nk} + \sum_{n=N/3}^{2N/3-1} x[n]W_N^{3nk} + \sum_{n=2N/3}^{N-1} x[n]W_N^{3nk} \end{aligned}$$

Substituting $m = n - N/3$ into the second summation, and $m = n - 2N/3$ into the third summation gives

$$\begin{aligned} X[3k] &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{3nk} + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+N/3]W_N^{3mk}W_N^{Nk} + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+2N/3]W_N^{3mk}W_N^{2Nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} (x[n] + x[n+N/3] + x[n+2N/3])W_N^{3nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} (x[n] + x[n+N/3] + x[n+2N/3])W_{N/3}^{nk} \end{aligned}$$

Define the sequence

$$x_1[n] = x[n] + x[n+N/3] + x[n+2N/3]$$

The 3-point DFT of $x_1[n]$ is $X_1[k] = X[3k]$.

(b) This part is similar to part (a). First, $x_2[n]$ is found. Starting again with the definition of the DFT,

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \\ X[3k+1] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{n(3k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+1)} + \sum_{n=N/3}^{2N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+1)} + \sum_{n=2N/3}^{N-1} x[n]W_N^{n(3k+1)} \end{aligned}$$

Substituting $m = n - N/3$ into the second summation, and $m = n - 2N/3$ into the third summation gives

$$\begin{aligned} X[3k+1] &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+1)} + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+N/3]W_N^{(m+N/3)(3k+1)} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+2N/3]W_N^{(m+2N/3)(3k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+1)} + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+N/3]W_N^{m(3k+1)}W_N^{Nk}W_N^{N/3} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+2N/3]W_N^{m(3k+1)}W_N^{2Nk}W_N^{2N/3} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} (x[n] + x[n+N/3]W_N^{N/3} + x[n+2N/3]W_N^{2N/3})W_N^{n(3k+1)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/3-1} (x[n] + x[n+N/3]W_N^{N/3} + x[n+2N/3]W_N^{2N/3})W_N^n W_{N/3}^{kn}$$

Define the sequence

$$x_2[n] = (x[n] + x[n+N/3]W_N^{N/3} + x[n+2N/3]W_N^{2N/3})W_N^n$$

The 3-point DFT of $x_2[n]$ is $X_2[k] = X[3k+1]$. Next, $x_3[n]$ is found in a similar manner. Starting with the definition of the DFT,

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \\ X[3k+2] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{n(3k+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+2)} + \sum_{n=N/3}^{2N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+2)} + \sum_{n=2N/3}^{N-1} x[n]W_N^{n(3k+2)} \end{aligned}$$

Substituting $m = n - N/3$ into the second summation, and $m = n - 2N/3$ into the third summation gives

$$\begin{aligned} X[3k+2] &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+2)} + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+N/3]W_N^{(m+N/3)(3k+2)} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+2N/3]W_N^{(m+2N/3)(3k+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} x[n]W_N^{n(3k+2)} + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+N/3]W_N^{m(3k+2)}W_N^{Nk}W_N^{2N/3} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{N/3-1} x[m+2N/3]W_N^{m(3k+2)}W_N^{2Nk}W_N^{4N/3} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} (x[n] + x[n+N/3]W_N^{2N/3} + x[n+2N/3]W_N^{4N/3})W_N^{n(3k+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/3-1} (x[n] + x[n+N/3]W_N^{2N/3} + x[n+2N/3]W_N^{4N/3})W_N^{2n}W_{N/3}^{kn} \end{aligned}$$

Define the sequence

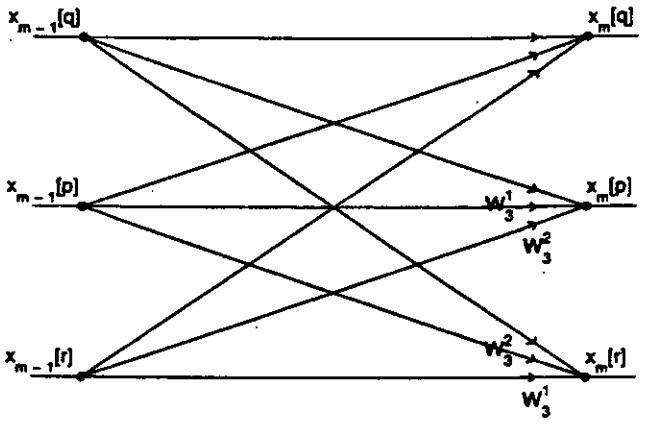
$$x_3[n] = (x[n] + x[n+N/3]W_N^{2N/3} + x[n+2N/3]W_N^{4N/3})W_N^{2n}$$

The 3-point DFT of $x_3[n]$ is $X_3[k] = X[3k+2]$.

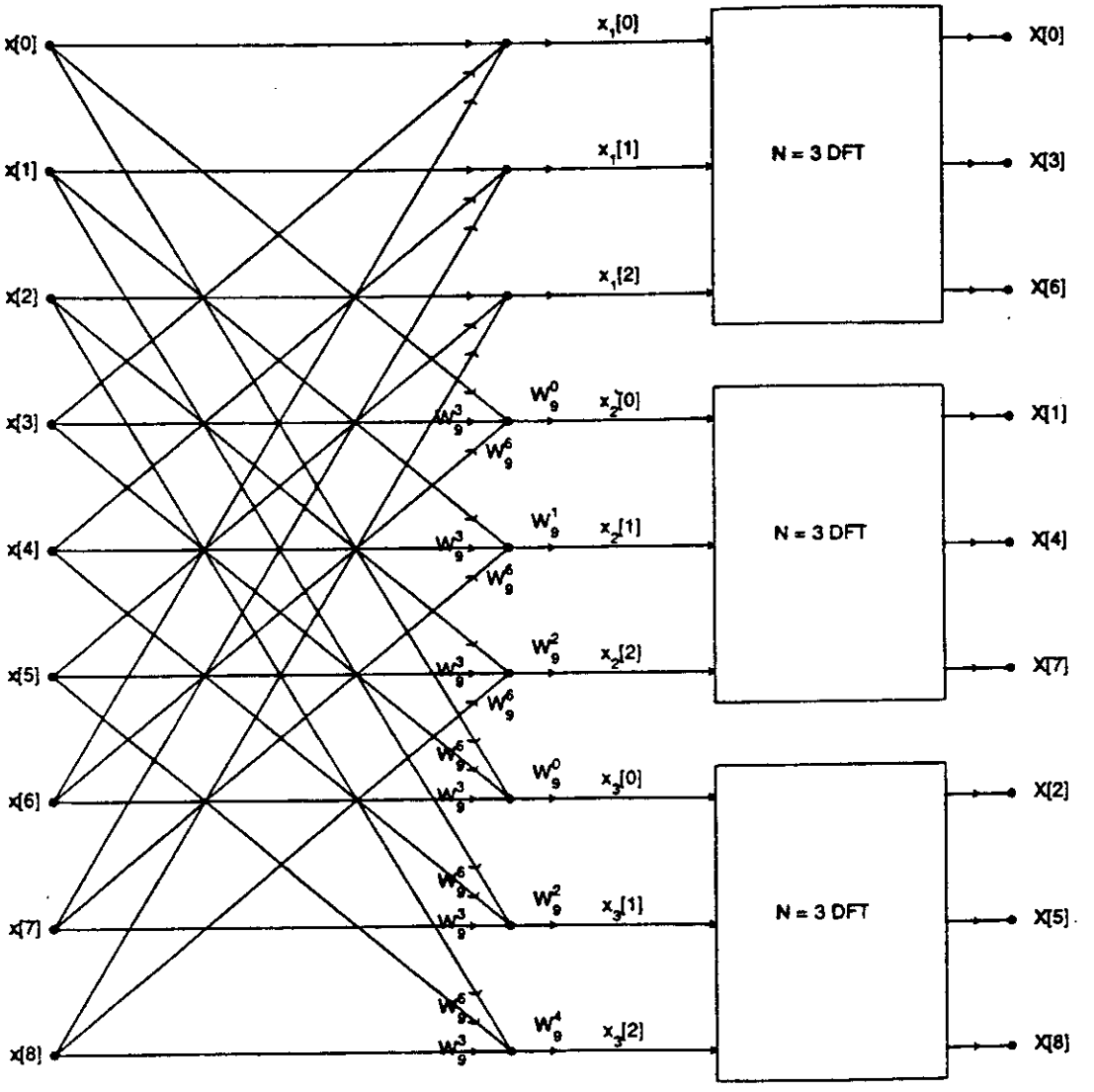
(c) To draw the radix-3 butterfly, it helps to derive the output of the butterfly first. From the definition of the DFT,

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{2} x[n]W_3^{nk} \\ X[0] &= x[0] + x[1] + x[2] \\ X[1] &= x[0] + x[1]W_3^1 + x[2]W_3^2 \\ X[2] &= x[0] + x[1]W_3^2 + x[2]W_3^4 = x[0] + x[1]W_3^2 + x[2]W_3^1 \end{aligned}$$

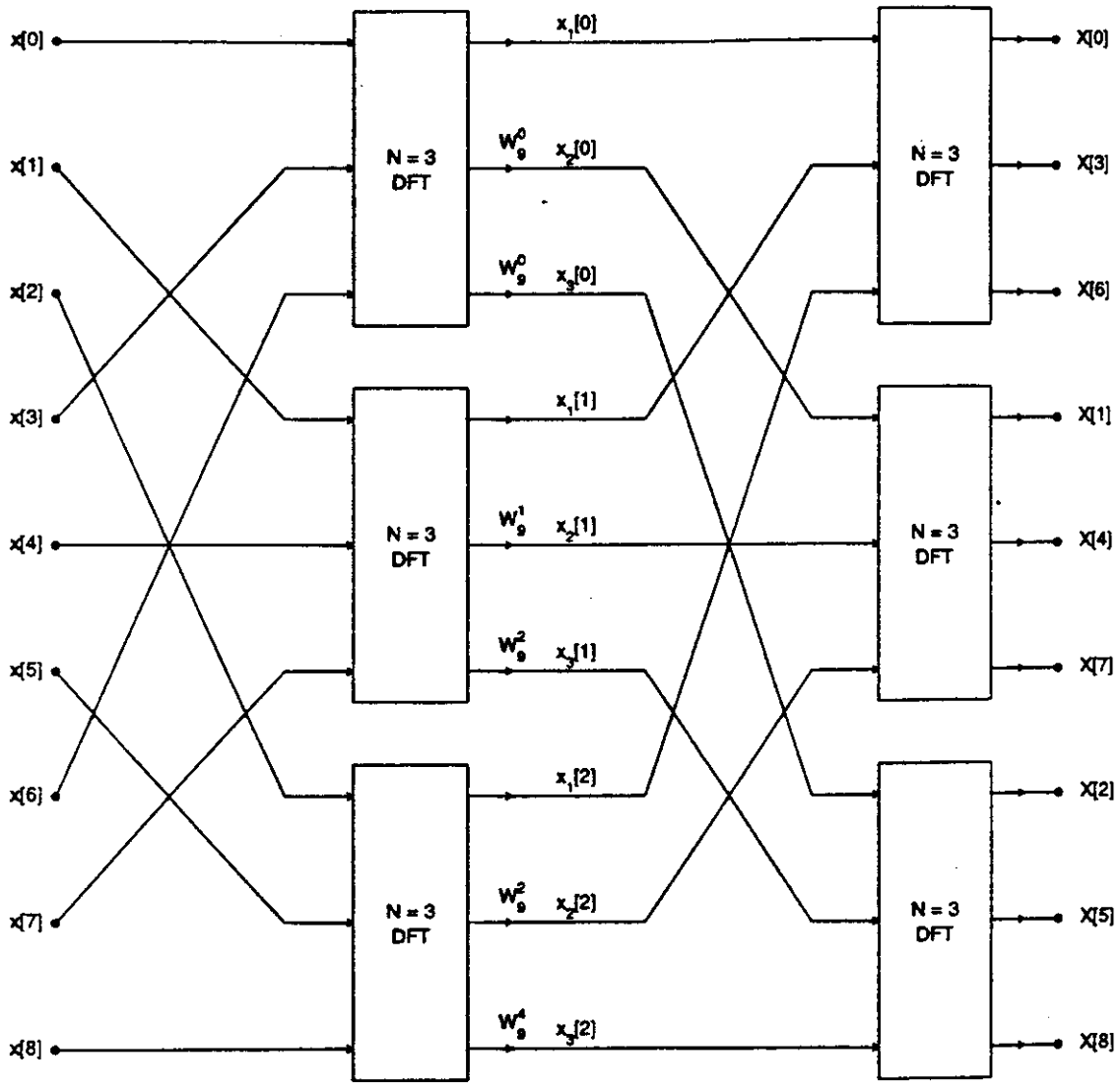
The butterfly for the 3 point DFT is drawn below.



(d) Using the results from parts (a) and (b), the flow graph is drawn below.



(e) The system consisting entirely of $N = 3$ DFTs is drawn below.



(f) A direct implementation of the 9 point DFT equation requires $9^2 = 81$ complex multiplications. The system in part (e), in constrast, requires 4 complex multiplications for each 3 point DFT, and an additional 4 from the twiddle factors, if we do not count the trival W_N^0 multiplications. In total, the system in part (e) requires 28 complex multiplications. In general, a radix-3 FFT of a sequence of length $N = 3^\nu$ requires *approximately*

$$\text{Number of complex multiplications} = \left(4\frac{\text{complex multiplications}}{\text{3-pt DFT}}\right)\left(\frac{N}{3}\frac{\text{3-pt DFTs}}{\text{stage}}\right)(\nu \text{ stages}) + \left(\frac{\text{N twiddle factors}}{\text{stage with twiddle factors}}\right)(\nu - 1 \text{ stages with twiddle factors})$$

Replacing ν with $\log_3 N$, and simplifying this formula gives

$$\text{Number of complex multiplications} = \frac{7}{3} N \log_3 N - N$$

Note that this formula for a radix-3 FFT is of the form $N \log_3 N$. The constant multiplier, $\frac{7}{3}$, is significantly larger than that of a radix-2 FFT. This is because a radix-2 butterfly has no complex multiplications, while in part (c) we found that a radix-3 butterfly has 4 complex multiplications. Also note that this formula is an upper bound, since some of the N twiddle factors in the $\nu - 1$ stages will be trivial. However, the formula is a good estimate.

9.41. (a)

$$\begin{aligned} X[k] &= h^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] h^*[n]) h[k-n] \\ &= e^{-j\pi k^2/N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\pi n^2/N} e^{j\pi(k^2-2kn+n^2)/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} \end{aligned}$$

(b)

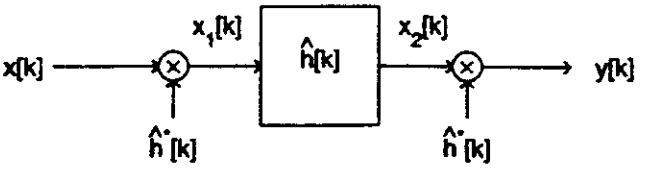
$$X[k+N] = h^*[k+N] \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h^*[n] h[k+N-n]$$

$$\begin{aligned} h^*[k+N] &= e^{-j\pi(k+N)^2/N} \\ &= e^{-j\pi(k^2+2kN+N^2)/N} \\ &= e^{-j\pi k^2/N} e^{-j\pi N} \\ &= h^*[k] e^{-j\pi N} \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} X[k+N] &= h^*[k] e^{-j\pi N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h^*[n] h[k-n] e^{j\pi N} \\ &= X[k] \end{aligned}$$

(c) From the figure



we define the signals $x_1[k]$ and $x_2[k]$ to be

$$x_1[k] = x[k] \hat{h}^*[k]$$

$$\begin{aligned} x_2[k] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_1[\ell]\hat{h}[k-\ell] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell]e^{-j\pi\ell^2/N}e^{j\pi(k-\ell)^2/N} \\ & \quad k \in [0,\ldots,2N-1] \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} y[k] &= \hat{h}^*[k]x_2[k] \qquad k \in [N,\ldots,2N-1] \\ &= e^{-j\pi k^2/N}\sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell]e^{-j\pi\ell^2/N}e^{j\pi(k-\ell)^2/N} \qquad k \in [N,\ldots,2N-1] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell]e^{-j2\pi k\ell/N} \qquad k \in [N,\ldots,2N-1] \\ &= X[k+N] \qquad k \in [0,\ldots,N-1] \\ &= X[k] \end{aligned}$$

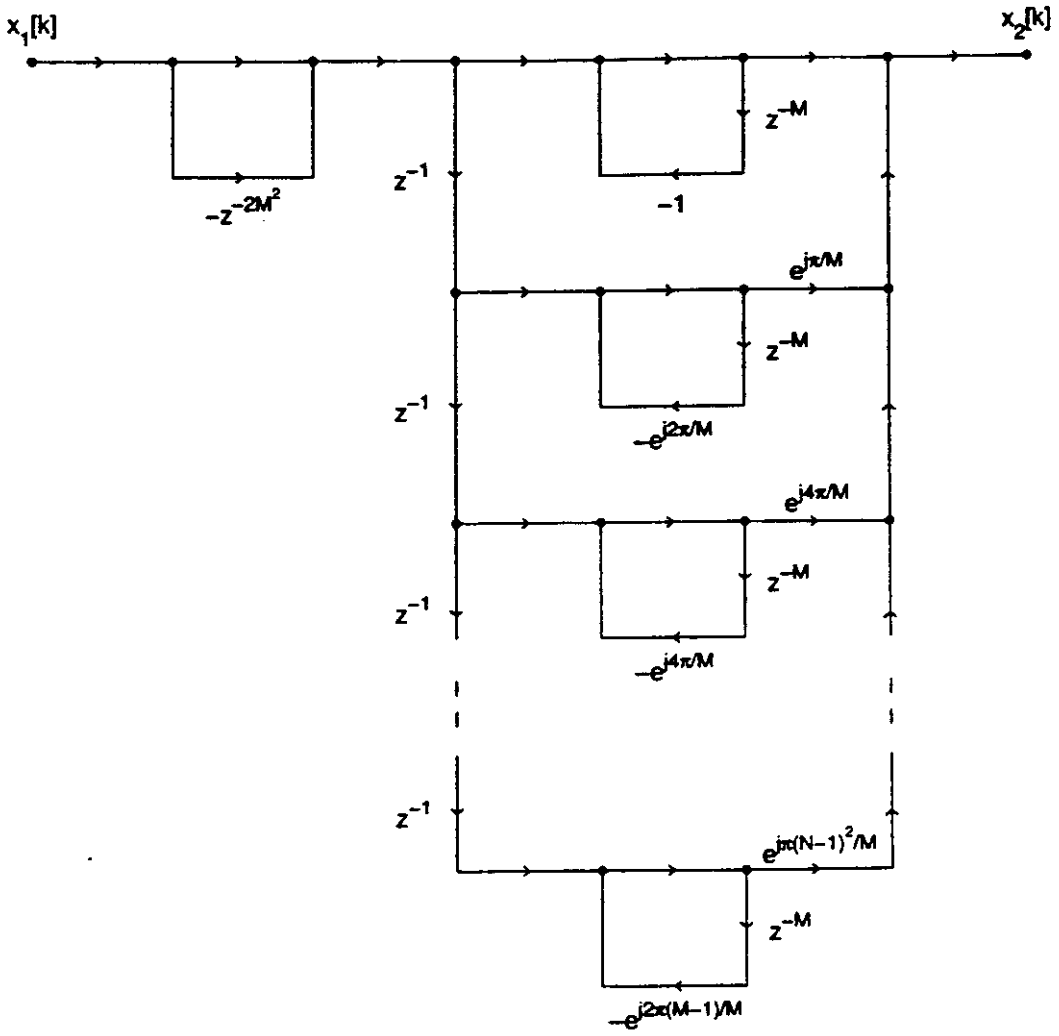
(d)

$$\begin{aligned} \hat{H}(z) &= \sum_{k=0}^{2N-1} e^{j\pi k^2/N}z^{-k} \\ &= \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{\ell=0}^{2M-1} e^{j\pi(r+\ell M)^2/N}z^{-(r+\ell M)} \\ &= \sum_{r=0}^{M-1}\sum_{\ell=0}^{2M-1} e^{j\pi r^2/N}e^{j2\pi r\ell/M}e^{j\pi\ell^2}z^{-r}z^{-\ell M} \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j\pi r^2/N}z^{-r}\left[\sum_{\ell=0}^{2M-1}(e^{j2\pi r/M}z^{-M})^{\ell}(-1)^{\ell^2}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j\pi r^2/N}z^{-r}\left[\sum_{\ell=0}^{2M-1}(e^{j2\pi r/M}z^{-M})^{\ell}(-1)^{\ell}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j\pi r^2/N}z^{-r}\left[\sum_{\ell=0}^{2M-1}(-e^{j2\pi r/M}z^{-M})^{\ell}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j\pi r^2/N}z^{-r}\left[\frac{1-e^{j2\pi r(2M)/M}z^{-2M^2}}{1+e^{j2\pi r/M}z^{-M}}\right] \\ &= \sum_{r=0}^{M-1} e^{j\pi r^2/N}z^{-r}\left[\frac{1-z^{-2M^2}}{1+e^{j(2\pi/M)r}z^{-M}}\right] \end{aligned}$$

(e) The flow graph for the system,

$$\hat{H}(z) = (1-z^{-2M^2})\sum_{r=0}^{M-1}\frac{z^{-r}e^{j\pi r^2/M}}{1+e^{j2\pi r/M}z^{-M}}$$

is drawn below.



(f) **Complex multiplications:** Since we are only interested in $y[k]$ for $k = N, N+1, \ldots, 2N-1$ we do not need to calculate the complex multiplications on the output side of each parallel branch until $k \geq N$. Thus,

Operation	Complex Multiplications
$x_1[k] = x[k]\hat{h}^*[k]$	N
Poles of $\hat{H}(z)$ for $k = 0, \ldots, N-1$	NM
Poles and branch exponentials of $\hat{H}(z)$ for $k = N, \ldots, 2N-1$	$2NM$
$y[k] = x_2[k]\hat{h}^*[k]$	N
	$= 3MN + 2N$
	$= 3M^3 + 2M^2$

We are including the multiplication of -1 and 1 from the first branch here for simplicity.
Direct evaluation requires $N^2 = M^4$ complex multiplications.
Note that since we are only interested in $y[k]$ for $k = N, N+1, \ldots, 2N-1$, the initial delay of $2M^2$ is unneccessary; we have obtained all interesting output before the first delayed sample appears.

Complex additions: The complex additions on the output side of each parallel branch do not need to be computed until $k \geq N$. Thus,

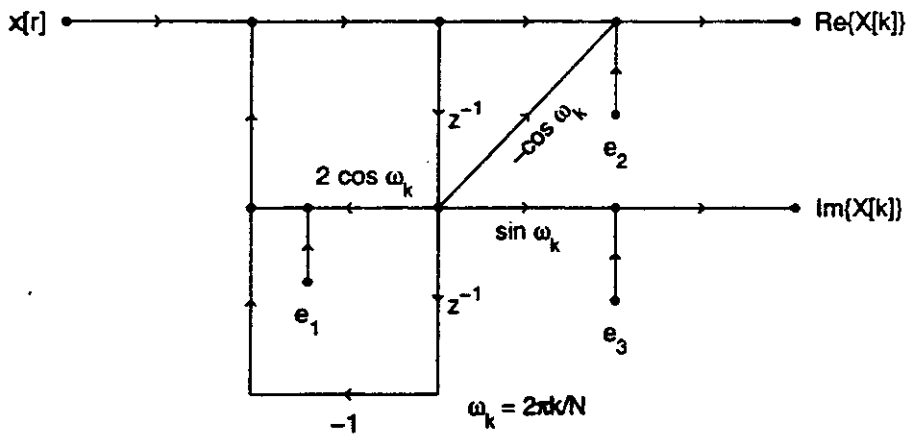
Operation	Complex Additions
Poles of $\hat{H}(z)$ for $k = 0, \ldots, N-1$	NM
Poles and branch exponentials of $\hat{H}(z)$ for $k = N, \ldots, 2N-1$	$2NM$
	$= 3MN$
	$= 3M^3$

Direct evaluation requires $N(N-1) = M^2(M^2-1)$ complex additions.

9.42. (a) We separate the system function $H(z)$ into two pieces; one corresponding to $h_R[n] = Re\{h[n]\}$ and another corresponding to $h_I[n] = Im\{h[n]\}$.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - W_N^k z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}} \\ H_R(z) &= \frac{1 - \cos(2\pi k/N)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}} \\ h_R[n] &= \cos(2\pi kn/N)u[n] \\ H_I(z) &= \frac{\sin(2\pi k/N)z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N)z^{-1} + z^{-2}} \\ h_I[n] &= \sin(2\pi kn/N)u[n] \end{aligned}$$

Since $x[n]$ is real, the real and imaginary parts of $X[k] = y_k[N]$ are computed using the following flowgraph.



(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{X[k]\} &= \mathrm{Re}\{y_k[N]\} \\ \mathrm{Im}\{X[k]\} &= \mathrm{Im}\{y_k[N]\} \end{aligned}$$

Since the output of interest is the Nth sample, we need only consider the variance at time N. The noise $e_1[n]$ is input to both $h_R[n]$ and $h_I[n]$. Using the techniques from chapter 6, we find the variance of the noise is

$$\sigma_R^2[N] = \sigma_{e_2}^2 + \sigma_{e_1}^2 \sum_{n=0}^{N} h_R^2[n]$$

$$\sigma_I^2[N] = \sigma_{e_3}^2 + \sigma_{e_1}^2 \sum_{n=0}^{N} h_I^2[n].$$

Let $\theta = 2\pi k/N$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} h_R^2[n] &= \sum_{n=0}^{N} \cos^2 \theta n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} (e^{j\theta n} + e^{-j\theta n})^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} (e^{j\theta 2n} + 2 + e^{-j\theta 2n}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1 - e^{j2\theta(N+1)}}{1 - e^{j2\theta}} + 2(N+1) + \frac{1 - e^{-j2\theta(N+1)}}{1 - e^{-j2\theta}}\right) \\
&= \frac{1}{4}(1 + 2(N+1) + 1) \\
&= \frac{N}{2} + 1
\end{aligned}$$

Similarly, $\sum_{n=0}^{N} h_I^2[n] = N/2$.
Therefore,

$$\begin{aligned}
\sigma_R^2[n] &= \frac{2^{-2B}}{12}(1 + (N/2) + 1) \\
&= \frac{2^{-2B}}{12}(N+4)/2 \\
\sigma_I^2[n] &= \frac{2^{-2B}}{12}(1 + (N/2)) \\
&= \frac{2^{-2B}}{12}(N+2)/2
\end{aligned}$$

9.43.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos(2\pi kn/N) - j\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\sin(2\pi kn/N).$$

For $k \neq 0$, there are $N-1$ multiplies in the computation of the real part and the imaginary part:

$$\sigma_R^2 = (N-1)\sigma^2 = \sigma_I^2,$$

where $\sigma^2 = 2^{-2B}/12$. For $k = 0$ there are no multiplies, and therefore $\sigma_R^2 = 0 = \sigma_I^2$.

$$\sigma_R^2 = \sigma_I^2 = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ (N-1)\sigma^2 & k \neq 0 \end{cases}$$

9.44. (a)

$$|X_{m-1}[q]W_N^r| = |X_{m-1}[q]||W_N^r| = |X_{m-1}[q]|$$

$$|X_m[p]| \leq |X_{m-1}[p]| + |X_{m-1}[q]| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

implies that $|\mathrm{Re}\{X_m[p]\}| < 1$ and $|\mathrm{Im}\{X_m[p]\}| < 1$. A similar argument holds for $|X_m[q]|$.

(b) The conditions are not sufficient to guarantee that overflow cannot occur.

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\{X_m[p]\}| &\leq |\mathrm{Re}\{X_m[p]\}| + |\mathrm{Re}\{W_N^r X_{m-1}[q]\}| \\ &\leq \frac{1}{2} + \left|\cos\left(\frac{2\pi r}{N}\right)\mathrm{Re}\{X_{m-1}[q]\} - \sin\left(\frac{2\pi r}{N}\right)\mathrm{Im}\{X_{m-1}[q]\}\right| \end{aligned}$$

Consider the worst case, when $r = 3N/8$. Then,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\{X_m[p]\}| &\leq \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\{X_{m-1}[q]\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Im}\{X_{m-1}[q]\}\right| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \not< 1. \end{aligned}$$

Therefore, overflow can occur.

9.45. (a) First, note that each stage has $N/2$ butterflies. In the first stage, all the multiplications are $W_N^0 = +1$. In the second stage, half are $+1$ and the other half are $W_N^{N/4} = -j$. Successive stages have half the number of the previous stage. In general,

$$\text{Number of } +1 \text{ multiplications in stage } m = \frac{N}{2^m}, \qquad m = 1, \ldots, v$$

and

$$\text{Number of } -j \text{ multiplications in stage } m = \begin{cases} 0, & m = 1 \\ N/2^m, & m = 2, \ldots, v \end{cases}$$

(b) If we assume that all the $+1$ and $-j$ multiplications are done noiselessly, then the noise variance will be different at each output node. This is easily seen by looking at Figure 9.10, where we see for example that $X[0]$ will be noise-free, while $X[1]$ will not be noise-free. Thus, a noise analysis would be required for each output node separately. A somewhat simpler approach would be to assume that since the first two stages consist of only $+1$ and $-j$ multiplications, these two stages can be performed noiselessly. Each output node is connected to all $N/2$ butterflies in the first stage and to $N/4$ butterflies in the second stage. Thus, if the first two stages are performed noiselessly, a better estimate of the number of independent noise sources contributing to the output is

$$N - 1 - \frac{N}{2} - \frac{N}{4} = \frac{N}{4} - 1.$$

Note that all the odd indexed outputs will have exactly $(N/4) - 1$ of these noise sources, while the even indexed outputs will have less. In fact, $X[0]$, $X[N/4]$, $X[N/2]$, $X[3N/4]$ will be noiseless. $X[N/8]$, $X[3N/8]$, $X[5N/8]$, and $X[7N/8]$ will have one noise source. It is possible to continue this analysis for all $X[k]$, but clearly, a complicated formula would be required to describe the number of noise sources for all even k. We have shown that

$$\begin{aligned} \text{Number of noise sources} &= (N/4) - 1, \qquad k \text{ odd} \\ \text{Number of noise sources} &< (N/4) - 1, \qquad k \text{ even} \end{aligned}$$

Thus, the number of noise sources is upper bounded $(N/4) - 1$. Using this bound, we can get a more optimistic output noise variance.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[|F[k]|^2] &\leq (\frac{N}{4} - 1)\sigma_B^2 \\ &\lesssim \frac{N}{4}\sigma_B^2 \quad \text{for large } N \end{aligned}$$

When the scaling is done at the input, an upper bound on the noise-to-signal ratio is found to be

$$\frac{\mathcal{E}[|F[k]|^2]}{\mathcal{E}[|X[k]|^2]} \lesssim \frac{\frac{N}{4}\sigma_B^2}{\frac{1}{3N}} = \frac{3}{4}N^2\sigma_B^2 = \frac{N^2 2^{-2B}}{4}$$

This equation is similar to Eq. 9.65, but scaled by $\frac{1}{4}$. This implies that Eq. 9.65 is about 1 bit too pessimistic. However, note that the N^2 dependence is still present.

Another approach to this noise analysis is to compute the average noise at the output by using the average number of noisy butterflies connected to an output node. This style of analysis is used in Weinstein.

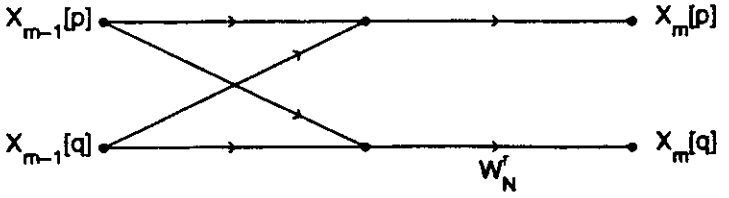
(c) Now assume as before that the first two stages are noiseless. Thus, equation 9.67 would not include the first two stages.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[|F[k]|^2] &\leq \sigma_B^2 \sum_{m=2}^{\nu-1} 2^{(\nu-m)}(\tfrac{1}{2})^{2\nu-2m-2} \\
&= \sigma_B^2 \sum_{m=2}^{\nu-1} (\tfrac{1}{2})^{\nu-m-2} \\
&= 2\sigma_B^2 \sum_{k=0}^{\nu-3} (\tfrac{1}{2})^k \\
&= 2\sigma_B^2 \left(\frac{1-(\frac{1}{2})^{\nu-2}}{1-\frac{1}{2}} \right) \\
&= 4\sigma_B^2 (1-(\tfrac{1}{2})^{\nu-2}) \\
&= 4\sigma_B^2 (1-\frac{4}{N})
\end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{E}[|F[k]|^2]}{\mathcal{E}[|X[k]|^2]} &\leq 12N\sigma_B^2 \frac{N-4}{N} \\
&\lesssim 12(N-4)\sigma_B^2
\end{aligned}$$

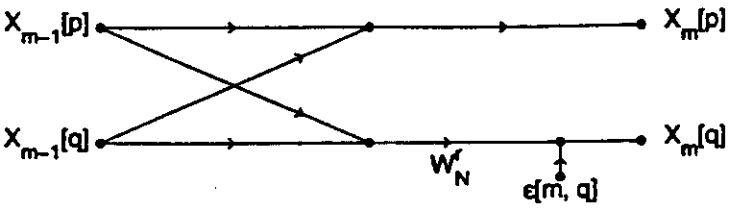
9.46. The butterfly for decimation-in-frequency is drawn below.



where

$$\begin{aligned}
X_m[p] &= X_{m-1}[p] + X_{m-1}[q] \\
X_m[q] &= (X_{m-1}[p] - X_{m-1}[q])W_N^r
\end{aligned}$$

The statistical model is drawn below.



As in a decimation-in-time FFT, each output node connects to $N-1$ butterflies in a decimation-in-frequency FFT, each of which introduces a noise source whose variance is

$$\mathcal{E}[|\epsilon[m,q]|^2] = \sigma_B^2 = \frac{1}{3}2^{-2B}.$$

Thus the output noise propagated through the flowgraph is

$$\mathcal{E}[|F[k]|^2] = (N-1)\sigma_B^2$$

since each noise source propagates along a unity gain path to the output nodes.

Thus, the results for the decimation-in-frequency FFT are identical to those for the decimation-in-time FFT. This is true for both cases of scaling either at the input of the FFT by $1/N$, or at the input of each stage of the FFT by $1/2$.

9.47. Recall the following symmetry properties of the DFT:

$$\begin{aligned} x[n] \text{ real} &\iff X[k] = X^*[N-k] \\ x[n] = x^*[N-n] &\iff \mathrm{Im}\{X[k]\} = 0 \\ x[n] = -x^*[N-n] &\iff \mathrm{Re}\{X[k]\} = 0 \end{aligned}$$

Thus, $x[n]$ real and even $\iff$ $X[k]$ real and even; and $x[n]$ real and odd $\iff$ $X[k]$ imaginary and odd.

(a)

$$y_1[n] = x_1[n] + x_3[n]$$

$x_1[n]$ is real and even; $x_3[n]$ is real and odd.

$$Y_1[k] = \mathrm{Re}\{Y_1[k]\} + j\mathrm{Im}\{Y_1[k]\} = X_1[k] + X_3[k]$$

$\mathrm{Re}\{Y_1[k]\}$ is real and even; $j\mathrm{Im}\{Y_1[k]\}$ is imaginary and odd; $X_1[k]$ is real and even; $X_3[k]$ is imaginary and odd. It follows that

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \mathrm{Re}\{Y_1[k]\} \\ X_3[k] &= j\mathrm{Im}\{Y_1[k]\} \end{aligned}$$

(b)

$$y_3[n] = y_1[n] + jy_2[n]$$

$$\begin{aligned} Y_3[k] &= Y_1[k] + jY_2[k] = [\mathrm{Re}\{Y_1[k]\} + j\mathrm{Im}\{Y_1[k]\}] + j[\mathrm{Re}\{Y_2[k]\} + j\mathrm{Im}\{Y_2[k]\}] \\ &= \underbrace{\mathrm{Re}\{Y_1[k]\}}_{\text{real}} - \underbrace{\mathrm{Im}\{Y_2[k]\}}_{\text{odd}} + j[\underbrace{\mathrm{Re}\{Y_2[k]\}}_{\text{even}} + \underbrace{\mathrm{Im}\{Y_1[k]\}}_{\text{odd}}] \\ Y_3[k] &= [\mathrm{Ev}\{\mathrm{Re}\{Y_3[k]\}\} + \mathrm{Od}\{\mathrm{Re}\{Y_3[k]\}\}] + j[\mathrm{Ev}\{\mathrm{Im}\{Y_3[k]\}\} + \mathrm{Od}\{\mathrm{Im}\{Y_3[k]\}\}] \end{aligned}$$

Thus we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{Y_1[k]\} &= \mathrm{Ev}\{\mathrm{Re}\{Y_3[k]\}\} \\
\mathrm{Re}\{Y_2[k]\} &= \mathrm{Ev}\{\mathrm{Im}\{Y_3[k]\}\} \\
\mathrm{Im}\{Y_1[k]\} &= \mathrm{Od}\{\mathrm{Im}\{Y_3[k]\}\} \\
\mathrm{Im}\{Y_2[k]\} &= -\mathrm{Od}\{\mathrm{Re}\{Y_3[k]\}\}
\end{aligned}$$

and so

$$\begin{aligned}
Y_1[k] &= \frac{1}{2}[\mathrm{Re}\{Y_3[k]\} + \mathrm{Re}\{Y_3[N-k]\}] \\
&\quad + \frac{j}{2}[\mathrm{Im}\{Y_3[k]\} - \mathrm{Im}\{Y_3[N-k]\}] \\
Y_2[k] &= \frac{1}{2}[\mathrm{Im}\{Y_3[k]\} + \mathrm{Im}\{Y_3[N-k]\}] \\
&\quad - \frac{j}{2}[\mathrm{Re}\{Y_3[k]\} - \mathrm{Re}\{Y_3[N-k]\}]
\end{aligned}$$

and from part (a)

$$\begin{aligned}
X_1[k] &= \frac{1}{2}[\mathrm{Re}\{Y_3[k]\} + \mathrm{Re}\{Y_3[N-k]\}] \\
X_2[k] &= \frac{1}{2}[\mathrm{Im}\{Y_3[k]\} + \mathrm{Im}\{Y_3[N-k]\}] \\
X_3[k] &= \frac{j}{2}[\mathrm{Im}\{Y_3[k]\} - \mathrm{Im}\{Y_3[N-k]\}] \\
X_4[k] &= \frac{-j}{2}[\mathrm{Re}\{Y_3[k]\} - \mathrm{Re}\{Y_3[N-k]\}]
\end{aligned}$$

(c)

$$u_3[n] = x_3[((n+1))_N] - x_3[((n-1))_N]$$

$$u_3[((N-n))_N] = x_3[((N-n+1))_N] - x_3[((N-n-1))_N]$$

Since $x_3[n] = x_3[((N-n))_N]$,

$$u_3[((N-n))_N] = x_3[((n-1))_N] - x_3[((n+1))_N] = -u_3[n]$$

For $n = 0$, we have $u_3[0] = -u_3[0]$, which is only satisfied for $u_3[0] = 0$.

(d) Using the circular shift property of the DFT we have

$$\begin{aligned}
U_3[k] &= X_3[k]e^{j(2\pi/N)k} - X_3[k]e^{-j(2\pi/N)k} \\
&= 2j\sin(2\pi k/N)X_3[k]
\end{aligned}$$

(e) From part (a), since $u_3[n]$ is antisymmetric,

$$X_1[k] = \mathrm{Re}\{Y_1[k]\}$$

$$U_3[k] = j\mathrm{Im}\{Y_1[k]\}$$

and so

$$X_3[k] = \frac{\mathrm{Im}\{Y_1[k]\}}{2\sin\frac{2\pi k}{N}} \quad k \neq 0,\ \frac{N}{2}$$

Note that $X_3[0]$ cannot be recovered using this technique, and if N is even, neither can $X_3[N/2]$.

(f) In part (b) replace X_3 and X_4 with U_3 and U_4 and use the result of (d) to give

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \frac{1}{2}[\mathrm{Re}\{Y_3[k]\} + \mathrm{Re}\{Y_3[N-k]\}] \\ X_2[k] &= \frac{1}{2}[\mathrm{Im}\{Y_3[k]\} + \mathrm{Im}\{Y_3[N-k]\}] \\ X_3[k] &= \frac{1}{4}[\mathrm{Im}\{Y_3[k]\} - \mathrm{Im}\{Y_3[N-k]\}]/\sin(2\pi k/N), \quad k \neq 0, N/2 \\ X_4[k] &= -\frac{1}{4}[\mathrm{Re}\{Y_3[k]\} - \mathrm{Re}\{Y_3[N-k]\}]/\sin(2\pi k/N), \quad k \neq 0, N/2 \end{aligned}$$

9.48. First, we find an expression for samples of the system function $H(z)$.

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 - \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell z^{-\ell}}$$

$$H(e^{j2\pi k/N}) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j2\pi kr/N}}{1 - \sum_{\ell=1}^{N} a_\ell e^{-j2\pi k\ell/N}}$$

Now assume $N,\ M \leq 511$. Let $b[n] = b_n$ and

$$a[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a_n, & 1 \leq n \leq N \end{cases}$$

Let $B[k]$, $A[k]$ be the 512 pt DFTs of $b[n]$, and $a[n]$. Then

$$H(e^{j2\pi k/512}) = \frac{B[k]}{A[k]}$$

9.49. (a) It is interesting to note that (linear) convolution and polynomial multiplication are the same operation. Many mathematical software tools, like Matlab, perform polynomial multiplication using convolution. Here, we replace

$$p(x) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x^i$$

with

$$p[n] = \sum_{i=0}^{L-1} a_i \delta[n-i], \qquad q[n] = \sum_{i=0}^{M-1} b_i \delta[n-i]$$

Then,

$$r[n] = p[n] * q[n].$$

The coefficients in $r[n]$ will be identically equal to those of $r(x)$. We can compute $r[n]$ with circular convolution, instead of linear convolution, by zero padding $p[n]$ and $q[n]$ to a length $N = L+M-1$. This zero padding ensures that linear convolution and circular convolution will give the same result.

(b) We can implement the circular convolution of $p[n]$ and $q[n]$ using the following procedure.

step 1: Take the DFTs of $p[n]$ and $q[n]$ using the FFT program. This gives $P[k]$ and $Q[k]$.

step 2: Multiply to get $R[k] = P[k]Q[k]$.

step 3: Take the inverse DFT of $R[k]$ using the FFT program. This gives $r[n]$.

Here, we assumed that the FFT program also computes inverse DFTs. If not, it is a relatively simple matter to modify the input to the program so that its output is an inverse DFT. (See problem 9.1).

While it may seem that this procedure is more work, for long sequences, it is actually more efficient. The direct computation of $r[n]$ requires approximately $(L+M)^2$ real multiplications, since a_i and b_i are real. Assuming that a length $L+M$ FFT computation takes $[(L+M)/2]\log_2(L+M)$ complex multiplications, we count the complex multiplications required in the procedure described above to be

Operation	Complex Multiplications
FFTs of $p[n]$ and $q[n]$	$2[(L+M)/2]\log_2(L+M) = (L+M)\log_2(L+M)$
$R[k] = P[k]Q[k]$	$L+M$
Inverse FFT of $R[k]$	$[(L+M)/2]\log_2(L+M)$
	$= [3(L+M)/2]\log_2(L+M) + (L+M)$

Since a complex multiplication is computed using 4 real multiplications, the number of real multiplications required by this technique is $6(L+M)\log_2(L+M) + 4(L+M)$. Plugging in some values for $(L+M) = 2^\nu$, we find

$L+M$	Direct	FFT
2	4	20
4	16	64
8	64	176
16	256	448
32	1024	1088
64	4096	2560

Thus, for $(L+M) \geq 64$, the FFT approach is more efficient.

(c) The binary integers u and v have corresponding decimal values, which are

$$u_{\text{decimal}} = \sum_{i=0}^{L-1} u_i 2^i$$

$$v_{\text{decimal}} = \sum_{i=0}^{M-1} v_i 2^i$$

Note the resemblance to $p(x)$ and $q(x)$ of part (a). We form the signals

$$u[n] = \sum_{i=0}^{L-1} u_i \delta[n-i]$$

$$v[n] = \sum_{i=0}^{M-1} v_i \delta[n-i]$$

and use the procedure described in part (b). This computes the product $u \cdot v$ in binary. For $L = 8000$ and $M = 1000$, this procedure requires approximately

$$\begin{aligned} \#\text{ real multiplications} &= 6(8000+1000)\log_2(8000+1000) + 4(8000+1000) \\ &= 7.45 \times 10^5 \end{aligned}$$

In contrast, the direct computation requries 8.1×10^7 real multiplications.

(d) For the (forward and inverse) FFTs, the mean-square value of the output noise is $(L+M)\sigma_B^2$. While σ_B^2 will be small, as there are 16 bits, the noise can be significant, since $L+M$ is a large number.

9.50. (a) Using the definition of the discrete Hartley transform we get

$$\begin{aligned} H_N[a+N] &= C_N[a+N] + S_N[a+N] \\ &= \cos(2\pi a/N + 2\pi) + \sin(2\pi a/N + 2\pi) \\ &= \cos(2\pi a/N) + \sin(2\pi a/N) \\ &= C_N[a] + S_N[a] \\ &= H_N[a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= C_N[a+b] + S_N[a+b] \\ &= \cos(2\pi a/N + 2\pi b/N) + \sin(2\pi a/N + 2\pi b/N) \\ &= \cos(2\pi a/N)\cos(2\pi b/N) - \sin(2\pi a/N)\sin(2\pi b/N) \\ &\quad + \sin(2\pi a/N)\cos(2\pi b/N) + \cos(2\pi a/N)\sin(2\pi b/N) \end{aligned}$$

Grouping the terms in the last equation one way gives us

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= [\cos(2\pi a/N) + \sin(2\pi a/N)]\cos(2\pi b/N) \\ &\quad + [\cos(-2\pi a/N) + \sin(-2\pi a/N)]\sin(2\pi b/N) \\ &= H_N[a]C_N[b] + H_N[-a]S_N[b] \end{aligned}$$

while grouping the terms another way gives us

$$\begin{aligned} H_N[a+b] &= [\cos(2\pi b/N) + \sin(2\pi b/N)]\cos(2\pi a/N) \\ &\quad + [\cos(-2\pi b/N) + \sin(-2\pi b/N)]\sin(2\pi a/N) \\ &= H_N[b]C_N[a] + H_N[-b]S_N[a] \end{aligned}$$

(b) To obtain a fast algorithm for computation of the discrete Hartley transform, we can proceed as in the decimation-in-time FFT algorithm; i.e.,

$$\begin{aligned} X_H[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]H_N[2rk] + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]H_N[(2r+1)k] \\ &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]H_N[2rk] + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]H_N[2rk]C_N[k] \\ &\quad + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]H_N[((-2rk))_N]S_N[k] \end{aligned}$$

Now since $H_N[2rk] = H_{N/2}[rk]$, we have

$$\begin{aligned} X_H[k] &= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]H_{N/2}[rk] + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]H_{N/2}[rk]C_N[k] \\ &\quad + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]H_{N/2}[((-rk))_{N/2}]S_N[k] \\ &= F[k] + G[k]C_N[k] + G[((-k))_{N/2}]S_N[k] \end{aligned}$$

where

$$F[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r]H_{N/2}[rk]$$

is the $N/2$-point DHT of the even-indexed points and

$$G[k] = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x[2r+1]H_{N/2}[rk]$$

is the $N/2$-point DHT of the odd-indexed points. As in the derivation of the decimation-in-time FFT algorithm, we can continue to divide the sequences in half if N is a power of 2. Thus the indexing will be exactly the same except that we have to access $G[((-k))_{N/2}]$ as well as $G[k]$ and $F[k]$; i.e., the "butterfly" is slightly more complicated. The fast Hartley transform will require $N \log_2 N$ operations as in the case of the DFT, but the multiplies and adds will be real instead of complex.

9.51. (a)

$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^2 \end{bmatrix}$$

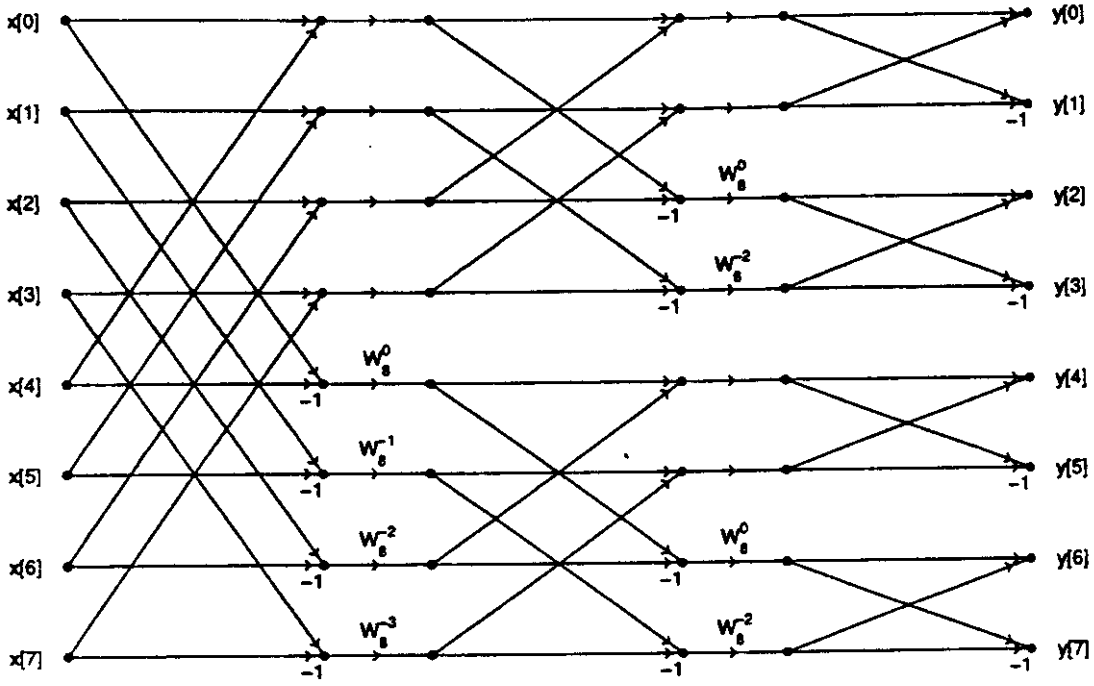
$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^H &= \mathbf{F}_1^H \mathbf{T}_1^H \mathbf{F}_2^H \mathbf{T}_2^H \mathbf{F}_3^H \\ &= \mathbf{F}_1 \mathbf{T}_1^* \mathbf{F}_2 \mathbf{T}_2^* \mathbf{F}_3 \end{aligned}$$

where $*$ denotes conjugation. Drawing the flow graph, we get



This structure is the decimation in frequency FFT with the twiddle factors conjugated and therefore calculates

$$N \cdot \text{IDFT}\{x[n]\}$$

(c) Knowing that $\mathbf{Q}$ calculates the DFT and $\frac{1}{N}\mathbf{Q}^H$ calculates the IDFT, we should realize that cascading the two should just return the original signal. More formally we have

$$\mathbf{F}_1^H\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{I} \quad \mathbf{F}_2^H\mathbf{F}_2 = 2\mathbf{I} \quad \mathbf{F}_3^H\mathbf{F}_3 = 2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{T}_1^H\mathbf{T}_1 = \mathbf{I} \quad \mathbf{T}_2^H\mathbf{T}_2 = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned}(1/N)\mathbf{Q}^H\mathbf{Q} &= (1/N)\left(\mathbf{F}_1^H\mathbf{T}_1^H\mathbf{F}_2^H\mathbf{T}_2^H\mathbf{F}_3^H\right)\left(\mathbf{F}_3\mathbf{T}_2\mathbf{F}_2\mathbf{T}_1\mathbf{F}_1\right) \\ &= (1/N)(N\mathbf{I}) \\ &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

where $N = 8$ in this case.

9.52. (a) First, we derive the circular convolution property of the DFT. We start with the circular convolution of $x[n]$ and $h[n]$.

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[((n-m))_N]$$

Taking the DFT of both sides gives

$$\begin{aligned}Y[k] &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[((n-m))_N]W^{nk} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]\sum_{n=0}^{N-1} h[((n-m))_N]W^{nk}\end{aligned}$$

Using the circular shift property of the DFT,

$$\begin{aligned} Y[k] &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]H[k]W_N^{mk} \\ &= H[k]\sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{mk} \\ &= H[k]X[k] \end{aligned}$$

Next, the orthogonality of the basis vectors is shown to be a necessary requirement for the circular convolution property. We start again with the circular convolution of $x[n]$ and $h[n]$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[((n-m))_N]$$

Substituting the inverse DFT for $x[m]$ and $h[((n-m))_N]$ gives

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1} X[k_1]W_N^{-k_1 m}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{k_2=0}^{N-1} H[k_2]W_N^{-k_2((n-m))_N}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1} X[k_1]W_N^{-k_1 m}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{k_2=0}^{N-1} H[k_2]W_N^{-k_2(n-m)}\right) \\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\left(X[k_1]H[k_2]W_N^{-k_2 n}\sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-k_1 m}W_N^{k_2 m}\right) \end{aligned}$$

With orthogonal basis vectors,

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} N, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$$

so the right-most summation becomes

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-k_1 m}W_N^{k_2 m} &= \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{(k_2-k_1)m} \\ &= N\delta[k_1-k_2] \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{N^2}\sum_{k_1=0}^{N-1}\sum_{k_2=0}^{N-1}\left(X[k_1]H[k_2]W_N^{-k_2 n}N\delta[k_1-k_2]\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k_1=0}^{N-1} X[k_1]H[k_1]W_N^{-k_1 n} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[((n-m))_N] \end{aligned}$$

Therefore, the circular convolution property holds as long as the basis vectors are orthogonal.

(b)

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{3} 4^{nk}\right)\right)_{17} = ((1+4^k+16^k+64^k))_{17}$$

$$\begin{aligned}
k &= 0: \quad ((1+1+1+1))_{17} &&= ((4))_{17} &&= 4 \\
k &= 1: \quad ((1+4+16+64))_{17} &&= ((85))_{17} &&= 0 \\
k &= 2: \quad ((1+16+256+4096))_{17} &&= ((4369))_{17} &&= 0 \\
k &= 3: \quad ((1+64+4096+262144))_{17} &&= ((266305))_{17} &&= 0
\end{aligned}$$

The relation holds for $P = 17$, $N = 4$, and $W_N = 4$.

(c)

$$\begin{aligned}
X[k] &= \left(\left(\sum_{n=0}^{3} x[n]4^{nk}\right)\right)_{17} \\
&= ((1 \cdot 1 + 2 \cdot 4^k + 3 \cdot 16^k + 0 \cdot 64^k))_{17} \\
&= ((1 + 2 \cdot 4^k + 3 \cdot 16^k))_{17}
\end{aligned}$$

Using this formula for $X[k]$,

$$\begin{aligned}
X[0] &= ((1+2+3))_{17} &&= ((6))_{17} &&= 6 \\
X[1] &= ((1+2 \cdot 4+3 \cdot 16))_{17} &&= ((57))_{17} &&= 6 \\
X[2] &= ((1+2 \cdot 16+3 \cdot 256))_{17} &&= ((801))_{17} &&= 2 \\
X[3] &= ((1+2 \cdot 64+3 \cdot 4096))_{17} &&= ((12417))_{17} &&= 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H[k] &= \left(\left(\sum_{n=0}^{3} h[n]4^{nk}\right)\right)_{17} \\
&= ((3 \cdot 1 + 1 \cdot 4^k + 0 \cdot 16^k + 0 \cdot 64^k))_{17} \\
&= ((3 + 4^k))_{17}
\end{aligned}$$

Using this formula for $H[k]$,

$$\begin{aligned}
H[0] &= ((3+1))_{17} &&= ((4))_{17} &&= 4 \\
H[1] &= ((3+4))_{17} &&= ((7))_{17} &&= 7 \\
H[2] &= ((3+16))_{17} &&= ((19))_{17} &&= 2 \\
H[3] &= ((3+64))_{17} &&= ((67))_{17} &&= 16
\end{aligned}$$

Multiplying terms $Y[k] = X[k]H[k]$ gives

$$\begin{aligned}
Y[0] &= ((24))_{17} &&= 7 \\
Y[1] &= ((42))_{17} &&= 8 \\
Y[2] &= ((4))_{17} &&= 4 \\
Y[3] &= ((112))_{17} &&= 10
\end{aligned}$$

(d) By trying out different values,

$$\begin{aligned}
N^{-1} &= 13 \\
W_N^{-1} &= 13
\end{aligned}$$

$$((N^{-1}N))_{17} = ((W_N^{-1}W_N))_{17} = ((13 \cdot 4))_{17} = ((52))_{17} = 1$$

(e)

$$\begin{aligned} y[n] &= \left(\left(13\sum_{k=0}^{3} Y[k]13^{nk}\right)\right)_{17} \\ &= ((13[7\cdot 1 + 8\cdot 13^n + 4\cdot 169^n + 10\cdot 2197^n]))_{17} \end{aligned}$$

Using this formula for $y[n]$,

$$\begin{aligned} y[0] &= ((13[7+8+4+10]))_{17} &&= ((377))_{17} &&= 3 \\ y[1] &= ((13[7\cdot 1+8\cdot 13+4\cdot 169+10\cdot 2197]))_{17} &&= ((295841))_{17} &&= 7 \\ y[2] &= ((13[7\cdot 1+8\cdot 169+4\cdot 28561+10\cdot 4826809]))_{17} &&= ((628988009))_{17} &&= 11 \\ y[3] &= ((13[7\cdot 1+8\cdot 2197+4\cdot 4826809+10\cdot 10604499373]))_{17} &&= ((1378836141137))_{17} &&= 3 \end{aligned}$$

Performing manual convolution $y[n] = x[n] * h[n]$ gives

$$\begin{aligned} y[0] &= 3 \\ y[1] &= 7 \\ y[2] &= 11 \\ y[3] &= 3 \end{aligned}$$

The results agree.

9.53. (a) The tables below list the values for n and k obtained with the index maps.

n_1 \ n_2	0	1	2
0	0	3	2
1	3	4	5

k_1 \ k_2	0	1	2
0	0	2	4
1	1	3	5

As shown, the index maps only produce $n = 0, \ldots, 5$ and $k = 0, \ldots, 5$.

(b) Making the substitution we get

$$\begin{aligned} X[k] &= X[k_1 + 2k_2] \\ &= \sum_{n=0}^{5} x[n] W_6^{(k_1+2k_2)n} \\ &= \sum_{n_2=0}^{2}\sum_{n_1=0}^{1} x[3n_1+n_2] W_6^{(k_1+2k_2)(3n_1+n_2)} \end{aligned}$$

(c) Expanding out the W_6 terms we get

$$\begin{aligned} W_6^{(k_1+2k_2)(3n_1+n_2)} &= W_6^{3k_1n_1} W_6^{6k_2n_1} W_6^{k_1n_2} W_6^{2k_2n_2} \\ &= W_2^{k_1n_1} W_6^{k_1n_2} W_3^{k_2n_2} \end{aligned}$$

(d) Grouping the terms we get

$$X[k_1 + 2k_2] = \sum_{n_2=0}^{2}\left[\left(\sum_{n_1=0}^{1} x[3n_1+n_2] W_2^{k_1n_1}\right) W_6^{k_1n_2}\right] W_3^{k_2n_2}$$

The interpretation of this equation is as follows

(i) Let $G[k_1, n_2]$ be the $N = 2$ point DFTs of the inner parenthesis; i.e.,

$$G[k_1, n_2] = \sum_{n_1=0}^{1} x[3n_1 + n_2] W_2^{k_1 n_1}, \qquad \begin{cases} 0 \le k_1 \le 1, \\ 0 \le n_2 \le 2. \end{cases}$$

This calculates 3 DFTs, one for each column of the index map associated with n. Since the DFT size is 2, we can perform these with simple butterflies and use no multiplications.

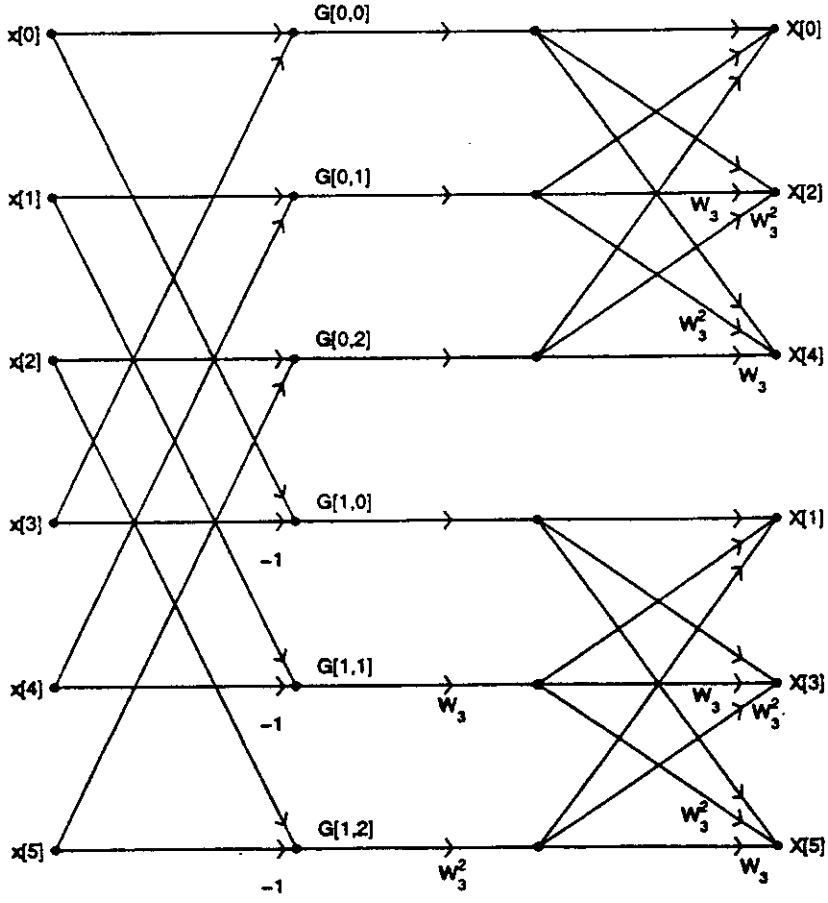
(ii) Let $\tilde{G}[k_1, n_2]$ be the set of 3 column DFTs multiplied by the twiddle factors.

$$\tilde{G}[k_1, n_2] = W_6^{k_1 n_2} G[k_1, n_2], \qquad \begin{cases} 0 \le k_1 \le 1, \\ 0 \le n_2 \le 2. \end{cases}$$

(iii) The outer sum calculates two $N = 3$ point DFTs, one for each of the two values of k_1.

$$X[k_1 + 2k_2] = \sum_{n_2=0}^{2} \tilde{G}[k_1, n_2] W_3^{k_2 n_2}, \qquad \begin{cases} 0 \le k_1 \le 1, \\ 0 \le k_2 \le 2. \end{cases}$$

(e) The signal flow graph looks like



The only complex multiplies are due to the twiddle factors. Therefore, there are 10 complex multiplies. The direct implementation requires $N^2 = 6^2 = 36$ complex multiplies (a little less if you do not count multiplies by 1 or -1).

(f) The alternate index map can be found be reversing the roles of n and k; i.e.,

$$n = n_1 + 2n_2 \qquad \text{for } n_1 = 0, 1;\ n_2 = 0, 1, 2$$
$$k = 3k_1 + k_2 \qquad \text{for } k_1 = 0, 1;\ k_2 = 0, 1, 2$$

Solutions – Chapter 10

Fourier Analysis of Signals

Using the Discrete Fourier Transform

10.1. (a) Using the relation

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT},$$

we find that the index $k = 150$ in $X[k]$ corresponds to a continuous time frequency of

$$\begin{aligned}\Omega_{150} &= \frac{2\pi(150)}{(1000)(10^{-4})} \\ &= 2\pi(1500) \text{ rad/s}\end{aligned}$$

(b) For this part, it is important to realize that the $k = 800$ index corresponds to a *negative* continuous-time frequency. Since the DFT is periodic in k with period N,

$$\begin{aligned}\Omega_{800} &= \frac{2\pi(800 - 1000)}{1000(10^{-4})} \\ &= -2\pi(2000) \text{ rad/s}\end{aligned}$$

10.2. Using the relation

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT}$$

or

$$f_k = \frac{k}{NT}$$

we find that the equivalent analog spacing between frequencies is

$$\Delta f = \frac{1}{NT}$$

Thus, in addition to the constraint that N is a power of 2, there are two conditions which must be met:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{T} &> 10{,}000 \text{ Hz} \quad \text{(to avoid aliasing)} \\ \tfrac{1}{NT} &< 5 \text{ Hz} \quad \text{(given)}\end{aligned}$$

These conditions can be expressed in the form

$$10{,}000 < \frac{1}{T} < 5N$$

The minimal $N = 2^\nu$ that satisfies the relationship is

$$N = 2048$$

for which

$$10{,}000 \text{ Hz} < \frac{1}{T} < 10{,}240 \text{ Hz}$$

Thus, $F_{\min} = 10{,}000$ Hz, and $F_{\max} = 10{,}240$ Hz.

10.3. (a) The length of a window is

$$\begin{aligned}L &= \left(16{,}000 \frac{\text{samples}}{\text{sec}}\right)(20 \times 10^{-3} \text{ sec}) \\ &= 320 \text{ samples}\end{aligned}$$

(b) The *frame rate* is the number of frames of data processed per second, or equivalently, the number of DFT computations done per second. Since the window is advanced 40 samples between computations of the DFT, the frame rate is

$$\begin{aligned}\text{frame rate} &= \left(16{,}000 \frac{\text{samples}}{\text{sec}}\right)\left(\frac{1 \text{ frame processed}}{40 \text{ samples}}\right) \\ &= 400 \frac{\text{frames}}{\text{sec}}\end{aligned}$$

(c) The most straightforward solution to this problem is to say that since the window length L is 320, we need $N \geq L$ in order to do the DFT. Therefore, a value of $N = 512$ meets the criteria of $N \geq L$, $N = 2^{\nu}$. However, since the windows overlap, we can find a smaller N.

Since the window advances 40 samples between computations, we really only need 40 *valid* samples for each DFT in order to reconstruct the original input signal. If we time alias the windowed data, we can use a smaller DFT length than the window length. With $N = 256$, 64 samples will be time aliased, and remaining 192 samples will be valid. However, with $N = 128$, all the samples will be aliased. Therefore, the minimum size of N is 256.

(d) Using the relation

$$\Delta f = \frac{1}{NT},$$

the frequency spacing for $N = 512$ is

$$\Delta f = \frac{16,000}{512} = 31.25 \text{ Hz}$$

and for $N = 256$ is

$$\Delta f = \frac{16,000}{256} = 62.5 \text{ Hz}$$

10.4. (a) Since $x[n]$ is real, $X[k]$ must be conjugate symmetric.

$$X[k] = X^*[((-k))_N]$$

We can use this conjugate symmetry property to find $X[k]$ for $k = 200$.

$$\begin{aligned} X[((-k))_N] &= X^*[k] \\ X[((-800))_{1000}] &= (1+j)^* \\ X[200] &= 1-j \end{aligned}$$

(b) Since an N-point DFT is periodic in k with period N, we know that

$$X[800] = 1 + j$$

implies that

$$X[-200] = 1 + j$$

Using the relation

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT},$$

we find

$$\begin{aligned} \Omega_{-200} &= \frac{-2\pi(200)}{(1000)(1/20,000)} \\ &= -2\pi(4000) \text{ rad/s} \\ \Omega_{200} &= \frac{2\pi(200)}{(1000)(1/20,000)} \\ &= 2\pi(4000) \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} X_c(j\,\Omega)\,|_{\Omega=-2\pi(4000)} &= \frac{1+j}{20,000} \\ X_c(j\,\Omega)\,|_{\Omega=2\pi(4000)} &= \frac{1-j}{20,000} \end{aligned}$$

Note that both expressions for $X_c(j\,\Omega)$ have been multiplied by the sampling period $T = 1/20,000$ because sampling the continuous-time signal $x_c(t)$ involves multiplication by $1/T$.

10.5. (a) After windowing, we have

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(\Omega_0 T n) \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{j\Omega_0 T n} + e^{-j\Omega_0 T n}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}(\frac{N\Omega_0 T}{2\pi})n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}(\frac{N\Omega_0 T}{2\pi})n}\right] \end{aligned}$$

for $n = 0, \ldots, N-1$ and $x[n] = 0$ outside this range. Using the DFT properties we get

$$X[k] = \frac{N}{2}\delta[((k - \tfrac{N\Omega_0 T}{2\pi}))_N] + \frac{N}{2}\delta[((k + \tfrac{N\Omega_0 T}{2\pi}))_N]$$

If we choose

$$T = \frac{2\pi}{N\Omega_0}k_0$$

then

$$X[k] = \frac{N}{2}\delta[k - k_0] + \frac{N}{2}\delta[k - (N - k_0)],$$

which is nonzero for $X[k_0]$ and $X[N - k_0]$, but zero everywhere else.

(b) *No*, the choice for T is not unique since we can choose the integer k_0.

10.6. Since $x[n]$ is real, $X[k]$ must be conjugate symmetric.

$$\begin{aligned} X[k] &= X^*[((-k))_N] \\ X[((-k))_N] &= X^*[k] \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} X[((-900))_{1000}] &= (1)^* \\ X[100] &= 1 \\ X[((-420))_{1000}] &= (5)^* \\ X[580] &= 5 \end{aligned}$$

Note that the $k = 900$ and $k = 580$ correspond to negative frequencies of Ω. Since the DFT is periodic in k with period N, we use $k = 900 - 1000 = -100$ and $k = 580 - 1000 = -420$, respectively, in the equations below.

Starting with

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT},$$

we find

$$\begin{aligned} \Omega_{-100} &= \frac{2\pi(-100)}{(1000)(1/10,000)} \\ &= -2\pi(1000) \text{ rad/s} \\ \Omega_{100} &= \frac{2\pi(100)}{(1000)(1/10,000)} \\ &= 2\pi(1000) \text{ rad/s} \\ \Omega_{-420} &= \frac{2\pi(-420)}{(1000)(1/10,000)} \\ &= -2\pi(4200) \text{ rad/s} \\ \Omega_{420} &= \frac{2\pi(420)}{(1000)(1/10,000)} \\ &= 2\pi(4200) \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} X_c(j\,\Omega)\,|_{\Omega=-2\pi(1000)} &= \frac{1}{10,000} \\ X_c(j\,\Omega)\,|_{\Omega=2\pi(1000)} &= \frac{1}{10,000} \\ X_c(j\,\Omega)\,|_{\Omega=-2\pi(4200)} &= \frac{1}{2,000} \\ X_c(j\,\Omega)\,|_{\Omega=2\pi(4200)} &= \frac{1}{2,000} \end{aligned}$$

Note that all expressions for $X_c(j\,\Omega)$ have been multiplied by the sampling period $T = 1/10,000$ because sampling the continuous-time signal $x_c(t)$ involves multiplication by $1/T$.

10.7. The Hamming window's mainlobe is $\Delta\omega_{ml} = \frac{8\pi}{L-1}$ radians wide. We want

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{ml} &\leq \frac{\pi}{100} \\ \frac{8\pi}{L-1} &\leq \frac{\pi}{100} \\ L &\geq 801 \end{aligned}$$

Because the window length is constrained to be a power of 2, we see that

$$L_{\min} = 1024$$

10.8. *All windows expect the Blackman satisfy the criteria.* Using the table, and noting that the window length $N = M + 1$, we find

Rectangular:

$$\begin{aligned} \Delta w_{ml} &= \frac{4\pi}{M+1} \\ &= \frac{4\pi}{256} \\ &= \frac{\pi}{64} \leq \frac{\pi}{25} \text{ rad} \end{aligned}$$

The resolution of the rectangular window satisfies the criteria.

Bartlett, Hanning, Hamming:

$$\begin{aligned} \Delta w_{ml} &= \frac{8\pi}{M} \\ &= \frac{8\pi}{255} \\ &= \frac{\pi}{31.875} \leq \frac{\pi}{25} \text{ rad} \end{aligned}$$

The resolution of the Bartlett, Hanning, and Hamming windows satisfies the criteria.

Blackman:

$$\begin{aligned} \Delta w_{ml} &= \frac{12\pi}{M} \\ &= \frac{12\pi}{255} \\ &= \frac{\pi}{21.25} \not\leq \frac{\pi}{25} \text{ rad} \end{aligned}$$

The Blackman window does not have a frequency resolution of at least $\pi/25$ radians. Therefore, this window does not satisfy the criteria.

10.9. The rectangular window's mainlobe is

$$\Delta\omega_{ml} = \frac{4\pi}{L} = \frac{4\pi}{64}$$

radians wide. The difference in frequency between each cosine must be greater than this amount to be resolved. If they are not separated enough, the mainlobes from each cosine will overlap too much and only a single peak will be seen. The separation of the cosines for each signal is

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_1 &= \left|\frac{\pi}{4} - \frac{17\pi}{64}\right| = \frac{\pi}{64} \\
\Delta\omega_2 &= \left|\frac{\pi}{4} - \frac{21\pi}{64}\right| = \frac{5\pi}{64} \\
\Delta\omega_3 &= \left|\frac{\pi}{4} - \frac{21\pi}{64}\right| = \frac{5\pi}{64}
\end{aligned}$$

Clearly, the cosines in $x_1[n]$ are too closely spaced in frequency to produce distinct peaks.

In $x_3[n]$, we have a small amplitude cosine which will be obscurred by the large sidelobes from the rectangular window. The peak will therefore not be visible.

The only signal from which we would expect to see two distinct peaks is $x_2[n]$.

10.10. The equivalent continuous-time frequency spacing is

$$\Delta f = \frac{1}{NT}$$

Thus, to satisfy the criterion that the frequency spacing between consecutive DFT samples is 1 Hz or less we must have

$$\begin{aligned}
\Delta f &\leq 1 \\
\frac{1}{NT} &\leq 1 \\
T &\geq \frac{1}{N} \\
T &\geq \frac{1}{1024} \text{ sec}
\end{aligned}$$

However, we must also satisfy the Sampling Theorem to avoid aliasing. We therefore have the addition restriction that,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} &\geq 200 \text{ Hz} \\
T &\leq \frac{1}{200} \text{ sec}
\end{aligned}$$

Putting the two constraints together we find

$$\frac{1}{1024} \leq T \leq \frac{1}{200}$$

$$T_{\min} = \frac{1}{1024} \text{ sec}$$

10.11. The equivalent frequency spacing is

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{NT} = \frac{2\pi}{(8192)(50\mu s)} = 15.34 \text{ rad/s}$$

or

$$\Delta f = \frac{\Delta\Omega}{2\pi} = 2.44 \text{ Hz}$$

10.12. The equivalent frequency spacing is

$$\Delta f = \frac{1}{NT}$$

Thus, the minimum DFT length N such that adjacent samples of $X[k]$ correspond to a frequency spacing of 5 Hz or less in the original continuous-time signal is

$$\begin{aligned} \Delta f &\leq 5 \\ \frac{1}{NT} &\leq 5 \\ N &\geq \frac{1}{5T} \\ &\geq \frac{8000}{5} \\ &\geq 1600 \text{ samples} \end{aligned}$$

10.13. Since $w[n]$ is the rectangular window and we are using $N = 36$ we have

$$\begin{aligned} X_r[k] &= \sum_{m=0}^{35} x[rR+m]e^{-j(2\pi/36)km} \\ &= \text{DFT}\{x[rR+n]\} \end{aligned}$$

Because $x[n]$ is zero outside the range $0 \leq n \leq 71$, $X_r[k]$ will be zero except when $r = 0$ or $r = 1$. When $r = 0$, the 36 points in the sum of the DFT only include the section

$$\cos(\pi n/6) = \frac{e^{j(\frac{2\pi}{36})3n} + e^{-j(\frac{2\pi}{36})3n}}{2}$$

of $x[n]$. Therefore, we can use the properties of the DFT to find

$$\begin{aligned} X_0[k] &= \tfrac{36}{2}\delta[((k-3))_{36}] + \tfrac{36}{2}\delta[((k+3))_{36}] \\ &= 18\delta[k-3] + 18\delta[k-33] \end{aligned}$$

When $r = 1$, the 36 points in the sum of the DFT only include the section

$$\cos(\pi n/2) = \frac{e^{j(\frac{2\pi}{36})9n} + e^{-j(\frac{2\pi}{36})9n}}{2}$$

of $x[n]$. Therefore, we can use the properties of the DFT to find

$$\begin{aligned} X_1[k] &= \tfrac{36}{2}\delta[((k-9))_{36}] + \tfrac{36}{2}\delta[((k+9))_{36}] \\ &= 18\delta[k-9] + 18\delta[k-27] \end{aligned}$$

Putting it all together we get

$$X_r[k] = \begin{cases} 18(\delta[k-3] + \delta[k-33]), & r = 0 \\ 18(\delta[k-9] + \delta[k-27]), & r = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

10.14. *The signals $x_2[n]$, $x_3[n]$, and $x_6[n]$ could be $x[n]$, as described below.*

Looking at the figure, it is clear that there are two nonzero DFT coefficients at $k = 8$, and $k = 16$. These correspond to frequencies

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{(2\pi)(8)}{128} \\ &= \frac{\pi}{8} \text{ rad} \\ \omega_2 &= \frac{(2\pi)(16)}{128} \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad}\end{aligned}$$

Also notice that the magnitude of the DFT coefficient at $k = 16$ is about 3 times that of the DFT coefficient at $k = 8$.

- $x_1[n]$: The second cosine term has a frequency of $.26\pi$ rad, which is neither $\pi/8$ rad or $\pi/4$ rad. Consequently, $x_1[n]$ is not consistent with the information shown in the figure.
- $x_2[n]$: This signal is consistent with the information shown in the figure. The peaks occur at the correct locations, and are scaled properly.
- $x_3[n]$: This signal is consistent with the information shown in the figure. The peaks occur at the correct locations, and are scaled properly.
- $x_4[n]$: This signal has a cosine term with frequency $\pi/16$ rad, which is neither $\pi/8$ rad or $\pi/4$ rad. Consequently, $x_4[n]$ is not consistent with the information shown in the figure.
- $x_5[n]$: This signal has sinusoids with the correct frequencies, but the scale factors on the two terms are not consistent with the information shown in the figure.
- $x_6[n]$: This signal is consistent with the information shown in the figure. Note that phase information is not represented in the DFT magnitude plot.

10.15. The instantaneous frequency of the chirp signal is

$$\omega_i[n] = \omega_0 + \lambda n$$

This describes a line with slope λ and intercept ω_0. Thus,

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0.5\pi - 0.25\pi)}{(19000 - 0)} = 41.34 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\omega_0 = 0.25\pi \text{ rad}$$

10.16. Using

$$\Delta f = \frac{1}{NT}$$

and assuming no aliasing occured when the continuous-time signal was sampled, we find that the frequency spacing between spectral samples is

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{(1024)(1/10,000)} \\ &= 9.77 \text{ Hz}\end{aligned}$$

or

$$\Delta\Omega = 2\pi\Delta f = 61.4 \text{ rad/s}$$

10.17. We should choose *Method 2*.

Method 1: This doubles the number of samples we take of the frequency variable, but does not change the frequency resolution. The size of the main lobe from the window remains the same.

Method 2: *This improves the frequency resolution since the main lobe from the window gets smaller.*

Method 3: This increases the time resolution (the ability to distinguish events in time), but does not affect the frequency resolution.

Method 4: This will decrease the frequency resolution since the main lobe from the window increases. This is a strange thing to do since there are samples of x[n] that do not get used in the transform.

Method 5: This will only improve the resolution if we can ignore any problems due to sidelobe leakage. For example, changing to a rectangular window will improve our ability to resolve two equal amplitude sinusoids. In most cases, however, we need to worry about sidelobe levels. A large sidelobe might mask the presence of a low amplitude signal. Since we do not know ahead of time the nature of the signal we are trying to analyze, changing to a rectangular window may actually make things worse. Thus, in general, changing to a rectangular window will not necessarily increase the frequency resolution.

10.18. *No*, the peaks will not have the same height. The peaks in $V_2(e^{j\omega})$ will be larger than those in $V_1(e^{j\omega})$.

First, note that the Fourier transform of the rectangular window has a higher peak than that of the Hamming window. If this is not obvious, consider Figure 7.21, and recall that the Fourier transform of an L-point window $w[n]$, evaluated at DC ($\omega = 0$), is

$$W(e^{j0}) = \sum_{n=0}^{L-1} w[n]$$

Let the rectangular window be $w_R[n]$, and the Hamming window be $w_H[n]$. It is clear from the figure (where M = L+1) that

$$\sum_{n=0}^{L-1} w_R[n] > \sum_{n=0}^{L-1} w_H[n]$$

Therefore,

$$W_R(e^{j0}) > W_H(e^{j0})$$

Thus, the Fourier transform of the rectangular window has a higher peak than that of the Hamming window.

Now recall that the multiplication of two signals in the time domain corresponds to a periodic convolution in the frequency domain. So in the frequency domain, $V_1(e^{j\omega})$ is the convolution of two scaled impulses from the sinusoid, with the Fourier transform of the L-point Hamming window, $W_H(e^{j\omega})$. This results in two scaled copies of $W_H(e^{j\omega})$, centered at the frequencies of the sinusoid. Similarly, $V_2(e^{j\omega})$ consists of two scaled copies of $W_R(e^{j\omega})$, also centered at the frequencies of the sinusoid. The scale factor is the same in both cases, resulting from the Fourier transform of the sinusoid.

Since the peaks of the Fourier transform of the rectangular window are higher than those of the Hamming window, the peaks in $V_2(e^{j\omega})$ will be larger than those in $V_1(e^{j\omega})$.

10.19. Using the approximation given in the chapter

$$L \simeq \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155\Delta_{ml}} + 1$$

we find for $A_{sl} = 30$ dB and $\Delta_{ml} = \frac{\pi}{40}$ rad,

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{24\pi(30 + 12)}{155(\pi/40)} + 1 \\ &\simeq 261.1 \rightarrow 262 \end{aligned}$$

10.20. (a) The best sidelobe attenuation expected under these constraints is

$$\begin{aligned} L &\simeq \frac{24\pi(A_{sl}+12)}{155\Delta_{ml}}+1 \\ 512 &\simeq \frac{24\pi(A_{sl}+12)}{155(\pi/100)}+1 \\ A_{sl} &\simeq 21 \text{ dB} \end{aligned}$$

(b) The two sinusoidal components are separated by at least $\pi/50$ radians. Since the largest allowable mainlobe width is $\pi/100$ radians, we know that the peak of the DFT magnitude of the weaker sinusoidal component will not be located in the mainlobe of the DFT magnitude of the stronger sinusoidal component. Thus, we only need to consider the sidelobe height of the stronger component.

Converting 21 dB attenuation back from dB gives

$$\begin{aligned} -21 \text{ dB} &= 20\log_{10} m \\ m &= 0.0891 \end{aligned}$$

Since the amplitude of the stronger sinusoidal component is 1, the amplitude of the weaker sinusoidal component must be greater than 0.0891 in order for the weaker sinusoidal component to be seen over the sidelobe of the stronger sinusoidal component.

10.21. We have

$$\begin{aligned} v[n] &= \cos(2\pi n/5)w[n] \\ &= \left[\frac{e^{j2\pi n/5}+e^{-j2\pi n/5}}{2}\right]w[n] \\ V(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}W(e^{j(\omega-2\pi/5)})+\frac{1}{2}W(e^{j(\omega+2\pi/5)}) \end{aligned}$$

The rectangular window's transform is

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(16\omega)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega 31/2}$$

In order to label $V(e^{j\omega})$ correctly, we must find the mainlobe height, strongest sidelobe height, and the first nulls of $W(e^{j\omega})$.

Mainlobe Height of $W(e^{j\omega})$: The peak height is at $\omega = 0$ for which we can use l'hôpital's rule to find

$$W(e^{j0}) = 32\frac{\cos(16\omega)}{\cos(\omega/2)}\bigg|_{\omega=0} = 32$$

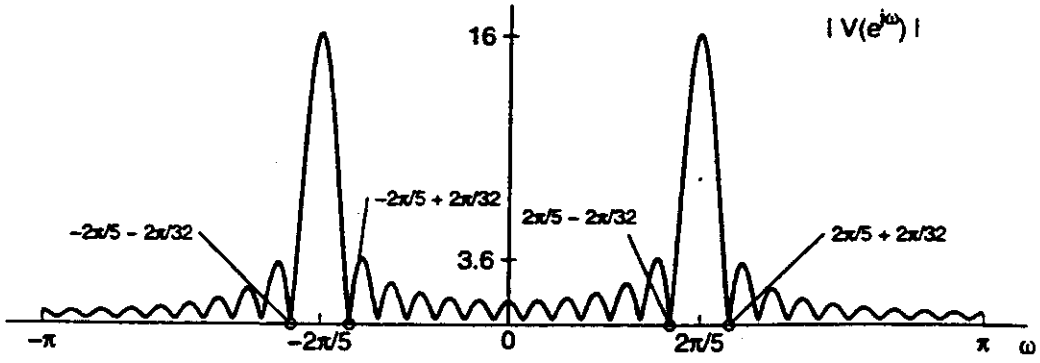
Strongest Sidelobe height of $W(e^{j\omega})$: The strongest sidelobe height for the rectangular window is 13 dB below the main peak height. Therefore, since 13 dB = 0.2239 we have

$$\text{Strongest Sidelobe height} = 0.2239(32) \approx 7.2$$

First Nulls of $W(e^{j\omega})$: The first nulls can be found be noting that $W(e^{j\omega}) = 0$ when $\sin(16\omega) = 0$ Thus, the first nulls occur at

$$\omega = \pm\frac{2\pi}{32}$$

Therefore, $|V(e^{j\omega})|$ looks like

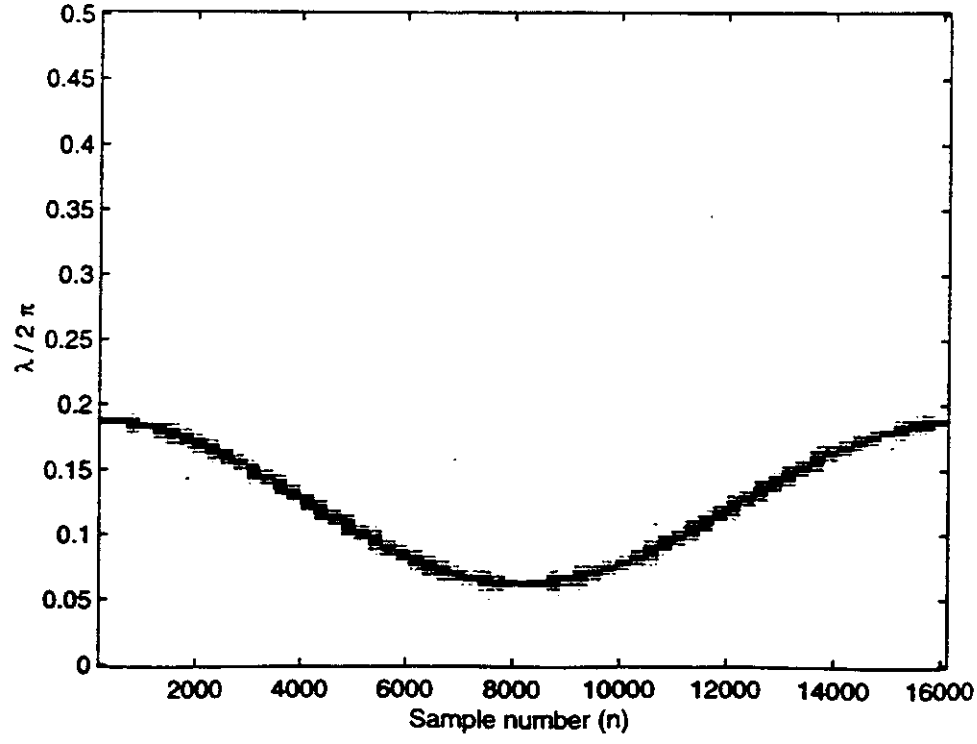


Note that the numbers used above for the heights are not exact because we are adding two copies of $W(e^{j\omega})$ to get $V(e^{j\omega})$ and the exact values for the heights will depend on relative phase and location of the two copies. However, they are a very good approximation and the error is small.

10.22. The 'instantaneous frequency' of $x[n]$, denoted as $\lambda[n]$, can be determined by taking the derivative with respect to n of the argument of the cosine term. This gives

$$\begin{aligned}\lambda[n] &= \frac{d}{dn}\left[\frac{\pi n}{4} + 1000\sin\left(\frac{\pi n}{8000}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi n}{8000}\right) \\ \frac{\lambda[n]}{2\pi} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\cos\left(\frac{\pi n}{8000}\right)\end{aligned}$$

Once $\lambda[n]/2\pi$ is known, it is simple to sketch the spectrogram, shown below.



Here, we see a cosine plot shifted up the frequency ($\lambda/2\pi$) axis by a constant. As is customary in a spectrogram, only the frequencies $0 \leq \lambda/2\pi \leq 0.5$ are plotted.

10.23. In this problem, we relate the DFT $X[k]$ of a discrete-time signal $x[n]$ to the continuous-time Fourier transform $X_c(j\Omega)$ of the continuous-time signal $x_c(t)$. Since $x[n]$ is obtained by sampling $x_c(t)$,

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \\ X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) \end{aligned}$$

Over one period, assuming no aliasing, this is

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \qquad \text{for } -\pi \leq \omega \leq \pi$$

which is equivalent to

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), & \text{for } 0 \leq \omega < \pi \\ \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi}{T}\right), & \text{for } \pi \leq \omega < 2\pi \end{cases}$$

Since the DFT is a sampled version of $X(e^{j\omega})$,

$$X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} \qquad \text{for } 0 \leq k \leq N-1$$

we find

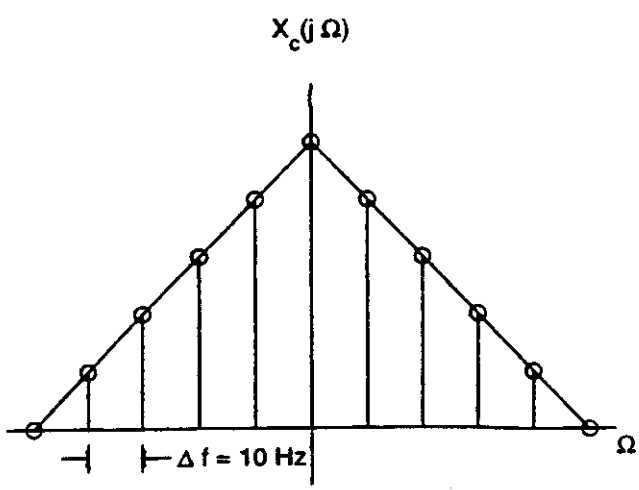
$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{2\pi k}{NT}\right), & \text{for } 0 \leq k < \frac{N}{2} \\ \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{2\pi(k-N)}{NT}\right), & \text{for } \frac{N}{2} \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

Breaking up the DFT into two terms like this is necessary to relate the negative frequencies of $X_c(j\Omega)$ to the proper indicies $\frac{N}{2} \leq k \leq N-1$ in $X[k]$.

Method 1: Using the above equation for $X[k]$, and plugging in values of $N = 4000$, and $T = 25\mu s$, we find

$$X_1[k] = \begin{cases} 40{,}000X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot k), & \text{for } 0 \leq k \leq 1999 \\ 40{,}000X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot (k-4000)), & \text{for } 2000 \leq k \leq 3999 \end{cases}$$

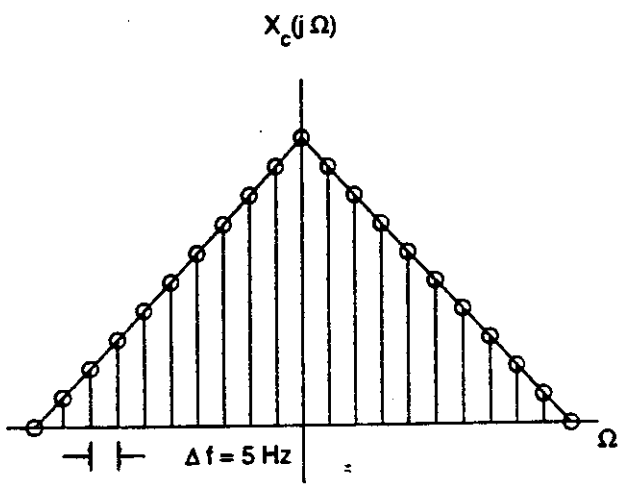
Therefore, we see this does not provide the desired samples. A sketch is provided below, for a triangular-shaped $X_c(j\Omega)$.



Method 2: This time we plug in values of $N = 4000$, and $T = 50\mu s$ to find

$$X_2[k] = \begin{cases} 20,000X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot k), & \text{for } 0 \le k \le 1999 \\ 20,000X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot (k-4000)), & \text{for } 2000 \le k \le 3999 \end{cases}$$

Therefore, we see this *does* provide the desired samples. A sketch is provided below.



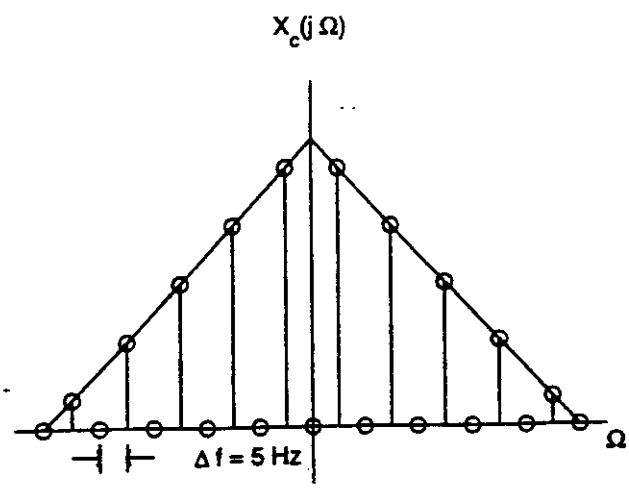
Method 3: Noting that $x_3[n] = x_2[n] + x_2\left[n - \frac{N}{2}\right]$, we get

$$X_3[k] = X_2[k] + (-1)^k X_2[k]$$

$$X_3[k] = \begin{cases} 2X_2[k], & \text{for } k \text{ even} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_3[k] = \begin{cases} 40,000X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot k), & \text{for } k \text{ even, and } 0 \le k \le 1999 \\ 40,000X_c(j2\pi \cdot 5 \cdot (k-4000)), & \text{for } k \text{ even, and } 2000 \le k \le 3999 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

This system provides the desired samples only for k an even integer. A sketch is provided below.



10.24. (a) In this problem, we relate the DFT $X[k]$ of a discrete-time signal $x[n]$ to the continuous-time Fourier tranform $X_c(j\Omega)$ of the continuous-time signal $x_c(t)$. Since $x[n]$ is obtained by sampling $x_c(t)$,

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \\ X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega}{T} + j\frac{2\pi r}{T}\right) \end{aligned}$$

Over one period, assuming no aliasing, this is

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \qquad \text{for } -\pi \le \omega \le \pi$$

which is equivalent to

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), & \text{for } 0 \le \omega < \pi \\ \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{\omega-2\pi}{T}\right), & \text{for } \pi \le \omega < 2\pi \end{cases}$$

Since the DFT is a sampled version of $X(e^{j\omega})$,

$$X[k] = X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N} \qquad \text{for } 0 \le k \le N-1$$

we find

$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{2\pi k}{NT}\right), & \text{for } 0 \le k < \frac{N}{2} \\ \frac{1}{T}X_c\left(j\frac{2\pi(k-N)}{NT}\right), & \text{for } \frac{N}{2} \le k \le N-1 \end{cases}$$

Breaking up the DFT into two terms like this is necessary to relate the negative frequencies of $X_c(j\Omega)$ to the proper indicies $\frac{N}{2} \le k \le N-1$ in $X[k]$.

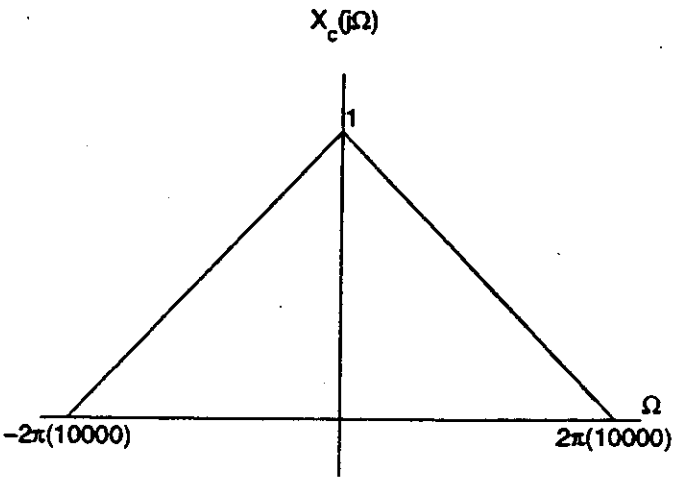
The effective frequency spacing is

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{2\pi}{NT} \\ &= \frac{2\pi}{(1000)(1/20,000)} \\ &= 2\pi(20) \text{ rad/s} \end{aligned}$$

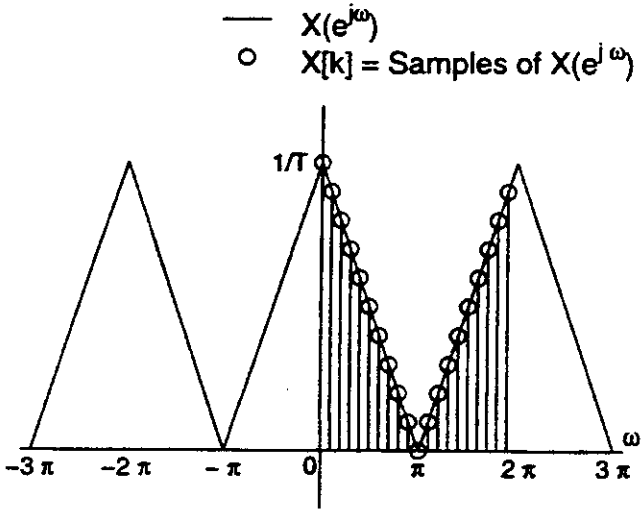
(b) Next, we determine if the designer's assertion that

$$Y[k] = \alpha X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot k)$$

is correct. To understand the effect of each step in the procedure, it helps to draw some frequency domain plots. Assume the spectrum of the original signal $x_c(t)$ looks like



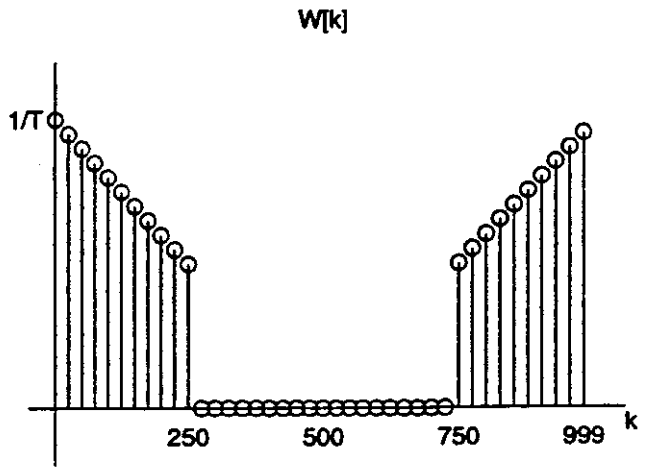
Sampling this continuous-time signal will produce the discrete-time signal $x[n]$, with a spectrum



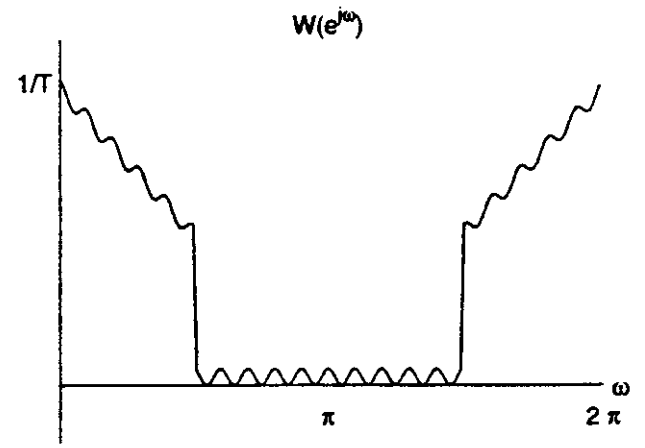
Next, we form

$$W[k] = \begin{cases} X[k], & 0 \le k \le 250 \\ 0, & 251 \le k \le 749 \\ X[k], & 750 \le k \le 999 \end{cases}$$

and find $w[n]$ as the inverse DFT of $W[k]$.



Before going on, we should plot the Fourier transform, $W(e^{j\omega})$, of $w[n]$. It will look like



$W(e^{j\omega})$ goes through the DFT points and therefore is equal to samples of $X_c(j\Omega)$ at these points for $0 \leq k \leq 250$ and $750 \leq k \leq 999$, but it is *not equal* to $X_c(j\Omega)$ between those frequencies. Furthermore, $W(e^{j\omega}) = 0$ at the DFT frequencies for $251 \leq k \leq 749$, but it is not zero between those frequencies; i.e. we can not do ideal lowpass filtering using the DFT.

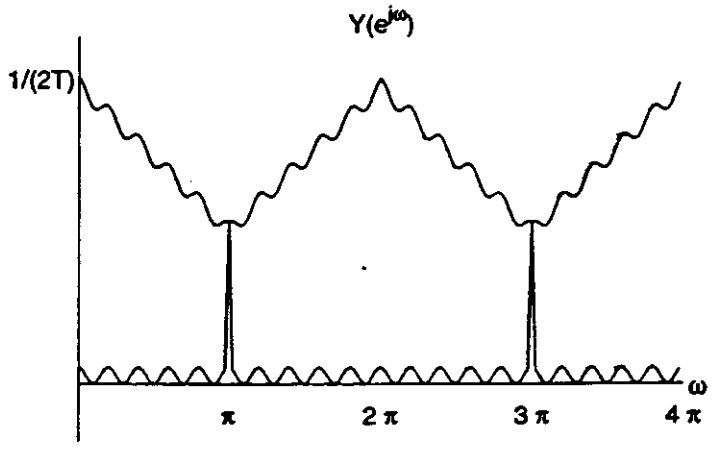
Now we define

$$y[n] = \begin{cases} w[2n], & 0 \leq n \leq 499 \\ 0, & 500 \leq n \leq 999 \end{cases}$$

and let $Y[k]$ be the DFT of $y[n]$. First note that $Y(e^{j\omega})$ is

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}W(e^{j\omega/2}) + \frac{1}{2}W(e^{j(\omega-2\pi)/2})$$

which looks like



$Y[k]$ is equal to samples of the $Y(e^{j\omega})$

$$\begin{aligned} Y[k] &= Y(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N} \\ &= \frac{1}{2}W\left(e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{k}{2}}\right) + \frac{1}{2}W\left(e^{j\frac{2\pi}{N}\left(\frac{k-N}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

Now putting all that we know together, we see that for $k = 0, 1, \ldots, 500$, $Y[k]$ is related to $X_c(j\Omega)$ as follows.

$$Y[k] = \begin{cases} \frac{1}{2T}X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot k), & k \text{ even}, k \neq 500 \\ \frac{1}{T}X_c(j2\pi \cdot 10 \cdot k), & k = 500 \\ \frac{1}{2T}W(e^{j\pi k/N}) + \frac{1}{2T}W(e^{j\pi(k-N)/N}) & k \text{ odd} \end{cases}$$

In other words, the even indexed DFT samples are not aliased, but the odd indexed values (and $k = 500$) are aliased. The designer's assertion is not correct.

10.25. (a) Starting with definition of the time-dependent Fourier transform,

$$Y[n, \lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}$$

we plug in

$$y[n+m] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n+m-k]$$

to get

$$\begin{aligned} Y[n, \lambda] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{M} h[k]x[n+m-k]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= \sum_{k=0}^{M} h[k]\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m-k]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= \sum_{k=0}^{M} h[k]X[n-k, \lambda) \\ &= h[n] * X[n, \lambda) \end{aligned}$$

where the convolution is for the variable n.

(b) Starting with

$$\tilde{Y}[n,\lambda) = e^{-j\lambda n}Y[n,\lambda)$$

we find

$$\begin{aligned}\tilde{Y}[n,\lambda) &= e^{-j\lambda n}\left[\sum_{k=0}^{M} h[k]X[n-k,\lambda)\right] \\ &= e^{-j\lambda n}\left[\sum_{k=0}^{M} h[k]e^{j(n-k)\lambda}\tilde{X}[n-k,\lambda)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\lambda k}\tilde{X}[n-k,\lambda)\end{aligned}$$

If the window is long compared to M, then a small time shift in $\tilde{X}[n,\lambda)$ won't radically alter the spectrum, and

$$\tilde{X}[n-k,\lambda) \simeq \tilde{X}[n,\lambda)$$

Consequently,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}[n,\lambda) &\simeq \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\lambda k}\tilde{X}[n,\lambda) \\ &\simeq H(e^{j\lambda})\tilde{X}[n,\lambda)\end{aligned}$$

10.26. Plugging in the relation for $c_{vv}[m]$ into the equation for $I(\omega)$ gives

$$\begin{aligned}I(\omega) &= \frac{1}{LU}\sum_{m=-(L-1)}^{L-1}\left[\sum_{n=0}^{L-1} v[n]v[n+m]\right]e^{-j\omega m} \\ &= \frac{1}{LU}\sum_{n=0}^{L-1} v[n]\sum_{m=-(L-1)}^{L-1} v[n+m]e^{-j\omega m}\end{aligned}$$

Let $\ell = n+m$ in the second summation. This gives

$$\begin{aligned}I(\omega) &= \frac{1}{LU}\sum_{n=0}^{L-1} v[n]\sum_{\ell=n-(L-1)}^{n+(L-1)} v[\ell]e^{-j\omega(\ell-n)} \\ &= \frac{1}{LU}\sum_{n=0}^{L-1} v[n]e^{j\omega n}\sum_{\ell=n-(L-1)}^{n+(L-1)} v[\ell]e^{-j\omega\ell}\end{aligned}$$

Note that for all values of $0 \le n \le L-1$, the second summation will be over *all* non-zero values of $v[\ell]$ in the range $0 \le \ell \le L-1$. As a result,

$$\begin{aligned}I(\omega) &= \frac{1}{LU}\sum_{n=0}^{L-1} v[n]e^{j\omega n}\sum_{\ell=0}^{L-1} v[\ell]e^{-j\omega\ell} \\ &= \frac{1}{LU}V^*(e^{j\omega})V(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{LU}|V(e^{j\omega})|^2\end{aligned}$$

Note that in this analysis, we have assumed that $v[n]$ is a real sequence.

10.27. (a) Since $x[n]$ has length L, the aperiodic function, $c_{xx}[m]$, will be $2L-1$ points long. Therefore, in order for the aperiodic correlation function to equal the periodic correlation fuction, $\tilde{c}_{xx}[m]$, for $0 \leq m \leq L-1$, we require that the inverse DFT is not time aliased. So, the minimum inverse DFT length $N_{\min}$ is

$$N_{\min} = 2L-1$$

(b) If we require M points to be unaliased, we can have $L-M$ aliased points. Therefore, for $\tilde{c}_{xx}[m] = c_{xx}[m]$ for $0 \leq m \leq M-1$, the minimum inverse DFT length $N_{\min}$ is

$$\begin{aligned} N_{\min} &= 2L-1-(L-M) \\ &= L+M-1 \end{aligned}$$

10.28. (a) Let

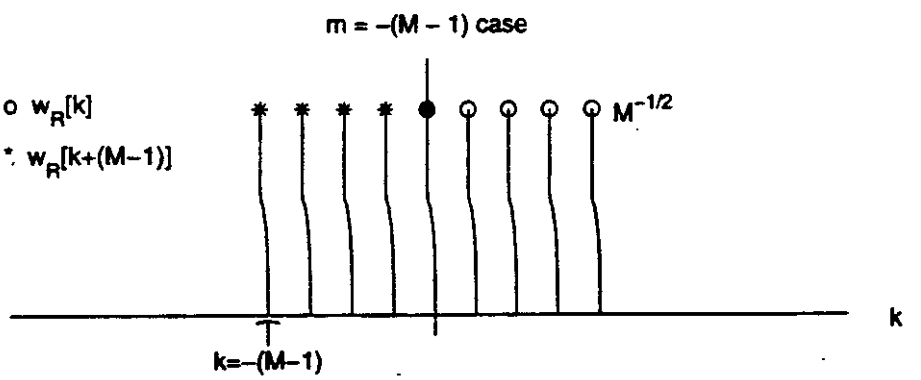
$$w_R[m] = \frac{1}{\sqrt{M}}(u[n]-u[n-M])$$

be a scaled rectangular pulse. Then we can write the aperiodic autocorrelation as,

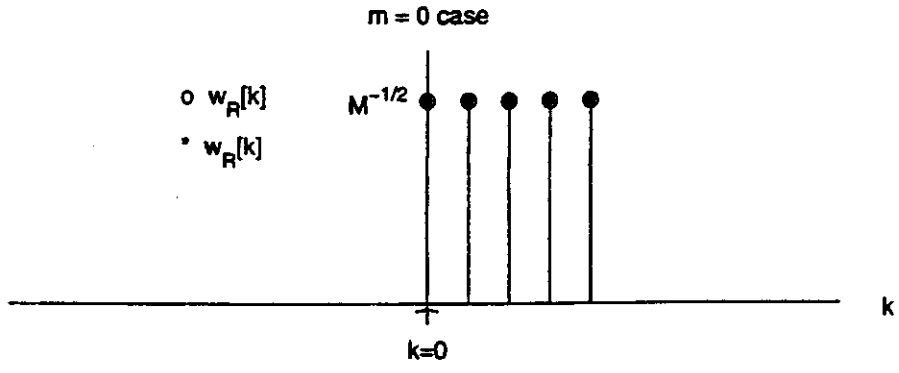
$$\begin{aligned} w_B[m] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R[n]w_R[n+m] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_R[k-m]w_R[k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_R[k]w_R[-(m-k)] \\ &= w_R[m] * w_R[-m] \end{aligned}$$

The convolution above is the triangular signal described by the symmetric Bartlett window formula. This is shown graphically below for a few critical cases of m.

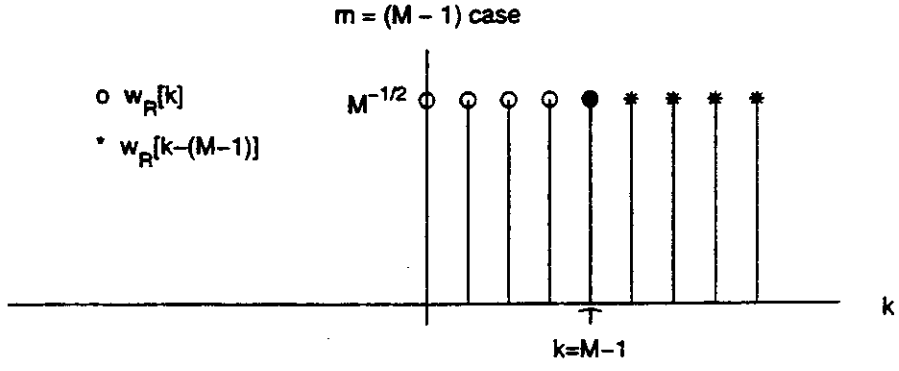
Consider $m = -(M-1)$. This is first value of m for which the two signals overlap.



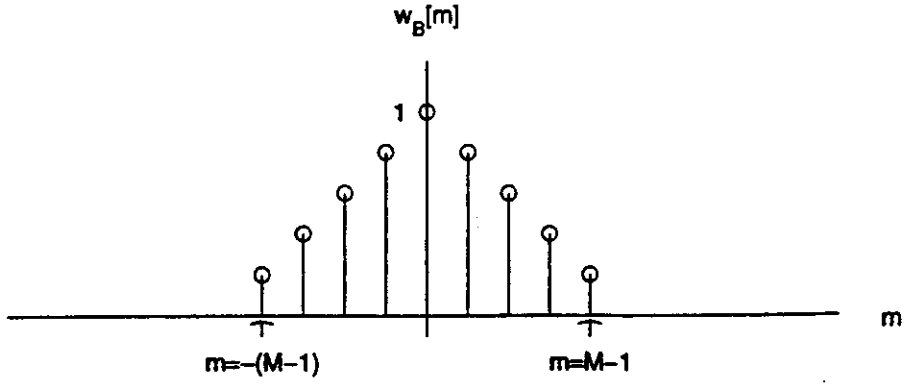
At $m = 0$, all non-zero samples overlap.



Consider $m = (M-1)$. This is last value of m for which the two signals overlap.



The final result of the aperiodic autocorrelation is



Stated mathematically, this is

$$w_B[m] = \begin{cases} 1 - |m|/M, & |m| \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) The transform of the causal scaled rectangular pulse $w_R[n]$ is

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$$

From part (a), we know that the Bartlett window can be found by convolving $w_R[m]$ with $w_R[-m]$. In the frequency domain, we therefore have,

$$\begin{aligned} W_B(e^{j\omega}) &= W_R(e^{j\omega})W_R(e^{-j\omega}) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(M-1)/2}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{M}}\frac{\sin(-\omega M/2)}{\sin(-\omega/2)}e^{j\omega(M-1)/2}\right] \\ &= \frac{1}{M}\left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 \end{aligned}$$

(c) The power spectrum, defined as the Fourier transform of the aperiodic autocorrelation sequence, is always nonnegative. Thus, any window that can be represented as an aperiodic autocorrelation sequence will have a nonnegative Fourier transform. So to generate other finite-length window sequences, $w[n]$, that have nonnegative Fourier transforms, simply take the aperiodic autocorrelation of an input sequence, $x[n]$.

$$w[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[n+m]$$

The signal $w[n]$ will have a nonnegative Fourier transform.

10.29. (a) **Rectangular:** The Fourier transform of the rectangular window is given by

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1}(1)e^{-j\omega m}$$

Let $n = m + (M-1)$. Then, $m = n - (M-1)$, and

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{2(M-1)} e^{-j\omega[n-(M-1)]} \\ &= e^{j\omega(M-1)}\sum_{n=0}^{2(M-1)} e^{-j\omega n} \end{aligned}$$

Using the relation

$$\sum_{n=0}^{M-1} a^n = \frac{1-a^M}{1-a}$$

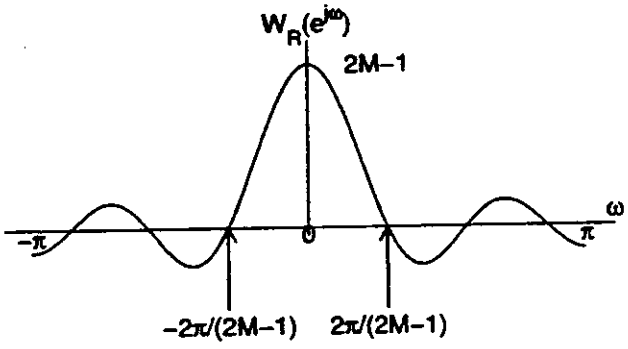
we find

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= e^{j\omega(M-1)}\frac{1-e^{-j\omega[2(M-1)+1]}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= e^{j\omega(M-1)}\frac{1-e^{-j\omega(2M-1)}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{j\omega(M-1)} - e^{-j\omega M}}{1-e^{-j\omega}} \\ &= \frac{e^{-j\omega/2}[e^{j\omega(M-1/2)} - e^{-j\omega(M-1/2)}]}{e^{-j\omega/2}[e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}]} \\ &= \frac{e^{j\omega(M-1/2)} - e^{-j\omega(M-1/2)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \\ &= \frac{2j\sin[\omega(M-\frac{1}{2})]}{2j\sin(\omega/2)} \\ &= \frac{\sin[\omega(M-\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

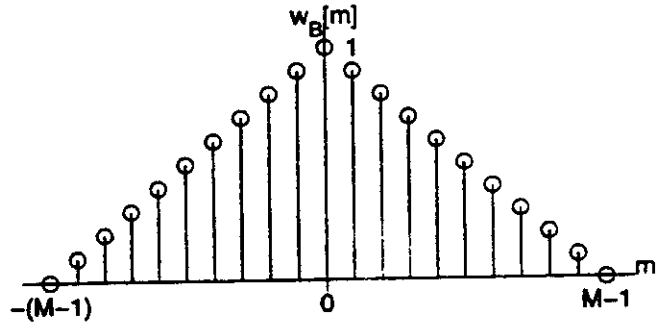
or

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin[\omega\frac{2M-1}{2}]}{\sin(\omega/2)}$$

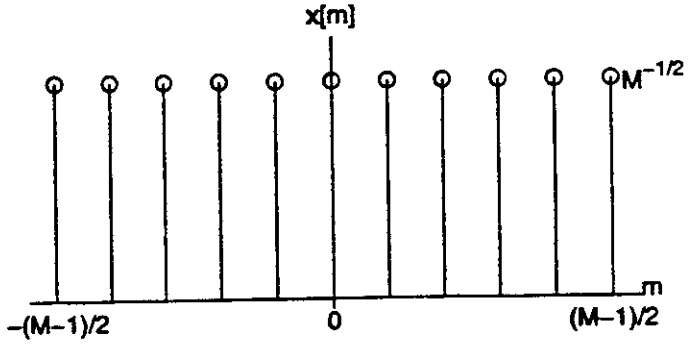
where $2M-1$ is the window length. A sketch of $W_R(e^{j\omega})$ appears below.



Bartlett (triangular): $W_B(e^{j\omega})$ is the Fourier transform of a triangular signal,



which is the convolution of a rectangular signal,



with itself. That is, $w_B[m] = x[m] * x[m]$.
Above, we found the Fourier tranform of a rectangular window, as

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin[\omega\frac{2M-1}{2}]}{\sin(\omega/2)}$$

where $2M-1$ was the length of the window. We can use this result to find the Fourier transform of $x[m]$. The signal $x[m]$ is similar to the rectangular window, the difference being

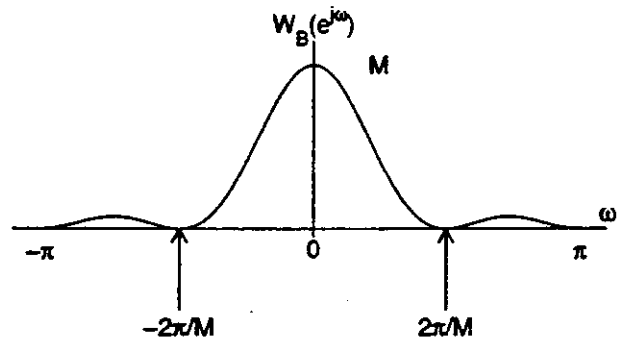
that it is scaled by $\frac{1}{\sqrt{M}}$ and has a length $2\frac{M-1}{2}+1 = M$. Therefore,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}$$

The time domain convolution, $w_B[m] = x[m]*x[m]$ corresponds to a multiplication, $W_B(e^{j\omega}) = [X(e^{j\omega})]^2$ in the frequency domain. As a result,

$$\begin{aligned} W_B(e^{j\omega}) &= [X(e^{j\omega})]^2 \\ &= \frac{1}{M}\left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 \end{aligned}$$

A sketch of $W_B(e^{j\omega})$ appears below.



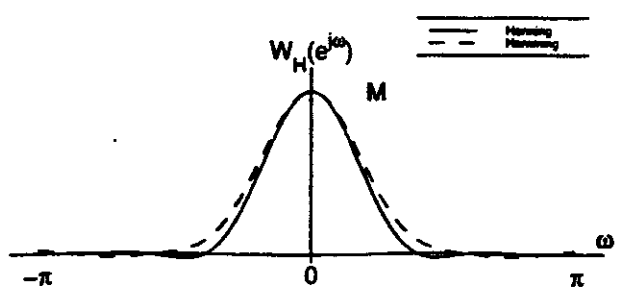
Hanning/Hamming: Starting with

$$\begin{aligned} w_H[m] &= (\alpha + \beta\cos[\pi m/(M-1)])\, w_R[m] \\ w_H[m] &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}e^{j\pi m/(M-1)} + \frac{\beta}{2}e^{-j\omega m/(M-1)}\right) w_R[m] \end{aligned}$$

We take the Fourier transform to find

$$\begin{aligned} W_H(e^{j\omega}) &= \alpha W_R(e^{j\omega}) + \frac{\beta}{2}\left(W_R(e^{j[\omega-\pi/(M-1)]}) + W_R(e^{j[\omega+\pi/(M-1)]})\right) \\ &= \alpha\frac{\sin[\omega\,(M-\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)} + \frac{\beta}{2}\left[\frac{\sin[(\omega-\frac{\pi}{M-1})(M-\frac{1}{2})]}{\sin[(\omega-\frac{\pi}{M-1})/2]}\right] \\ &+ \frac{\beta}{2}\left[\frac{\sin[(\omega+\frac{\pi}{M-1})(M-\frac{1}{2})]}{\sin[(\omega+\frac{\pi}{M-1})/2]}\right] \end{aligned}$$

A sketch of $W_H(e^{j\omega})$ appears below.



(b) **Rectangular:** The approximate mainlobe width, and the approximate variance ratio, F, for the rectangular window are found below for large M.
In part (a), we found the Fourier transform of the rectangular window as

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin[\omega(M-\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$$

The numerator becomes zero when the argument of its sine term equals πn.

$$\begin{aligned}\frac{(2M-1)\omega}{2} &= \pi n \\ \omega &= \frac{2\pi n}{2M-1}\end{aligned}$$

Plugging in $n = 1$ gives us half the mainlobe bandwidth.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\text{Mainlobe bandwidth} &= \frac{2\pi}{2M-1} \\ \text{Mainlobe bandwidth} &= \frac{4\pi}{2M-1} \\ \text{Mainlobe bandwidth} &\simeq \frac{2\pi}{M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= \frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{(M-1)} w^2[m] \\ &= \frac{1}{Q}(2M-1) \\ &\simeq \frac{2M}{Q}\end{aligned}$$

Bartlett (triangular): The approximate mainlobe width, and the approximate variance ratio, F, for the Bartlett window are found below for large M.

In part (a), we found the Fourier transform of the Bartlett window as

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\left[\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}\right]^2$$

The numerator becomes zero when the argument of its sine term equals πn.

$$\begin{aligned}\frac{\omega M}{2} &= \pi n \\ \omega &= \frac{2\pi n}{M}\end{aligned}$$

Plugging in $n = 1$ gives us half the mainlobe bandwidth.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\text{Mainlobe bandwidth} &= \frac{2\pi}{M} \\ \text{Mainlobe bandwidth} &= \frac{4\pi}{M}\end{aligned}$$

To compute F, we use the relations

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{M-1} m &= \frac{M(M-1)}{2} \\ \sum_{m=0}^{M-1} m^2 &= \frac{M(M-1)(2M-1)}{6}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \frac{1}{Q}\sum_{m=-(M-1)}^{(M-1)}\left(1-\frac{|m|}{M}\right)^2 \\
&= \frac{1}{Q}\left[2\sum_{m=0}^{M-1}\left(1-\frac{m}{M}\right)^2-1\right] \\
&= \frac{1}{Q}\left[2\sum_{m=0}^{M-1}1-\frac{4}{M}\sum_{m=0}^{M-1}m+\frac{2}{M^2}\sum_{m=0}^{M-1}m^2-1\right] \\
&= \frac{1}{Q}\left[2M-\frac{4(M-1)M}{2M}+\frac{2(M-1)M(2M-1)}{6M^2}-1\right] \\
&\simeq \frac{1}{Q}\left[2M-2M+\frac{2M}{3}\right] \\
&\simeq \frac{2M}{3Q}
\end{aligned}
$$

Hanning/Hamming: We can approximate the mainlobe bandwidth by analyzing the Fourier transform derived in Part (a). Looking at one of the terms from this expression,

$$\frac{\beta}{2}\left[\frac{\sin[(\omega-\frac{\pi}{M-1})(M-\frac{1}{2})]}{\sin[(\omega-\frac{\pi}{M-1})/2]}\right]$$

we note that the numerator is zero whenever the its argument equals πn, or

$$
\begin{aligned}
\left(\omega-\frac{\pi}{M-1}\right)\left(M-\frac{1}{2}\right) &= \pi n \\
\omega &= \frac{n\pi}{M-(1/2)}+\frac{\pi}{M-1} \\
&\simeq \frac{n\pi}{M}+\frac{\pi}{M} \\
&\simeq \frac{\pi(n+1)}{M}
\end{aligned}
$$

So the mainlobe bandwidth for this term is

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\text{Mainlobe bandwidth} &\simeq \frac{\pi}{M} \\
\text{Mainlobe bandwidth} &\simeq \frac{2\pi}{M}
\end{aligned}
$$

Note that the peak value for this term occurs at a frequency $\omega \simeq \pi/M$.

A similar analysis can be applied to the other terms in Fourier transform derived in Part (a). The mainlobe bandwidth for the term

$$\frac{\beta}{2}\left[\frac{\sin[(\omega+\frac{\pi}{M-1})(M-\frac{1}{2})]}{\sin[(\omega+\frac{\pi}{M-1})/2]}\right]$$

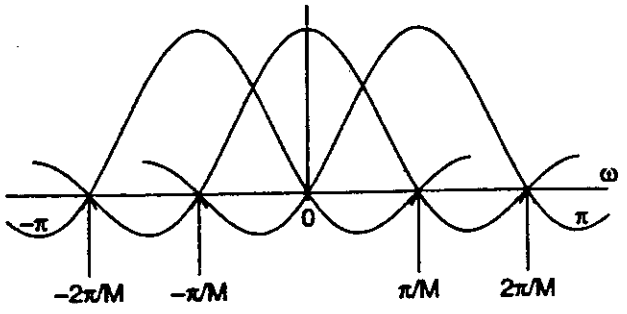
is also $2\pi/M$. Note that the peak value for this term occurs at a frequency $\omega \simeq -\pi/M$.

Finally, the mainlobe bandwidth for the term

$$\alpha\frac{\sin[\omega\,(M-\frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$$

is also $2\pi/M$. Note that the peak value for this term occurs at a frequency $\omega = 0$.

A sample plot of these three terms, for $\beta = 2\alpha$ and large M is shown below.



Thus, for large M, the mainlobe bandwidth is bounded by

$$\frac{2\pi}{M} < \text{Mainlobe bandwidth} < \frac{4\pi}{M}$$

Therefore, a reasonable approximation for the mainlobe bandwidth is

$$\text{Mainlobe bandwidth} \simeq \frac{3\pi}{M}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{Q} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \left(\alpha + \beta \cos\left(\frac{\pi m}{M-1}\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{Q}\left[\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \cos\left(\frac{\pi m}{M-1}\right) + \beta^2 \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \cos^2\left(\frac{\pi m}{M-1}\right)\right] \end{aligned}$$

Using the relation

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

we get

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{Q}\Bigg[&\sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \alpha^2 + 2\alpha\beta \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \cos\left(\frac{\pi m}{M-1}\right) \\ &+ \frac{\beta^2}{2} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} (1) + \frac{\beta^2}{2} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi m}{M-1}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

Noting that

$$\begin{aligned} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \cos\left(\frac{\pi m}{M-1}\right) &= -1 \\ \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \cos\left(\frac{2\pi m}{M-1}\right) &= 1 \end{aligned}$$

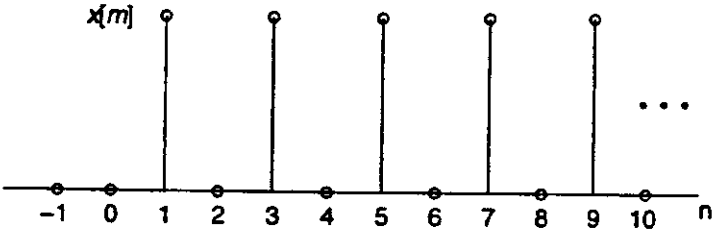
we conclude

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \frac{1}{Q}\left[(2M-1)\alpha^2 - 2\alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}(2M-1) + \frac{\beta^2}{2}\right] \\ &\simeq \frac{2M}{Q}\left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) \end{aligned}$$

10.30. (a) Using the definition of the time-dependent Fourier transform we find

$$\begin{aligned} X[0,k] &= \sum_{m=0}^{13} x[m]e^{-j(2\pi/7)km} \\ &= \sum_{m=0}^{6} x[m]e^{-j(2\pi/7)km} + \sum_{l=7}^{13} x[l]e^{-j(2\pi/7)kl} \\ &= \sum_{m=0}^{6} x[m]e^{-j(2\pi/7)km} + \sum_{m=0}^{6} x[m+7]e^{-j(2\pi/7)km}e^{-j2\pi k} \\ &= \sum_{m=0}^{6} (x[m] + x[m+7])e^{-j(2\pi/7)km} \end{aligned}$$

By plotting $x[m]$



we see that $x[m] + x[m+7] = 1$ for $0 \le m \le 6$. Thus,

$$\begin{aligned} X[0,k] &= \sum_{m=0}^{6} (1)e^{-j(2\pi/7)km} \\ &= \mathcal{DFT}\{1\} \\ &= 7\delta[k] \end{aligned}$$

(b) If we follow the same procedure we used in part (a) we find

$$\begin{aligned} X[n,k] &= \sum_{m=0}^{13} x[n+m]e^{-j(2\pi/7)km} \\ &= \sum_{m=0}^{6} x[n+m]e^{-j(2\pi/7)km} + \sum_{l=7}^{13} x[n+l]e^{-j(2\pi/7)kl} \\ &= \sum_{m=0}^{6} (x[n+m] + x[n+m+7])e^{-j(2\pi/7)km} \end{aligned}$$

With $n \ge 0$ we have $x[n+m] + x[n+m+7] = 1$ for $0 \le m \le 6$, and so

$$\begin{aligned} X[n,k] &= \mathcal{DFT}\{1\} \\ &= 7\delta[k] \end{aligned}$$

Therefore, for $0 \leq n \leq \infty$ we have

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6} X[n,k] &= \sum_{k=0}^{6} 7\delta[k] \\ &= 7\end{aligned}$$

10.31. (a) Sampling the continuous-time input signal

$$x(t) = e^{j(3\pi/8)10^4 t}$$

with a sampling period $T = 10^{-4}$ yields a discrete-time signal

$$x[n] = x(nT) = e^{j3\pi n/8}$$

In order for $X_w[k]$ to be nonzero at exactly one value of k, it is necessary for the frequency of the complex exponential of $x[n]$ to correspond to that of a DFT coefficent, $w_k = 2\pi k/N$. Thus,

$$\begin{aligned}\frac{3\pi}{8} &= \frac{2\pi k}{N} \\ N &= \frac{16k}{3}\end{aligned}$$

The smallest value of k for which N is an integer is $k = 3$. Thus, the smallest value of N such that $X_w[k]$ is nonzero at exactly one value of k is

$$N = 16$$

(b) The rectangular windows, $w_1[n]$ and $w_2[n]$, differ only in their lengths. $w_1[n]$ has length 32, and $w_2[n]$ has length 8. Recall that compared to that of a longer window, the Fourier transform of a shorter window has a larger mainlobe width and higher sidelobes. Since the DFT is a sampled version of the Fourier transform, we might try to look for these features in the two plots. We notice that the second plot, Figure P10.31-3, appears to have a larger mainlobe width and higher sidelobes. As a result, we conclude that Figure P10.31-2 corresponds to $w_1[n]$, and P10.31-3 corresponds to $w_2[n]$.

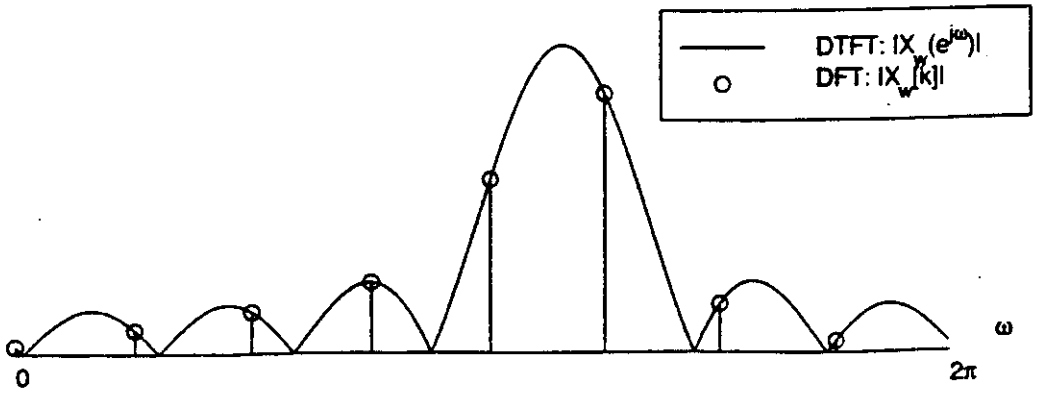
(c) A simple technique to estimate the value of ω_0 is to find the value of k at which the peak of $|X_w[k]|$ occurs. Then, the estimate, is

$$\hat{\omega}_0 = \frac{2\pi k}{N}$$

The corresponding value of $\hat{\Omega}_0$ is

$$\hat{\Omega}_0 = \frac{2\pi k}{NT}$$

This estimate is not exact, since the peak of the Fourier transform magnitude $|X_w(e^{j\omega})|$ might occur between two values of the DFT magnitude $|X_w[k]|$, as shown below.



The maximum possible error, $\Omega_{\text{max error}}$, of the frequency estimate is one half of the frequency resolution of the DFT.

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{max error}} &= \frac{1}{2}\frac{2\pi}{NT} \\ &= \frac{\pi}{NT}\end{aligned}$$

For the system parameters of $N = 32$, and $T = 10^{-4}$, this is

$$\Omega_{\text{max error}} = 982 \text{ rad/s}$$

(d) To develop a procedure to get an exact estimate of Ω_0, it helps to derive $X_w[k]$. First, let's find the Fourier transform of $x_w[n] = x[n]w[n]$, where $w[n]$ is an N-point rectangular window.

$$\begin{aligned}X_w(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-\omega_0)n}\end{aligned}$$

Let $\omega' = \omega - \omega_0$. Then,

$$\begin{aligned}X_w(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega' n} \\ &= \frac{1 - e^{-j\omega' N}}{1 - e^{-j\omega'}} \\ &= \frac{(e^{j\omega' N/2} - e^{-j\omega' N/2})e^{-j\omega' N/2}}{(e^{-j\omega'/2} - e^{-j\omega'/2})e^{-j\omega'/2}} \\ &= \frac{\sin(\omega' N/2)}{\sin(\omega'/2)} e^{-j\omega'(N-1)/2} \\ &= \frac{\sin[(\omega-\omega_0)N/2]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]} e^{-j(\omega-\omega_0)(N-1)/2}\end{aligned}$$

Note that $X_w(e^{j\omega})$ has generalized linear phase. Having established this equation for $X_w(e^{j\omega})$, we now find $X_w[k]$. Recall that $X_w[k]$ is simply the Fourier transform $X_w(e^{j\omega})$ evaluated at the frequencies $\omega = 2\pi k/N$, for $k = 0, \ldots, N-1$. Thus,

$$X_w[k] = \frac{\sin[(2\pi k/N - \omega_0)N/2]}{\sin[(2\pi k/N - \omega_0)/2]} e^{-j(2\pi k/N - \omega_0)(N-1)/2}$$

Note that the phase of $X_w[k]$, using the above equation, is

$$\angle X_w[k] = -\frac{(2\pi k/N - \omega_0)(N-1)}{2} + m\pi$$

where the $m\pi$ term comes from the fact that the term

$$\frac{\sin[(2\pi k/N - \omega_0)N/2]}{\sin[(2\pi k/N - \omega_0)/2]}$$

can change sign (i.e. become negative or positive), and thereby offset the phase by π radians. In addition, this term accounts for wrapping the phase, so that the phase stays in the range $[-\pi, \pi]$.

Re-expressing the equation for $\angle X_w[k]$, we find

$$\omega_0 = \frac{2(\angle X_w[k] - m\pi)}{N-1} + \frac{2\pi k}{N}$$

Let $X_{1w}[k]$ be the DFT of the 32-point sequence $x_{1w}[n] = x[n]w_1[n]$, and let $X_{2w}[k]$ be the DFT of the 8-point sequence $x_{2w}[n] = x[n]w_2[n]$. Note that the kth DFT coefficient of $X_{2w}[k]$ corresponds to $X_{1w}[4k]$. Thus, we can relate the 8 DFT coeffients of $X_{2w}[k]$ to 8 of the DFT coefficients in $X_{1w}[k]$. Using the $k = 0$th DFT coefficient for simplicity, we find

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{2(\angle X_{w1}[0] - m\pi)}{32-1} = \frac{2(\angle X_{w2}[0] - p\pi)}{8-1} \\ &= \frac{\angle X_{w1}[0] - m\pi}{15.5} = \frac{\angle X_{w2}[0] - p\pi}{3.5}\end{aligned}$$

A solution that satisfies these equations, with m and p integers, will yield a precise estimate of ω_0. We can accelerate solving these equations by determining which values of m and p to check. This is done by looking at the peak of $|X_w[k]|$ in a procedure similar to Part (c). Suppose that the indices for two largest values of $|X_w[k]|$ are k_{min} and k_{max}. Then, we know that the peak of $|X(e^{j\omega})|$ will occur in the range

$$\frac{2\pi k_{min}}{N} \leq \omega_0 \leq \frac{2\pi k_{max}}{N}$$

By re-expressing the equation for $\angle X_w[k]$, we see that

$$\begin{aligned}m_{min} &= \frac{1}{\pi}\left[2\angle X_{w1}[k_{min}] + \left(\frac{2\pi k_{min}}{N} - \hat{\omega}_0\right)(N-1)\right] \\ m_{max} &= \frac{1}{\pi}\left[2\angle X_{w1}[k_{max}] + \left(\frac{2\pi k_{max}}{N} - \hat{\omega}_0\right)(N-1)\right]\end{aligned}$$

In these equations, $\hat{\omega}_0$ is the estimate found in Part (c). So we would look for values of m in the range $[\lfloor m_{min} \rfloor, \lceil m_{max} \rceil]$. Similar expressions hold for p.

Once ω_0 is known, we can find Ω_0 using the relation $\Omega_0 = \omega_0/T$.

10.32. For each part, we use the definition of the time-dependent Fourier transform,

$$X[n,\lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}.$$

(a) *Linearity*: using $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$,

$$\begin{aligned}X[n,\lambda] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(ax_1[n+m] + bx_2[n+m]\right)w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= a\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} + b\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_2[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= aX_1[n,\lambda] + bX_2[n,\lambda]\end{aligned}$$

(b) *Shifting*: using $y[n] = x[n-n_0]$,

$$Y[n,\lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n+m]w[m]e^{-j\lambda m}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-n_0+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= X[n-n_0,\lambda) \end{aligned}$$

(c) *Modulation:* using $y[n] = e^{j\omega_0 n}x[n]$,

$$\begin{aligned} y[n+m] &= e^{j\omega_0(n+m)}x[n+m] \\ Y[n,\lambda) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0(n+m)}x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n}x[n+m]w[m]e^{-j(\lambda-\omega_0)m} \\ &= e^{j\omega_0 n}X[n,\lambda-\omega_0) \end{aligned}$$

(d) *Conjugate Symmetry:* for $x[n]$ and $w[n]$ real,

$$\begin{aligned} X[n,\lambda) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{j\lambda m}\right]^* \\ &= [X[n,-\lambda)]^* \\ &= X^*[n,-\lambda) \end{aligned}$$

10.33. (a) We are given that $\phi_c(\tau) = \mathcal{E}\{x_c(t)x_c(t+\tau)\}$. Since $x[n] = x_c(nT)$,

$$\begin{aligned} \phi[m] &= \mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\} \\ &= \mathcal{E}\{x_c(nT)x_c(nT+mT)\} \\ &= \phi_c(mT) \end{aligned}$$

(b) $P(\omega)$ and $P_c(\Omega)$ are the transforms of $\phi[m]$ and $\phi_c(\tau)$ respectively. Since $\phi[m]$ is a sampled version of $\phi_c(\tau)$, $P(\omega)$ and $P_c(\Omega)$ are related by

$$P(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} P_c\left(\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)$$

(c) The condition is that no aliasing occurs when sampling. Thus, we require that $P_c(\Omega) = 0$ for $|\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$ so that

$$P(\omega) = \frac{1}{T}P_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi$$

10.34. In this problem, we are given

- $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta) + e[n]$
- θ is a uniform random variable on 0 to 2π
- $e[n]$ is an independent, zero mean random variable

(a) Computing the autocorrelation function,

$$\begin{aligned}
\phi_{xx}[m] &= \mathcal{E}\{x[n]x[n+m]\} \\
&= \mathcal{E}\{(A\cos(\omega_0 n+\theta)+e[n])\,(A\cos(\omega_0(n+m)+\theta)+e[n+m])\} \\
&= \mathcal{E}\{A^2\cos(\omega_0 n+\theta)\cos(\omega_0(n+m)+\theta)\} \\
&\quad + \mathcal{E}\{Ae[n]\cos(\omega_0(n+m)+\theta)\} + \mathcal{E}\{Ae[n+m]\cos(\omega_0 n+\theta)\} \\
&\quad + \mathcal{E}\{e[n]e[n+m]\} \\
&= A^2\mathcal{E}\{\cos(\omega_0 n+\theta)\cos(\omega_0(n+m)+\theta)\} \\
&\quad + A\mathcal{E}\{e[n]\}\,\mathcal{E}\{\cos(\omega_0(n+m)+\theta)\} + A\mathcal{E}\{e[n+m]\}\,\mathcal{E}\{\cos(\omega_0 n+\theta)\} \\
&\quad + \mathcal{E}\{e[n]e[n+m]\}
\end{aligned}$$

First, note that

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

Therefore, the first term can be re-expressed as

$$A^2\mathcal{E}\left\{\frac{1}{2}\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+2\theta)+\frac{1}{2}\cos(\omega_0 m)\right\}$$

Next, note that

$$\mathcal{E}\{e[n]\} = 0$$

As a result, the two middle terms drop out. Finally, note that since $e[n]$ is a sequence of zero-mean variables that are uncorrelated with each other,

$$\mathcal{E}\{e[n]e[n+m]\} = \sigma_e^2\delta[m], \qquad \text{where } \sigma_e^2 = \mathcal{E}\{e^2[n]\}$$

Putting this together, we get

$$\phi_{xx}[m] = A^2\mathcal{E}\left\{\frac{1}{2}\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+2\theta)+\frac{1}{2}\cos(\omega_0 m)\right\} + \sigma_e^2\delta[m]$$

Since $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+2\theta)d\theta = 0$, we have

$$\phi_{xx}[m] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 m) + \sigma_e^2\delta[m]$$

(b) Since the Fourier transform of $\cos(\omega_0 m)$ is $\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$ for $|\omega|\le\pi$,

$$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = P_{xx}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] + \sigma_e^2$$

10.35. (a) Plugging in the equation

$$I[k] = I(\omega_k) = \frac{1}{L}|V[k]|^2$$

into the relation

$$\text{var}[I(\omega)] \simeq P_{xx}^2(\omega)$$

we find that

$$\begin{aligned}
\text{var}\left[\frac{1}{L}|V[k]|^2\right] &\simeq P_{xx}^2(\omega) \\
\text{var}\left[|V[k]|^2\right] &\simeq L^2P_{xx}^2(\omega)
\end{aligned}$$

This equation can be used to find the approximate variance of $|X[k]|^2$. We substitute the signal $X[k]$ for $V[k]$, the DFT length N for L, and use the power spectrum

$$P_{xx}(w) = \sigma_x^2$$

This gives

$$\text{var}\left[|X[k]|^2\right] = N^2\sigma_x^4$$

(b) The cross-correlation is found below.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left\{X[k]X^*[r]\right\} &= \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\mathcal{E}\left\{x[n_1]x[n_2]\right\}W_N^{kn_1}W_N^{-rn_2} \\
&= \sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\sigma_x^2\delta[n_1-n_2]W_N^{kn_1}W_N^{-rn_2} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\sigma_x^2 W_N^{(k-r)n} \\
&= \sigma_x^2\left[\frac{1-W_N^{N(k-r)}}{1-W_N^{(k-r)}}\right] \\
&= N\sigma_x^2\delta[k-r]
\end{aligned}$$

Note that the cross-correlation is zero everywhere except when $k = r$. This is what one would expect for white noise, since samples for which $k \neq r$ are completely uncorrelated.

10.36. (a) The length of the data record is

$$\begin{aligned}
Q &= 10 \text{ seconds} \cdot \frac{20,000 \text{ samples}}{\text{second}} \\
Q &= 200,000 \text{ samples}
\end{aligned}$$

(b) To achieve a 10 Hz or less spacing between samples of the power spectrum, we require

$$\begin{aligned}
\frac{1}{NT} &\leq 10 \text{ Hz} \\
N &\geq \frac{1}{10T} \\
&\geq \frac{20,000}{10} \\
&\geq 2,000 \text{ samples}
\end{aligned}$$

Since N must also be a power of 2, we choose $N = 2048$.

(c)

$$\begin{aligned}
K &= \frac{Q}{L} \\
&= \frac{200,000}{2048} \\
&= 97.66 \text{ segments}
\end{aligned}$$

If we zero-pad the last segment so that it contains 2048 samples, we will have $K = 98$ segments.

(d) The key to reducing the variance is to use more segments. Two methods are discussed below. Note that in both methods, we want the segments to be length $L = 2048$ so that we maintain the frequency spacing.

(i) Decreasing the length of the segments to $\frac{1}{10}$th their length, and then zero-padding them to $L = 2048$ samples will increase K by a factor of 10. Accordingly, the variance will decrease by a factor of 10. However, the frequency resolution will be reduced.

(ii) If we increase the data record to 2,000,000 samples, we can keep the window length the same and increase K by a factor of 10.

10.37. (a) Taking the expected value of

$$\overline{\phi}[m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{I}(\omega)e^{j\omega m}d\omega$$

gives

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{\overline{\phi}[m]\right\} &= \mathcal{E}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{I}(\omega)e^{j\omega m}d\omega\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{E}\left\{\overline{I}(\omega)\right\}e^{j\omega m}d\omega\end{aligned}$$

Using the relation

$$\mathcal{E}\left\{\overline{I}(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi} P_{zz}(\theta)C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

we find

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{\overline{\phi}[m]\right\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})d\theta\right]e^{j\omega m}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C_{ww}(e^{j(\omega-\theta)})e^{j\omega m}d\omega\right]d\theta\end{aligned}$$

Substituting $\omega' = \omega - \theta$ in the inner integral yields

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{\overline{\phi}[m]\right\} &= \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta}C_{ww}(e^{j\omega'})e^{j(\omega'+\theta)m}d\omega'\right]d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)e^{j\theta m}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta}C_{ww}(e^{j\omega'})e^{j\omega' m}d\omega'\right]d\theta\end{aligned}$$

Note we can change the limits of integration of the inner integral to be $[-\pi, \pi]$ because we are integrating over the whole period. Doing this gives

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left\{\overline{\phi}[m]\right\} &= \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)e^{j\theta m}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C_{ww}(e^{j\omega'})e^{j\omega' m}d\omega'\right]d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi LU}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)e^{j\theta m}\left\{c_{ww}[m]\right\}d\theta \\ &= \frac{1}{LU}c_{ww}[m]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{zz}(\theta)e^{j\theta m}d\theta\right] \\ &= \frac{1}{LU}c_{ww}[m]\phi_{zz}[m]\end{aligned}$$

(b)

$$\overline{\phi}_p[m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\overline{I}[k]e^{j2\pi km/N}$$

By applying the sampling theorem to Fourier transforms, we see that

$$\begin{aligned}\overline{\phi}_p[m] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \overline{\phi}_{xx}[m+rN] \\ \mathcal{E}\{\overline{\phi}_p[m]\} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathcal{E}\{\overline{\phi}_{xx}[m+rN]\} \\ &= \frac{1}{LU} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{ww}[m+rN]\phi_{xx}[m+rN]\end{aligned}$$

which is a time aliased version of $\mathcal{E}\{\overline{\phi}_{xx}[m]\}$.

(c) N should be chosen so that no time aliasing occurs. Since $\overline{\phi}_{xx}[m]$ is $2L-1$ points long, we should choose $N \geq 2L$.

10.38. (a) For $0 \leq m \leq M$,

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{xx}[m] &= \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{Q-m-1} x[n]x[n+m] \\ &= \frac{1}{Q}\left[\sum_{n=0}^{M-1} x[n]x[n+m] + \sum_{n=M}^{2M-1} x[n]x[n+m] + \ldots + \sum_{n=(K-1)M}^{KM-1} x[n]x[n+m]\right] \\ &= \frac{1}{Q}\left[\sum_{n=0}^{M-1} x[n]x[n+m]\right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{M-1} x[n+M]x[n+M+m] + \ldots + \sum_{n=0}^{M-1} x[n+(K-1)M]x[n+(K-1)M+m]\right] \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{M-1} x[n+iM]x[n+iM+m] \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{K-1} c_i[m]\end{aligned}$$

where

$$c_i[m] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n+iM]x[n+iM+m] \qquad \text{for } 0 \leq m \leq M-1$$

(b) We can rewrite the expression for $c_i[m]$ from part (a) as

$$\begin{aligned}c_i[m] &= \sum_{n=0}^{M-1} x[n+iM]x[n+iM+m] \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} x[n+iM]x[n+iM+m] + \sum_{n=M}^{N-1} 0 \cdot x[n+iM+m] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_i[n]y_i[n+m]\end{aligned}$$

where

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n+iM], & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & M \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

and

$$y_i[n] = x[n + iM] \qquad \text{for } 0 \le n \le N-1$$

Thus, the correlations $c_i[m]$ can be obtained by computing N-point *linear* correlations. Next, we show that for $N \ge 2M-1$, circular correlation is equivalent to linear correlation.

Note that the circular correlation of $x_i[n]$ with $y_i[n]$,

$$\tilde{c}_{yx}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x_i[n] y_i[((n+m))_N]$$

can be expressed as

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{yx}[m] &= \tilde{c}_{xy}[-m] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_i[((n-m))_N] y_i[n] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_i'[((m-n))_N] y_i[n] \end{aligned}$$

where $x'[n] = x[-n]$. Note that this is a circular *convolution* of $x_i[-n]$ with $y_i[n]$. Thus, we have expressed the circular correlation of $x_i[n]$ with $y_i[n]$ as a circular convolution of $x_i[-n]$ with $y_i[n]$. Now recall from chapter 8 that the circular convolution of two M point signals is equivalent to their linear convolution when $N \ge 2M-1$. Since we can express the circular correlation in terms of a circular convolution, this result applies to circular correlation as well. Therefore, we see that if $N \ge 2M-1$,

$$c_i[m] = \tilde{c}_i[m] \qquad \text{for } 0 \le m \le M-1$$

Thus, the minimum value of N is $2M-1$.

(c) A procedure for computing $\hat{\phi}_{xx}[m]$ is described below.

step 1: Compute $X_i[k]$ and $Y_i[k]$, which are the $N \ge 2M-1$ point DFTs of $x_i[n]$ and $y_i[n]$.

step 2: Multiply $X_i[k]$ and $Y_i^*[k]$ point by point, yielding $C_i[k] = \tilde{C}_i[k] = X_i[k]Y_i^*[k]$.

step 3: Repeat the above two steps for all data (K times), then compute

$$\hat{\Phi}_{xx}[k] = \frac{1}{Q} \sum_{i=0}^{K-1} C_i[k] \qquad \text{for } 0 \le k \le N-1$$

step 4: Take the N point inverse DFT of $\hat{\Phi}_{xx}[k]$ to get $\hat{\phi}_{xx}[m]$.

Assuming that a radix-2 FFT, requiring $\frac{N}{2}\log_2 N$ complex multiplications is used to compute the forward and inverse DFTS, the number of complex multiplications is

$2 \cdot \frac{N}{2}\log_2 N \cdot K = KN\log_2 N$,	for step 1
KN,	for step 2
N,	for divide by Q operation in step 3
$\frac{N}{2}\log_2 N$	for step 4

So the total number of complex multiplications is $(K+\frac{1}{2})N\log_2 N + (K+1)N$.

(d) The procedure developed in part (c) would compute the cross-correlation estimate $\hat{\phi}_{xy}$ without any major modifications. All we need to do is redefine $y_i[n]$ as

$$y_i[n] = y[n + iM], \qquad 0 \le n \le N-1$$

and $x_i[n]$ is the same as it was before, namely

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n+iM], & 0 \le n \le M-1 \\ 0, & M \le n \le N-1 \end{cases}$$

Note that for $m < 0$, $\hat{\phi}_{xy}[m] = \hat{\phi}_{yx}[-m]$.

(e) For $N = 2M$,

$$\begin{aligned} y_i[n] &= x[n+iM], \qquad \text{for } 0 \le n \le 2M-1 \\ &= x[n+iM](u[n]-u[n-M]) + x[n+iM](u[n-M]-u[n-2M]) \\ &= x[n+iM](u[n]-u[n-M]) + x[n-M+(i+1)M](u[n-M]-u[n-2M]) \\ &= x_i[n] + x_{i+1}[n-M] \end{aligned}$$

Taking the DFT of this expression yields

$$Y_i[k] = X_i[k] + (-1)^k X_{i+1}[k]$$

A procedure for computing $\hat{\phi}_{xx}$ for $0 \le m \le M-1$ is described below.

step 1: Compute the N point DFT $X_i[k]$ for $i = 0, 1, \ldots, K$.

step 2: Compute $Y_i[k] = X_i[k] + (-1)^k X_{i+1}[k]$ for $i = 0, 1, \ldots, K-1$.

step 3: Let $A_0[k] = 0$ and compute

$$A_i[k] = A_{i-1}[k] + X_i[k]Y_i^*[k], \quad i = 1, \ldots, K-1$$

step 4: Define $V[k] = A_{K-1}[k]$. Compute $v[m]$, the N point inverse DFT of $V[k]$.

step 5: Compute

$$\hat{\phi}_{xx}[m] = \frac{1}{Q} v[m]$$

Assuming that a radix-2 FFT, requiring $\frac{N}{2}\log_2 N$ complex multiplications is used to compute the forward and inverse DFTs, the number of complex multiplications is

$(K+1)\frac{N}{2}\log_2 N$,	for step 1
0,	for step 2
$(K-1)N$,	for step 3
$\frac{N}{2}\log_2 N$,	for step 4
N,	for the divide by Q in step 5

So the total number of complex multiplications is $\frac{K+2}{2}N\log_2 N + KN$. Note that for large N and K, this procedure requires roughly half the number of complex multiplications as the procedure described in part (c).

10.39. (a) Using the relations,

$$\begin{aligned} c[n,m] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,\lambda)|^2 e^{j\lambda m} d\lambda \\ X[n,\lambda) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} d\lambda \end{aligned}$$

we find

$$\begin{aligned} c[n,m] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,\lambda)|^2 e^{j\lambda m} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X[n,\lambda)X[n,-\lambda) e^{j\lambda m} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n+l]w[l]e^{-j\lambda l}\right)\left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]e^{j\lambda r}\right) e^{j\lambda m} d\lambda \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+l]w[l]x[n+r]w[r]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\lambda l}e^{j\lambda r}e^{j\lambda m} d\lambda\right) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+l]w[l]x[n+r]w[r]\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\lambda(-l+r)}e^{j\lambda m} d\lambda\right) \end{aligned}$$

Using the Fourier transform relation,

$$\delta[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}$$

we find

$$c[n,m] = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+l]w[l]x[n+r]w[r]\delta[m-l+r]$$

The $\delta[m-l+r]$ term is zero everwhere except when $m-l+r=0$. Therefore, we can replace the two sums of l and r with one sum over r, by substituting $l=m+r$.

$$\begin{aligned} c[n,m] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+m+r]w[m+r]x[n+r]w[r] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]x[n+m+r]w[m+r] \end{aligned}$$

(b) First, note that

$$\begin{aligned} |X[n,\lambda)|^2 &= X[n,-\lambda)X[n,\lambda) \\ &= |X[n,-\lambda)|^2 \end{aligned}$$

Starting with the definition of $c[n,m]$,

$$c[n,m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,\lambda)|^2 e^{j\lambda m} d\lambda$$

$$c[n,-m] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,\lambda)|^2 e^{-j\lambda m} d\lambda$$

we substitute $\lambda' = -\lambda$ to get

$$\begin{aligned} c[n,-m] &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} |X[n,-\lambda')|^2 e^{j\lambda' m} d\lambda' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,-\lambda')|^2 e^{j\lambda' m} d\lambda' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X[n,\lambda')|^2 e^{j\lambda' m} d\lambda' \\ &= c[n,m] \end{aligned}$$

Thus, the time-dependent autocorrelation function is an even function of m for n fixed. Next, we use this fact to obtain the equivalent expression for $c[n,m]$.

$$\begin{aligned} c[n,m] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]x[m+n+r]w[m+r] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+r]w[r]x[-m+n+r]w[-m+r] \end{aligned}$$

Substituting $r' = n + r$ gives

$$\begin{aligned} &= \sum_{r'=-\infty}^{\infty} x[r']w[r'-n]x[r'-m]w[(r'-m)-n] \\ &= \sum_{r'=-\infty}^{\infty} x[r']x[r'-m]w[r'-n]w[-(m+n-r')] \\ &= \sum_{r'=-\infty}^{\infty} x[r']x[r'-m]h_m[n-r'] \end{aligned}$$

where

$$h_m[r] = w[-r]w[-(m+r)]$$

(c) To compute $c[n,m]$ by causal operations, we see that

$$h_m[r] = w[-r]w[-(m+r)]$$

requires that $w[r]$ must be zero for

$$\begin{aligned} -r &< 0 \\ r &> 0 \end{aligned}$$

and $w[r]$ must be zero for

$$\begin{aligned} -(m+r) &< 0 \\ m+r &> 0 \\ r &> -m \end{aligned}$$

Thus, $w[r]$ must be zero for $r > \min(0,-m)$. If m is positive, then $w[r]$ must be zero for $r > 0$. This is equivalent to the requirement that $w[-r]$ must be zero for $r < 0$.

(d) Plugging in

$$w[-r] = \begin{cases} a^r, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

into $h_m[r] = w[-r]w[-(m+r)]$, we find

$$h_m[r] = \begin{cases} a^{2r+m}, & r \geq 0, r \geq -m \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Taking the z-transform of this expression gives

$$\begin{aligned} H_m(z) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_m[r]z^{-r} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} a^{2r+m}z^{-r} \\ &= a^m \sum_{r=0}^{\infty} \left(a^2 z^{-1}\right)^r \end{aligned}$$

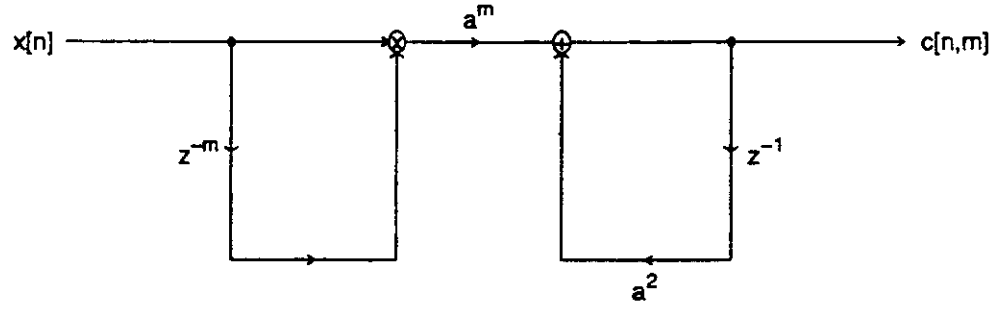
Again we have assumed that m is positive. If $|z| > a^2$, then

$$\begin{aligned} H_m(z) &= \frac{a^m}{1-a^2z^{-1}} \\ h_m[r] &= a^m\delta[r] + a^2h_m[r-1] \end{aligned}$$

Using this in the equation for $c[n,m]$ gives

$$\begin{aligned} c[n,m] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]x[r-m]h_m[n-r] \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]x[r-m]\left(a^m\delta[n-r] + a^2h_m[n-r-1]\right) \\ &= a^m x[n]x[n-m] + a^2\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]x[r-m]h_m[n-r-1] \\ &= a^m x[n]x[n-m] + a^2c[n-1,m] \end{aligned}$$

A block diagram of this system appears below.



(e) Next, consider the system

$$w[-r] = \begin{cases} ra^r, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_m[r] &= \{ra^ru[r]\}\{(r+m)a^{r+m}u[r+m]\} \\ &= a^mr^2a^{2r} + a^mmra^{2r} \qquad r \geq 0; r \geq -m \end{aligned}$$

To get the z-transform $H_m(z)$, recall the z-transform property: $rx[r] \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$. Using this property, we find

$$\begin{aligned} ra^{2r}u[r] &\iff \frac{a^2z^{-1}}{(1-a^2z^{-1})^2} \\ r^2a^{2r}u[r] &\iff \frac{a^2z^{-1}(1+a^2z^{-1})}{(1-a^2z^{-1})^3} \end{aligned}$$

Again we have assumed that m is positive. Thus,

$$\begin{aligned} H_m(z) &= a^m\left[\frac{a^2z^{-1}(1+a^2z^{-1})}{(1-a^2z^{-1})^3}\right] + ma^m\left[\frac{a^2z^{-1}}{(1-a^2z^{-1})^2}\right] \\ &= \frac{a^{m+2}z^{-1}(1+a^2z^{-1}) + ma^m(a^2z^{-1})(1-a^2z^{-1})}{(1-a^2z^{-1})^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{m+2}z^{-1}(1+a^2z^{-1}+m-ma^2z^{-1})}{(1-a^2z^{-1})^3}$$
$$= \frac{a^{m+2}(1+m)z^{-1}+a^{m+4}(1-m)z^{-2}}{1-3a^2z^{-1}+3a^4z^{-2}-a^6z^{-3}}$$

Cross-multiplying and taking the inverse z-transform gives

$$h_m[r]-3a^2h_m[r-1]+3a^4h_m[r-2]-a^6h_m[r-3]=a^{m+2}(1+m)\delta[r-1]+a^{m+4}(1-m)\delta[r-2]$$
$$h_m[r]=3a^2h_m[r-1]-3a^4h_m[r-2]+a^6h_m[r-3]+a^{m+2}(1+m)\delta[r-1]+a^{m+4}(1-m)\delta[r-2]$$

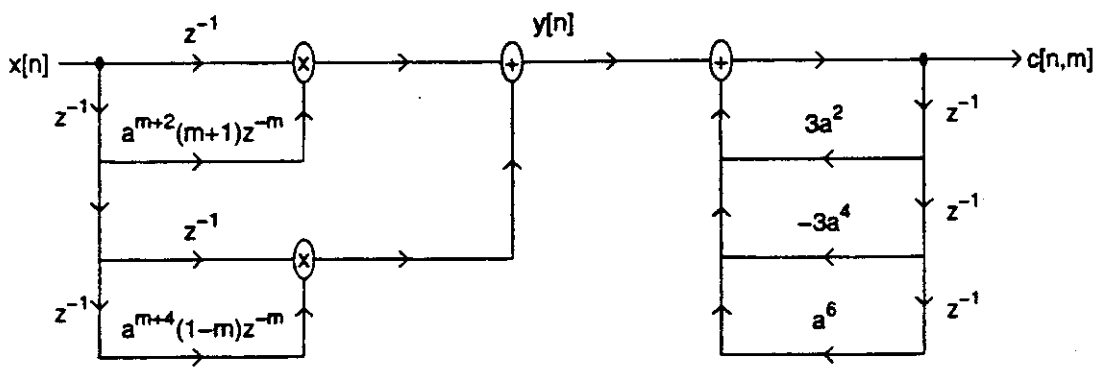
Using this relation for $h_m[r]$ in

$$c[n,m]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]x[r-m]h_m[n-r]$$

we get

$$\begin{aligned}c[n,m] &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]x[r-m]\left(3a^2h_m[n-r-1]-3a^4h_m[n-r-2]+a^6h_m[n-r-3]\right)\\ &\quad+\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[r]x[r-m]\left(a^{m+2}(1+m)\delta[n-r-1]+a^{m+4}(1-m)\delta[n-r-2]\right)\\ &= 3a^2c[n-1,m]-3a^4c[n-2,m]+a^6c[n-3,m]\\ &\quad+a^{m+2}(1+m)x[n-1]x[n-1-m]+a^{m+4}(1-m)x[n-2]x[n-2-m]\end{aligned}$$

A block diagram of this system appears below.



10.40. (a) Looking at the figure, we see that

$$\begin{aligned}X[n,\lambda] &= \left\{\left(x[n]e^{-j\lambda n}\right)*h_0[n]\right\}e^{j\lambda n}\\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-m]e^{-j\lambda(n-m)}h_0[m]\right]e^{j\lambda n}\\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-m]h_0[m]e^{j\lambda m}\end{aligned}$$

Let $m'=-m$. Then,

$$X[n,\lambda] = \sum_{m'=\infty}^{-\infty}x[n+m']h_0[-m']e^{-j\lambda m'}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} x[n+m']h_0[-m']e^{-j\lambda m'} \\ &= X[n,\lambda) \end{aligned}$$

if $h_0[-m] = w[m]$. Next, we show that for λ fixed, $X[n,\lambda)$ behaves as a linear, time-invariant system.

Linear: Inputting the signal $ax_1[n] + bx_2[n]$ into the system yields

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(ax_1[n+m] + bx_2[n+m]\right) h_0[-m]e^{-j\lambda m} =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} ax_1[n+m]h_0[-m]e^{-j\lambda m} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} bx_2[n+m]h_0[-m]e^{-j\lambda m} = aX_1[n,\lambda) + bX_2[n,\lambda)$$

The system is linear.

Time invariant: Shifting the input $x[n]$ by an amount l yields

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m+l]h_0[-m]e^{-j\lambda m} = X[n+l,\lambda)$$

which is the output shifted by l samples. The system is time-invariant.

Next, we find the impulse response and frequency response of the system. To find the impulse response, denoted as $h[n]$, we let $x[n] = \delta[n]$.

$$\begin{aligned} h[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n+m]w[m]e^{-j\lambda m} \\ &= w[-n]e^{j\lambda n} \\ &= h_0[n]e^{j\lambda n} \end{aligned}$$

Taking the DTFT gives the frequency response, denoted as $H(e^{j\omega})$.

$$H(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\lambda)})$$

(b) We find $S(e^{j\omega})$ to be

$$\begin{aligned} s[n] &= \left(x[n]e^{-j\lambda n}\right) * w[-n] \\ S(e^{j\omega}) &= X\left(e^{j(\omega+\lambda)}\right) W(e^{-j\omega}) \\ S(e^{j\omega}) &= X\left(e^{j(\omega+\lambda)}\right) H_0(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Note that most typical window sequences are lowpass in nature, and are centered around a frequency of $\omega = 0$. Since $H_0(e^{j\omega}) = W(e^{-j\omega})$ is the Fourier transform of a window which is lowpass in nature, the signal $S(e^{j\omega})$ is also lowpass.

The signal $s[n] = \tilde{X}[n,\lambda)$ is multiplied by a complex exponential $e^{j\lambda n}$. This modulation shifts the frequency response of $S(e^{j\omega})$ so that it is centered at $\omega = \lambda$.

$$\begin{aligned} h[n] &= s[n]e^{j\lambda n} \\ H(e^{j\omega}) &= S\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right) \end{aligned}$$

Since $S(e^{j\omega})$ is lowpass filter centered at $\omega = 0$, the overall system is a bandpass filter centered at $\omega = \lambda$.

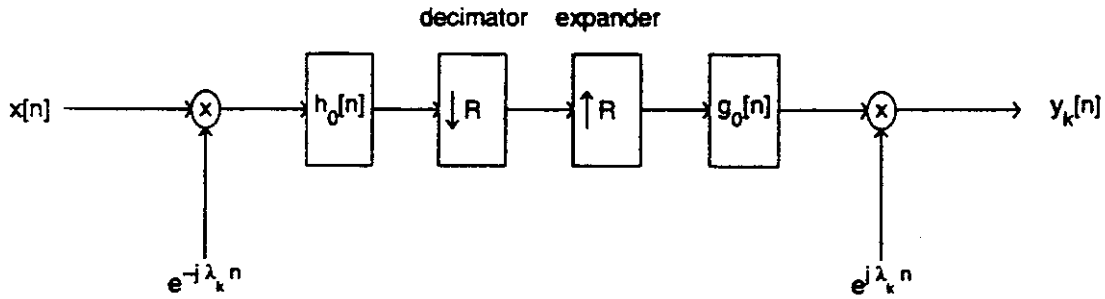
(c) First, it is shown that the individual outputs $y_k[n]$ are samples (in the λ dimension) of the time-dependent Fourier transform.

$$\begin{aligned} y_k[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j\lambda_k m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j2\pi km/N} \\ &= X[n,\lambda]|_{\lambda=2\pi k/N} \end{aligned}$$

Next, it is shown that the overall output is $y[n] = Nw[0]x[n]$.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} y_k[n] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]e^{-j2\pi km/N} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1} x[n+m]w[m]e^{-j2\pi km/N} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n+m]w[m]\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi km/N}}_{N\delta[m]} \\ &= Nw[0]x[n] \end{aligned}$$

(d) Consider a single channel,



In the frequency domain, the input to the decimator is

$$X\left(e^{j(\omega+\lambda_k)}\right)H_0(e^{j\omega})$$

so the output of the decimator is

$$\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{R-1} X\left(e^{j((\omega-2\pi l)/R+\lambda_k)}\right)H_0\left(e^{j(\omega-2\pi l)/R}\right)$$

The output of the expander is

$$\frac{1}{R}\sum_{l=0}^{R-1} X\left(e^{j(\omega+\lambda_k-2\pi l/R)}\right)H_0\left(e^{j(\omega-2\pi l/R)}\right)$$

The output $Y_k(e^{j\omega})$ is then

$$Y_k(e^{j\omega}) = \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{R-1} G_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) X\left(e^{j(\omega-2\pi l/R)}\right) H_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi l/R)}\right)$$

The overall system output is formed by summing these terms over k.

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{N-1} Y_k(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{R}\sum_{l=0}^{R-1}\sum_{k=0}^{N-1} G_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) X\left(e^{j(\omega-2\pi l/R)}\right) H_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi l/R)}\right) \end{aligned}$$

To cancel the aliasing, we rewrite the equation as follows:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})\frac{1}{R}\sum_{k=0}^{N-1} H_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) G_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) \\ &+ \underbrace{\sum_{l=1}^{R-1} X\left(e^{j(\omega-2\pi l/R)}\right) \frac{1}{R}\sum_{k=0}^{N-1} G_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) H_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi l/R)}\right)}_{\text{Aliasing Component}} \end{aligned}$$

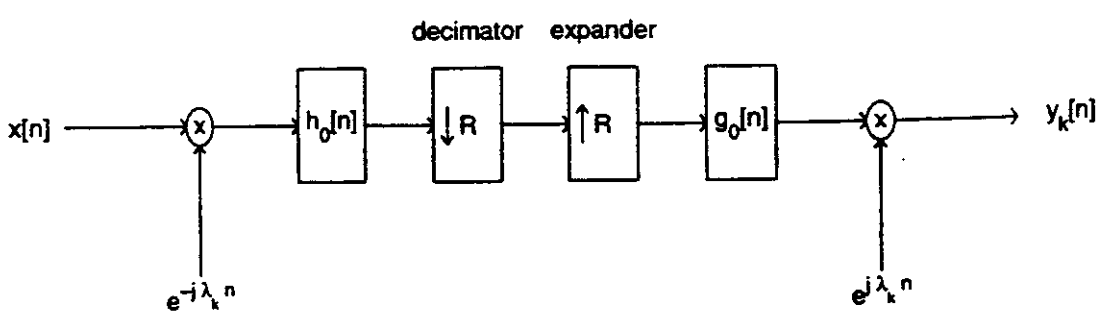
Therefore, we require the following relations to be satisfied so that $y[n] = x[n]$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} G_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) H_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k-2\pi l/R)}\right) &= 0, \qquad \forall\, \omega, \text{ and } l = 1, \ldots, R-1 \\ \sum_{k=0}^{N-1} H_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) G_0\left(e^{j(\omega-\lambda_k)}\right) &= R, \qquad \forall\, \omega \end{aligned}$$

(e) *Yes*, it is possible. $G_o(e^{j\omega}) = NH_0(e^{j\omega})$ will yield exact reconstruction.

(f) See chapter 7 in "Multirate Digital Signal Processing" by Crochiere and Rabiner, 1983.

(g) Once again, we consider a single channel,



From Part (a), we know that the output of the filter $h_0[n]$ is

$$\check{X}[n, \lambda_k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[n-m]e^{-j\lambda_k m}$$

or, using $\lambda_k = 2\pi k/N$,

$$\tilde{X}[n,k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[n-m]e^{-j2\pi km/N}$$

Therefore, the output of the decimator is

$$\tilde{X}[Rn,k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[Rn-m]e^{-j2\pi km/N}$$

Recall that in general, the output of an expander with expansion factor R is

$$x_e[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[\ell]\delta[n-\ell R]$$

This relation is given in chapter 3. Therefore, the output of the expander is

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[R\ell,k]\delta[n-\ell R]$$

This signal is then convolved with $g_0[n]$, giving

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[R\ell,k]\delta[m-\ell R]g_0[n-m] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{X}[R\ell,k]g_0[n-\ell R]$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
y_k[n] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[Rl-m]e^{-j2\pi km/N}\right)e^{j2\pi kn/N} \\
y[n] &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[Rl-m]e^{-j2\pi km/N}\right)e^{j2\pi kn/N} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h_0[Rl-m]e^{-j2\pi k(m-n)/N} \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]h_0[Rl-m]x[m]\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(n-m)/N}
\end{aligned}$$

Now recall that $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(n-m)/N} = N\delta[((n-m))_N]$, by considering it as a Fourier series expansion, or as an inverse DFT of $Ne^{-j2\pi mk/N}$. Thus,

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(n-m)/N} = N\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-rN]$$

where r is an integer. Therefore,

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]h_0[\ell R-m]x[m]N\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta[n-m-rN] \\
&= N\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]h_0[\ell R-n+rN]x[n-rN] \\
&= N\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n-\ell R]h_0[\ell R+rN-n]
\end{aligned}$$

Therefore, if we want $y[n] = x[n]$, we require

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_0[n - \ell R]h_0[\ell R + rN - n] = \delta[r]$$

for all values n.

(h) Intuitively, we see that it is possible since we are keeping the necessary number of samples. If $g_0[n] = \delta[n]$ find that

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta[n - \ell R]h_0[\ell R + rN - n] &= h_0[rN] \\ &= \delta[r]\end{aligned}$$

since $h_0[rN]$ is zero for all values of r, except $r = 0$, where it is equal to 1. Thus, the condition derived in Part (g) is satisfied.

(i) See Rabiner and Crochiere or Portnoff. (Hint: consider an overlap and add FFT algorithm.)

10.41. Note that $h[n]$ is real in this problem.

(a) First, we express $y[n]$ as the convolution of $h[n]$ and $x[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k]$$

The autocorrelation of $y[n]$ is then

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[m] &= \mathcal{E}\{y[n + m]y[n]\} \\ &= \mathcal{E}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n + m - k] \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l]x[n - l]\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k]h[l]\mathcal{E}\{x[n + m - k]x[n - l]\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k]h[l]\phi_{xx}[l + m - k]\end{aligned}$$

Since $x[n]$ is white noise, it has the autocorrelation function

$$\phi_{xx}[l + m - k] = \sigma_x^2\delta[l + m - k]$$

Substituting this into the expression for $\phi_{yy}[m]$ gives

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[m] &= \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h[k]h[l]\delta[l + m - k] \\ &= \sigma_x^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l + m]h[l]\end{aligned}$$

Note that

$$\phi_{yy}[m] = \sigma_x^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l - m]h[l]$$

is also a correct answer, since $\phi_{yy}[m] = \phi_{yy}[-m]$.

(b) Taking the DTFT of $\phi_{yy}[m]$ will give the power density spectrum $\Phi_{yy}(\omega)$.

$$\begin{aligned}\Phi_{yy}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}h[l+m]h[l]\right\}e^{-j\omega m}\\ &= \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}h[l]\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[l+m]e^{-j\omega m}\end{aligned}$$

Substituting $k = l + m$ into the second summation gives

$$\begin{aligned}\Phi_{yy}(\omega) &= \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}h[l]\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega(k-l)}\\ &= \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}h[l]e^{j\omega l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\\ &= \sigma_x^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}h[-l]e^{-j\omega l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]e^{-j\omega k}\\ &= \sigma_x^2H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\\ &= \sigma_x^2\left|H(e^{j\omega})\right|^2\end{aligned}$$

(c) This problem can be approached either in the time domain or the z-transform domain.

Time domain: Since all the a_k's are zero for a MA process,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M}b_kx[n-k]$$

so $y[n]$ is nonzero for $0 \le n \le M$. Note that the autocorrelation sequence,

$$\phi_{yy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}y[n+m]y[n]$$

can be re-written as a convolution

$$\phi_{yy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty}g[m-n]y[n]$$

where $g[n] = y[-n]$. Therefore,

$$\phi_{yy}[n] = y[-n] * y[n]$$

Since $y[-n]$ is nonzero for $-M \le n \le 0$, and $y[n]$ is nonzero for $0 \le n \le M$, we see that their convolution $\phi_{yy}[m]$ is nonzero only in the interval $|m| \le M$.

Z-transform domain: Note that

$$\Phi_{yy}(z) = \sigma_x^2H(z)H^*(z)$$

If all the a_k's $= 0$, then

$$\begin{aligned}H(z) &= \sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}\\ \Phi_{yy}(z) &= \sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}\sum_{\ell=0}^{M}b_\ell^*z^{\ell}\end{aligned}$$

The relation for $\Phi_{yy}(z)$ above is found by multiplying two polynomials in z. The highest power of z in $\Phi_{yy}(z)$ is z^M which arises from the multiplication of the $k = 0$ and $l = M$ coefficients. The smallest power of z in $\Phi_{yy}(z)$ is z^{-M} which arises from the multiplication of the $k = M$ and $l = 0$ coefficents. Thus, $\phi_{yy}[m]$ is nonzero only in the interval $|m| \leq M$.

(d) For an AR process,

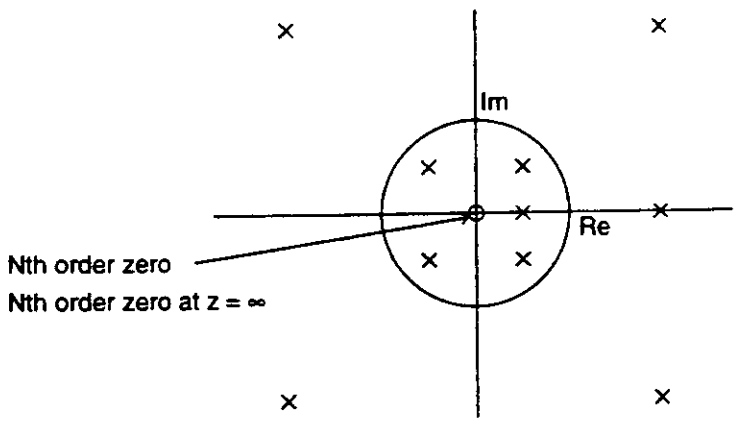
$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \\ &= \frac{b_0}{\prod_{k=1}^{N}(1 - \alpha_k z^{-1})} \end{aligned}$$

Since

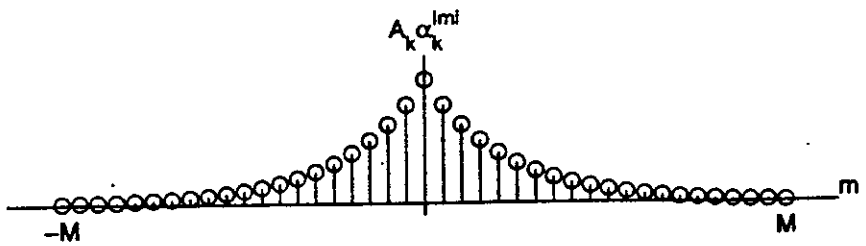
$$\Phi_{yy}(z) = \sigma_x^2 H(z) H^*(z)$$

$$\Phi_{yy}(z) = \frac{b_0^2}{\prod_{k=1}^{N}(1 - \alpha_k z^{-1})(1 - \alpha_k^* z)}$$

Thus, the poles for $\Phi_{yy}(z)$ come in conjugate reciprocal pairs. A sample pole-zero diagram appears below.



By performing a partial fraction expansion on $\Phi_{yy}(z)$ we find that each pole pair contributes a sequence of the form $A_k \alpha_k^{|m|}$



and therefore

$$\phi_{yy}[m] = \sum_{k=1}^{N} A_k \alpha_k^{|m|}$$

(e) For an AR process, with $b_0 = 1$,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

which means that

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x[n]$$

The autocorrelation function is then

$$\begin{aligned}
\phi_{yy}[m] &= \phi_{yy}[-m] \\
&= \mathcal{E}\{y[n-m]y[n]\} \\
&= \mathcal{E}\left\{y[n-m]\left(\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x[n]\right)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \mathcal{E}\{y[n-m]y[n-k]\} + \mathcal{E}\{y[n-m]x[n]\} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k] + \phi_{yx}[-m] \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k] + \phi_{xy}[m]
\end{aligned}$$

For $m = 0$,

$$\phi_{yy}[0] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[-k] + \phi_{xy}[0]$$

The $\phi_{xy}[0]$ term is

$$\begin{aligned}
\phi_{xy}[0] &= \mathcal{E}\{x[n]y[n]\} \\
&= \mathcal{E}\left\{x[n]\left(\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + x[n]\right)\right\} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \mathcal{E}\{x[n]y[n-k]\} + \mathcal{E}\{x[n]x[n]\} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \mathcal{E}\{x[n]y[n-k]\} + \sigma_x^2
\end{aligned}$$

Note that $x[n]$ is uncorrelated with the $y[n-k]$, for $k = 1, \ldots, N$. Therefore,

$$\phi_{xy}[0] = \sigma_x^2$$

Thus,

$$\begin{aligned}
\phi_{yy}[0] &= \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[-k] + \sigma_x^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[k] + \sigma_x^2
\end{aligned}$$

since $\phi_{yy}[k] = \phi_{yy}[-k]$. For $m \geq 1$,

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[m] &= \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k] + \phi_{xy}[m] \\ &= \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k]\end{aligned}$$

since $\phi_{xy}[m]$ is zero for all $m \geq 1$.

(f) By symmetry of the autocorrelation sequence, we know that

$$\begin{aligned}\phi_{yy}[m-k] &= \phi_{yy}[k-m] \\ &= \phi_{yy}[|m-k|]\end{aligned}$$

Thus,

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[|m-k|] = \sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[m-k]$$

Using the result from part (e), we get

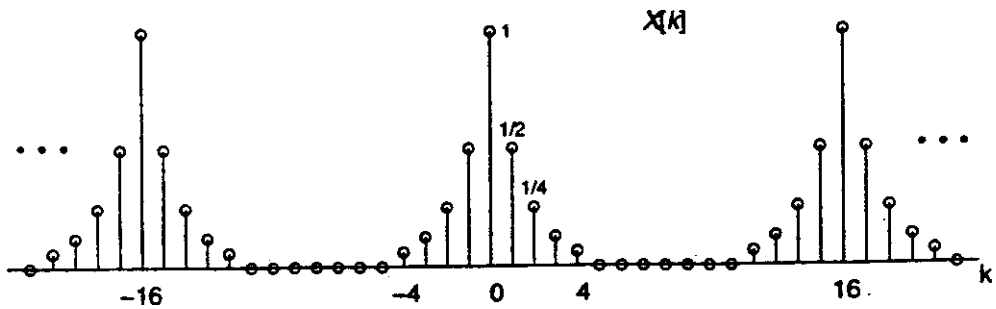
$$\sum_{k=1}^{N} a_k \phi_{yy}[|m-k|] = \phi_{yy}[m]$$

for $m = 1, 2, \ldots, N$.

10.42. (a) Sampling $x_c(t)$ we get

$$\begin{aligned}x[n] &= x_c(nT) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=-4}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j(2\pi/16)kn}\end{aligned}$$

Define the periodic sequence $X[k]$ to be



Then we see that we can write $x[n]$ in terms of $X[k]$:

$$\begin{aligned}x[n] &= \frac{1}{16} \sum_{k=-4}^{4} X[k] e^{j(2\pi/16)kn} \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=-8}^{7} X[k] e^{j(2\pi/16)kn} \\ &= \text{IDFS}\{X[k]\}\end{aligned}$$

However, since the period we use in the sum of the IDFS is unimportant we can also write

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15} X[k]e^{j(2\pi/16)kn} \\ &= \text{IDFS}\{X[k]\} \\ &= \text{IDFT}\{X_0[k]\} \end{aligned}$$

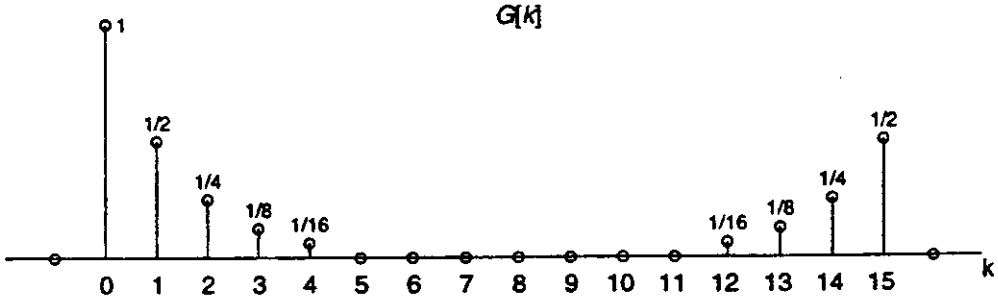
where $X_0[k]$ is the period of $X[k]$ starting at zero, i.e.,

$$X_0[k] = \begin{cases} X[k], & k = 0, \ldots, 15 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Using this information we can now find $G[k]$

$$\begin{aligned} G[k] &= \text{DFT}\{g[n]\} \\ &= \text{DFT}\{x[n](u[n] - u[n-16])\} \\ &= \text{DFT}\{x[n]\} \\ &= \text{DFT}\{\text{IDFT}\{X_0[k]\}\} \\ &= X_0[k] \end{aligned}$$

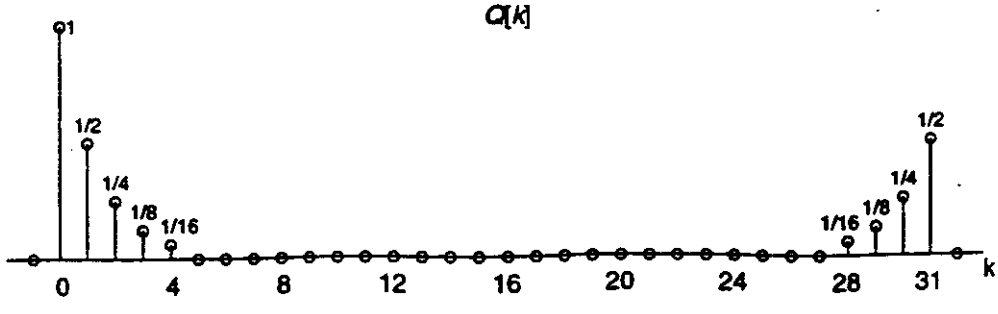
Thus, $G[k]$ looks like



(b) We want to find a sequence $Q[k]$ such that

$$\begin{aligned} q[n] &= \alpha x_c\left(\frac{n2\pi}{32}\right) \\ &= \frac{\alpha}{16}\sum_{k=-4}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j(2\pi/32)kn} \end{aligned}$$

We can apply the same idea as we did in part (a), except now the DFS and DFT size should be 32 instead of 16. Going through the same steps will lead us to the sequence $Q[k]$ that looks like:



(Here we have assumed $\alpha = 1$). We see that we can interpolate in the time domain by zero padding in the *middle* of the DFT samples.

10.43. (a) Using the relation,

$$f_k = \begin{cases} \frac{k}{NT}, & 0 \le k \le N/2 \\ \frac{k-N}{NT}, & N/2 \le k \le N \end{cases}$$

where N is the DFT length and T is the sampling period, the continuous-time frequencies corresponding to the DFT indices $k = 32$ and $k = 231$ are

$$\begin{aligned} f_{32} &= \frac{32}{(256)(1/20,000)} \\ &= 2500 \text{ Hz} \\ f_{231} &= \frac{231 - 256}{(256)(1/20,000)} \\ &= -1953 \text{ Hz} \end{aligned}$$

(b) Since

$$\hat{x}[n] = x[n]w_R[n]$$

the DTFT of $\hat{x}[n]$ is simply the periodic convolution of $X(e^{j\omega})$ with $W_R(e^{j\omega})$.

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})W_R(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

(c) Multiplication in the time domain corresponds to periodic convolution in the frequency domain, as shown in part (b). To evaluate this periodic convolution at the frequency $\omega_{32} = 2\pi(32)/L$, (where $L = N = 256$) corresponding to the $k = 32$ DFT coefficient, we first shift the window $W_{avg}(e^{j\omega})$ to ω_{32}. Then, we multiply the shifted window with $X(e^{j\omega})$, and integrate the result. In order for

$$X_{avg}[32] = \alpha\hat{X}[31] + \hat{X}[32] + \alpha\hat{X}[33]$$

we must therefore have

$$W_{avg}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ \alpha, & \omega = \pm 2\pi/L \\ 0, & 2\pi k/L, \qquad \text{for } k = 2, 3, \ldots, L-2 \end{cases}$$

Note that we are only specifying $W_{avg}(e^{j\omega})$ at the DFT frequencies $\omega = 2\pi k/L$, for $k = 0, \ldots, L-1$.

(d) Note that the L point DFT of a rectangular window of length L is

$$\begin{aligned} W_R[k] &= \sum_{n=0}^{L-1}(1)e^{-j2\pi k/L} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j2\pi kL}} \\ &= L\delta[k] \end{aligned}$$

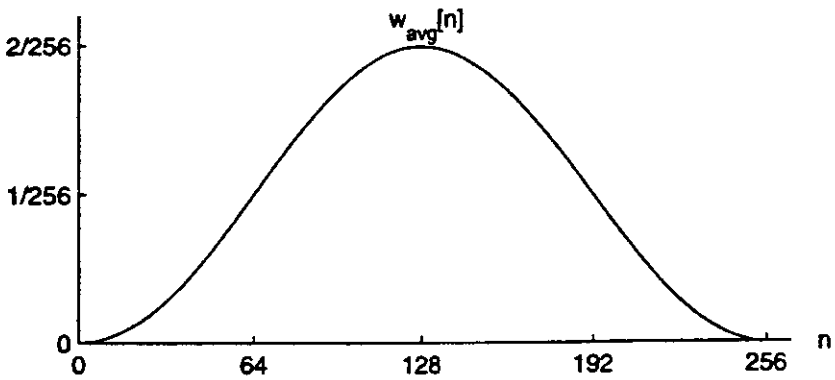
$W_{avg}(e^{j\omega})$ is only specified at DFT frequencies $\omega = 2\pi k/L$, and it can take on other values between these frequencies. Therefore, the DTFT of $W_{avg}(e^{j\omega})$ can be written in terms of $W_R(e^{j\omega})$ and two shifted versions of $W_R(e^{j\omega})$.

$$W_{avg}(e^{j\omega}) = \frac{\alpha}{L}W_R\left(e^{j(\omega+2\pi/L)}\right) + \frac{1}{L}W_R(e^{j\omega}) + \frac{\alpha}{L}W_R\left(e^{j(\omega-2\pi/L)}\right)$$

(e) Taking the inverse DTFT of $W_{avg}(e^{j\omega})$ gives $w_{avg}[n]$.

$$\begin{aligned} w_{avg}[n] &= \frac{\alpha}{L}w_R[n]e^{-j2\pi n/L} + \frac{1}{L}w_R[n] + \frac{\alpha}{L}w_R[n]e^{j2\pi n/L} \\ &= \left[\frac{1}{L} + \frac{2\alpha}{L}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}\right)\right] w_R[n] \end{aligned}$$

A sketch of $w_{avg}[n]$ is provided below.

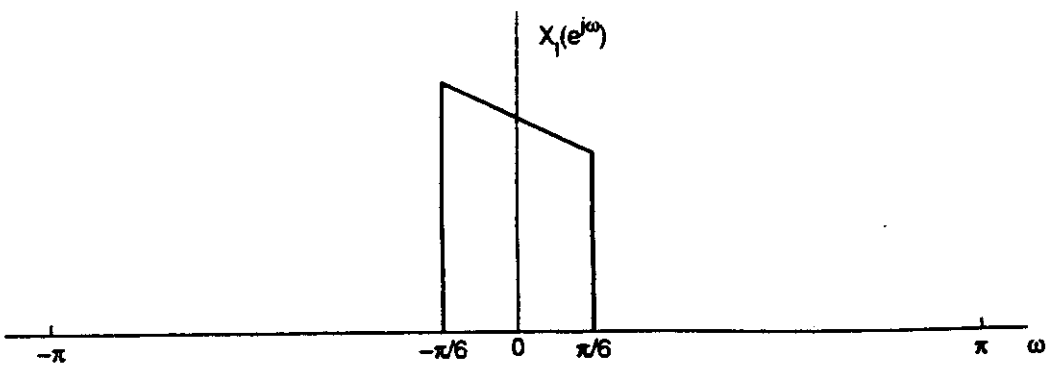


10.44. (a) After the lowpass filter, the highest frequency in the signal is $\Delta\omega$. To avoid aliasing in the downsampler we must have

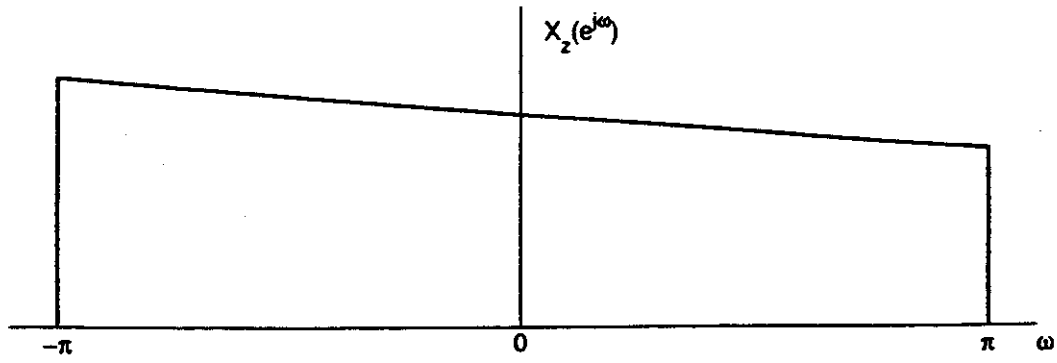
$$\begin{aligned} \Delta\omega M &\leq \pi \\ M &\leq \frac{\pi}{\Delta\omega} \\ &\leq \frac{N}{2k_\Delta} \end{aligned}$$

$$M_{\max} = \frac{N}{2k_\Delta}$$

(b) The fourier transform of $x_i[n]$ looks like



so $M = 6$ is the largest M we can use that avoids aliasing. With this choice of M the fourier transform of $x_s[n]$ looks like



Taking the DFT of $x_z[n]$ gives us N samples of $X_z(e^{j\omega})$ spaced $2\pi/N$ apart in frequency. By examining the figures above we see that these samples correspond to the desired samples of $X(e^{j\omega})$ which will be spaced $2\Delta\omega/N$ apart inside the region $-\Delta\omega < \omega < \Delta\omega$.

Note that after downsampling the endpoints of the region alias. Therefore, we cannot trust the values our new DFT provides at those points. However, the way the problem is set up we already know the values at the endpoints from the original DFT.

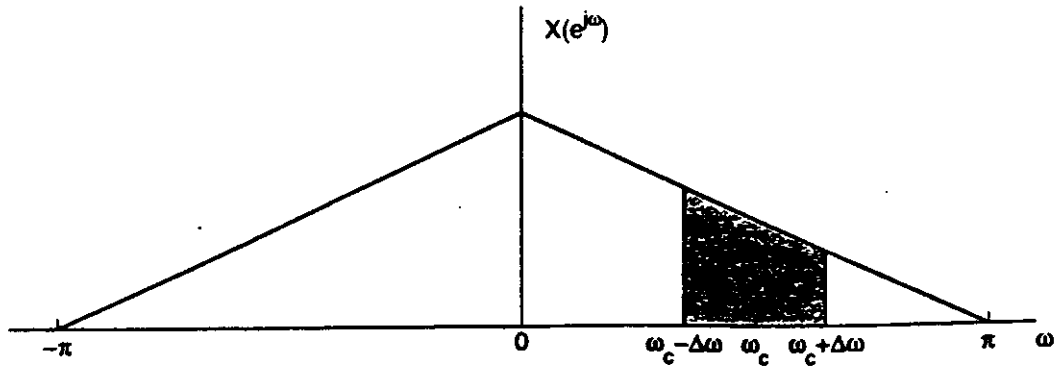
(c) The system $p[n]$ periodically replicates $X_N[n]$ to create $\tilde{X}_N[n]$. Then, the upsampler inserts $M-1$ zeros in betweeen each sample of $\tilde{X}_N[n]$. Thus, the samples $k_c - k_\Delta$ and $k_c + k_\Delta$ which border the zoom region in the original DFT map to $M(k_c - k_\Delta)$ and $M(k_c + k_\Delta)$. The system $h[n]$ then interpolates between the nonzero points filling in the "missing" samples. Since the linear phase filter is length 513 it adds a delay of $M/2 = 512/2 = 256$ samples so the desired samples of $\tilde{X}_{NM}[n]$ now lie in the region

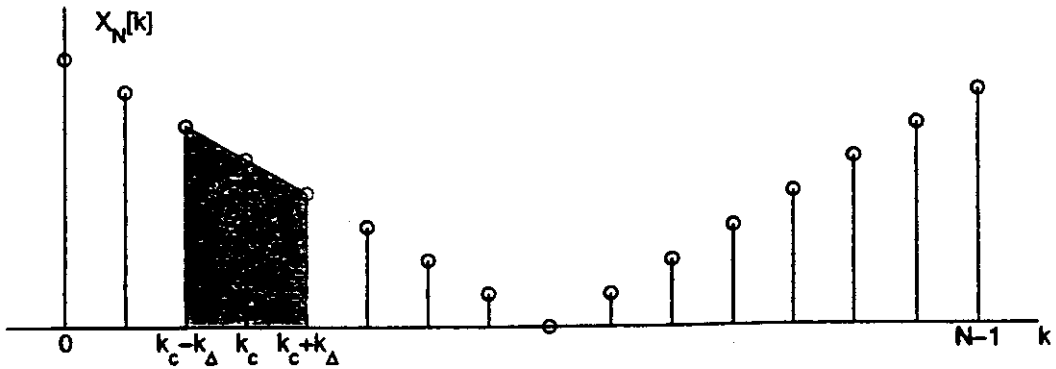
$$\begin{aligned} M(k_c - k_\Delta) + 256 \;&\leq n \leq\; M(k_c + k_\Delta) + 256 \\ k'_c - k'_\Delta \;&\leq n \leq\; k'_c + k'_\Delta \end{aligned}$$

where

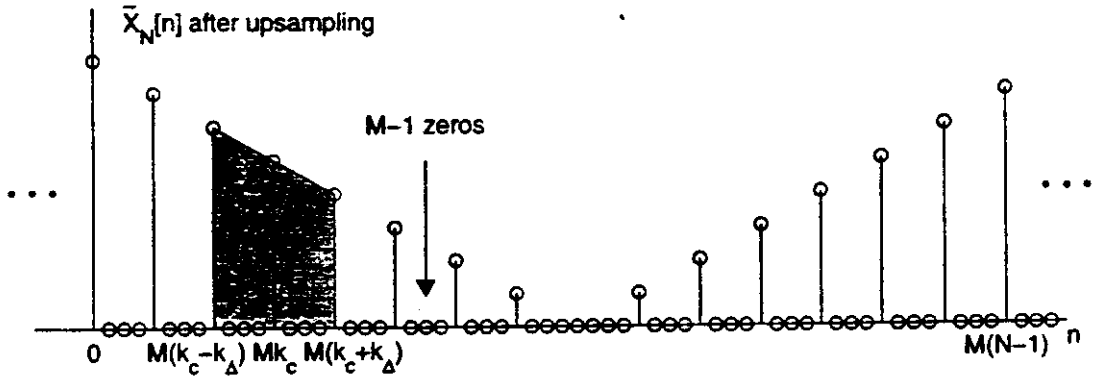
$$\begin{aligned} k'_c &= Mk_c + 256 \\ k'_\Delta &= Mk_\Delta \end{aligned}$$

(d) A typical sketch of $X(e^{j\omega})$ and $X_N[k]$ look like.

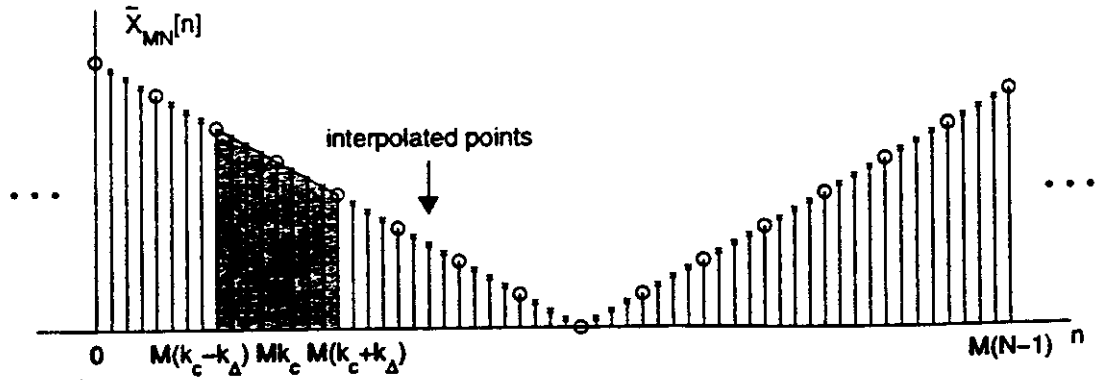




After periodically replicating and upsampling by M we have a signal that looks like



Filtering by $h[n]$ then interpolates between the samples. $\tilde{X}_{NM}[n]$ is shown below if we assume that $h[n]$ is the ideal zero phase filter. The points with an x correspond to the interpolated points.



Thus, we need to extract the points

$$\begin{aligned} M(k_c - k_\Delta) &\leq n \leq M(k_c + k_\Delta) \\ k'_c - k'_\Delta &\leq n \leq k'_c + k'_\Delta \end{aligned}$$

where

$$k'_c = Mk_c$$
$$k'_\Delta = Mk_\Delta$$

Solutions – Chapter 11

Discrete Hilbert Transforms

11.1. Using the fact that $x_e[n]$ is the inverse transform of $\mathcal{R}e$ we get

$$\begin{aligned}\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} &= 2 - ae^{j\omega} - ae^{-j\omega} \\ x_e[n] &= 2\delta[n] - a\delta[n+1] - a\delta[n-1]\end{aligned}$$

Since $x[n]$ is causal, we can recover it from $x_e[n]$

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] = 2\delta[n] - 2a\delta[n-1]$$

This implies that

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} = a\delta[n+1] - a\delta[n-1]$$

and since $j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$ is the transform of $x_o[n]$ we find

$$\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = 2a\sin\omega$$

11.2. Taking the inverse transform of $\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = 5/4 - \cos\omega$, we get

$$x_e[n] = \frac{5}{4}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Since $x[n]$ is causal, we can recover it from $x_e[n]$

$$x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] = \frac{5}{4}\delta[n] - \delta[n-1],$$

11.3. Note that

$$\begin{aligned}|X(e^{j\omega})|^2 &= \frac{5}{4} - \cos\omega \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}\right) \\ &= X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})\end{aligned}$$

If $X(e^{j\omega}) = (1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})$ we get

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

but this does not satisfy the conditions on $x[n]$ given in the problem statement.

However, if we let $X(e^{j\omega}) = (1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})e^{-j\omega}$ we get

$$x[n] = \delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

which satisfies all the constraints. The idea behind this choice is that cascading a signal with an allpass system does not change the magnitude squared response.

Another choice that works is $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-j\omega})e^{-j\omega}$ for which we get

$$x[n] = \frac{1}{2}\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

The idea behind this choice was to flip the zero to its reciprocal location outside the unit circle. This has the same magnitude squared response up to a scaling factor; hence, the $\frac{1}{2}$ term.

11.4. Take the DTFT of $x_r[n]$ to get

$$x_r[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n+2] - \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

$$X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega.$$

where $X_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{j\omega})]$ is the *conjugate symmetric* part of $X(e^{j\omega})$. Since $X(e^{j\omega}) = 0$ for $-\pi \le \omega < 0$ we have

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \begin{cases} 2X_r(e^{j\omega}), & 0 \le \omega < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \cos 2\omega, & 0 \le \omega < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Thus,

$$\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = \begin{cases} 1 - \cos 2\omega, & 0 \le \omega < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = 0.$$

About Notation: $X_R(e^{j\omega})$ with a capital R is the real part of $X(e^{j\omega})$. $X_r(e^{j\omega})$ with a small r is the conjugate symmetric part of $X(e^{j\omega})$ which is complex-valued in general.

11.5. The Hilbert transform can be viewed as a filter with frequency response

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi, \\ j, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

(a) First, take the transform of $x_r[n]$

$$X_r(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0).$$

Now, filter with $H(e^{j\omega})$ and take the inverse transform to get $x_i[n]$

$$\begin{aligned} X_i(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X_r(e^{j\omega}) \\ &= -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ x_i[n] &= \sin\omega_0 n \end{aligned}$$

(b) Similarly, $x_i[n] = -\cos\omega_0 n$.

(c) $x_r[n]$ is the ideal low pass filter

$$x_r[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

After filtering with the Hilbert tranformer we get

$$X_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 \le \omega \le \omega_c \\ j, & -\omega_c \le \omega \le 0 \\ 0, & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Taking the inverse transform yields

$$x_i[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{0} je^{j\omega n}\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_c} je^{j\omega n}\,d\omega = \frac{1 - \cos\omega_c n}{\pi n}$$

11.6. Using Euler's identity,

$$\begin{aligned} jX_I(e^{j\omega}) &= j(2\sin\omega - 3\sin 4\omega) \\ &= 2\left(\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2}\right) - 3\left(\frac{e^{j4\omega} - e^{-j4\omega}}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2}e^{j4\omega} + e^{j\omega} - e^{-j\omega} + \frac{3}{2}e^{-j4\omega} \end{aligned}$$

Since $x_o[n]$ is the inverse transform of $jX_I(e^{j\omega})$ we get

$$x_o[n] = -\frac{3}{2}\delta[n+4] + \delta[n+1] - \delta[n-1] + \frac{3}{2}\delta[n-4]$$

Because $x[n]$ is real and causal we can recover most of x[n], i.e.,

$$\begin{aligned} x[n] &= 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n] \\ &= x[0]\delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-4] \end{aligned}$$

The extra information given to us allows us to find $x[0]$,

$$\begin{aligned} 6 &= X(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega(0)} \\ &= x[0] - 2 + 3 \end{aligned}$$

Plugging this into our equation for $x[n]$ we find

$$x[n] = 5\delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-4]$$

11.7. (a) Given the imaginary part of $X(e^{j\omega})$, we can take the inverse DTFT to find the odd part of $x[n]$, denoted $x_o[n]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m\left\{X(e^{j\omega})\right\} &= \sin\omega + 2\sin 2\omega \\ &= \frac{1}{2j}e^{j\omega} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega} + \frac{1}{j}e^{j2\omega} - \frac{1}{j}e^{-j2\omega} \\ &= \frac{1}{j}e^{j2\omega} + \frac{1}{2j}e^{j\omega} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega} - \frac{1}{j}e^{-j2\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[j\mathcal{I}m\left\{X(e^{j\omega})\right\}\right] \\ &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[e^{j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j\omega} - e^{-j2\omega}\right] \\ &= \delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-1] - \delta[n-2] \end{aligned}$$

Using the formula $x[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n]$, we find

$$x[n] = -\delta[n-1] - 2\delta[n-2] + x[0]\delta[n]$$

Any $x[0]$ will result in a correct solution to this problem. Setting $x[0] = 0$ gives the result

$$x[n] = -\delta[n-1] - 2\delta[n-2]$$

(b) No, the answer to part (a) is not unique, since any choice for $x[0]$ will result in a correct solution.

11.8. Using Euler's identity and the fact that $x_o[n]$ is the inverse transform of $jX_I(e^{j\omega})$ we find

$$\begin{aligned} jX_I(e^{j\omega}) &= 3j\sin 2\omega \\ &= 3\left(\frac{e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}}{2}\right) \\ x_o[n] &= \frac{3}{2}(\delta[n+2]-\delta[n-2]) \end{aligned}$$

Because $x[n]$ is real and causal we can recover all of $x[n]$ except at $n=0$,

$$\begin{aligned} x[n] &= 2x_o[n]u[n]+x[0]\delta[n] \\ &= -3\delta[n-2]+x[0]\delta[n] \end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{2} \\ &= \frac{(-3\delta[n-2]+x[0]\delta[n])+(-3\delta[n+2]+x[0]\delta[n])}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\delta[n+2]+x[0]\delta[n]-\frac{3}{2}\delta[n-2] \end{aligned}$$

Using the fact that $X_R(e^{j\omega})$ is the transform of $x_e[n]$ we find

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= -\frac{3}{2}e^{j2\omega}+x[0]-\frac{3}{2}e^{-j2\omega} \\ &= x[0]-3\cos 2\omega \end{aligned}$$

Thus, $X_{R2}(e^{j\omega})$ and $X_{R3}(e^{j\omega})$ are possible if $x[0]=-1$ and $x[0]=0$ respectively.

11.9. (a) Given the imaginary part of $X(e^{j\omega})$, we can take the inverse DTFT to find the odd part of $x[n]$, denoted $x_o[n]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} &= 3\sin\omega+\sin 3\omega \\ &= \frac{3}{2j}e^{j\omega}-\frac{3}{2j}e^{-j\omega}+\frac{1}{2j}e^{j3\omega}-\frac{1}{2j}e^{-j3\omega} \\ &= \frac{1}{2j}e^{j3\omega}+\frac{3}{2j}e^{j\omega}-\frac{3}{2j}e^{-j\omega}-\frac{1}{2j}e^{-j3\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}\right] \\ &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[\frac{1}{2}e^{j3\omega}+\frac{3}{2}e^{j\omega}-\frac{3}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}e^{-j3\omega}\right] \\ &= \frac{1}{2}\delta[n+3]+\frac{3}{2}\delta[n+1]-\frac{3}{2}\delta[n-1]-\frac{1}{2}\delta[n-3] \end{aligned}$$

Using the formula $x[n]=2x_o[n]u[n]+x[0]\delta[n]$, we find

$$x[n]=-3\delta[n-1]-\delta[n-3]+x[0]\delta[n]$$

Taking the DTFT of $x[n]$ gives

$$X(e^{j\omega})=-3e^{-j\omega}-e^{-j3\omega}+x[0]$$

Evaluating this at $\omega = \pi$ gives

$$X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi} = -3e^{-j\pi} - e^{-j3\pi} + x[0] = 3$$

$$\begin{aligned} 3 + 1 + x[0] &= 3 \\ x[0] &= -1 \end{aligned}$$

Therefore,

$$x[n] = -3\delta[n-1] - \delta[n-3] - \delta[n]$$

(b) Yes, the answer to part (a) is unique. The specification of $X(e^{j\omega})$ at $\omega = \pi$ allowed us to find a unique $x[n]$.

11.10. Factoring the magnitude squared response we get

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \cos\omega}{5 + 4\cos\omega} = \frac{1 - \cos\omega + \frac{1}{4}}{1 + 4\cos\omega + 4} = \frac{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega})}{(1 + 2e^{-j\omega})(1 + 2e^{j\omega})}$$

$$\begin{aligned} |H(z)|^2 &= \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z)}{(1 + 2z^{-1})(1 + 2z)} \\ &= H(z)H^*(1/z^*) \end{aligned}$$

Since $h[n]$ is stable and causal and has a stable and causal inverse, it must be a minimum phase system. It therefore has all its poles and zeros inside the unit circle which allows us to uniquely identify $H(z)$ from $|H(z)|^2$.

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + 2z} \\ &= \frac{1}{2}z^{-1}\left(\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}z^{-1}\left(-1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right), \qquad |z| > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$h[n] = -\frac{1}{2}\delta[n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} u[n-1]$$

11.11. Note that $x_i[n]$ can be written as

$$x_i[n] = -4\delta[n+3] + 4\delta[n-3]$$

Taking the DTFT of $x_i[n]$ gives

$$\begin{aligned} X_i(e^{j\omega}) &= -4e^{j3\omega} + 4e^{-j3\omega} \\ &= -4(2j\sin 3\omega) \\ &= -8j\sin 3\omega \end{aligned}$$

Since $X(e^{j\omega}) = 0$ for $-\pi \le \omega < 0$, we can find $X(e^{j\omega})$ using the relation

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2jX_i(e^{j\omega}), & 0 < \omega < \pi \\ 0, & -\pi \le \omega < 0 \end{cases}$$

Thus,

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 16\sin 3\omega, & 0 < \omega < \pi \\ 0, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases}$$

Therefore, the real part of $X(e^{j\omega})$ is

$$\begin{aligned} X_r(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right] \\ &= \begin{cases} 8\sin 3\omega, & 0 < \omega < \pi \\ -8\sin 3\omega, & -\pi \leq \omega < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

11.12. (a) Factoring the magnitude squared response we get

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= \frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega = 1 - \frac{2}{3}\cos\omega + \frac{1}{9} = \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{3}e^{j\omega}\right) \\ &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Thus, one choice for $H(e^{j\omega})$ and $h[n]$ is

$$H(e^{j\omega}) = 1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}$$

$$h[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1]$$

(b) *No.* We can find a new system by taking the zero from the original system and flipping it to its reciprocal location. This only changes the magnitude squared response by a scaling factor. If we compensate for the scaling factor the two magnitude squared responses will be the same. Thus, we find

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{3}(1 - 3e^{-j\omega}) \\ h[n] &= \frac{1}{3}\delta[n] - 3\delta[n-1] \end{aligned}$$

satisifies the given conditions.

11.13. Expressing $X_R(e^{j\omega})$ in terms of complex exponentials gives

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= 1 + \cos\omega + \sin\omega - \sin 2\omega \\ &= 1 + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{2j}e^{j\omega} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega} - \frac{1}{2j}e^{j2\omega} + \frac{1}{2j}e^{-j2\omega} \\ &= -\frac{1}{2j}e^{j2\omega} + \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{2j}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega} + \frac{1}{2j}e^{-j2\omega} \end{aligned}$$

Taking the inverse DTFT of $X_R(e^{j\omega})$ gives the conjugate-symmetric part of $x[n]$, denoted as $x_e[n]$.

$$x_e[n] = -\frac{1}{2j}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{2j}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2j}\delta[n-1] + \frac{1}{2j}\delta[n-2]$$

Using the relation $x[n] = 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n]$,

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + j\delta[n-1] - j\delta[n-2]$$

We then find the conjugate-antisymmetric part, $x_o[n]$ as

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \frac{1}{2}(x[n] - x^*[-n]) \\ &= \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1] + j\delta[n-1] - j\delta[n-2] - \delta[n] - \delta[-n-1] + j\delta[-n-1] - j\delta[-n-2]) \\ &= \frac{1}{2}(\delta[n-1] + j\delta[n-1] - j\delta[n-2] - \delta[n+1] + j\delta[n+1] - j\delta[n+2]) \\ &= -\frac{1}{2}(\delta[n+1] - \delta[n-1]) + \frac{j}{2}(\delta[n+1] + \delta[n-1]) - \frac{j}{2}(\delta[n+2] + \delta[n-2]) \end{aligned}$$

Taking the DTFT of $x_o[n]$ gives $jX_I(e^{j\omega})$.

$$\begin{aligned} jX_I(e^{j\omega}) &= -\frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) + \frac{j}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) - \frac{j}{2}(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \\ &= -j\sin\omega + j\cos\omega - j\cos 2\omega \end{aligned}$$

So

$$X_I(e^{j\omega}) = -\sin\omega + \cos\omega - \cos 2\omega$$

11.14. First note that,

(a) The inverse transform of $X_R(e^{j\omega})$ is $x_e[n]$, the even part of $x[n]$. This is true for any sequence whether it is causal, anticausal, or neither.

(b) $jX_I(e^{j\omega})$ is the transform of $x_o[n]$, the odd part of $x[n]$. This is true for any sequence whether it is causal, anticausal, or neither.

(c) For an anticausal sequence

$$x[n] = 2x_e[n]u[-n] - x_e[0]\delta[n]$$

Using Euler's identity and (a),

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(k\omega) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k (e^{jk\omega} + e^{-jk\omega}) \end{aligned}$$

$$x_e[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k (\delta[n+k] + \delta[n-k])$$

Using (c) and then taking the odd part we get,

$$\begin{aligned} x[n] &= 2x_e[n]u[-n] - x_e[0]\delta[n] \\ &= \delta[n] + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta[n+k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \frac{x[n] - x[-n]}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k (\delta[n+k] - \delta[n-k]) \end{aligned}$$

Now taking the DTFT and using (b),

$$\begin{aligned} jX_I(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k (e^{jk\omega} - e^{-jk\omega}) \\ &= j\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(k\omega) \\ &= j\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(k\omega) \end{aligned}$$

Thus,

$$X_I(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(k\omega)$$

11.15. Given $X_i(e^{j\omega})$, we can take the inverse DTFT of $jX_i(e^{j\omega})$ to find the odd part of $x[n]$, denoted $x_o[n]$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m\left\{X(e^{j\omega})\right\} &= \sin\omega \\ &= \frac{1}{2j}e^{j\omega} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[j\mathcal{I}m\left\{X(e^{j\omega})\right\}\right] \\ &= \mathcal{DFT}^{-1}\left[\frac{1}{2}e^{j\omega} - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right] \\ &= \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-1] \end{aligned}$$

Using the formula $x[n] = 2x_o[n]u[n] + x[0]\delta[n]$,

$$x[n] = -\delta[n-1] + x[0]\delta[n]$$

Since

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 3$$

$$\begin{aligned} -1 + x[0] &= 3 \\ x[0] &= 4 \end{aligned}$$

Therefore,

$$x[n] = 4\delta[n] - \delta[n-1]$$

11.16. Using Euler's identity and the fact that $x_e[n]$ is the inverse transform of $X_R(e^{j\omega})$ we have

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= 2 - 4\cos(3\omega) \\ &= 2 - 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

$$x_e[n] = -2\delta[n+3] + 2\delta[n] - 2\delta[n-3]$$

Since $x[n]$ is real and causal, it is fully determined by its even part $x_e[n]$,

$$\begin{aligned} x[n] &= 2x_e[n]u[n] - x_e[0]\delta[n] \\ &= 4\delta[n] - 4\delta[n-3] - 2\delta[n] \\ &= 2\delta[n] - 4\delta[n-3] \end{aligned}$$

Using this information in the second condition we find

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\pi n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n \\ &= 2+4 \\ &\neq 7 \end{aligned}$$

Thus, there is no real, causal sequence that satisfies both conditions.

11.17. There is more than one way to solve this problem. Two solutions are presented below.

Solution 1: Yes, it is possible to determine $x[n]$ uniquely. Note that $X[k]$, the 2 point DFT of a real signal $x[n]$, is also real, as demonstrated below.

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{1} x[n]e^{-j2\pi nk/2} \\ X[k] &= \sum_{n=0}^{1} x[n](-1)^{nk} \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} X[0] &= x[0]+x[1] \\ X[1] &= x[0]-x[1] \end{aligned}$$

Clearly, if $x[n]$ is real, then $X[k]$ is real. Therefore, we can conclude that the imaginary part $X_I[k]$ is zero.

Therefore, the inverse DFT of $X_R[k]$ is $x[n]$, computed below.

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} X_R[k]e^{j2\pi nk/2} \\ x[n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} X_R[k](-1)^{nk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[0] &= \frac{1}{2}(X_R[0]+X_R[1]) \\ &= -1 \\ x[1] &= \frac{1}{2}(X_R[0]-X_R[1]) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Thus,

$$x[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

Solution 2: Start by making the assumption that $X[k]$ is complex, i.e., $X_I[k]$ is nonzero and $X_R[k] = 2\delta[k] - 4\delta[k-1]$. Then, because $x_{ep}[n]$ is the inverse DFT of $X_R[k]$ we find

$$\begin{aligned} x_{ep}[n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} X_R[k]e^{j2\pi nk/2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} X_R[k](-1)^{nk} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} x_{ep}[0] &= \frac{1}{2}(X_R[0] + X_R[1]) \\ &= -1 \\ x_{ep}[1] &= \frac{1}{2}(X_R[0] - X_R[1]) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$x_{ep}[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

Because $x[n]$ is real and causal, we can determine it from $x_{ep}[n]$

$$x[n] = \begin{cases} x_{ep}[n], & n = 0 \\ 2x_{ep}[n], & 0 < n < N/2 \\ x_{ep}[N/2], & n = N/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

With $N = 2$ we have

$$x[n] = -\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

If we began by making the assumption that $X[k]$ was real, i.e., $X_I[k] = 0$ and $X[k] = X_R[k] = 2\delta[k] - 4\delta[k-1]$ than by taking the inverse transform we find that

$$x[n] = x_{ep}[n] = -\delta[k] + 3\delta[k-1]$$

This is the same answer we got before. Since there was no ambiguities in our determination of $x[n]$, we conclude that $x[n]$ can be uniquely determined.

The next problem shows that when $N > 2$, we cannot necessarily uniquely determine $x[n]$ from $X_R[k]$ unless we make additional assumptions about $x[n]$ such as periodic causality. When $N > 2$ the two assumptions we used above leads to two different sequences with the same $X_R[k]$.

11.18. Sequence 1: For $k = 0, 1, 2$ we have

$$X_R[k] = 9\delta[k] + 6\delta[k-1] + 6\delta[((k+1))_3]$$

and $X_R[k] = 0$ for any other k. Using the DFT properties and taking the inverse DFT we find for $n = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} x_{ep}[n] &= 3 + 2\left(e^{j(2\pi/3)n} + e^{-j(2\pi/3)n}\right) \\ &= 3 + 4\cos(2\pi n/3) \\ &= 7\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] \end{aligned}$$

If we let $x[n] = x_{ep}[n]$ we have the desired sequence.

Sequence 2: If we assume $x[n]$ is periodically causal, we can use the following property to solve for $x[n]$ from $x_{ep}[n]$:

$$x[n] = \begin{cases} x_{ep}[0], & n = 0 \\ 2x_{ep}[n], & 0 < n < \frac{N}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Note that this is only true for odd N. For even N, we would also need to handle the $n = N/2$ point as shown in the chapter. We have

$$\begin{aligned} x[n] &= \begin{cases} x_{ep}[0], & n = 0 \\ 2x_{ep}[n], & n = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= 7\delta[n] + 2\delta[n-1] \end{aligned}$$

11.19. Given the real part of $X[k]$, we can take the inverse DFT to find the even periodic part of $x[n]$, denoted $x_{ep}[n]$.

Using the inverse DFT relation,

$$x_{ep}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_R[k]W^{-nk}$$

we find

$$\begin{aligned} x_{ep}[0] &= \frac{1}{4}(4+1+2+1) = 2 \\ x_{ep}[1] &= \frac{1}{4}(4+j-2-j) = \frac{1}{2} \\ x_{ep}[2] &= \frac{1}{4}(4-1+2-1) = 1 \\ x_{ep}[3] &= \frac{1}{4}(4-j-2+j) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Thus,

$$x_{ep}[n] = 2\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \delta[n-2] + \frac{1}{2}\delta[n-3]$$

Next, we can relate the odd periodic and even periodic parts of $x[n]$ using

$$x_{op}[n] = \begin{cases} x_{ep}[n], & 0 < n < N/2 \\ -x_{ep}[n], & N/2 < n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Performing this operation gives

$$x_{op}[n] = \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-3]$$

Taking the DFT of $x_{op}[n]$ yields $jX_I[k]$. Using the DFT relation,

$$jX_I[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_{op}[n]W^{nk}$$

we find

$$\begin{aligned} jX_I[0] &= \left(0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ jX_I[1] &= \left(0 - \frac{j}{2} + 0 - \frac{j}{2}\right) = -j \\ jX_I[2] &= \left(0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ jX_I[3] &= \left(0 + \frac{j}{2} + 0 + \frac{j}{2}\right) = j \end{aligned}$$

Thus,

$$jX_I[k] = -j\delta[k-1] + j\delta[k-3]$$

11.20. As the following shows, the second condition implies $x[0] = 1$.

$$\begin{aligned} x[0] &= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X[k]e^{j(2\pi/6)kn}\Big|_{n=0} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} X[k] \\ &= 1 \end{aligned}$$

This condition eliminates all choices except $x_2[n]$ and $x_3[n]$.

The odd periodic parts of $x_2[n]$ and $x_3[n]$ for $n = 0, \ldots, 5$ are

$$\begin{aligned} x_{op_2}[n] &= \frac{x_2[n] - x_2^*[((-n))_6]}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(\delta[n-4] - \delta[((n+4))_6]\right) - \frac{1}{3}\left(\delta[n-5] - \delta[((n+5))_6]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{op_3}[n] &= \frac{x_3[n] - x_3^*[((-n))_6]}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(\delta[n-1] - \delta[((n+1))_6]\right) - \frac{1}{3}\left(\delta[n-2] - \delta[((n+2))_6]\right) \end{aligned}$$

For $n < 0$ or $n > 5$, these sequences are zero. Since the transform of $x_{op}[n]$ is $jX_I[k]$ we find for $k = 0, \ldots, 5$

$$\begin{aligned} jX_{I_2}[k] &= \frac{1}{3}\left(e^{-j(2\pi/6)4k} - e^{j(2\pi/6)4k}\right) - \frac{1}{3}\left(e^{-j(2\pi/6)5k} - e^{j(2\pi/6)5k}\right) \\ &= -\frac{2}{3}j\sin(4\pi k/3) + \frac{2}{3}j\sin(5\pi k/3) \\ &= j\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\delta[k-2] + \delta[k-4]\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jX_{I_3}[k] &= \frac{1}{3}\left(e^{-j(2\pi/6)k} - e^{j(2\pi/6)k}\right) - \frac{1}{3}\left(e^{-j(2\pi/6)2k} - e^{j(2\pi/6)2k}\right) \\ &= -\frac{2}{3}j\sin(\pi k/3) + \frac{2}{3}j\sin(2\pi k/3) \\ &= j\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\delta[k-2] + \delta[k-4]\right) \end{aligned}$$

Thus, both $x_2[n]$ and $x_3[n]$ are consistent with the information given.

11.21. (a) *Method 1*:

We are given

$$\begin{aligned} X_R(\rho e^{j\omega}) &= U(\rho, \omega) \\ &= 1 + \rho^{-1}\alpha\cos\omega \end{aligned}$$

Since $\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \omega}$ we have,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \omega} &= -\alpha\rho^{-1}\cos\omega \\ V &= -\alpha\rho^{-1}\sin\omega + K(\rho) \end{aligned}$$

Since $\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \omega}$ we have,

$$\overbrace{\alpha\rho^{-2}\sin\omega + K'(\rho)}^{\frac{\partial V}{\partial \rho}} = \overbrace{\alpha\rho^{-2}\sin\omega}^{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \omega}}$$

Thus,

$$\begin{aligned} K'(\rho) &= 0 \\ K(\rho) &= C \end{aligned}$$

Since $x[n]$ is real $V(\rho,\omega)$ is an odd function of ω. Hence, $V(\rho,0)=0$, implying that $C=0$. Therefore,

$$\begin{aligned} X(\rho e^{j\omega}) &= U(\rho,\omega)+jV(\rho,\omega) \\ &= 1+\rho^{-1}\alpha\cos\omega - j\rho^{-1}\alpha\sin\omega \\ &= 1+\alpha\rho^{-1}(\cos\omega - j\sin\omega) \\ &= 1+\alpha\rho^{-1}e^{-j\omega} \\ X(z) &= 1+\alpha z^{-1} \end{aligned}$$

(b) *Method 2*: Since $X_R(e^{j\omega})$ is the transform of $x_e[n]$ we have

$$\begin{aligned} X_R(e^{j\omega}) &= 1+\alpha\cos\omega \\ &= 1+\frac{\alpha}{2}e^{j\omega}+\frac{\alpha}{2}e^{-j\omega} \\ x_e[n] &= \delta[n]+\frac{\alpha}{2}\delta[n+1]+\frac{\alpha}{2}\delta[n-1] \end{aligned}$$

Because $x[n]$ is real and causal, we can recover $x_o[n]$ from $x_e[n]$ as follows

$$\begin{aligned} x_o[n] &= \begin{cases} x_e[n], & n>0 \\ 0, & n=0 \\ -x_e[n], & n<0 \end{cases} \\ &= -\frac{\alpha}{2}\delta[n+1]+\frac{\alpha}{2}\delta[n-1] \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} x[n] &= x_e[n]+x_o[n] \\ &= \delta[n]+\alpha\delta[n-1] \\ X(z) &= 1+\alpha z^{-1} \end{aligned}$$

Note that we could have obtained $x[n]$ directly from $x_e[n]$ as follows

$$\begin{aligned} x[n] &= 2x_e[n]u[n]-x_e[0]\delta[n] \\ &= (2\delta[n]+\alpha\delta[n+1]+\alpha\delta[n-1])u[n]-\delta[n] \\ &= \delta[n]+\alpha\delta[n-1] \end{aligned}$$

11.22. Taking the z-transform of $u_N[n]$ we get

$$\begin{aligned} U_N(z) &= \frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{2z^{-N/2}}{1-z^{-1}}-1+z^{-N/2} \\ &= \frac{1-z^{-N/2}+z^{-1}-z^{-1-N/2}}{1-z^{-1}}, \qquad |z|\neq 0 \end{aligned}$$

Sampling this we find

$$\begin{aligned} \tilde{U}_N[k] &= U_N(e^{2\pi k/N}) \\ &= \frac{1-(-1)^k+e^{-j2\pi k/N}-e^{-j2\pi k/N}(-1)^k}{1-e^{-j2\pi k/N}} \end{aligned}$$

When k is even but $k \neq 0$ we see that $\tilde{U}_N[k] = 0$. For k odd, we get

$$\begin{aligned}\tilde{U}_N[k] &= \frac{2 + 2e^{-j2\pi k/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} \\ &= \frac{2e^{-j\pi k/N}(e^{j\pi k/N} + e^{-j\pi k/N})}{e^{-j\pi k/N}(e^{j\pi k/N} - e^{-j\pi k/N})} \\ &= -2j\cot(\pi k/N)\end{aligned}$$

When $k = 0$ we get $0/0$ which, if the function was continuous, you would use l'Hôpital's rule. In this case the function is discrete so that is not available to us. One route to the answer is to use the definition of the DFS

$$\begin{aligned}\tilde{U}_N[0] &= \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_N[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\Big|_{k=0} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \tilde{u}_N[n] \\ &= N\end{aligned}$$

Putting it all together gives us the desired answer

$$\tilde{U}_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -2j\cot(\pi k/N), & k \text{ odd}, \\ 0, & k \text{ even}, k \neq 0 \end{cases}$$

11.23. (a) Because $x_{ep}[n]$ is the inverse DFT of $X_R[k]$ we have for $n = 0, \ldots, N-1$ and $k = 0, \ldots, N-1$

$$\begin{aligned}X_R[k] &= \frac{X[k] + X^*[k]}{2} \\ x_{ep}[n] &= \frac{x[n] + x^*[((-n))_N]}{2}\end{aligned}$$

or equivalently, if we periodically extend these sequences with period N

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n]}{2}$$

Note that since the signal is real $\tilde{x}^*[-n] = \tilde{x}[-n]$.

The first period of $\tilde{x}[n]$ is zero from $n = M$ to $n = N-1$. If $N = 2(M-1)$ there is no overlap of $\tilde{x}[n]$ and $\tilde{x}[-n]$ except at $n = 0$ and $n = N/2$. We can therefore recover $\tilde{x}[n]$ from $\tilde{x}_e[n]$ with the following:

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 2\tilde{x}_e[n], & n = 1, \ldots, N/2 - 1 \\ \tilde{x}_e[n], & n = 0, N/2 \\ 0, & n = M, \ldots, N-1 \end{cases}$$

If we tried to make N any smaller, the overlap of $\tilde{x}[n]$ and $\tilde{x}[-n]$ would prevent the recovery of $x[n]$. Consequently, the smallest value of N we can use to recover $X[k]$ from $X_R[k]$ is $N = 2(M-1)$.

(b) If $N = 2(M-1)$,

$$x[n] = x_{ep}[n]u_N[n] = \begin{cases} 2x_{ep}[n] & n = 1, \ldots, N/2 - 1 \\ x_{ep}[n], & n = 0, N/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where

$$u_N[n] = \begin{cases} 2, & n = 1, 2, \ldots, N/2 - 1 \\ 1, & n = 0, N/2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$= 2u[n] - 2u[n - N/2] - \delta[n] + \delta[n - N/2]$$

Taking the DFT of $x[n]$ we find

$$X[k] = X_R[k] \otimes U_N[k]$$

where

$$U_N[k] = DFT\{2u[n] - 2u[n - N/2] - \delta[n] + \delta[n - N/2]\}$$
$$= \frac{1 - (-1)^k + e^{-j2\pi k/N} - e^{-j2\pi k/N}(-1)^k}{1 - e^{-j2\pi k/N}}, \qquad k = 0, \ldots, N-1$$
$$U_N[k] = \begin{cases} N, & k = 0, \\ -2j\cot(\pi k/N), & 0 < k < N-1, \ k \text{ odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

11.24. We are given

$$H_R(e^{j\omega}) = H_{ER}(e^{j\omega}) + H_{OR}(e^{j\omega})$$
$$H_I(e^{j\omega}) = H_{EI}(e^{j\omega}) + H_{OI}(e^{j\omega})$$

$$h_r[n] \longleftrightarrow H_r(e^{j\omega}) = H_A(e^{j\omega}) + jH_B(e^{j\omega})$$
$$h_i[n] \longleftrightarrow H_i(e^{j\omega}) = H_C(e^{j\omega}) + jH_D(e^{j\omega})$$

where $h_r[n]$, $h_i[n]$, $H_R(e^{j\omega})$, $H_I(e^{j\omega})$, $H_{ER}(e^{j\omega})$, $H_{OR}(e^{j\omega})$, $H_{EI}(e^{j\omega})$, and $H_{OI}(e^{j\omega})$ are real. Begin by breaking $H(e^{j\omega})$ into its real and imaginary parts $H_R(e^{j\omega})$ and $H_I(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$$
$$= [H_{ER}(e^{j\omega}) + H_{OR}(e^{j\omega})] + j[H_{EI}(e^{j\omega}) + H_{OI}(e^{j\omega})]$$

Now solve for the conjugate symmetric and conjugate antisymmetric parts of $H(e^{j\omega})$

$$H_r(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{j\omega}) + H^*(e^{-j\omega})}{2}$$
$$= \frac{[H_{ER}(e^{j\omega}) + H_{OR}(e^{j\omega})] + j[H_{EI}(e^{j\omega}) + H_{OI}(e^{j\omega})]}{2}$$
$$+ \frac{[H_{ER}(e^{j\omega}) - H_{OR}(e^{j\omega})] - j[H_{EI}(e^{j\omega}) - H_{OI}(e^{j\omega})]}{2}$$
$$= H_{ER}(e^{j\omega}) + jH_{OI}(e^{j\omega})$$

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{H(e^{j\omega}) - H^*(e^{-j\omega})}{2j}$$
$$= \frac{[H_{ER}(e^{j\omega}) + H_{OR}(e^{j\omega})] + j[H_{EI}(e^{j\omega}) + H_{OI}(e^{j\omega})]}{2j}$$
$$- \frac{[H_{ER}(e^{j\omega}) - H_{OR}(e^{j\omega})] - j[H_{EI}(e^{j\omega}) - H_{OI}(e^{j\omega})]}{2j}$$
$$= H_{EI}(e^{j\omega}) - jH_{OR}(e^{j\omega})$$

Thus,

$$H_A(e^{j\omega}) = H_{ER}(e^{j\omega}) \qquad H_C(e^{j\omega}) = H_{EI}(e^{j\omega})$$
$$H_B(e^{j\omega}) = H_{OI}(e^{j\omega}) \qquad H_D(e^{j\omega}) = -H_{OR}(e^{j\omega})$$

11.25. (a) By inspection,

$$H(e^{j\omega}) = j(2H_{\text{lp}}(e^{j(\omega+\frac{\pi}{2})}) - 1)$$

$$H_{\text{lp}}(e^{j\omega}) = \frac{1 - jH(e^{j(\omega-\frac{\pi}{2})})}{2}$$

(b) **Find h[n]:**
Taking the inverse DTFT of $H(e^{j\omega})$ yields

$$\begin{aligned} h[n] &= j\left[2e^{-j(\pi/2)n}\, h_{\text{lp}}[n] - \delta[n]\right] \\ &= j\left[2\cos(\pi n/2)h_{\text{lp}}[n] - j2\sin(\pi n/2)h_{\text{lp}}[n] - \delta[n]\right] \\ &= 2\sin(\pi n/2)h_{\text{lp}}[n] \end{aligned}$$

The simplification in the last step used the fact that $h_{\text{lp}}[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ is zero for even n and equals $1/2$ for $n = 0$.

Find $\mathbf{h_{lp}}$[n] :
Taking the inverse DTFT of $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ yields

$$\begin{aligned} h_{\text{lp}}[n] &= \frac{\delta[n] - je^{j(\pi/2)n}\, h[n]}{2} \\ &= \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}(j)^{n+1}h[n] \end{aligned}$$

Using the fact that $h[n]$ is zero for $n = 0$ and n even we can reduce this to

$$h_{\text{lp}}[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{2}h[n] + \frac{1}{2}\delta[n]$$

(c) The linear phase causes a delay of $n_d = M/2$ in the responses. If n_d is not an integer, then we interpret $h_{\text{lp}}[n]$ and $h[n]$ as

$$\begin{aligned} h_{\text{lp}}[n - n_d] &= \frac{\sin(\pi(n - n_d)/2)}{\pi(n - n_d)} \\ h[n - n_d] &= \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\pi(n - n_d)/2)}{(n - n_d)} \end{aligned}$$

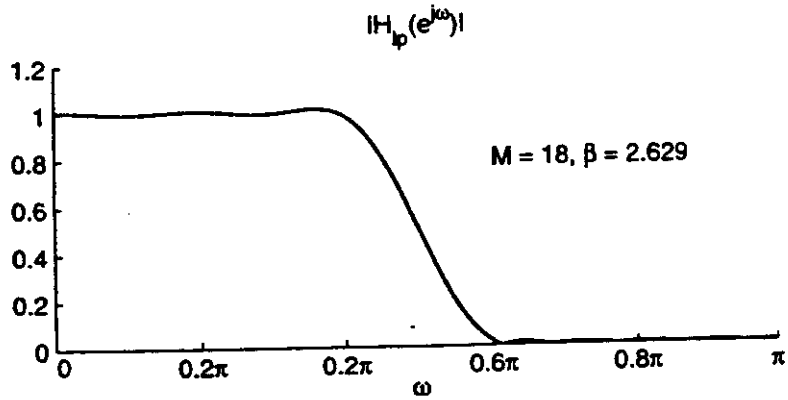
Then,

$$\begin{aligned} \hat{h}[n] &= h[n - n_d]w[n] \\ &= 2\sin(\pi(n - n_d)/2)\, h_{\text{lp}}[n - n_d]w[n] \\ &= 2\sin(\pi(n - n_d)/2)\, \hat{h}_{\text{lp}}[n] \end{aligned}$$

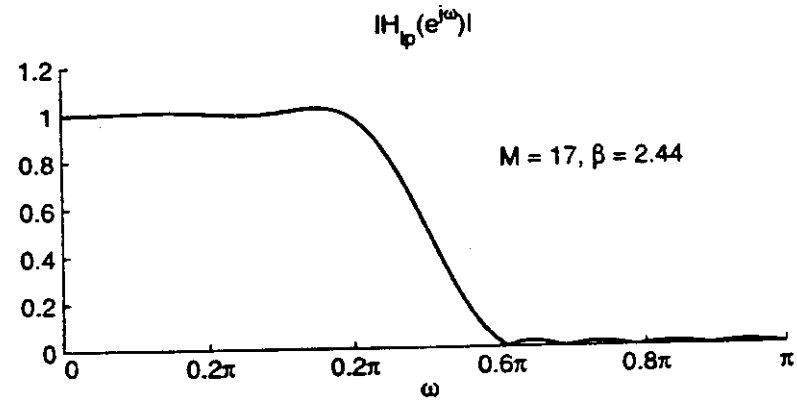
where $\hat{h}[n]$ and $\hat{h}_{\text{lp}}[n]$ are the causal FIR approximations to $h[n]$ and $h_{\text{lp}}[n]$. Similarly,

$$\hat{h}_{\text{lp}}[n] = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(n - n_d)/2)}{2}\hat{h}[n] + \frac{1}{2}\delta[n - n_d]w[n], & M \text{ even} \\ \sin(\pi(n - n_d)/2)\hat{h}[n], & M \text{ odd} \end{cases}$$

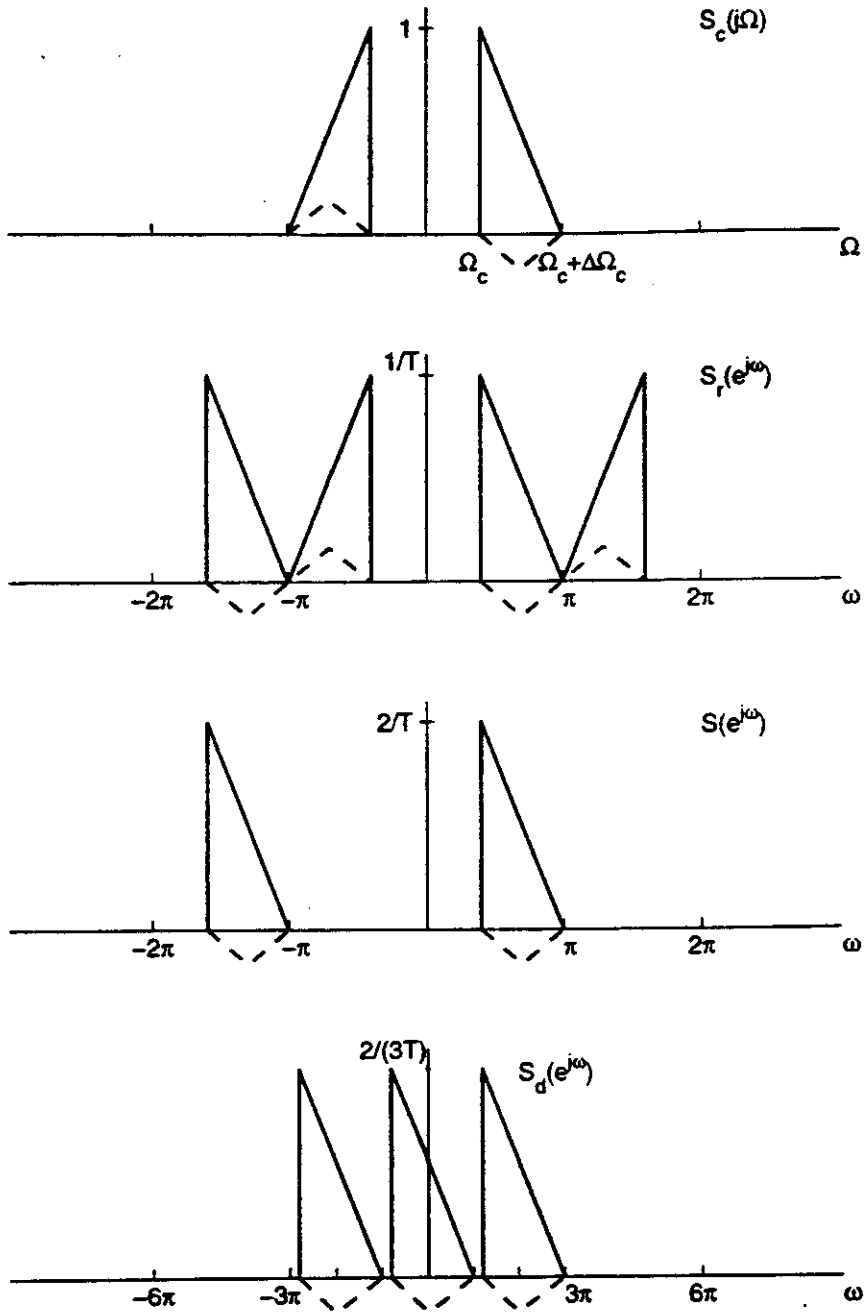
(d) The lowpass filter corresponding to the first filter in the example looks like



The lowpass filter corresponding to the second filter in the example looks like



11.26. (a) The example shown here samples at the Nyquist rate of $T = \pi/(\Omega_c + \Delta\Omega)$ as in the chapter's example, but the bandpass signal is such that $\Delta\Omega/(\Omega_c + \Delta\Omega) = 3/5$. Then, $2\pi/(\Delta\Omega T) = 10/3$.



(b) If $2\pi/(\Delta\Omega T) = M + e$, where M is an integer and e some fraction, then using the Nyquist rate of $2\pi/T = 2(\Omega_c + \Delta\Omega)$ will force decimation by M. As just shown, this choice for T causes $S_d(e^{j\omega})$ to have intervals of zero. Instead, choose T such that $2\pi/(\Delta\Omega T)$ is the next highest integer

$$\frac{2\pi}{\Delta\Omega T} = M + 1.$$

Then decimating by $(M + 1)$ produces the desired result.

11.27. *Yes*, it is possible to always uniquely recover the system input from the system output. Although

$Y(e^{j\omega})$ contains roughly half the frequency spectrum as $X(e^{j\omega})$, we can reconstruct $X(e^{j\omega})$ from $Y(e^{j\omega})$. We can accomplish this by recognizing that since $x[n]$ is real, $X(e^{j\omega})$ must be conjugate symmetric.

The output of the system, $y[n]$, has a Fourier transform $Y(e^{j\omega})$ that is the product of $X(e^{j\omega})$ and $H(e^{j\omega})$. Therefore, $Y(e^{j\omega})$ will correspond to

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{j\omega}), & 0 \le \omega \le \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

At first glance, it may seem like $X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) + Y^*(e^{-j\omega})$. This is close to the right answer, but it doesn't take into consideration the fact that $Y(e^{j\omega})$ is non-zero at $\omega = 0$ and $\omega = \pi$. Thus, the solution $X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) + Y^*(e^{-j\omega})$, will be incorrect at $\omega = 0$ and $\omega = \pi$, since $Y(e^{j\omega})$ and $Y^*(e^{j\omega})$ will overlap at these frequencies. It is necessary to pay special attention to these frequencies to get the right answer. Let

$$Z(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & \omega = 0, \omega = \pi \\ Y(e^{j\omega}), & \text{otherwise} \end{cases}$$

Alternatively, we can express $Z(e^{j\omega})$ with the constants a and b defined as

$$\begin{aligned} a &= Y(e^{j\omega})\big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \\ b &= Y(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n](-1)^n \end{aligned}$$

$$Z(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) - a\delta(\omega) - b\delta(\omega - \pi)$$

We can construct a conjugate symmetric $X(e^{j\omega})$ from $Y(e^{j\omega})$ and $Z(e^{j\omega})$ as

$$X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) + Z^*(e^{-j\omega})$$

In the time domain, this is

$$x[n] = y[n] + z^*[n]$$

Or, since

$$z[n] = y[n] - \frac{a}{2\pi} - \frac{b(-1)^n}{2\pi}$$

$$x[n] = y[n] + y^*[n] - \frac{a}{2\pi} - \frac{b(-1)^n}{2\pi}$$

11.28. Since $H(z)$ corresponds to a real anticausal sequence $h[n]$, $F(z) = H(1/z)$ corresponds to a real, stable, causal sequence $f[n]$. We can apply the equation developed in the book for causal sequences to $F(z)$.

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F_R(v) \left(\frac{z+v}{z-v}\right) \frac{dv}{v}, \quad |z| \ge 1.$$

where $v = e^{j\theta}$ is the integration variable; i.e., the closed contour C is the unit circle of the v-plane. Now find $H(z)$

$$\begin{aligned} H(z) &= F(1/z) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C H_R(v^{-1}) \left(\frac{z^{-1}+v}{z^{-1}-v}\right) \frac{dv}{v}, \quad |z| \le 1 \end{aligned}$$

where $H_R(v) = \mathcal{R}e\{H(e^{j\theta})\}$.

11.29. (a) We have

$$\mathcal{H}\{x[n]\} = x[n] * h[n]$$

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x[n]\}\} = x[n] * h[n] * h[n]$$

We need to show that $h[n] * h[n] = -\delta[n]$. Alternatively, we need to show that $H(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = -1$, which is easily seen from

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

(b) In Parseval's theorem,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]g^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\omega})G^*(e^{j\omega})\,d\omega$$

Let $f[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$ and $g^*[n] = x[n]$. Then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\{x[n]\}x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega})\,d\omega$$

where

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j & 0 < \omega < \pi \\ j & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

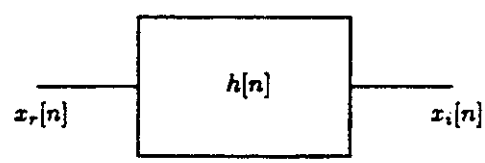
but the integral = 0 since the integrand is an odd function over the symmetric interval.

(c) Since $\mathcal{H}\{x[n]\} = x[n] * h[n]$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\{x[n] * y[n]\} &= (x[n] * y[n]) * h[n] \\ &= (x[n] * h[n]) * y[n] \\ &= x[n] * (y[n] * h[n]) \end{aligned}$$

by the commutativity and associativity of convolution.

11.30.



$h[n]$ is an ideal Hilbert Transformer:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

(a) In the frequency domain,

$$\begin{aligned} \Phi_{x_i x_i}(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|^2 \Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega}) \\ &= \Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Therefore, $\phi_{x_i x_i}[m] = \phi_{x_r x_r}[m]$.

(b) The cross-correlation between input and output is just the convolution of $\phi_{x_r x_r}[m]$ and $h[m]$,

$$\phi_{x_r x_i}[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{x_r x_r}[m-k]$$

The following shows that it is an odd function of m:

$$\begin{aligned}
\phi_{x_r x_i}[-m] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\phi_{x_r x_r}[-m-k] \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[-\ell]\phi_{x_r x_r}[-m+\ell] \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[-\ell]\phi_{x_r x_r}[m-\ell] \\
&= -\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h[\ell]\phi_{x_r x_r}[m-\ell] \\
&= -\phi_{x_r x_i}[m]
\end{aligned}$$

since $h[n] = -h[-n]$ and $\phi_{x_r x_r}[m] = \phi_{x_r x_r}[-m]$.

(c) Starting from the definition of the autocorrelation and using the linearity of the expectation operator we get

$$\begin{aligned}
\phi_{xx}[m] &= \mathcal{E}[x[n]x^*[n+m]] \\
&= \mathcal{E}[(x_r[n] + jx_i[n])(x_r[n+m] - jx_i[n+m])] \\
&= \phi_{x_r x_r}[m] + \phi_{x_i x_i}[m] + j(\phi_{x_i x_r}[m] - \phi_{x_r x_i}[m]) \\
&= 2\phi_{x_r x_r}[m] - 2j\phi_{x_r x_i}[m]
\end{aligned}$$

The last line was found using the results from parts (a) and (b).

(d) Taking the transform of both sides of the equality from part (c) we find

$$\begin{aligned}
P_{xx}(\omega) &= 2\Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega}) - 2j\Phi_{x_r x_i}(e^{j\omega}) \\
&= 2[\Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega}) - jH(e^{j\omega})\Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega})] \\
&= 2\Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega})[1 - jH(e^{j\omega})]
\end{aligned}$$

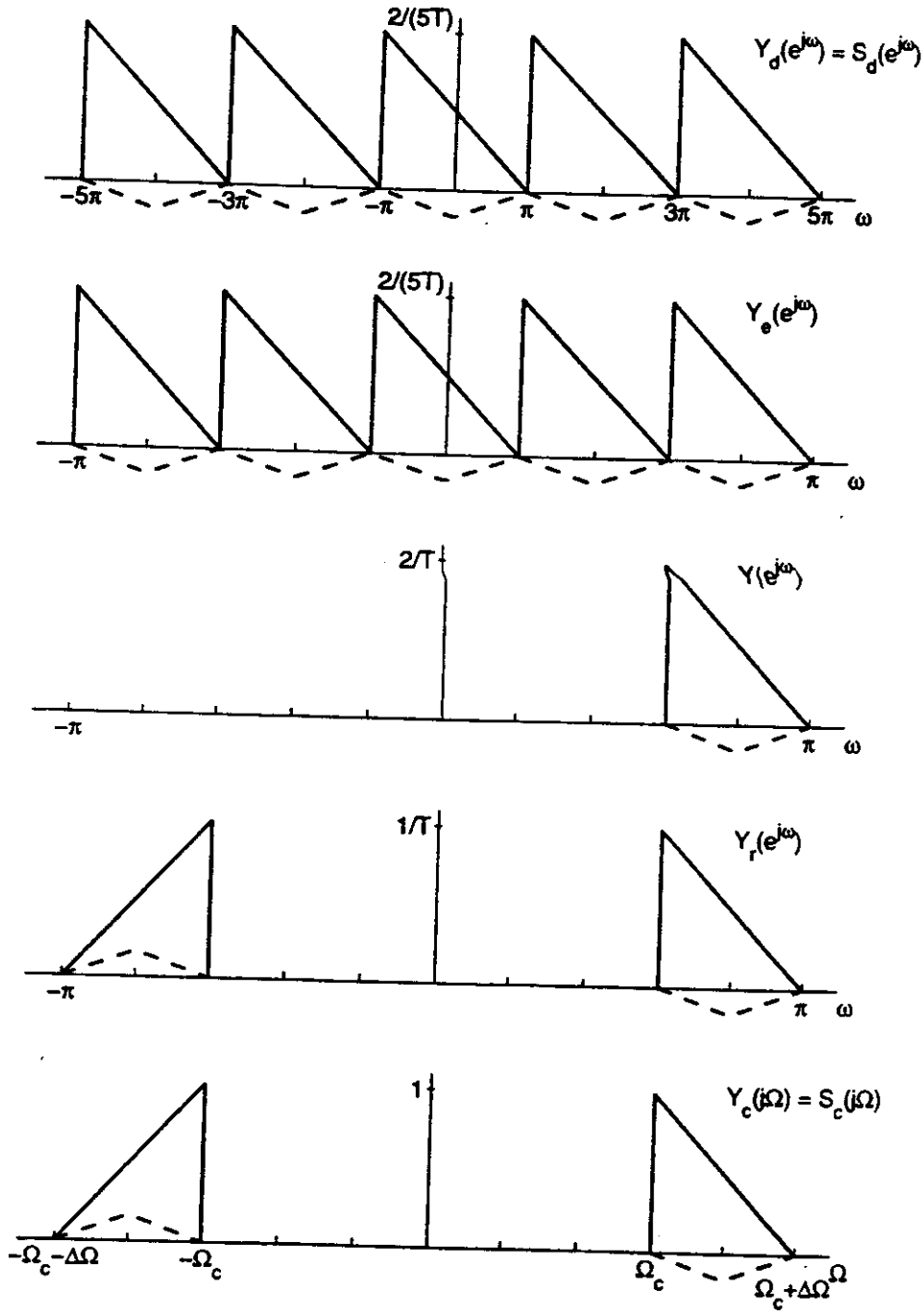
Since

$$1 - jH(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \pi \\ 2, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

we get

$$P_{xx}(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \pi \\ 4\Phi_{x_r x_r}(e^{j\omega}), & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$

11.31. (a) As shown in the figure below, the system reconstructs the original bandpass signal. As in the example, $T = \pi/(\Omega_c + \Delta\Omega)$ and $M = 5$.



(b) In the frequency domain

$$H_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 5, & \frac{3\pi}{5} < \omega < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Note that $H_i(e^{j\omega}) = 5G(e^{j(\omega-4\pi/5)})$, where

$$G(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{5} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g[n] = \frac{\sin(\pi n/5)}{\pi n}$$

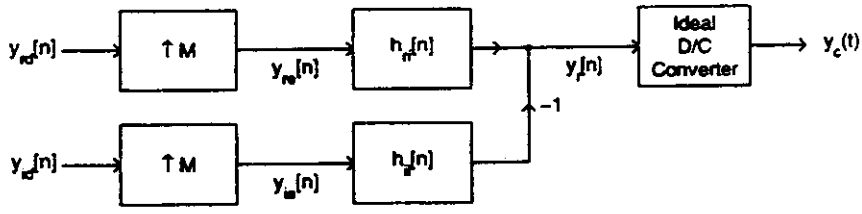
We can therefore write $h_i[n]$ as

$$\begin{aligned} h_i[n] &= 5\frac{\sin(\frac{\pi}{5}n)}{\pi n}\, e^{j\frac{4\pi}{5}n} \\ &= \underbrace{\frac{5\cos(\frac{4\pi}{5}n)\sin(\frac{\pi}{5}n)}{\pi n}}_{h_{ri}[n]} + j\underbrace{\frac{5\sin(\frac{4\pi}{5}n)\sin(\frac{\pi}{5}n)}{\pi n}}_{h_{ii}[n]} \end{aligned}$$

(c) Using the information from part (b) we find

$$\begin{aligned} y[n] &= y_e[n] * h_i[n] \\ &= (y_{re}[n] + jy_{ie}[n]) * (h_{ri}[n] + jh_{ii}[n]) \\ &= \underbrace{(y_{re}[n] * h_{ri}[n] - y_{ie}[n] * h_{ii}[n])}_{y_r[n]} + j(y_{ie}[n] * h_{ri}[n] + y_{re}[n] * h_{ii}[n]) \end{aligned}$$

We can now redraw the figure using only real operations:



(d) From comparing the top and bottom figures in the answer to part (a), it is evident that the desired complex system response is given by:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & -\pi < \omega < 0 \\ 0, & 0 \le \omega \le \pi \end{cases}$$

11.32. (a) We know

$$\hat{X}(z) = \log[X(z)]$$

When $X(z)$ has a zero or a pole, the term $\log[X(z)]$ goes to negative infinity or infinity respectively. Therefore, $\hat{X}(z)$ has a pole at these locations.

If $\hat{x}[n]$ is causal, $\hat{X}(z)$ has a region of convergence that is the outside of a circle corresponding to its largest pole. However, we require the region of convergence to include the unit circle, i.e., $\hat{X}(e^{j\omega})$ is defined. These two conditions imply that the poles of $\hat{X}(z)$ must be inside the unit circle.

But the pole locations for $\hat{X}(z)$ correspond to the pole and zero locations for $X(z)$. We conclude the poles and zeros of $X(z)$ must be inside the unit circle, i.e., $x[n]$ must be minimum phase.

(b) This argument is similar to the last, but in reverse. Start with the fact that $x[n]$ is minimum phase and must have its poles and zeros inside the unit circle. Then, as shown in part (a), the poles of $\hat{X}(z)$ must also be inside the unit circle. Because the region of convergence must include the unit circle, we know it lies outside the circle defined by its largest pole. Thus, $\hat{x}[n]$ must be causal.

(c)

$$\hat{X}(z) = \log\left[A\frac{\prod_{k=1}^{M_i}(1-a_kz^{-1})\prod_{k=1}^{M_o}(1-b_kz)}{\prod_{k=1}^{N_i}(1-c_kz^{-1})\prod_{k=1}^{N_o}(1-d_kz)}\right]$$

$$= \log(A) + \sum_{k=1}^{M_i} \log(1 - a_k z^{-1}) + \sum_{k=1}^{M_o} \log(1 - b_k z) - \sum_{k=1}^{N_i} \log(1 - c_k z^{-1}) - \sum_{k=1}^{N_o} \log(1 - d_k z)$$

(d) Using the power series expansion

$$\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

we find

$$\begin{aligned} \log(1 - \alpha z^{-1}) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} z^{-n}, \qquad |z| > |\alpha| \\ \log(1 - \beta z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} z^n, \qquad |z| > |\beta^{-1}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\beta^{-n}}{n} z^{-n}, \qquad |z| > |\beta^{-1}| \end{aligned}$$

From the equations above we can identify the following z-transform pairs

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha^n}{n} u[n-1] &\longleftrightarrow \log(1 - \alpha z^{-1}), \qquad |z| > |\alpha| \\ \frac{\beta^{-n}}{n} u[-n-1] &\longleftrightarrow \log(1 - \beta z), \qquad |z| > |\beta^{-1}| \end{aligned}$$

We can now take the inverse transform of $\hat{X}(z)$.

$$\hat{x}[n] = \begin{cases} \log(A), & n = 0 \\ -\sum_{k=1}^{M_i} \frac{a_k^n}{n} + \sum_{k=1}^{N_i} \frac{c_k^n}{n}, & n > 0 \\ \sum_{k=1}^{M_o} \frac{b_k^{-n}}{n} - \sum_{k=1}^{N_o} \frac{d_k^{-n}}{n}, & n < 0 \end{cases}$$

(e) From the results of part (d), we see if $\hat{x}[n]$ is causal, all the b_k and d_k terms must be zero. But the expression for $X(z)$ shows these terms correspond to the zeros and poles outside the unit circle. We conclude that all the zeros and poles of $X(z)$ are inside the unit circle, i.e., $x[n]$ is a minimum phase sequence.